یک آزمون نیکویی برازش نمایی برای داده‌های سانسور شده تصادفی با استفاده از واگرایی L2

یاسر هاشم‌زائی[۱]، سیدمهدی امیرجهانشاهی[۲]، محمدحسین دهقان[۳]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۱۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۲۳

چکیده:
در این مقاله آزمونی مبتنی بر واگرایی L2 جهت سنجش نمایی بودن توزیع داده‌های سانسور شده تصادفی معرفی‌شده است. توان آزمون پیشنهادی به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو با سایر آزمون‌های رقیب شامل آزمون‌های کولموگروف-اسمیرنوف، اندرسون-دارلینگ و کرامر فون-میزس که مبتنی بر تابع توزیع تجربی هستند و آزمون‌های مبتنی بر معیار اطلاع مورد مقایسه قرارگرفته است. نتایج مطالعات شبیه‌سازی این پژوهش نشان داد که آزمون پیشنهادی در این مطالعه، عموماً عملکرد بهتری نسبت به سایر آزمون‌های رقیب دارد.
واژه‌های کلیدی: آزمون نیکویی برازش، سانسور تصادفی، سنجش نمایی بودن، آزمون واگرایی L2.

۱ مقدمه

سنجش میزان برازندگی یک توزیع بر مجموعه‌ای از داده‌ها، آزمون نیکویی برازش[۴] نام دارد که یک مسئله‌ی بسیار مهم است.
در بسیاری از پژوهش‌ها در علوم مختلف توزیع داده‌های مورد پژوهش برای ما حائز اهمیت بوده و معمولاً نامعلوم است. به همین جهت محققین بسیاری به ارائه روش‌های بررسی توزیع‌ها پرداخته‌اند.
در بررسی داده‌های طول عمر در بسیاری از تحقیقات به دلایل گوناگون غالباً پژوهشگران با نمونه‌های ناکامل مواجه می‌شوند. به‌عنوان‌مثال در بازه‌ی تحقیق تعدادی از آزمودنی‌ها در زمان‌های نامشخص سانسور می‌شوند که در این حالت پژوهشگر با داده‌های سانسور شده[۵] مواجه می‌شود. داده‌های سانسور شده به داده‌هایی اشاره دارند که بخشی از اطلاعات آن‌ها به دلیل دلایل مختلف قابل‌مشاهده نیست یا ازدست‌رفته است. این نوع داده‌ها معمولاً در حوزه‌های آماری و تحلیل داده‌ها رخ می‌دهند، به‌ویژه در زمینه‌هایی مانند پزشکی، اقتصادی و اجتماعی شاهد بروز چنین داده‌هایی هستیم [۱].
پژوهشگران برحسب شرایط داده‌ها روش‌هایی از نیکویی برازش برای داده‌های سانسور شده ارائه می‌کنند. فرضیه نمایی بودن در بسیاری از تحلیل‌های آماری به‌ویژه در آزمون طول عمر مورداستفاده قرار می‌گیرد، ازاین‌رو آزمون‌های بسیاری نیز در این زمینه معرفی‌شده‌اند. در این مقاله آزمون نیکویی برازش واگرایی L2، جهت سنجش نمایی بودن توزیع داده‌های سانسور شده تصادفی معرفی‌شده است و به کمک شبیه‌سازی با آزمون‌های رقیب مورد مقایسه قرارگرفته است.

۲ آزمون‌های نیکویی برازش برای داده‌های سانسور شده تصادفی

آزمون نیکویی برازش یک روش آماری است که برای ارزیابی میزان برازش یک توزیع خاص به داده‌های موردنظر بکار می‌رود.
بسته به نوع و میزان سانسور، توزیع داده‌ها و سؤال تحقیق، روش‌ها و چالش‌های مختلفی برای انجام آزمون‌های نیکویی برازش برای داده‌های سانسور شده تصادفی وجود دارد. برای داده‌هایی که تصادفی سانسور شده‌اند، چالش این است که برخی از مقادیر داده‌ها به‌طورکامل مشاهده نمی‌شوند، اما فقط تا حدی شناخته‌شده‌اند یا در یک بازه زمانی مشخص هستند.

[۱] دبیر ریاضی آموزش‌وپرورش زاهدان
[۲] عضو هیئت‌علمی دانشگاه سیستان و بلوچستان (نویسنده مسئول: mjahan@math.usb.ac.ir)
[۳] عضو هیئت‌علمی دانشگاه سیستان و بلوچستان

[4] Goodness of Fit Test
[5] Censored Data

بنابراین، آزمون‌های استاندارد نیکویی برازش، مانند آزمون کولموگروف-اسمیرنوف یا آزمون مجذور کای، ممکن است برای داده‌های سانسور شده قابل‌اجرا یا قابل‌اعتماد نباشد. به همین جهت برخی از روش‌های متداول مبتنی بر اصلاح آزمون‌های استاندارد برای داده‌های سانسور معرفی شدند که در آن‌ها از شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تولید نمونه‌هایی از توزیع هدف و سپس سانسور آن استفاده می‌شود [۵].

۳ سانسور تصادفی

سانسور تصادفی[۶] نوع دیگری از راست سانسور است، این سانسور در زمانی اتفاق می‌افتد که مطالعه بعد از مدت C سال پیگیری پایان می‌پذیرد، اما آزمودنی‌ها زمان سانسور یکسانی ندارند (آزمودنی‌ها در زمان‌های متفاوت (تصادفی) وارد آزمایش می‌شوند). غالباً با این شکل از سانسور در آزمایش‌های کلینیکی پزشکی و مطالعه طول عمر حیوانات (که زمان ورود و خروج آزمودنی‌ها به تحقیق، تصادفی است) روبرو می‌شویم.

در عمل ما اغلب در شرایطی قرار داریم که تعدادی آزمایش به‌صورت تصادفی حذف می‌شود. برای نمونه در آزمایش‌های بالینی یک بیمار ممکن است قبل از اتمام درمان با اخطار قبلی از رده خارج و یا بمیرد. به‌طور مشابه، در مهندسی قابلیت اطمینان[۷]، ممکن است لازم باشد یک آیتم از یک آزمایش قبل از خرابی کامل آن، به علت شکستن یا صرفه‌جویی در وقت و پول، از آزمایش خارج شود. هنگامی‌که اشیاء به‌طور تصادفی در زمان‌های مختلف از آزمایش حذف می‌شوند، سانسور تصادفی رخ می‌دهد [۲۲].

تابع بقا سانسور تصادفی توسط گیلبرت[۸] (۱۹۶۲) معرفی شد [۱۴]. این نوع سانسور قبلاً توسط بریسلو و کراولی[۹] (۱۹۷۴) [۶]، کوزیول و گرین[۱۰] (۱۹۷۶) [۲۱]، موردبررسی قرارگرفته بود. بعدها، با داده‌های تصادفی سانسور شده گیتانی و الواحدی[۱۱] (۲۰۰۲) [۱۳]، توزیع‌های مختلفی نظیر نمایی، رایلی و ... را تجزیه‌وتحلیل کردند. هم‌چنین کیم[۱۲] (۲۰۱۲) [۱۹] با استفاده از آزمون نیکویی برازش داده‌های تصادفی سانسور شده را موردبحث قرار داد. دنیش و اسلم[۱۳] (۲۰۱۳, ۲۰۱۴) [۸، ۹] از نتایج بیزی برای داده‌ها سانسور تصادفی با توزیع وایبول استفاده کردند. کریشنا[۱۴] و همکاران (۲۰۱۵) [۲۳] پارامترهای توزیع ماکسول[۱۵] را تحت سانسور تصادفی برآورد کردند. علاوه بر این کریشنا و همکاران (۲۰۱۸) [۲۲] استنتاج بیزی در توزیع نمایی دو پارامتری با داده‌های سانسور شده تصادفی را موردمطالعه قرار دادند. امیدی و همکاران (۲۰۱۹) [۲۸]، آزمون نیکویی برازشی بر اساس معیار اطلاع برای داده‌های سانسور شده تصادفی معرفی کردند. کومار و کومار[۱۶] (۲۰۲۰) [۲۴] پارامترهای توزیع پارتو را تحت سانسور تصادفی برآورد نمودند. حسب الله[۱۷] و همکاران (۲۰۲۳) [۱۵]، توزیع نمایی را تحت سانسور تصادفی برای داده‌های کلینیکی موردبررسی قرار دادند.

در داده‌های طول عمر، ممکن است برخی از رویدادها در زمان تحقیق مشاهده نشده باشند و یا زمان رخداد آن‌ها به‌صورت دقیق مشخص نباشد. در این صورت، از سانسور تصادفی برای مدل‌سازی این داده‌ها استفاده می‌شود. در سانسور تصادفی، مشاهداتی وجود دارند که زمان رویداد آن‌ها به‌صورت دقیق مشخص نشده است؛ به‌عبارت‌دیگر، در داده‌های سانسور شده تصادفی، برخی از مشاهدات به دلیل عدم دسترسی به اطلاعات کامل، به‌صورت ناقص یا سانسور شده هستند. در تحلیل داده‌های سانسور شده تصادفی، از روش‌های مختلفی مانند روش‌های ناپارامتری، روش‌های پارامتری استفاده می‌شود [۲۸].

۱.۰.۳ تابع درستنمایی برای داده‌های سانسور راست تصادفی

فرض کنید C_i یک متغیر تصادفی و $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع F باشند. سانسور تصادفی بجای مشاهدات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، ما مشاهدات را به‌صورت $Y_i = \min(X_i, C_i)$

[6] Random Censoring
[7] Reliability
[8] Gilbert
[9] Breslow and Crowley
[10] Koziol and Green
[11] Ghitany and Al-Awadhi
[12] Kim
[13] Danish and Aslam
[14] Krishna
[15] Maxwell
[16] Kumarand Kumar
[17] Hasaballah

در نظر می‌گیریم؛ که در آن:

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & X_i \le C_i, \\ C_i, & X_i > C_i, \end{cases} \qquad \delta_i = \begin{cases} ۱, & X_i \le C_i, \\ ۰, & X_i > C_i. \end{cases} \quad (۱)$$

دیده می‌شوند [۲]. تابع درستنمایی[18] برای داده‌های سانسور تصادفی به شکل زیر قابل‌تعریف است:

$$L(\beta) = \prod_{i=۱}^{n} f_\beta^{\delta_i}(t_i)\, S^{۱-\delta_i}(t_i)$$

که در آن $S(t)$ تابع بقا و $T_i = (Y_i, \delta_i)$ متغیر تصادفی راست سانسور تصادفی و $\delta_i = I(X_i \le C_i)$ بوده، Y_i زمان بقا و C_i زمان سانسور فرد iام و β بیانگر پارامتر سانسور است.

اگر $t_۱, t_۲, \ldots, t_r$ زمان دقیق شکست واحدهای موردمطالعه و $n-r$ سانسور تصادفی داشته باشیم، آنگاه [۲۰]:

$$L(\beta) = \prod_{i=۱}^{r} f_\beta(t_i) \prod_{i=r+۱}^{n} S(C_i)$$

۱.۳ آزمون نمایی بودن جامعه

آزمون‌های نیکویی برازش متعددی جهت سنجش نمایی بودن توزیع داده‌ها معرفی‌شده‌اند، از جمله این آزمون‌ها می‌توان به آزمون‌های لی لی فورس[19]، سوست[20] (۱۹۶۹) [۳۰]، فینکلستین و شفر[21] (۱۹۷۱) [۱۱]، کولموگروف-اسمیرنف، کرامر-فون‌میزس، کویی‌پر، واتسون[22]، اندرسون-دارلینگ اشاره کرد [۴].

از جمله آزمون‌های نیکویی برازش جهت سنجش نمایی بودن داده‌های سانسور شده تصادفی می‌توان به آزمون‌های مبتنی بر خانواده تابع توزیع تجربی (EDF) توسط کیم (۲۰۱۲) [۱۹] و آزمون‌های مبتنی بر معیار اطلاع توسط امیدی و همکاران (۲۰۱۹) [۲۸] اشاره کرد.

فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی مستقل و هم‌توزیع و نامنفی با تابع چگالی f و تابع توزیع F و میانگین $E(X) = \theta$ باشد. هدف، انجام آزمون فرضیه زیر است:

$$\begin{cases} H_۰ : f(x) = f_۰(x) \\ H_۱ : f(x) \neq f_۰(x) \end{cases}$$

در آزمون فرضیه بالا $f_۰(x) = \frac{۱}{\theta}\exp(\frac{-x}{\theta})$ تابع چگالی نمایی است.

۲.۳ برآورد پارامتر توزیع نمایی تحت داده‌های سانسور تصادفی

برآورد پارامتر θ در توزیع نمایی به روش ماکسیمم درستنمایی تحت سانسور تصادفی به‌صورت زیر است:

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{d} x_i + \sum_{i=۱}^{n-d} C_i}{d} \quad (۲)$$

که در آن C_i زمان سانسور آزمودنی iام و d تعداد مشاهداتی است که قبل از زمان C_i دچار شکست شده‌اند.

۴ آزمون پیشنهادی

۱.۴ روش فاصله L2

واگرایی L2 که به‌عنوان فاصله اقلیدسی مجذور یا میانگین مجذور خطا نیز شناخته می‌شود، معیاری برای عدم تشابه بین دو توزیع احتمال است. معمولاً در زمینه‌های مختلف از جمله آمار، یادگیری ماشین و نظریه اطلاع استفاده می‌شود. در این زمینه، واگرایی L2 تفاوت بین دو تابع چگالی احتمال را محاسبه می‌کند. به‌عنوان‌مثال، در برآورد آماری، می‌توان از آن برای اندازه‌گیری اختلاف بین توزیع برآورد شده و توزیع واقعی استفاده کرد [۱۷].

واگرایی L2 یکی از معیارهای فاصله بین توزیع‌های احتمالی است که رابطه نزدیکی با نظریه اطلاع دارد. این واگرایی با مربع فاصله اقلیدسی بین توابع چگالی احتمال اندازه‌گیری می‌شود. از طرفی، آنتروپی شانون میزان عدم قطعیت در یک توزیع را نشان می‌دهد و دیورژانس کولبک-لیبلر (KL)[23] به‌عنوان یک سنجه عدم تقارن، فاصله بین دو توزیع را بر اساس آنتروپی نسبی ارزیابی می‌کند.

ارتباط میان واگرایی L2 و دیورژانس KL در تقریب‌های مرتبه دوم دیده می‌شود، جایی که برای توزیع‌های نزدیک به هم، KL را می‌توان با استفاده از واگرایی L2 تقریب زد. همچنین، در تحلیل توزیع‌های احتمالی و یادگیری ماشین، واگرایی L2 و KL هر دو در تنظیم مدل‌ها و تخمین‌های آماری نقش دارند. در نظریه اطلاع، این معیارها ابزارهایی برای اندازه‌گیری شباهت یا اختلاف بین توزیع‌های مختلف و ارزیابی کارایی تخمین‌گرها محسوب می‌شوند [۳۵].

[18] Likelihood Function
[19] Lilliefors
[20] Van-Soest
[21] Finkelstein and Schafer
[22] Watson
[23] Kullback-Leibler

یکی از کاربردهای رایج واگرایی L2 در پردازش تصویر و بینایی کامپیوتری است. می‌توان از آن برای اندازه‌گیری تفاوت بین دو تصویر با در نظر گرفتن مقادیر پیکسل به‌عنوان معیار عدم تشابه بصری استفاده نمود [۷].

مقدار کوچک واگرایی L2 نشان‌دهنده شباهت بیشتر بین توزیع‌ها یا نقاط داده است، درحالی‌که مقدار بزرگ واگرایی L2 نشان‌دهنده عدم تشابه بیشتر است.
اگر دو مجموعه توزیع احتمال P و Q در فضای متناهی با تکیه‌گاه مشترک، دارای احتمالات p_i و q_i مطابق رابطه (۳) باشند.

$$\mathrm{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \quad \text{و} \quad \mathrm{Q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} \qquad (۳)$$

با توجه به مثبت بودن مقادیر احتمالات روابط زیر را داریم:

$$p_i \geq 0\ ,\ \ q_i \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{n} q_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (۴)$$

فاصله L2 طبق رابطه (۳) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{L2}(p,q) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2 \qquad (۵)$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته، این اندازه به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{L2}(p,q) = \int (p(x) - q(x))^2 \,\mathrm{d}x \qquad (۶)$$

اندازه فاصله L2 همیشه بین مقادیر صفر و یک است. اگر توزیع احتمالات بین دو توزیع یکسان باشند، مقدار فاصله L2 صفر می‌گردد. زمانی که دو توزیع احتمال کاملاً متفاوت باشند، مقدار فاصله L2 برابر یک خواهد بود. از ویژگی‌های واگرایی L2 می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. هرگاه $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ باشد این معیار کمترین مقدار یعنی صفر را می‌گیرد.

$$\mathrm{L2}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = 0 \iff \mathrm{P} = \mathrm{Q}$$

۲. این معیار همیشه نامنفی است، فقط زمانی مقدار مثبت می‌گیرد که P و Q مخالف هم باشند:

$$\mathrm{L2}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) > 0 \iff \mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$$

۳. متقارن است یعنی:

$$\mathrm{L2}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \mathrm{L2}(\mathrm{P},\mathrm{Q})$$

۴. ویژگی نابرابری مثلثی را دارد:

$$\mathrm{L2}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) + \mathrm{L2}(\mathrm{Q},\mathrm{R}) \geq \mathrm{L2}(\mathrm{P},\mathrm{R})$$

در ادامه به برآورد آماره L2 به روش واسیچک جهت سنجش نمایی بودن برای داده‌های کامل پرداخته‌شده است.

۲.۴ آماره L2 تحت سانسور تصادفی برای سنجش نمایی

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تحت سانسور تصادفی باشند. هدف انجام آزمون فرضیه زیر است:

$$\begin{cases} H_0 : f(x) = f_0(x) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{1}{\theta}x} & ,x > 0\ ,\theta > 0 \\ H_1 : f(x) \neq f_0(x) \end{cases}$$

آماره L2 تحت سانسور تصادفی به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\mathrm{L2}(f, f_0, C_i) = \int_{-\infty}^{C_i} [f(x) - f_0(x)]^2\, dx, \qquad C_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

که در آن C_i زمان سانسور مشاهده iام است.

۳.۴ برآوردگر آماره L2 به روش واسیچک تحت سانسور تصادفی

حال جهت برآورد آماره ذکرشده در بالا جهت سنجش نمایی بودن از برآوردگر واسیچک به‌واسطه‌ی سادگی در محاسبات و دقت بالای آن، استفاده خواهد شد.

$$\mathrm{L2}_V^C(f, f_0, C_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{d} \frac{d}{2m}\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right) * \left[\left(\frac{d}{2m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right)^{-1} - \frac{1}{\hat{\theta}} e^{-\frac{1}{\hat{\theta}}x_{(i)}}\right]^2$$

که در آن $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ تحت سانسور تصادفی است که از رابطه‌ی (۲) به‌دست‌آمده است. علاوه بر این m یک مقدار صحیح مثبت کمتر از $\frac{n}{2}$ است. پژوهش‌های متعددی جهت انتخاب مقدار بهینه برای m صورت گرفته است. ویکزورکوفسکی[24] و گرزی‌گورزسکی[25] [۳۳] اندازه مقدار بهینه را از رابطه $m = [\sqrt{n} + 0.5]$ به دست آورده‌اند [۳].

[24] Wieczorkowski
[25] Grzegorzewski

۵ مقادیر بحرانی آماره $L2_V^C$

تعیین توزیع دقیق آماره $L2_V^C$ تحت فرضیه صفر به‌صورت تحلیلی قابل‌محاسبه نیست. برای تعیین نقاط بحرانی چندک $(\alpha - ۱)$ام آماره $L2_V^C$ از شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده‌شده است.
برای به دست آوردن چندک توزیع تحت فرض صفر $L2_V^C$، تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه با اندازه n از توزیع نمایی استاندارد برای مقادیر مختلف n تولیدشده است. برای هر نمونه مقدار آماره $L2_V^C$ محاسبه‌شده و سپس مقادیر تولیدشده برای تعیین مقادیر بحرانی در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ و $\alpha = ۰/۱$ محاسبه گردید؛ که در جدول ۱ ارائه‌شده است. $H_۰$ را در سطح معنی‌داری α رد می‌کنیم و $H_۱$ را می‌پذیریم هرگاه $L2_{V,n}^C \geq L2_{V,n,۱-\alpha}^C$ باشد، که در آن $L2_{V,n,۱-\alpha}^C$ صدک $(\alpha - ۱)$ام از آماره $L2_{V,n}^C$ تحت فرضیه‌ی $H_۰$ می‌باشد.

۶ معرفی آزمون‌های رقیب

در این بخش، آماره‌های آزمون‌های رقیب نمایی بودن تحت سانسور تصادفی معرفی‌شده‌اند:

۱. آماره کولموگروف - اسمیرنوف (۱۹۹۳)

$$\widehat{D}_n = \sup_{۰<u<۱} |\widehat{F}_n(\widehat{U}_i) - \widehat{U}_i| = \max(D_n^+, D_n^-)$$

۲. آماره کرامر فون - میزس

$$\widehat{W}_n^۲ = \sum_{i=۱}^{n} \widehat{F}_n(\widehat{U}_i)(\widehat{U}_{i+۱} - \widehat{U}_i)\{\widehat{F}_n(\widehat{U}_i) - (\widehat{U}_{i+۱} - \widehat{U}_i)\} - n/۳$$

۳. آماره اندرسون - دارلینگ (۱۹۵۴)

$$\begin{aligned}\widehat{A}_n^۲ =& n\sum_{i=۱}^{n-۱} \widehat{F}_n(\widehat{U}_i))^۲ \Big(- \ln(۱ - \widehat{U}_{i+۱}) + \ln(\widehat{U}_{i+۱}) + \ln(۱ - \widehat{U}_i) - \ln(\widehat{U}_i)\Big) \\ & - ۲n\sum_{i=۱}^{n-۱} \widehat{F}_n(\widehat{U}_i)\Big(- \ln(۱ - \widehat{U}_{i+۱}) + \ln(۱ - \widehat{U}_i)\Big) \\ & - n\ln(۱ - \widehat{U}_n) - n\ln(\widehat{U}_n) - n.\end{aligned}$$

۴. آماره امیدی و همکاران (۲۰۱۹) [۲۸]

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{n۱}^* =& \sqrt{n}\sum_{i=۱}^{n+۱}(\widehat{U}_i - \widehat{U}_{i-۱})(۱ - \widehat{F}_n(\widehat{U}_i))\ln(۱ - \widehat{F}_n(\widehat{U}_i)) \\ & - \sqrt{n}\sum_{i=۱}^{n+۱}(۱ - \widehat{F}_n(\widehat{U}_i))(\widehat{U}_i\ln\widehat{U}_i - \widehat{U}_i - \widehat{U}_{i-۱}\ln(\widehat{U}_{i-۱}) + \widehat{U}_{i-۱})\end{aligned}$$

۵. آماره امیدی و همکاران (۲۰۱۹) [۲۸]

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{n۲}^* =& \sqrt{n}\sum_{i=۱}^{n+۱}(\widehat{U}_i - \widehat{U}_{i-۱})(\widehat{F}_n(\widehat{U}_i))\ln(\widehat{F}_n(\widehat{U}_i)) \\ & - \sqrt{n}\sum_{i=۱}^{n+۱}(\widehat{F}_n(\widehat{U}_i))(\widehat{U}_i\ln\widehat{U}_i - \widehat{U}_i - \widehat{U}_{i-۱}\ln(\widehat{U}_{i-۱}) + \widehat{U}_{i-۱})\end{aligned}$$

که در آماره‌های فوق $\widehat{U}_i = \widehat{F}_۰(Y_i) = \widehat{F}_n(.)$ برآوردگر کاپلان-مایر است.

۷ مقایسه توان آزمون‌ها

با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو توان آماره‌ی آزمون $\widehat{L2_V^C}$ با آماره‌های $\widehat{T}_{n۱}^*$ و $\widehat{T}_{n۲}^*$ که مبتنی بر معیار اطلاع و آماره‌های مبتنی بر تابع توزیع تجربی (EDF) مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.
جهت این ارزیابی با استفاده از شبیه‌سازی مونت-کارلو از هر جایگزین رقیب ۱۰۰۰۰ نمونه با حجم $n = ۲۰, ۳۰, ۵۰$ با نسبت سانسور ۴۰, ۲۰ و ۵۰ درصد، در سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$ و $\alpha = ۰/۱$ شبیه‌سازی‌شده است و سپس توان هر یک از آزمون‌ها از نسبت تعداد دفعاتی که آماره آزمون از مقادیر بحرانی آن بیشتر است به تعداد کل تکرارها، برآورد خواهد شد. هم‌چنین به بررسی عملکرد آزمون‌های معرفی‌شده جهت سنجش نمایی بودن با تعدادی توزیع جایگزین که توسط کوزیول و گرین (۱۹۷۶) پیشنهادشده است، پرداخته خواهد شد؛ که به شرح زیر در نظر گرفته‌شده‌اند:

- توزیع نمایی با پارامتر ۱
- توزیع وایبول $W(\theta)$، با پارامتر مقیاس ۱ و پارامتر شکل $\theta = ۰/۵, ۲$
- توزیع گاما $G(\theta)$، با پارامتر مقیاس ۱ و پارامتر شکل $\theta = ۰/۵, ۲$
- توزیع لگ نرمال با تابع چگالی، $\frac{۱}{\theta x\sqrt{۲\pi}}\exp\{-(\log x)^۲/(۲\theta^۲)\}, \quad \theta = ۱$
- توزیع یکنواخت استاندارد

جدول ۱: مقادیر بحرانی آماره $L2_V^C$

n	نرخ سانسور	$\alpha = ۰/۰۵$	$\alpha = ۰/۱$
۱۰	۲۰	۱۹/۶۸	۱۵/۸۸
	۴۰	۲۸/۳۶	۲۳/۱۶
	۵۰	۳۴/۵۷	۲۸/۴۵
۲۰	۲۰	۲۸/۰۴	۲۴/۵۱
	۴۰	۴۰/۲۱	۳۵/۰۸
	۵۰	۵۰/۰۹	۴۳/۵۵
۳۰	۲۰	۳۶/۰۷	۳۲/۳۸
	۴۰	۵۱/۷۲	۴۶/۳۹
	۵۰	۶۳/۴۶	۵۷/۴۹
۵۰	۲۰	۵۲/۲۲	۴۸/۰۸
	۴۰	۷۴/۶۰	۶۸/۲۵
	۵۰	۹۲/۴۲	۸۴/۸۵
۱۰۰	۲۰	۹۰/۶۵	۸۶/۰۹
	۴۰	۱۲۹/۳۶	۱۲۱/۹۸
	۵۰	۱۶۰/۰۳	۱۵۲/۲۱

جدول ۲: مقایسه توان آماره‌های $\widehat{D}_n$، $\widehat{W_n^2}$، $\widehat{A_n^2}$، $\widehat{T_{n1}^*}$، $\widehat{T_{n2}^*}$، $\widehat{L2_V^C}$ در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ با حجم نمونه $n = ۲۰$

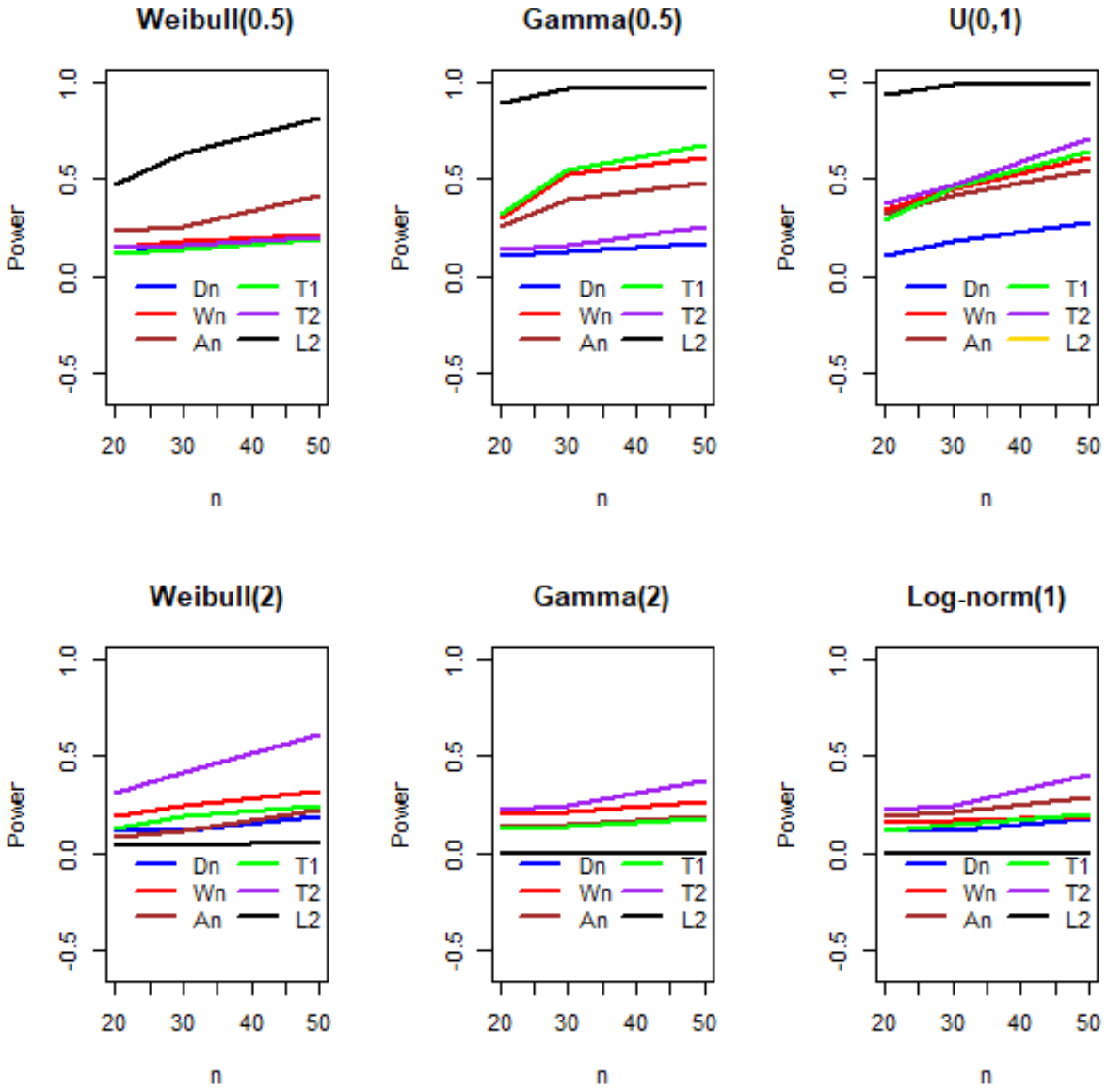
توزیع رقیب	نرخ سانسور	$\widehat{D}_n$	$\widehat{W_n^2}$	$\widehat{A_n^2}$	$\widehat{T_{n1}^*}$	$\widehat{T_{n2}^*}$	$\widehat{L2_V^C}$
$exponential(۱)$	۲۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۳
	۴۰	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲
	۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱
$Weibull(۰/۵)$	۲۰	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۳۵	۰/۱۳	۰/۲۰	۰/۴۸
	۴۰	۰/۱۲	۰/۱۵	۰/۲۳	۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۴۷
	۵۰	۰/۰۹	۰/۱۱	۰/۲۰	۰/۰۸	۰/۱۳	۰/۴۶
$Gamma(۰/۵)$	۲۰	۰/۱۲	۰/۳۷	۰/۳۵	۰/۳۹	۰/۱۸	۰/۹۲
	۴۰	۰/۱۰	۰/۳۰	۰/۲۶	۰/۳۲	۰/۱۴	۰/۹۱
	۵۰	۰/۰۹	۰/۲۵	۰/۲۰	۰/۲۸	۰/۱۳	۰/۹۰
$U(۰,۱)$	۲۰	۰/۱۸	۰/۳۹	۰/۳۶	۰/۳۵	۰/۴۲	۰/۹۹
	۴۰	۰/۱۰	۰/۳۴	۰/۳۲	۰/۲۹	۰/۳۷	۰/۹۴
	۵۰	۰/۰۸	۰/۲۵	۰/۲۲	۰/۲۳	۰/۳۱	۰/۸۹
$Weibull(۲)$	۲۰	۰/۱۳	۰/۲۶	۰/۰۹	۰/۱۷	۰/۳۵	۰/۰۶
	۴۰	۰/۱۱	۰/۱۹	۰/۰۸	۰/۱۳	۰/۳۱	۰/۰۵
	۵۰	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۰۷	۰/۱۱	۰/۲۸	۰/۰۴
$Gamma(۲)$	۲۰	۰/۱۴	۰/۲۳	۰/۱۷	۰/۱۵	۰/۲۹	۰/۰۰۵
	۴۰	۰/۱۳	۰/۲۰	۰/۱۴	۰/۱۳	۰/۲۲	۰/۰۰۴
	۵۰	۰/۱۰	۰/۱۴	۰/۱۱	۰/۱۰	۰/۱۷	۰/۰۰۳
$Log-norm(۱)$	۲۰	۰/۱۲	۰/۱۷	۰/۲۰	۰/۱۶	۰/۲۹	۰/۰۰۴
	۴۰	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۱۹	۰/۱۲	۰/۲۲	۰/۰۰۳
	۵۰	۰/۰۹	۰/۱۴	۰/۱۴	۰/۰۹	۰/۱۹	۰/۰۰۲

جدول ۳: مقایسه توان آماره‌های $\widehat{D}_n$، $\widehat{W_n^2}$، $\widehat{A_n^2}$، $\widehat{T_{n1}^*}$، $\widehat{T_{n2}^*}$، $\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$ در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ با حجم نمونه $n = ۳۰$

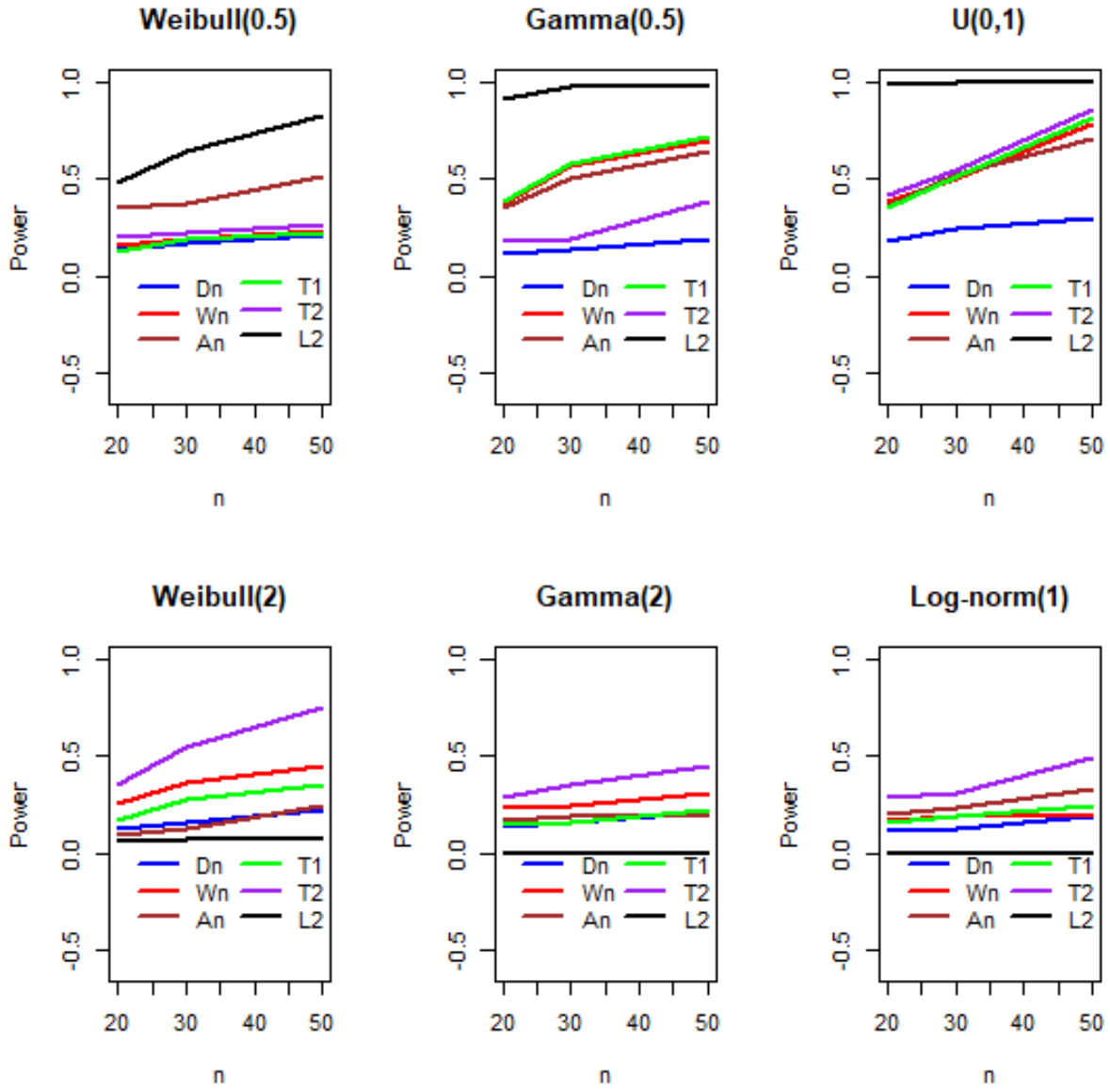
توزیع رقیب	نرخ سانسور	$\widehat{D}_n$	$\widehat{W_n^2}$	$\widehat{A_n^2}$	$\widehat{T_{n1}^*}$	$\widehat{T_{n2}^*}$	$\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$
$exponential(۱)$	۲۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸
	۴۰	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰
	۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱
$Weibull(۰/۵)$	۲۰	۰/۱۷	۰/۱۹	۰/۳۸	۰/۱۹	۰/۲۲	۰/۶۵
	۴۰	۰/۱۵	۰/۱۸	۰/۲۶	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۶۴
	۵۰	۰/۱۲	۰/۱۵	۰/۲۱	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۶۳
$Gamma(۰/۵)$	۲۰	۰/۱۴	۰/۵۷	۰/۵۱	۰/۵۸	۰/۱۹	۰/۹۹
	۴۰	۰/۱۳	۰/۵۳	۰/۴۰	۰/۵۵	۰/۱۶	۰/۹۸
	۵۰	۰/۱۱	۰/۴۲	۰/۲۸	۰/۴۵	۰/۱۵	۰/۹۷
$U(۰,۱)$	۲۰	۰/۲۵	۰/۵۱	۰/۵۳	۰/۵۲	۰/۵۵	۱
	۴۰	۰/۱۸	۰/۴۵	۰/۴۲	۰/۴۶	۰/۴۷	۰/۹۹
	۵۰	۰/۱۴	۰/۳۴	۰/۲۸	۰/۳۸	۰/۳۹	۰/۹۸
$Weibull(۲)$	۲۰	۰/۱۶	۰/۳۶	۰/۱۳	۰/۲۸	۰/۵۵	۰/۰۷
	۴۰	۰/۱۲	۰/۲۴	۰/۱۲	۰/۱۹	۰/۴۲	۰/۰۴
	۵۰	۰/۱۱	۰/۱۷	۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۳۵	۰/۰۳
$Gamma(۲)$	۲۰	۰/۱۶	۰/۲۴	۰/۱۹	۰/۱۶	۰/۳۵	۰/۰۰۲
	۴۰	۰/۱۵	۰/۲۱	۰/۱۵	۰/۱۴	۰/۲۵	۰/۰۰۱
	۵۰	۰/۱۲	۰/۱۶	۰/۱۳	۰/۱۲	۰/۱۹	۰/۰۰۱
$Log-norm(۱)$	۲۰	۰/۱۳	۰/۱۹	۰/۲۳	۰/۱۹	۰/۳۱	۰/۰۰۲
	۴۰	۰/۱۲	۰/۱۷	۰/۲۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۰۰۱
	۵۰	۰/۱۱	۰/۱۶	۰/۲۰	۰/۱۴	۰/۲۲	۰/۰۰۱

جدول ۴: مقایسه توان آماره‌های $\widehat{D}_n$، $\widehat{W_n^2}$، $\widehat{A_n^2}$، $\widehat{T_{n1}^*}$، $\widehat{T_{n2}^*}$، $\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$ در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ با حجم نمونه $n = ۵۰$

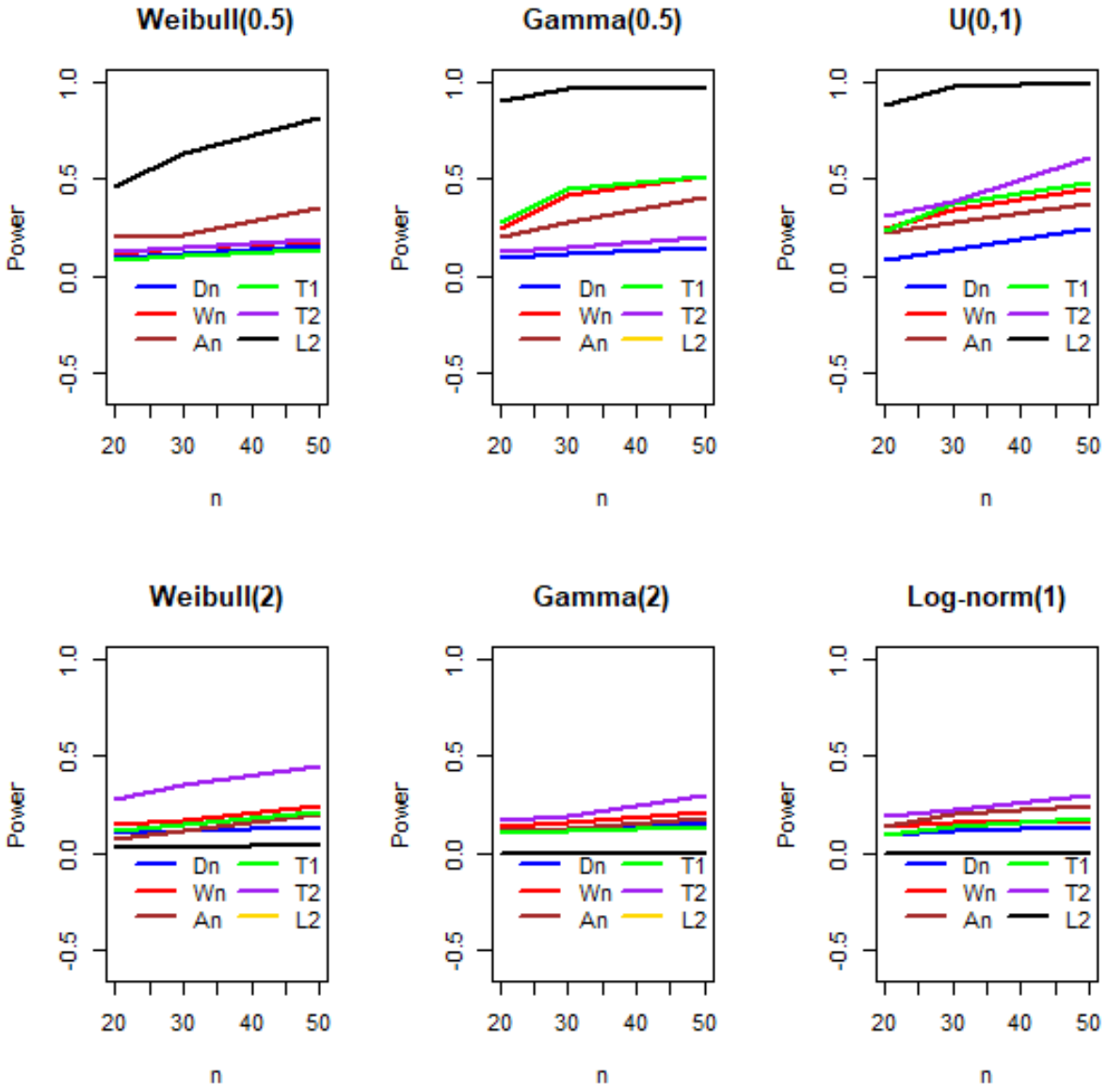
توزیع رقیب	نرخ سانسور	$\widehat{D}_n$	$\widehat{W_n^2}$	$\widehat{A_n^2}$	$\widehat{T_{n1}^*}$	$\widehat{T_{n2}^*}$	$\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$
$exponential(۱)$	۲۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲
	۴۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹
	۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲
$Weibull(۰/۵)$	۲۰	۰/۲۱	۰/۲۳	۰/۵۲	۰/۲۲	۰/۲۷	۰/۸۳
	۴۰	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۴۲	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۸۲
	۵۰	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۳۵	۰/۱۴	۰/۱۹	۰/۸۲
$Gamma(۰/۵)$	۲۰	۰/۱۹	۰/۷۰	۰/۶۵	۰/۷۲	۰/۳۹	۰/۹۹
	۴۰	۰/۱۷	۰/۶۱	۰/۴۸	۰/۶۸	۰/۲۶	۰/۹۸
	۵۰	۰/۱۵	۰/۵۲	۰/۴۱	۰/۵۲	۰/۲۰	۰/۹۸
$U(۰,۱)$	۲۰	۰/۳۰	۰/۷۹	۰/۷۱	۰/۸۲	۰/۸۶	۱
	۴۰	۰/۲۸	۰/۶۱	۰/۵۵	۰/۶۵	۰/۷۱	۱
	۵۰	۰/۲۴	۰/۴۵	۰/۳۸	۰/۴۸	۰/۶۱	۱
$Weibull(۲)$	۲۰	۰/۲۲	۰/۴۵	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۷۵	۰/۰۷
	۴۰	۰/۱۹	۰/۳۲	۰/۲۲	۰/۲۴	۰/۶۱	۰/۰۶
	۵۰	۰/۱۴	۰/۲۴	۰/۲۰	۰/۲۱	۰/۴۵	۰/۰۵
$Gamma(۲)$	۲۰	۰/۲۱	۰/۳۱	۰/۲۰	۰/۲۲	۰/۴۵	۰/۰۰۱
	۴۰	۰/۱۸	۰/۲۷	۰/۱۹	۰/۱۸	۰/۳۸	۰
	۵۰	۰/۱۶	۰/۲۱	۰/۱۸	۰/۱۴	۰/۳۰	۰
$Log-norm(۱)$	۲۰	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۳۳	۰/۲۴	۰/۴۹	۰
	۴۰	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۲۹	۰/۲۰	۰/۴۱	۰
	۵۰	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۲۵	۰/۱۸	۰/۳۰	۰



شکل ۱: مقایسه مقادیر توان آزمون پیشنهادی و آزمون‌های رقیب برای توزیع‌های جایگزین با نرخ سانسور ۲۰ درصد و حجم نمونه $n = ۲۰, ۳۰, ۵۰$



شکل ۲: مقایسه مقادیر توان آزمون پیشنهادی و آزمون‌های رقیب برای توزیع‌های جایگزین با نرخ سانسور ۴۰ درصد و حجم نمونه $n = ۲۰, ۳۰, ۵۰$



شکل ۳: مقایسه مقادیر توان آزمون پیشنهادی و آزمون‌های رقیب برای توزیع‌های جایگزین با نرخ سانسور ۵۰ درصد و حجم نمونه $n = ۲۰, ۳۰, ۵۰$

جدول ۵: مقایسه نتایج شبیه‌سازی آزمون‌های مختلف نمایی بودن برای داده‌های سانسور تصادفی

توزیع جایگزین	$Weibull(۰/۵)$	$Gamma(۰/۵)$	$Weibull(۲)$	$Gamma(۲)$	$U(۰,۱)$	$Log-norm(۱)$
بهترین آزمون	$\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$	$\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$	$\widehat{T_{n۲}^*}$	$\widehat{T_{n۲}^*}$	$\widehat{\mathrm{L2}_V^C}$	$\widehat{T_{n۲}^*}$

با توجه به مقادیر جداول زیر همان‌طور که در شکل‌های (۱)، (۲)، (۳) مشخص است، پرتوان‌ترین آزمون نسبت به توزیع‌های وایبول (۰/۵)، گاما (۰/۵)، یکنواخت استاندارد، آزمون **واگرایی L2** است. اما برای توزیع‌های وایبول (۲)، گاما (۲)، لگ نرمال (۱)، آزمون واگرایی $\widehat{T_{n۲}^*}$ دارای عملکرد مطلوبی نسبت سایر آزمون‌هاست.

۸ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک آماره آزمون جدید برای سنجش نمایی بودن داده‌ها، هنگامی‌که داده‌ها به‌طور تصادفی سانسور می‌شوند، پیشنهاد شد. آزمون واگرایی (L2) به‌عنوان یک برآوردگر جدید، در تشخیص نمایی بودن داده‌های سانسور شده تصادفی توانمندی فوق‌العاده‌ای از خود نشان داد. این آزمون نسبت به آزمون‌های مبتنی بر تابع توزیع تجربی مانند کولموگروف اسمیرنوف، اندرسون دارلینگ و کرامر فون میزس عملکرد بالاتری از نظر توان آماری دارد.

نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو نشان داد که در شرایط داده‌های سانسور شده، واگرایی (L2) در تشخیص صحیح انحراف از نمایی بودن، دقیق‌تر عمل می‌کند. دلیل این بهبود عملکرد، حساسیت بالاتر این معیار به تغییرات جزئی در انتهای توزیع است که در موارد سانسور، اهمیت ویژه‌ای دارد. از سوی دیگر، آزمون‌های مبتنی بر معیار اطلاع معمولاً نیازمند مفروضات بیشتری هستند که ممکن است در شرایط سانسور شده نقض شوند. برآوردگر (L2) با استفاده از تفاوت‌های مربعی بین توابع چگالی، دقت بیشتری در بازنمایی تفاوت‌های ساختاری بین توزیع‌ها ارائه می‌دهد. کاربرد این آزمون در مدل‌های بقا و تحلیل‌های مربوط به داده‌های پزشکی، ارزش آن را به‌عنوان ابزاری مطمئن در آزمون فرضیه افزایش می‌دهد. نتایج این پژوهش نشان داد که برای توزیع‌های وایبول، ($Gamma(۰/۵)$) و یکنواخت استاندارد، آزمون (L2) توان بالاتری نسبت به رقبای خود دارد. این نتیجه‌گیری به پژوهشگران کمک می‌کند تا در مواجهه با چالش‌های ناشی از سانسور تصادفی، از معیاری استفاده کنند که هم از نظر نظری و هم از نظر عملی بهینه باشد. در نهایت، یافته‌های ارائه‌شده در مقاله، اهمیت استفاده از واگرایی (L2) به‌عنوان معیاری نوین و کاربردی در تحلیل داده‌های سانسور شده را تائید می‌کند.

مراجع

[۱] اسدی، مجید. (۱۳۹۲). آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، چاپ دوم، مرکز نشر دانشگاهی.

[۲] باوفا، سمیه. پاییز (۱۳۹۰). رفتار مجانبی برآوردگر ناپارامتری تابع رگرسیون در مدل سانسور تصادفی با داده‌های $\alpha-$ آمیزنده. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشگاه فردوسی مشهد.

[۳] پاک‌گوهر، علیرضا. (۱۳۹۷). ویژگی‌هایی از اندازه لین-وانگ برای تغیر سانسور نوع یک، دکتری تخصصی، دانشگاه فردوسی مشهد، پردیس بین‌الملل.

[۴] شکوری، مرضیه. پاییز (۱۳۸۹). مروری بر آزمون‌های نیکویی برازش برای توزیع نمایی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد. دانشگاه فردوسی مشهد.

[5] Barr D.R., and Davidson. T. (1973), A Kolmogorov-Smirnov test for censored samples, *Technometrics*,**15(4)**, 739-57.

[6] Breslow, N. and Crowley, J. (1974), A large Sample Study of the lifetable and product limit estimates underrandom censorship, *Ann. Statist.*, **2(3)**, 437-453

[7] Cover, T.M. (1999), *Elements of information theory*, New York, John Wiley Sons.

[8] Danish, M.Y., and Aslam, M. (2013), Bayesian estimation for randomly censored generalized exponential distribution under asymmetric loss functions, *J. Appl. Stat.*, **40(5)**, 1106-1119.

[9] Danish, M.Y., Aslam, M. (2014), Bayesian inference for the randomly censored Weibull distribution, *J.Stat. Comput. Simul.*, **84(1)**, 215-230.

[10] Efron, B. (1967). The Two Sample Problems with Censored Data, *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **4**, 831-853.

[11] Finkelstein, J.M., and Schafer, R.E. (1971), Improved goodness-of-fit tests, *Biometrika*,**58(3)**, 641-645.

[12] Ghasabi, M., Deypir, M. (2021). Using optimized statistical distances to confront distributed denial of service attacks in software defined networks, *Intelligent Data Analysis*, **25(1)**, 155-176.

[13] Ghitany, M.E. and Al-Awadhi, S. (2002). Maximum likelihood estimation of Burr XII distribution parameters under random censoring, *J. Appl. Stat.*, **29**, 955–965.

[14] Gilbert, E. (1962). Random subdivisions of space into crystals, *The Annals of mathematical statistics*, *33(3)*, 958-972.

[15] Hasaballah, M.M., Balogun, O.S., Bakr, M.E. (2023). Investigation of exponential distribution utilizing randomly censored data under balanced loss functions and its application to clinical data, *Symmetry*, **15(10)**, 1854.

[16] Hellinger, E. (1909), Neue begründung der theorie quadratischer formen von unendlichvielen veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **136**, 210-271.

[17] Kailath, T. (1967). The divergence and Bhattacharyya distance measures in signal selection, *IEEE transactions on communication technology*, **15(1)**, 52-60.

[18] Kaplan, E.L., and Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations, *Journal of the American statistical association*, **53(282)**, 457-81.

[19] Kim, N. (2012). Testing Exponentiality based on EDF Statistics for Randomly Censored Data when the Scale Parameter is Unknown, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **25**, 311-319.

[20] Klein, J.P., Moeschberger, M.L. (2003). *Survival analysis: techniques for censored and truncated data*, New York, Springer.

[21] Koziol, J.A., and Green, S.B. (1976). A Cramer-von Mises Statistic for Randomly Censored Data, *Biometrika*, **63**, 465-474.

[22] Krishna, H., and Goel, N. (2018). Classical and Bayesian inference in two parameter exponential distribution with randomly censored data, *Computational Statistics*, **33**, 249-275.

[23] Krishna, H., Vivekanand, and Kumar, K. (2015). Estimation in Maxwell distribution with randomly censored data, *J. Stat. Comput. Simul.*, **85(17)**, 3560–3578.

[24] Kumar, K., and Kumar, I. (2020), Parameter estimation for inverse Pareto distribution with randomly censored life time data, *Int. J. Agric. Stat. Sci.*, **16(1)**, 419–430.

[25] Le Cam, L.M., and Yang, G.L. (2000). *Asymptotics in statistics: some basic concepts*, Springer Science Business Media.

[26] Lilliefors, H.W. (1969). On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown, *Journal of the American Statistical Association*, **64(325)**, 387-9.

[27] Meier, P. (1975). Estimation of a Distribution Function from Incomplete Observations, *Journal of Applied Probability*, **12**, 67-87.

[28] Omidi, F., Habibirad, A., and Fakoor, V. (2019). Goodness of fit tests based on information criterion for randomly censored data, *Journal of Statistical Research of Iran*, **16**, 507-533.

[29] Shannon, C.E. (1948). A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, **27**, 379-432.

[30] Soest, J.V. (1969), Some goodness of fit tests for exponential distributions, *Statistica Neerlandica*, **23(1)**, 41-51.

[31] Tang, J., Cheng, Y., and Zhou, C. (2009). Sketch-based SIP flooding detection using Hellinger distance, *In GLOBECOM 2009-2009 IEEE Global Telecommunications Conference*, 1-6.

[32] Vasicek, O. (1976). A test for normality based on sample entropy, *ournal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, **38(1)**, 54-59.

[33] Wieczorkowski, R., and Grzegorzewski, P. (1999). Entropy estimators□improvements and comparisons, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **28(2)**, 541-67.

[34] McIllmurray, M.B. and Turkie, W. (1987). Controlled trial of gamma linolenic acid in Duke's C colorectal cancer, *BMJ*, **294**, 1260.

[35] Yang, X., Yang, X., Yang, J., Ming, Q., Wang, W., Tian, Q., and Yan, J. (2021). Learning high-precision bounding box for rotated object detection via kullback-leibler divergence, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **34**, 18381-18394.

A Goodness-of-fit test of Exponentiality for random censored data using L2 divergence

Yasser Hashemzaie[1], Seyyed Mahdi Amir Jahanshahi[2], Mohammad Hossein Dehghan[3]

Abstract:

In this paper, the L2 divergence test is introduced to assess the exponentiality of random censored data. The power of this test is compared using Monte Carlo simulation with other competing tests, including the Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, and Cramer-von-Mises tests based on the empirical distribution function and some other tests based on the information criterion. The results of the simulation studies of this research showed that the proposed test generally performs better than its other competing tests.

Keywords: Goodness of fit test, random censoring, exponential function test, L2 divergence test.

[1]**Mathematics teacher, Education and Training in Zahedan**

[2]**Associate Professor, Dept.of statistics, Faculty of Math, University of Sistan and Baluchestan, Daneshgah Ave., Zahedan, Iran.**

[3]**Assistant Professor, Dept.of statistics, Faculty of Math, University of Sistan and Baluchestan, Daneshgah Ave., Zahedan, Iran.**