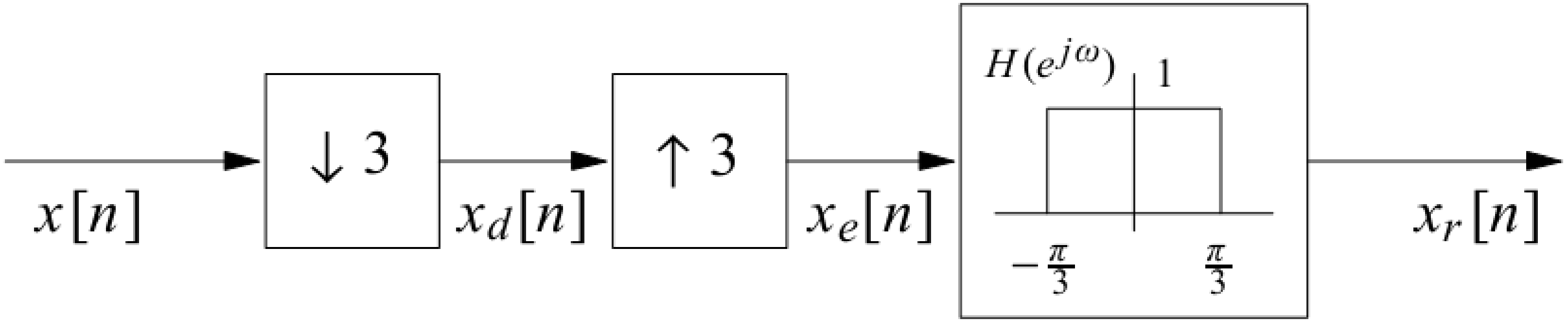
Signals & Systems

By: M. Shahraki



University of Sistan and Baluchestan

University of Sistan & Baluchestan
Faculty of Electrical and Computer Engineering
Department of Electrical & Electronics Engineering

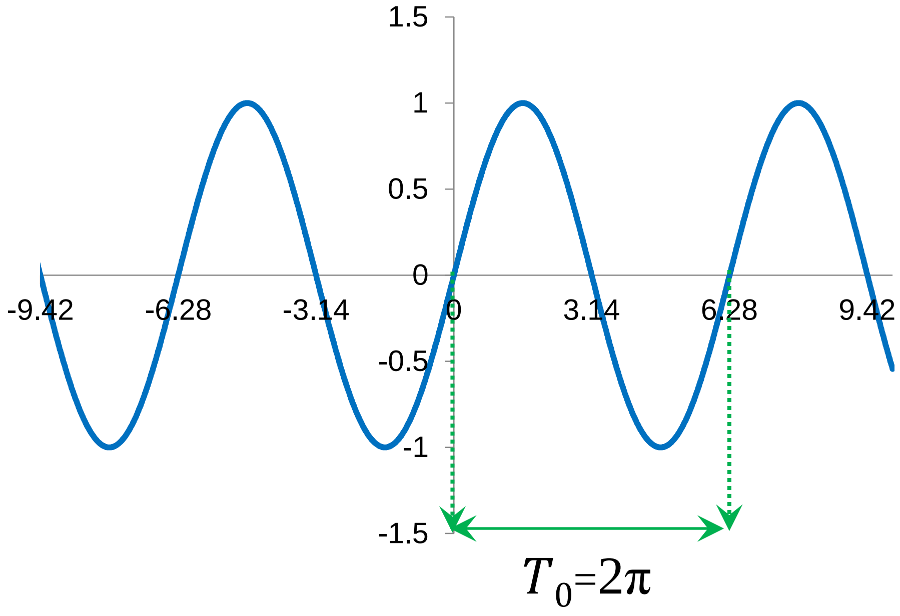
Fourier Series of Periodic Signals

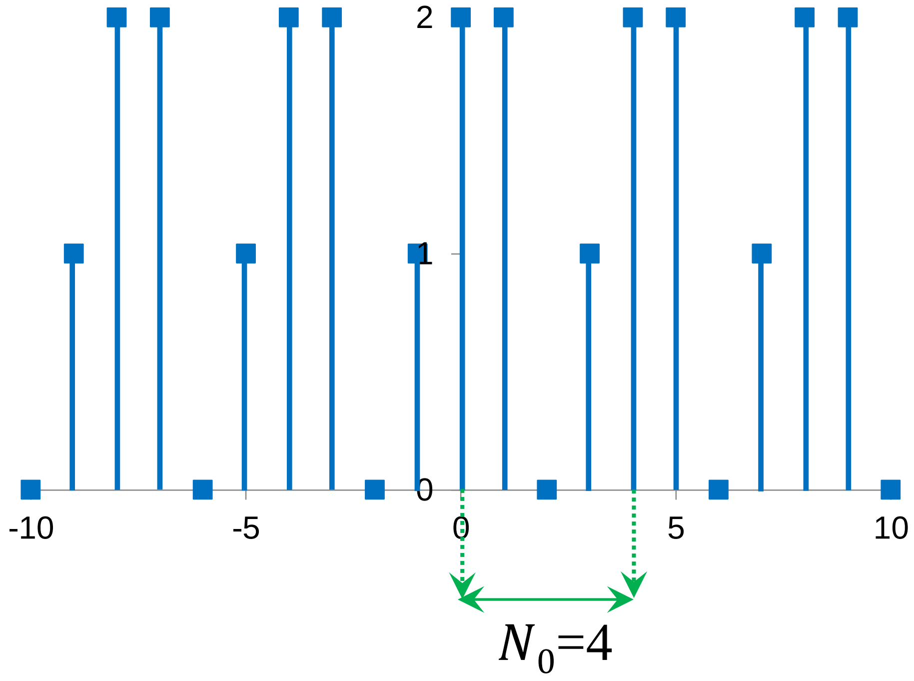
سیگنال متناوب چیست

سیگنال متناوب: سیگنالی که طی یک دوره تناوب خاص تکرار می شود

$$F(t+T_0)=F(t)$$

$$F[n+N_0]=F[n]$$





Fourier Series of Periodic Signals

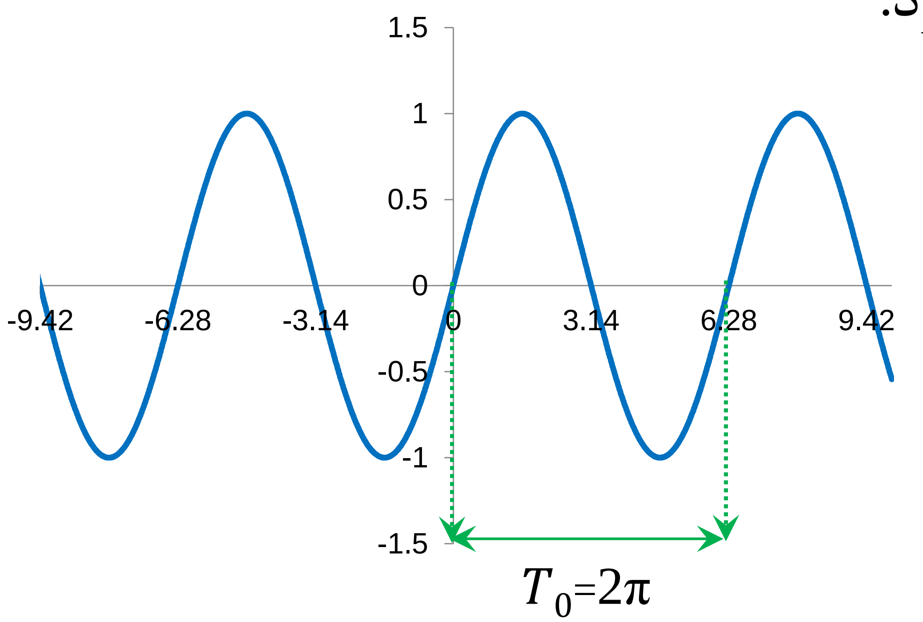
سیگنال متناوب

زمان تناوب پایه: کوچکترین مقدار T یا N که به ازای آن

$$F(t+T)=F(t)$$
$$F[n+N]=F[n]$$

برقرار است

برای تابع $F(t)=k_0$ و $F[n]=k_0$ دوره تناوب تعریف نمی شود.



Fourier Series of Periodic Signals

سیگنال متناوب

$$x(t) = 2\sin(3t) \qquad x(t+T_0) = x(t)$$

مثال:

$$2\sin(3(t+T)) = 2\sin(3t) \qquad 3T = 2k\pi \qquad T = \frac{2k\pi}{3} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{3} \qquad \omega_0 = 3$$

$$x(t) = 4\cos(\sqrt{2}t) \qquad x(t+T_0) = x(t) \qquad \omega_0 = \sqrt{2}$$

$$4\cos(\sqrt{2}(t+T)) = 4\cos(\sqrt{2}t) \qquad \sqrt{2}T = 2k\pi \qquad T = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال متناوب

$$x(t)=e^{j2t}+e^{j3t} \qquad x(t+T_0)=x(t)$$

مثال:

$$e^{j2(t+T)}+e^{j3(t+T)}=e^{j2t}+e^{j3t} \qquad e^{j2T}e^{j2t}+e^{j3T}e^{j3t}=e^{j2t}+e^{j3t} \qquad e^{j2T}=e^{j3T}=1$$

$$2T=2k\pi \qquad 3T=2k\pi \qquad T_0=2\pi$$

$$x(t)=e^{j2t}+e^{j3t} \qquad T(x_1)=\frac{2k\pi}{2}=\pi,2\pi,3\pi,......$$

$$T_0=LCM(T(x_1),T(x_2))=2\pi$$

$$x_1(t)=e^{j2t} \qquad x_2(t)=e^{j3t} \qquad T(x_2)=\frac{2k\pi}{3}=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi,.....$$

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال متناوب

$$x(t) = 2\cos(t) + 4\cos(\sqrt{2}t)$$

مثال:

$$x_1(t) = 2\cos(t) \qquad T(x_1) = \frac{2k\pi}{1} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, ...$$

$$x_2(t) = 4\cos(\sqrt{2}t) \qquad T(x_2) = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}, \frac{4\pi}{\sqrt{2}}, \frac{6\pi}{\sqrt{2}}, ...$$

$$T_0 = LCM(T(x_1), T(x_2)) = ????$$

تابع $x(t)$ متناوب نیست

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال متناوب

اگر دو تابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ متناوب با دوره تناوب های T_1 و T_2 باشند، حاصل جمع آنها زمانی متناوب است که

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

نسبت n_1 به n_2 یک عدد گویا باشد

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال متناوب

$$z(t) = e^{j6t}\cos(10t) \qquad z(t+T_0) = z(t)$$

$$e^{j6(t+T)}\cos(10(t+T)) = e^{j6t}\cos(10t) \qquad e^{j6T}\cos(10t+10T) = \cos(10t)$$

$$e^{j6T}\cos(10T) = 1 \qquad e^{j6T} = \cos(10T) = 1 \qquad 6T = 2k\pi \qquad 10T = 2k\pi \qquad T_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$z(t) = e^{jt}\cos(10t) \qquad z(t) = e^{j6t}[\frac{e^{j10t}+e^{-j10t}}{2}] \qquad z(t) = [\frac{e^{j16t}+e^{-j4t}}{2}]$$

$$T(x_1) = \frac{2k\pi}{16} = \frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\ldots\ldots \qquad T(x_2) = \frac{2k\pi}{4} = \frac{\pi}{2},\pi,2\pi,\ldots\ldots \qquad T_0 = LCM(T(x_1),T(x_2)) = \frac{\pi}{2}$$

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب تابعی از یک سیگنال متناوب

اگر تابع f(t) متناوب با دوره تناوب های T باشد، در اینطورت تابع G(f(t)) نیز متناوب است. در این حالت لزوما دوره تناوب تابع G برابر با T <u>نمی باشد.</u>

$$f(t) = \cos(t) \qquad\qquad T_0(f) = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$g(t) = f^3(t) \qquad\qquad g(t) = \cos^3(t) = \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$$

$$T_0(g) = LCM\left(\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$$

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب تابعی از یک سیگنال متناوب

$$f(t) = \cos(t) \qquad T_0(f) = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$g(t) = f^4(t) \qquad g(t) = \cos^4(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)$$

$$T_0(g) = LCM\left(\frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{4}\right) = \pi$$

Fourier Series of Periodic Signals

دوره تناوب سیگنالها

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

$$T(x_1) = \frac{2k\pi}{2\pi} = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$$T_0 = LCM(T(x_1), T(x_2), T(x_3)) = 1$$

$$T(x_2) = \frac{2k\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\ldots$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$$

$$T(x_2) = \frac{2k\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \ldots\ldots$$

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

تمایل داریم سیگنالها را بر حسب توابع نمایی مختلط نمایش دهیم زیرا:

۱- شناخت بهتری نسبت به سیگنال و محتوی فرکانسی آن به دست می آوریم.

۲-پاسخ سیستم LTI قابلیت نمایش به فرم توابع نمایی مختلط را دارد

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \qquad y(t) = H(s)e^{st}$$

$H(s)$ مقدار ویژه تابع e^{st} است

$h(t)$ پاسخ ضربه

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

$$x[n] = z^{n}$$

$$z[n] = x[n] * h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{n-k}h[k] = z^{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

$$H[z] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

$$y[n] = H[z]z^{n}$$

$H(z)$ مقدار ویژه تابع z^n است

$h[n]$ پاسخ ضربه

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 e^{s_1 t} &\to a_1 H(s_1) e^{s_1 t} \\ a_2 e^{s_2 t} &\to a_2 H(s_2) e^{s_2 t} \\ a_3 e^{s_3 t} &\to a_3 H(s_3) e^{s_3 t} \end{aligned}\right\} \quad y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$H(s_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s_k \tau} d\tau$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H[z_k] z_k^n$$

$$H[z_k] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l] z_k^{-l}$$

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

$$h(t) = \delta(t-3) \qquad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$x(t) = e^{j2t} \qquad s = j2$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3) e^{-3s} d\tau = e^{-3s} = e^{-j6}$$

$$y(t) = H(s) e^{st} = e^{-j6} e^{j2t} \qquad y(t) = e^{-j6} e^{j2t} = e^{j2(t-3)} = x(t-3)$$

Fourier Series of Periodic Signals

اهمیت توابع نمایی

$$h(t)=\delta(t-3) \qquad H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$x(t)=\cos(4t)+\cos(7t)=\frac{1}{2}e^{j4t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{j7t}+\frac{1}{2}e^{-j7t} \qquad s_{1,2,3,4}=j4,-j4,j7,-j7$$

$$H(s_{1,2,3,4})=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-3)e^{-s_{1,2,3,4}\tau}d\tau=e^{-3s_{1,2,3,4}}=e^{-j12},e^{+j12},e^{-j21},e^{+j21}$$

$$y(t)=H(s)e^{st}=\frac{1}{2}(e^{-j12}e^{j4t}+e^{j12}e^{-j4t}+e^{-j21}e^{j7t}+e^{j21}e^{-j7t})=\cos(4t-12)+\cos(7t-21)$$

$$y(t)=\cos(4(t-3))+\cos(7(t-3))=x(t-3)$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \qquad g(t) = e^{jk\omega_0 t} \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \qquad x^*(t)=\sum_{u=+\infty}^{-\infty}a_{-u}^* e^{+ju\omega_0 t} \qquad x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$x(t)$ حقیقی

$$x(t)=x^*(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \\ x^*(t)=\displaystyle\sum_{k=+\infty}^{-\infty}a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \end{array}\right\} \quad a_k=a_{-k}^* \qquad a_{-k}=a_k^*$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

$$= a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = a_0+2\,\mathrm{Re}\{\sum_{k=1}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$a_k = A_k e^{j\theta_k} \qquad x(t)=a_0+2\,\mathrm{Re}\{\sum_{k=1}^{+\infty}A_k e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)}\} = a_0+2\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$= a_0 + 2\,\mathrm{Re}\{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$

a_k ?

B_k و C_k حقیقی

$a_k = B_k + jC_k$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t} \qquad \int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_0^T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$\boxed{\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=a_nT}$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\int_0^T\cos((k-n)\omega_0 t)dt+j\int_0^T\sin((k-n)\omega_0 t)dt \quad =\begin{cases}T & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t) = \sin \omega_0 t \qquad \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j} \qquad a_k = 0 \quad k \neq \pm 1$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=1+\sin\omega_0 t+2\cos\omega_0 t+\cos(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4})$$

$$x(t)=1+\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4})}+\frac{1}{2}e^{-j(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4})}$$

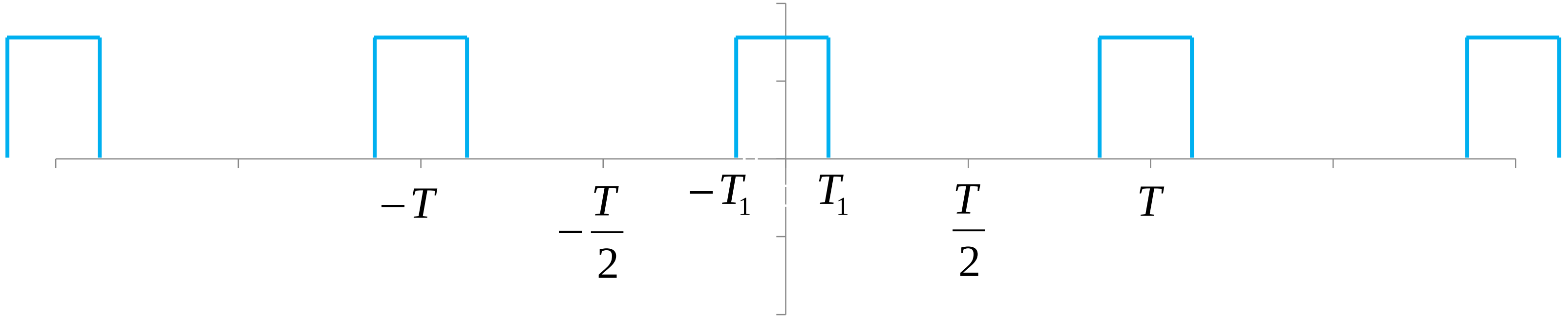
$$x(t)=1+(1+\frac{1}{2j})e^{j\omega_0 t}(1-\frac{1}{2j})e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0=1 \quad a_1=(1+\frac{1}{2j}) \quad a_{-1}=(1-\frac{1}{2j}) \quad a_2=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad a_{-2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad a_k=0 \quad |k|>2$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{2T_1}{T}$$

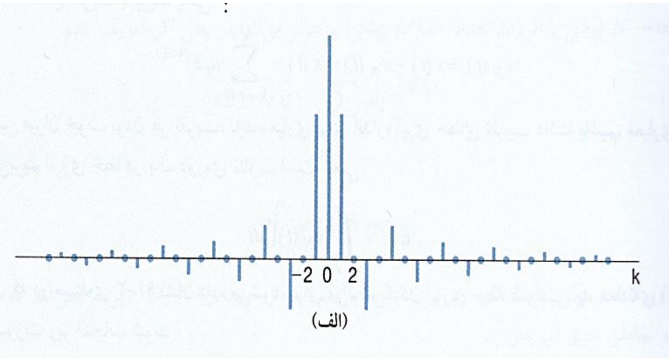
$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{-jk\omega_0 T}[e^{-jk\omega_0 T_1}-e^{jk\omega_0 T_1}]$$

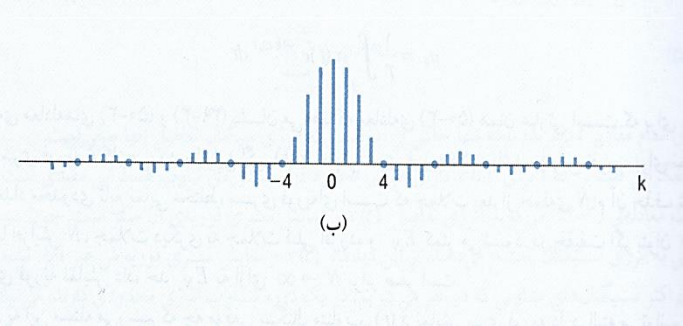
$$a_k=\frac{2}{k\omega_0 T}[\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}]=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\qquad k\neq 0$$

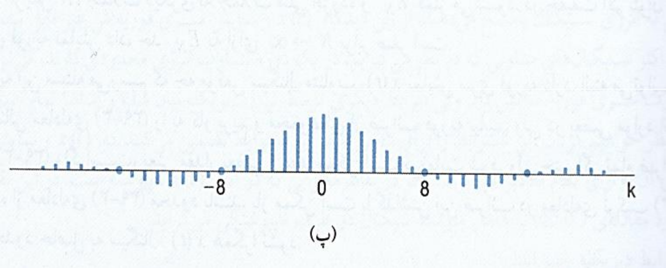
Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$T = 4T_1$ $\quad$ $T = 8T_1$ $\quad$ $T = 16T_1$







Fourier Series of Periodic Signals

همگرایی سری فوریه

شرایط دیریکله

۱- $x(t)$ روی هر دوره تناوب مطلقا انتگرالپذیر باشد.

$$\int_T |x(t)|dt < \infty \longrightarrow a_k < \infty$$

۲- تعداد تغییرات $x(t)$ در هر دوره تناوب محدود باشد. (در هر دوره تناوب تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد).

۳-در هر دوره تناوب تعداد ناپیوستگی ها محدود باشد، مقدار هر ناپیوستگی نیز محدود باشد.

تحت چنین شرایطی سری فوریه سیگنال در همه جا بجز نقاط پیوستگی برابر با خود سیگنال است.
در نقاط ناپیوستگی به مقدار میانگین سیگنال در آن نقطه همگرا می شود.

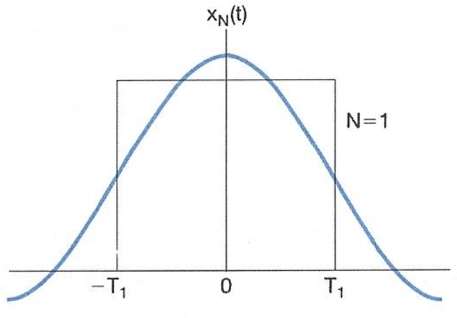
Fourier Series of Periodic Signals

$$x = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

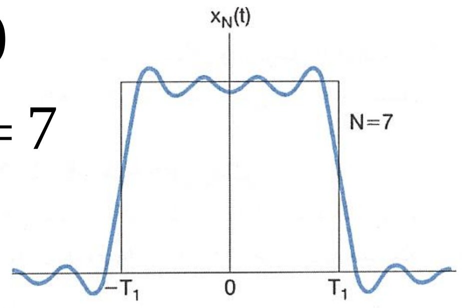
$x(t)$

$N = 1$



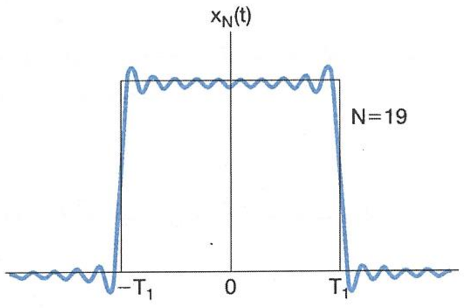
$x(t)$

$N = 7$



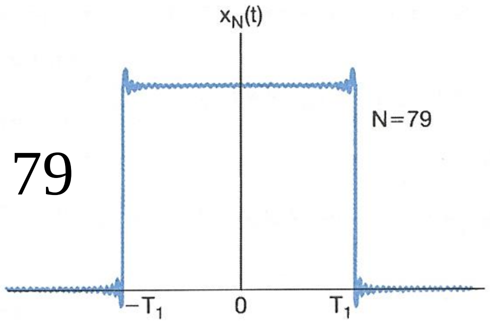
$x(t)$

$N = 19$



$x(t)$

$N = 79$



Fourier Series of Periodic Signals

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۱- خاصیت خطی بودن

x و y متناوب با دوره تناوب $\mathbf{\underline{T}}$ باشند.

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{FS} c_k = Aa_k + Bb_k$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

۲- جابجایی زمانی

$$y(t) = x(t-t_0) \qquad b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau$$

$$\boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0}a_k}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۳- جابجایی فرکانسی

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$\boxed{e^{jM\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{FS} a_{k-M}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

۴- وارونگی زمانی

$$y(t) = x(-t) \qquad b_k = \frac{1}{T}\int_T x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{jk\omega_0 \tau}dt = a_{-k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \qquad x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=+\infty}^{-\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۵- تغییر مقیاس زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k, \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 \alpha t}$$

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t} \xleftrightarrow{FS} a_k, \qquad T = \frac{2\pi}{a\omega_0} = \frac{T_0}{a}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۶- ضرب

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$x(t).y(t) \xleftrightarrow{FS} h_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۷- کانولوشن متناوب

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$\int_T x(\tau).y(t-\tau) \xleftrightarrow{FS} h_k = Ta_k b_k$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۸- مزدوج و تقارن مزدوج

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

$x(t)$ حقیقی

$$x(t) = x^*(t) \qquad a_{-k} = a_k^*$$

$x(t)$ حقیقی و زوج

ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج

$$a_k = a_k^*$$

$x(t)$ حقیقی و فرد

ضرایب سری فوریه موهومی و فرد

$$a_k^* = -a_k \qquad a_0 = 0$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

۹– مشتق گیری

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$$

$$k \neq 0$$

۱۰–انتگرالگیری

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FS} \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

با شرط آنکه انتگرال محدود و متناوب بوده و $k \neq 0$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه پیوسته در زمان

۱۱- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt \;= \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2$$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt \;= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt$$

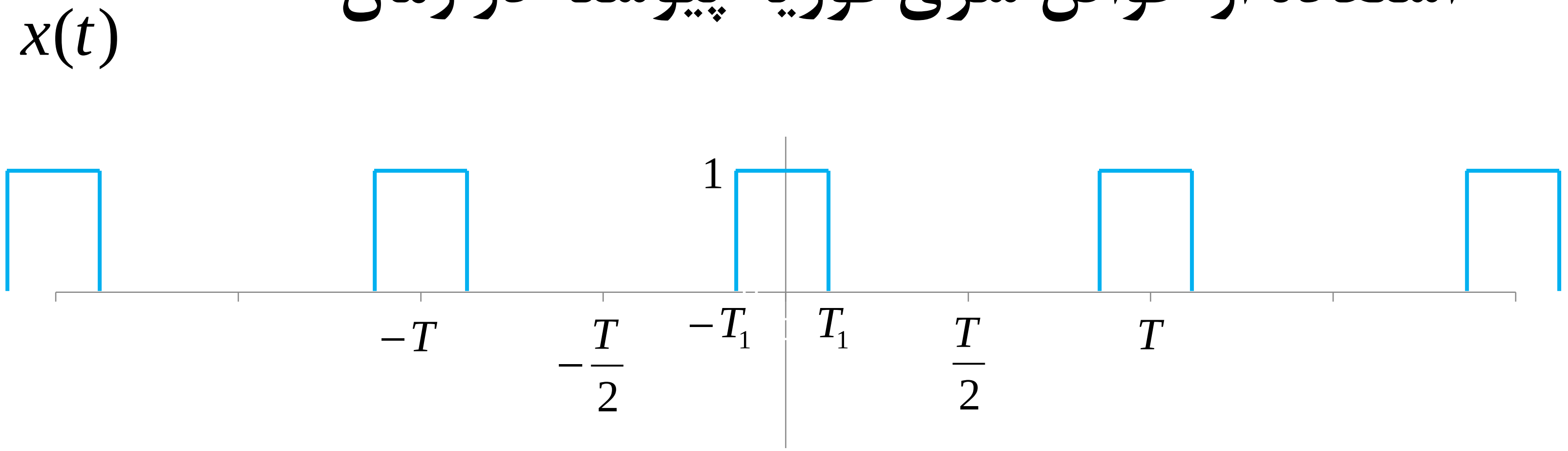
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2}$$

Fourier Series of Periodic Signals

استفاده از خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0$$

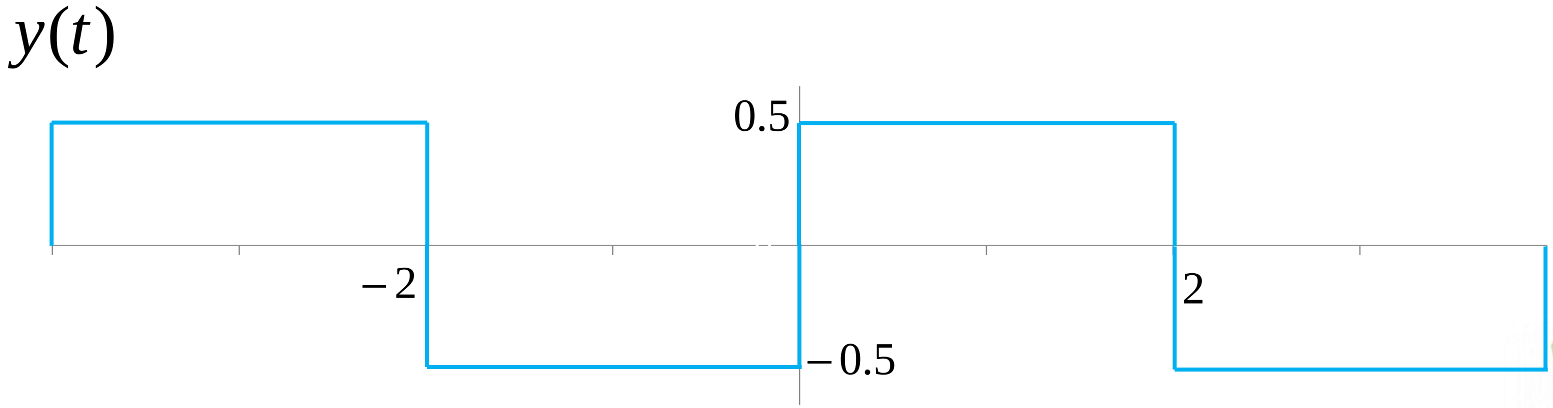
$$\frac{2T_1}{T} \quad k = 0$$



$$b_k = ?$$

$$T_1 = \frac{T}{4} = 1$$

$$y(t) = x(t-1) - 0.5$$



Fourier Series of Periodic Signals

$$x(t) \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} & k \neq 0 \\ \dfrac{2T_1}{T} & k = 0 \end{cases}$$

استفاده از خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$$T_1 = 1 \qquad T = 4 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0.5 & k = 0 \end{cases}$$

$$y_1(t) = x(t-1) \qquad d_k = e^{-jk\omega_0} a_k$$

$$d_k = \begin{cases} e^{-jk\pi/2} \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0.5 & k = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = x(t-1) - 0.5 \qquad b_k = d_k + c_k$$

$$b_k = \begin{cases} e^{-jk\pi/2} \dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

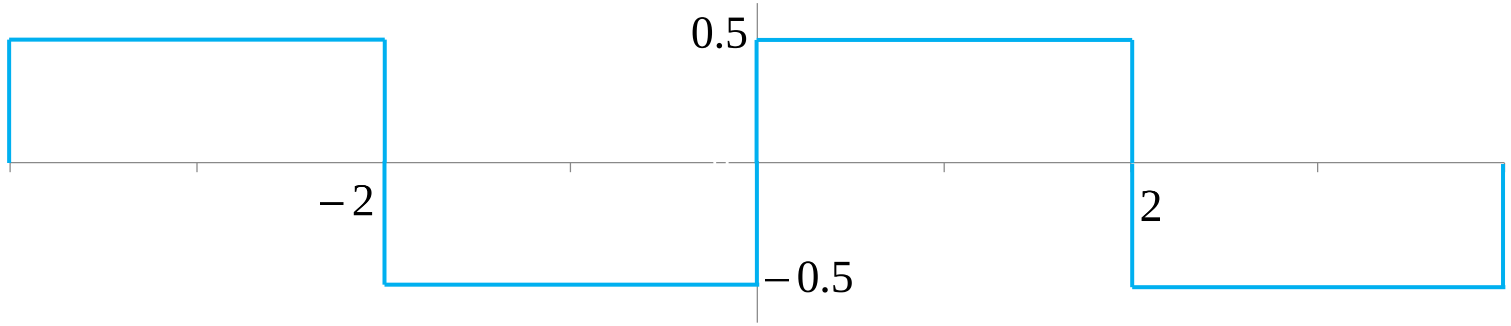
Fourier Series of Periodic Signals

استفاده از خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$y(t)$

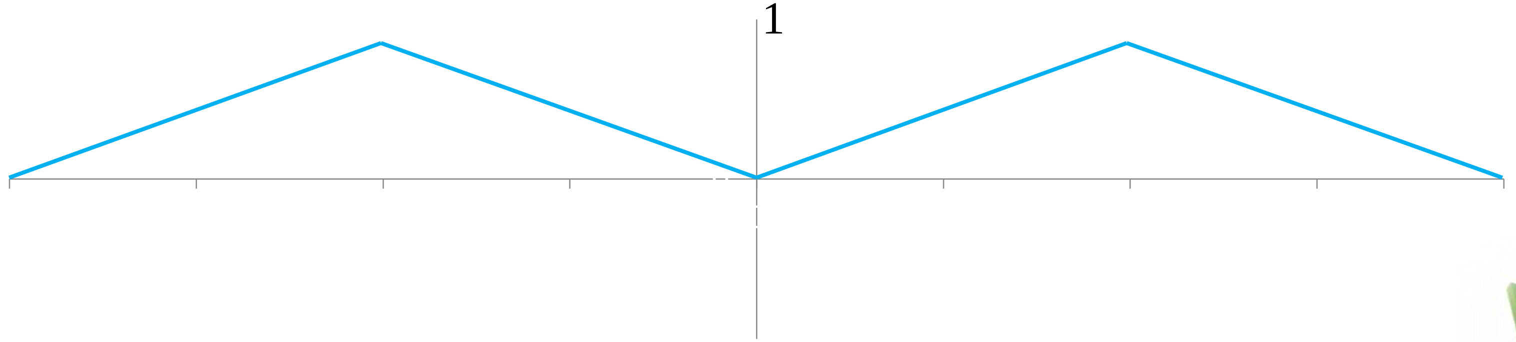
$$b_k = e^{-jk\pi/2}\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \quad k \neq 0$$

$$0 \quad k = 0$$



$z(t) \quad e_k$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$



Fourier Series of Periodic Signals

استفاده از خواص سری فوریه پیوسته در زمان

$$y(t) \qquad b_k = \begin{cases} e^{-jk\pi/2}\dfrac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau \qquad e_k = \frac{1}{jk\omega_0}d_k \qquad e_k = e^{-jk\pi/2}\frac{2\sin(k\pi/2)}{j(k\pi)^2} \quad k \neq 0$$

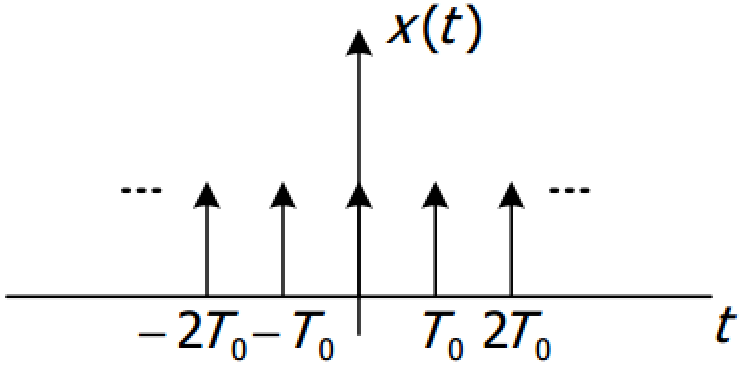
$$e_0 = \frac{\int_0^T z(t)dt}{T} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Fourier Series of Periodic Signals

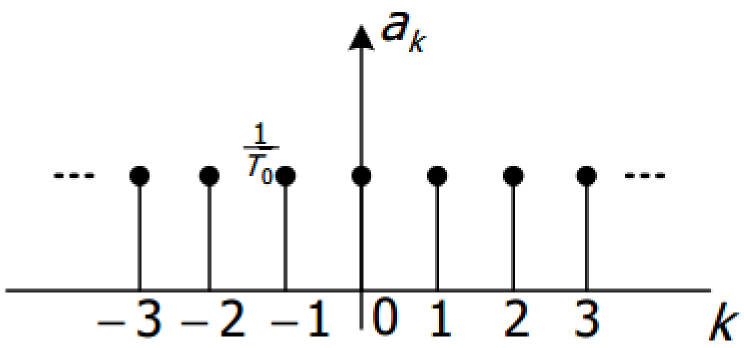
نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب پیوسته در زمان

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt$$



$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)dt=\frac{1}{T_0}$$



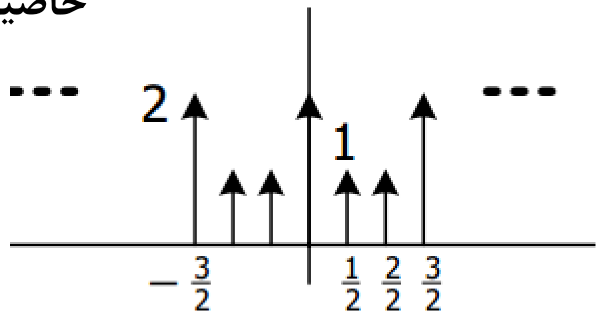
M. Shahraki

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه

خاصیت جمع برقرار نیست → دوره تناوب پایه یکسان ندارند

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \frac{m}{2}) + \delta(t - \frac{3m}{2})$$



$$T_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\delta(t + \frac{1}{2}) + 2\delta(t) + 2\delta(t - \frac{1}{2})] e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt$$

$$a_k = \frac{2}{3} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\delta(t + \frac{1}{2}) + 2\delta(t) + \delta(t - \frac{1}{2})] e^{-jk\frac{4\pi}{3}t} dt = \frac{2}{3}[e^{-jk\frac{4\pi}{3}(-\frac{1}{2})} + 2 + e^{-jk\frac{4\pi}{3}(\frac{1}{2})}]$$

$$a_k = \frac{2}{3}[2 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}k)] = \frac{4}{3}[1 + \cos(\frac{2\pi}{3}k)]$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$x[n] = x[n+N]$$

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} \qquad k = 0,\pm1,\pm2,......$$

$$\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n] \qquad\qquad \phi_k[n] = \phi_{k+N}[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$x[0] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2k\pi}{N}}$$

$$x[2] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{4k\pi}{N}}$$

$$x[N-1] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi k(N-1)}{N}}$$

N معادله

N مجهول

$$x[N] = x[0]$$

$$x[N+1] = x[1]$$

$$x[N+2] = x[2]$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \qquad x[n]e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} e^{-j\frac{2\pi r}{N}n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} \qquad \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\frac{2\pi k}{N}n} e^{-j\frac{2\pi r}{N}n}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\frac{2\pi mn}{N}} = \begin{cases} N & m = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots.. \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\frac{2\pi(k-r)}{N}n} \longrightarrow \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi r}{N}n} = a_r N$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=\langle n \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}}$$

$$\boxed{x[n+N] = x[n]}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}}$$

$$\boxed{a_{k+N} = a_k}$$

Fourier Series of Periodic Signals

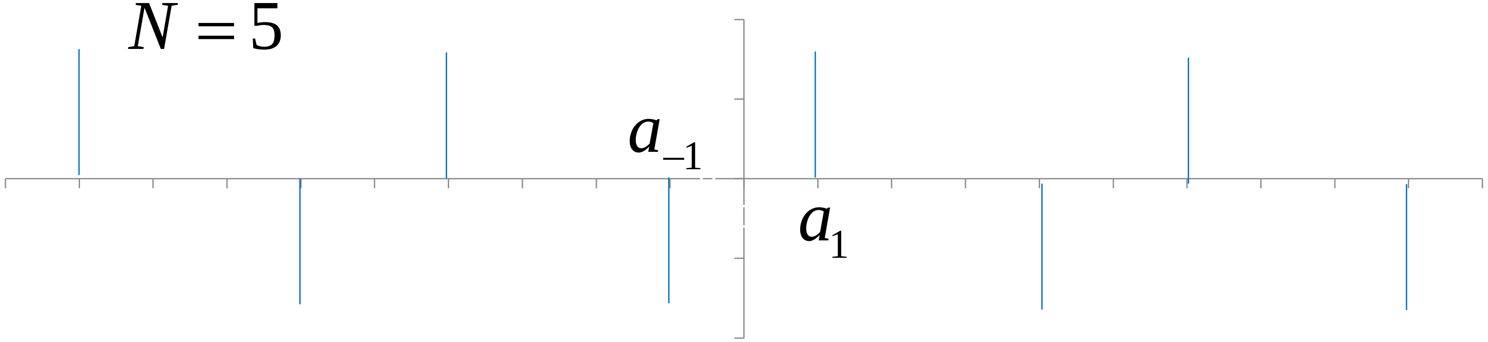
نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$x[n] = \sin \omega_0 n$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{5}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$N = 5$$



$$a_1 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_{1+N} = \frac{1}{2j} \qquad a_{-1+N} = -\frac{1}{2j}$$

Fourier Series of Periodic Signals

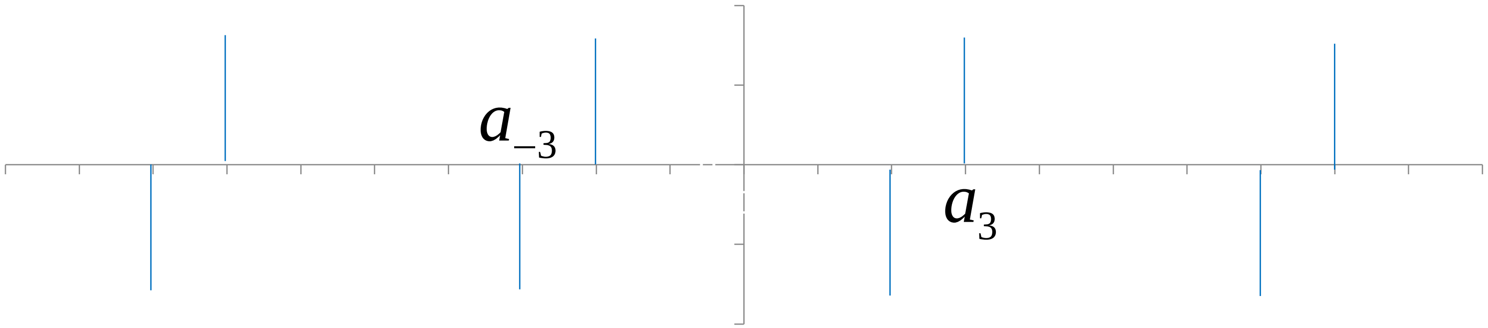
نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$x[n] = \sin \omega_0 n$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi M}{N} = \frac{2\pi \times 3}{5} \qquad M = 3$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi M}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi M}{N}n}$$

$$N = 5$$



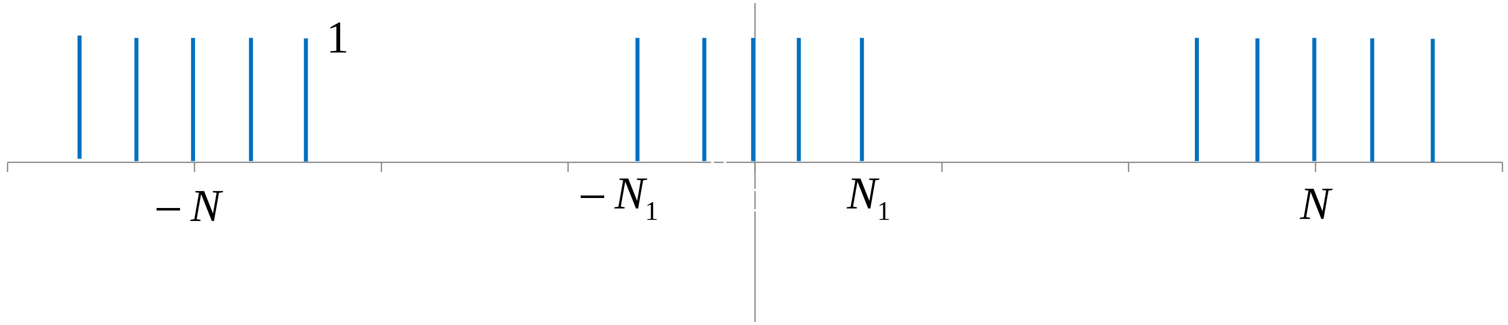
$$a_M = \frac{1}{2j} \qquad a_{-M} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_{M+N} = \frac{1}{2j} \qquad a_{-M+N} = -\frac{1}{2j}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{+N_1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$



$$m = n + N_1$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}(m-N_1)} = \frac{1}{N}e^{j\frac{2\pi k}{N}N_1}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\frac{2\pi k}{N}m} = \frac{1}{N}e^{j\frac{2\pi k}{N}N_1}\left(\frac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}\right)$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$a_k=\frac{1}{N}e^{j\frac{2\pi k}{N}N_1}\left(\frac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}\right)=\frac{1}{N}e^{j\frac{2\pi k}{N}N_1}\left(\frac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}(2N_1+1)}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}\right)\frac{e^{j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{j\frac{2\pi k}{2N}}e^{-j\frac{2\pi k}{2N}}}$$

$$=\frac{1}{N}e^{j\frac{2\pi k}{N}N_1}\left(\frac{e^{j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{2\pi}{2N}}-e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}}\right)\frac{e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{-j\frac{2\pi k}{2N}}}=\frac{1}{N}\left(\frac{e^{j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{2\pi}{2N}}-e^{-jk\frac{2\pi}{2N}}}\right)$$

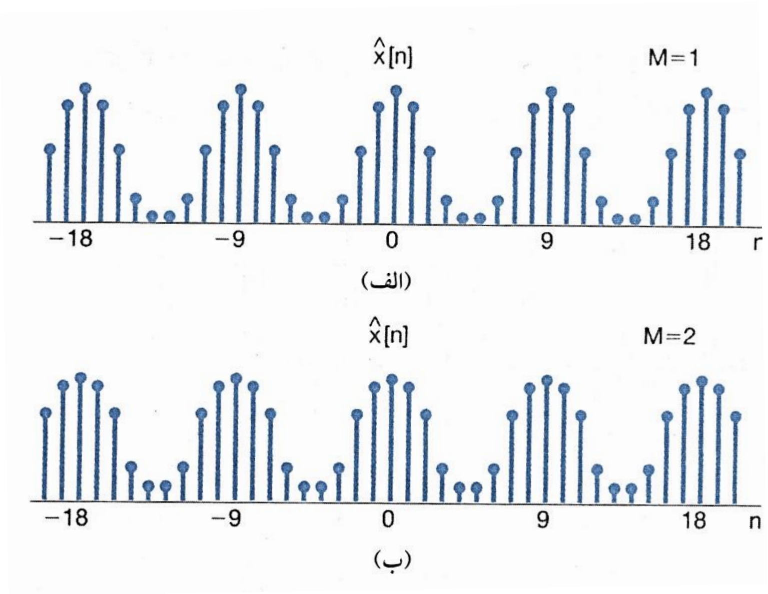
Fourier Series of Periodic Signals

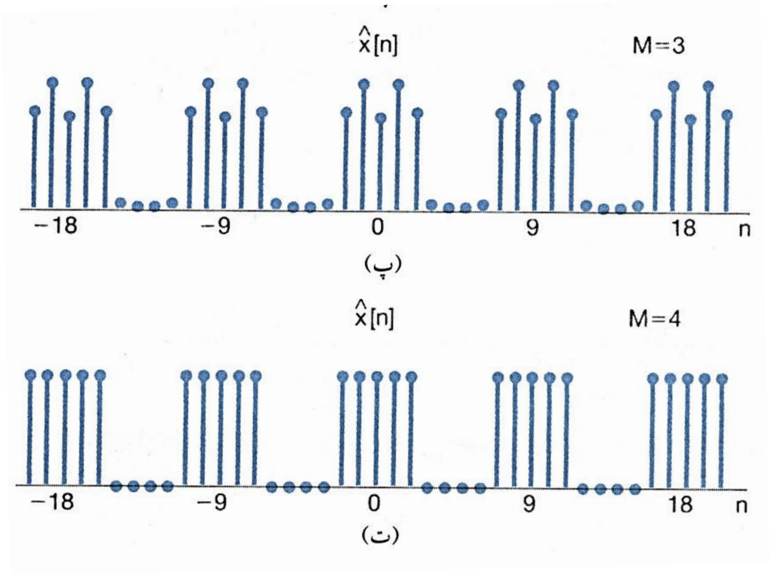
نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان

$$a_k = \frac{1}{N}\left(\frac{e^{j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{j\frac{2\pi k}{2N}} - e^{-j\frac{2\pi k}{2N}}}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin[\frac{2\pi k}{N}(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin[\frac{\pi k}{N}]} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

Fourier Series of Periodic Signals

نمایش سری فوریه سیگنال های متناوب گسسته در زمان





Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

۱- خاصیت خطی بودن

x و y متناوب با دوره تناوب N باشند.

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$z[n] = Ax[n] + By[n] \xleftrightarrow{FS} c_k = Aa_k + Bb_k$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۲- جابجایی زمانی

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{FS} e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0} a_k$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۳- جابجایی فرکانسی

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$\boxed{e^{jM\frac{2\pi}{N}n}x[n] \xleftrightarrow{FS} a_{k-M}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۴- وارونگی زمانی

$$\boxed{x[-n] \xleftrightarrow{FS} a_{-k}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

۵- تغییر مقیاس زمانی

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & n = l.m \\ 0 & n \neq l.m \end{cases} \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{m} a_k$$

متناوب با دوره تناوب mN

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۶- ضرب

$$x[n] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$y[n] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} b_k$$

$$x[n].y[n] \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۷- کانولوشن متناوب

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$$

$$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{FS} h_k = N a_k b_k$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۸- مزدوج و تقارن مزدوج

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$x^*[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$$

$x[n]$ حقیقی

$$x[n] = x^*[n] \qquad a_{-k} = a_k^*$$

$x[n]$ حقیقی و زوج

ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج

$$a_k = a_k^*$$

$x[n]$ حقیقی و فرد

ضرایب سری فوریه موهومی و فرد

$$a_k^* = -a_k \qquad a_0 = 0$$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

۹- تفاضل اول

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}})a_k$$

$$k \neq 0$$

۱۰-جمع انباره ای

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xleftrightarrow{FS} \frac{a_k}{(1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}})}$$

با شرط آنکه جمع محدود و متناوب بوده و $k \neq 0$

Fourier Series of Periodic Signals

خواص سری فوریه گسسته در زمان

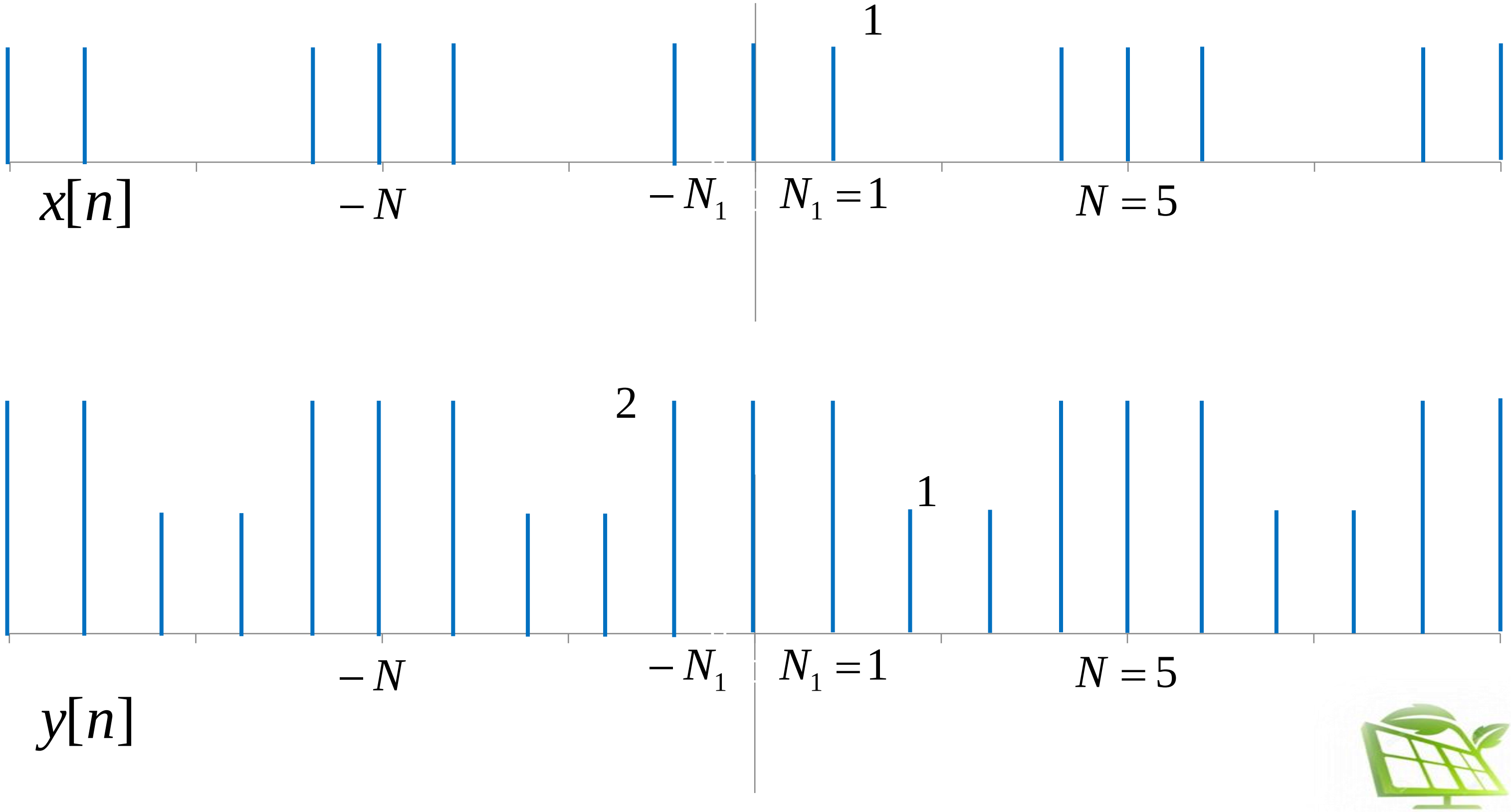
۱۱- رابطه پارسوال

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=<N>}\left|a_k\right|^2}$$

Fourier Series of Periodic Signals

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \dfrac{\sin[\frac{2\pi k}{N}(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin[\frac{\pi k}{N}]} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

استفاده از خواص سری فوریه گسسته در زمان



$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5} \dfrac{\sin[\frac{3\pi k}{5}]}{\sin[\frac{\pi k}{5}]} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{3}{5} & k = 0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

$$y[n] = x[n] + 1$$

Fourier Series of Periodic Signals

استفاده از خواص سری فوریه گسسته در زمان

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin[\frac{3\pi k}{5}]}{\sin[\frac{\pi k}{5}]} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{3}{5} & k = 0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

$$y[n] = x[n] + 1$$

$$c_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$b_k = a_k + c_k$$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin[\frac{3\pi k}{5}]}{\sin[\frac{\pi k}{5}]} & k \neq 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{8}{5} & k = 0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

Fourier Series of Periodic Signals

$$x[n] = x[n+N], \quad N = 6$$

$$\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$$

$$\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$$

استفاده از خواص سری فوریه گسسته در زمان

مثال:

فرض کنید اطلاعات روبرو درباره سیگنال $x[n]$ وجود دارد.

$x[n]$ را به گونه ای بیابید که کمترین توان در هر دوره تناوب را داشته باشد

$$x[n] = \sum_{k=<6>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{6}n} = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-j0\times\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]$$

$$a_0 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$$

$$(-1)^n = e^{\pm j\pi}$$

$$k = \pm 3$$

$$a_{\pm 3} = \frac{1}{T}\sum_{n=2}^{7} x[n] e^{-j3\times\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7} x[n](-1)^n = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6}$$

طبق رابطه پارسوال برای رسیدن به کمترین توان بقیه ضرایب باید صفر باشند

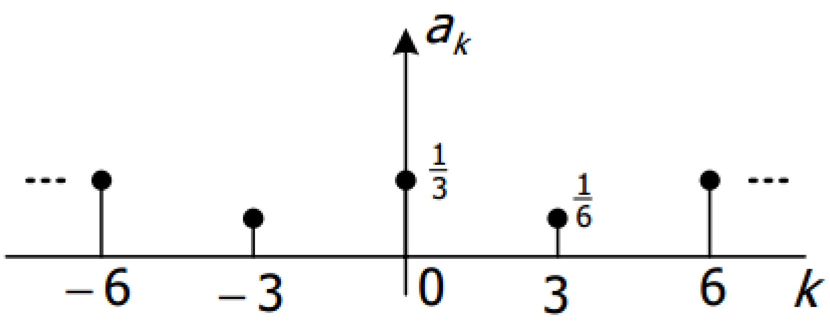
$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6}, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = a_{-1} = a_2 = a_{-2} = 0$$

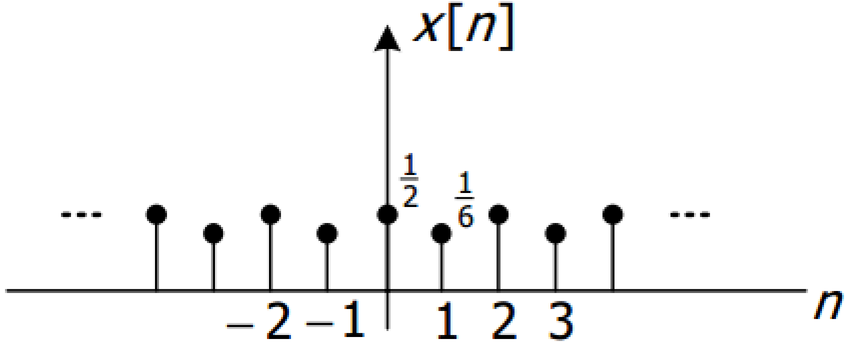
Fourier Series of Periodic Signals

استفاده از خواص سری فوریه گسسته در زمان

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6},\quad a_0 = \frac{1}{3},\quad a_1 = a_{-1} = a_2 = a_{-2} = 0$$

$$x[n] = \sum_{k=<6>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{6}n} = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$$





Fourier Series of Periodic Signals

پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)}_{LTI} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{st}\Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$s = j\omega \ , \ x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \qquad y(t) = x(t)H(j\omega)$$

Fourier Series of Periodic Signals

پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$y(t) = x(t-3) \quad , \quad x(t) = e^{j2t}$$

$$x(t) = e^{j2t} \quad , \quad y(t) = x(t-3) \Rightarrow y(t) = e^{j2(t-3)}$$

$$h(t) = \delta(t-3) \ , H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3) e^{-j\omega t} dt = e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{j2t} \cdot H(j\omega)\Big|_{\omega=2} = e^{j2t} \cdot e^{-j6}$$

$$h(t) = \delta(t-3) \ , x(t) = e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda-3) e^{+j2(t-\lambda)} dt = e^{j2(t-3)}$$

Fourier Series of Periodic Signals

پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$x(t)=x(t+T_0)\Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\cdots+a_{-1}e^{-j\omega_0 t}+a_0+a_1 e^{j\omega_0 t}+\cdots$$

$$\Rightarrow y(t)=\cdots+a_{-1}e^{-j\omega_0 t}\cdot H(-j\omega_0)+a_0\cdot H(j0)+a_1 e^{j\omega_0 t}\cdot H(j\omega_0)+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\cdot H(jk\omega_0)\ ,\ H(jk\omega_0)=H(j\omega)\big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k}e^{jk\omega_0 t}$$

اگر ورودی متناوب باشد، خروجی نیز متناوب با همان دوره تناوب خواهد بود.

می توان با عبور ورودی از سیستم برخی هارمونیک ها را تقویت، تضعیف یا حذف کرد

Fourier Series of Periodic Signals

پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$y(t) = x(t-3)\ ,\ x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{-j7t}$$

$$h(t) = \delta(t-3) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j3\omega}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}e^{j4t}H(j4) + \frac{1}{2}e^{-j4t}H(-j4) + \frac{1}{2}e^{j7t}H(j7) + \frac{1}{2}e^{-j7t}H(-j7) \\ &= \frac{1}{2}e^{j4t}\cdot e^{-j12} + \frac{1}{2}e^{-j4t}\cdot e^{j12} + \frac{1}{2}e^{j7t}\cdot e^{-j21} + \frac{1}{2}e^{-j7t}\cdot e^{j21} \\ &= \cos(4t-12) + \cos(7t-21) \end{aligned}$$

Fourier Series of Periodic Signals

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi)t}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = \dfrac{1}{4} \\ a_2 = a_{-2} = \dfrac{1}{2} \\ a_3 = a_{-3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{-1}{j\omega+1}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(jk\omega_0)=H(jk2\pi)=\frac{1}{1+jk2\pi}$$

$$b_0=1\times 1=1\,,\quad b_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+j2\pi}\,,\quad b_{-1}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-j2\pi}\,,$$

$$b_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\,,\quad b_{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\,,\quad b_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}\,,\quad b_{-3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}$$

Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان پیوسته)

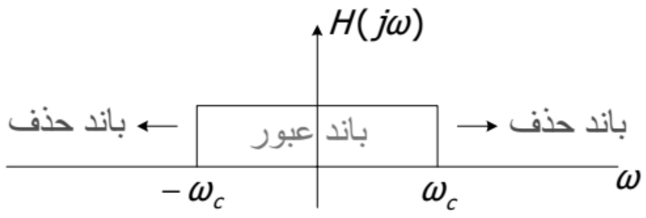
فیلتر شکل دهنده فرکانسی: شکل طیف سیگنال ورودی را تغییر می دهد.

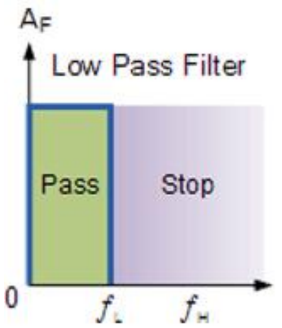
فیلتر انتخاب گر فرکانسی (فیلتر فرکانس گزین):
برخی فرکانس ها رو عبور داده و برخی را تضعیف یا حذف می کند.

Fourier Series of Periodic Signals

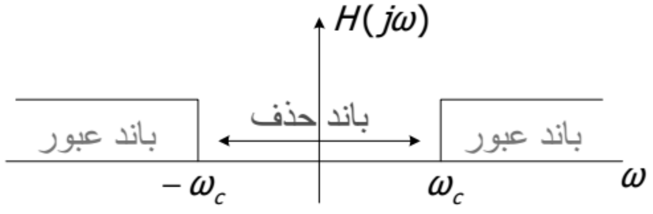
انواع فیلتر:

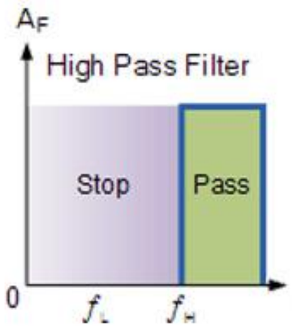
فیلتر پایین گذر (Low Pass Filter LPF)



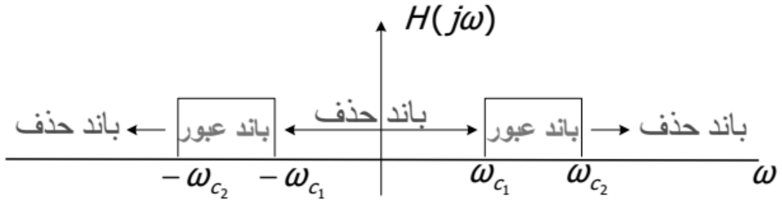


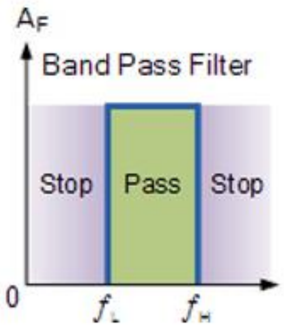
فیلتر بالا گذر (High Pass Filter HPF)





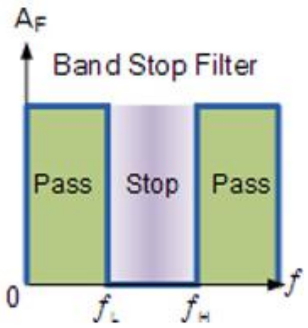
فیلتر میان گذر (Band Pass Filter BPF)





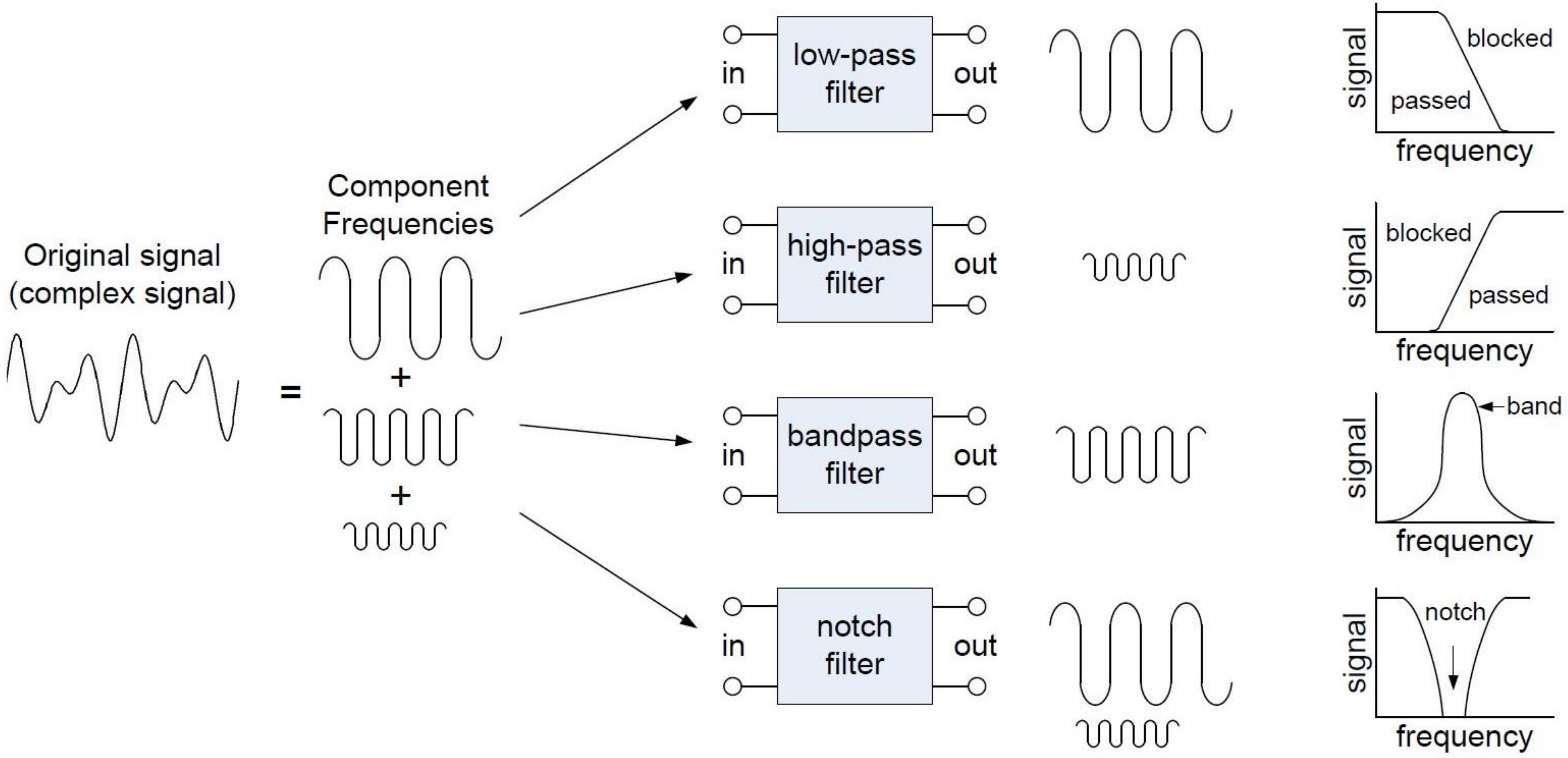
فیلتر میان ناگذر

(Band Stop or Band Reject or Notch Filter)



Fourier Series of Periodic Signals

انواع فیلتر:



Fourier Series of Periodic Signals

تشخیص نوع فیلتر:

۱- توسط رابطه $h(t)$: تابع $|H(j\omega)|$ را رسم و نوع فیلتر را تشخیص می دهیم.

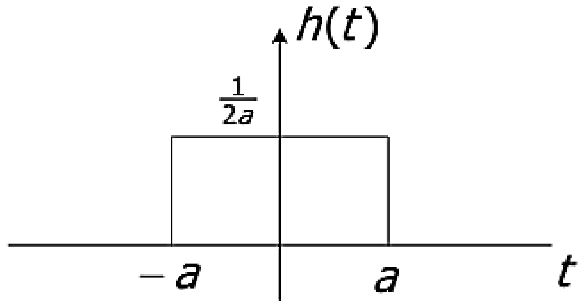
۲- توسط معادله دیفرانسیل: با اعمال $x(t)=e^{j\omega t}$ و محاسبه $|H(j\omega)|$ نوع فیلتر را تشخیص می دهیم.

Fourier Series of Periodic Signals

تشخیص نوع فیلتر:

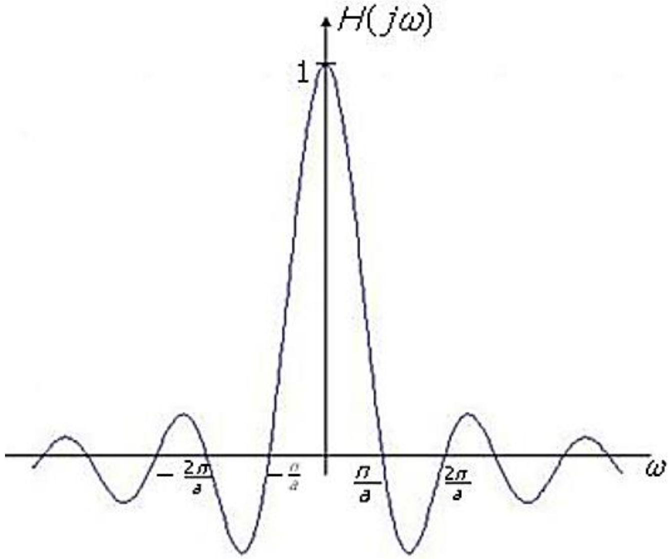
$$h(t) = \frac{1}{2a} rect(\frac{t}{2a}) = \frac{1}{2a} \Pi(\frac{t}{2a})$$

سیستمی دارای پاسخ ضربه $h(t)$ چه نوع فیلتری است.



$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt$$

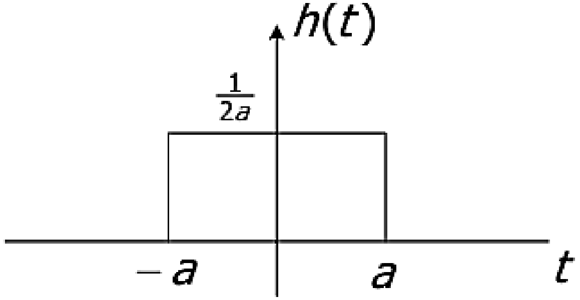
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$H(j\omega) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j2a\omega}(e^{-ja\omega} - e^{ja\omega}) = \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = \frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi}\pi)}{\frac{a\omega}{\pi}\pi}$$

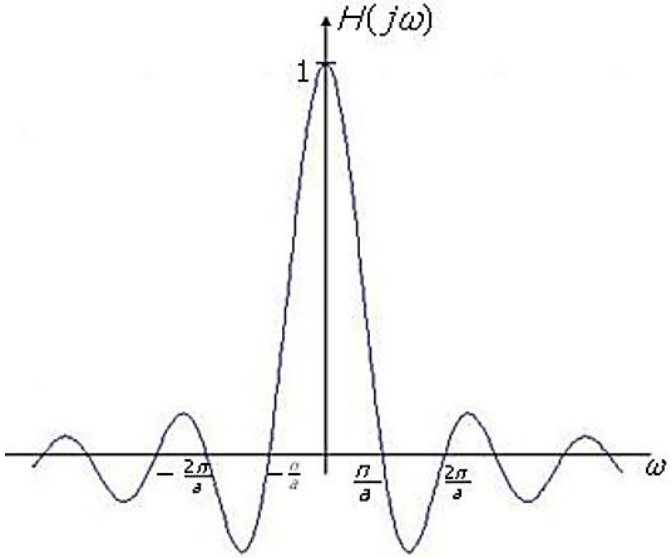
$$= \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot a)\ ; \quad \frac{\omega}{\pi} \cdot a = m\ , \quad m \in Z$$

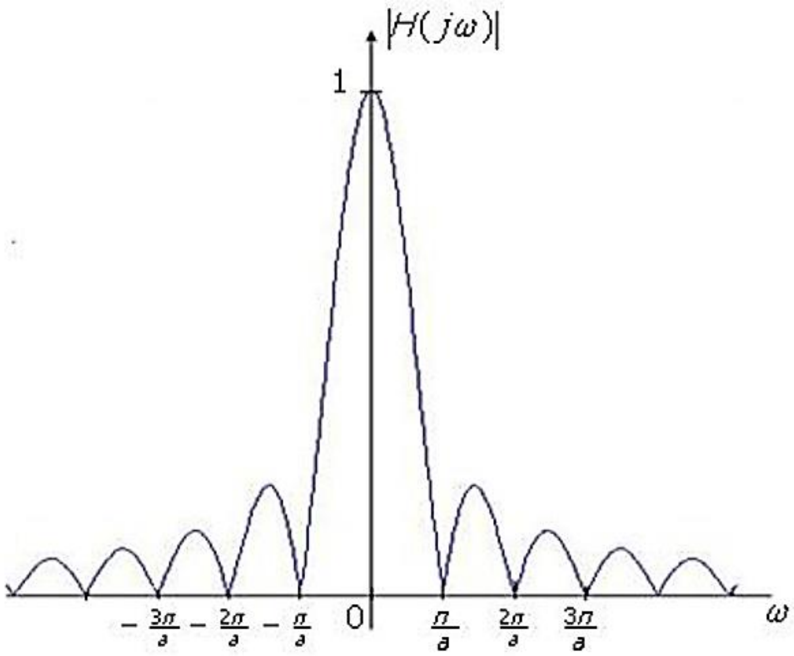
Fourier Series of Periodic Signals



تشخیص نوع فیلتر:

این سیستم مشابه یک فیلتر پایین گذر (غیر ایده آل) عمل می کند.





Fourier Series of Periodic Signals

تشخیص نوع فیلتر:

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}\ ,\ x(t)=e^{j\omega t}$$

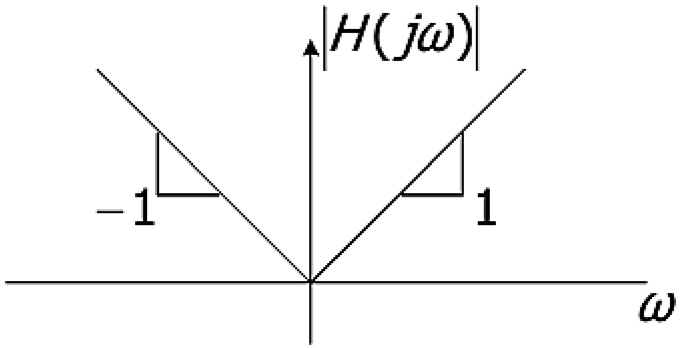
سیستمی که پاسخ آن به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ است چه نوع فیلتری است؟

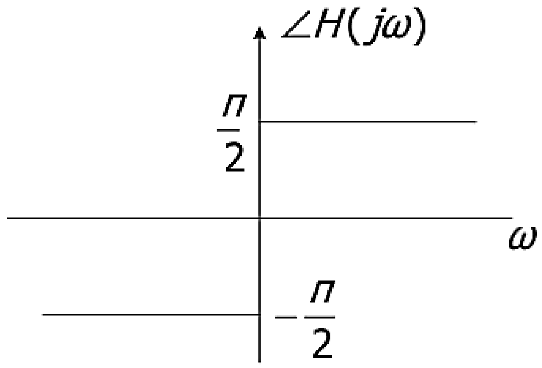
$$x(t)=e^{j\omega t}\ \Rightarrow\ y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$e^{j\omega t}H(j\omega)=j\omega\, e^{j\omega t}\ \Rightarrow\ H(j\omega)=j\omega$$

$$|H(j\omega)|=|\omega|$$

$$\angle H(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}; & \omega>0\\ -\frac{\pi}{2}; & \omega<0\end{cases}$$





مشابه فیلتر بالاگذر عمل می کند

Fourier Series of Periodic Signals

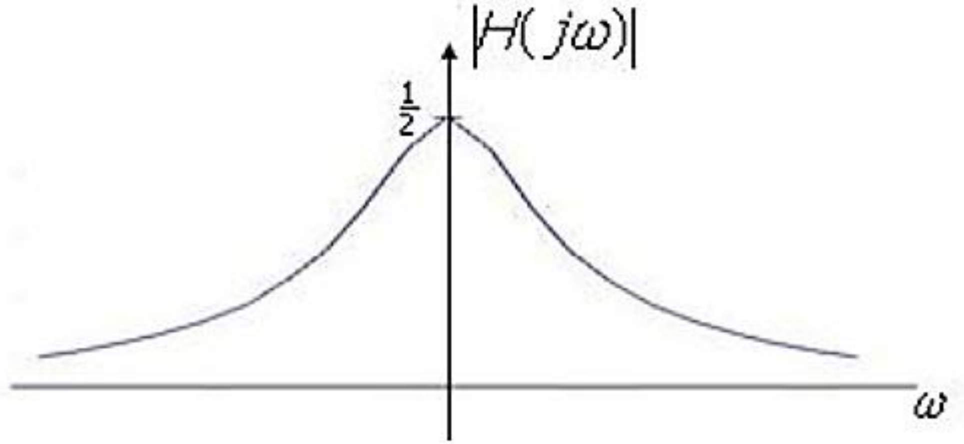
تشخیص نوع فیلتر:

اگر $y'(t)+2y(t)=x(t)$ نوع فیلتر را تشخیص داده و سری فوریه خروجی را برای $x(t)=\cos(3t)$ محاسبه کنید

$$y'(t)+2y(t)=x(t);\quad x(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$j\omega e^{j\omega t}H(j\omega)+2e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t};$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\quad,\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$



فیلتر پایین گذر

Fourier Series of Periodic Signals

تشخیص نوع فیلتر:

اگر $y'(t)+2y(t)=x(t)$ نوع فیلتر را تشخیص داده و سری فوریه خروجی را برای $x(t)=\cos(3t)$ محاسبه کنید

$$x(t)=\cos 3t=\frac{1}{2}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{-j3t} \quad ;\omega_0=3$$

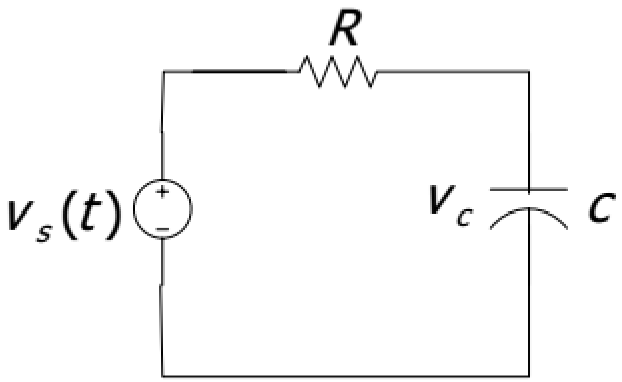
$$b_1=\frac{1}{2}H(j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}\ ,\ b_{-1}=\frac{1}{2}H(-j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}e^{-j3t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{j56.3}}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{-j56.3}}e^{-j3t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\cos(3t-56.3)$$

Fourier Series of Periodic Signals

$$v_o = v_c(t)$$

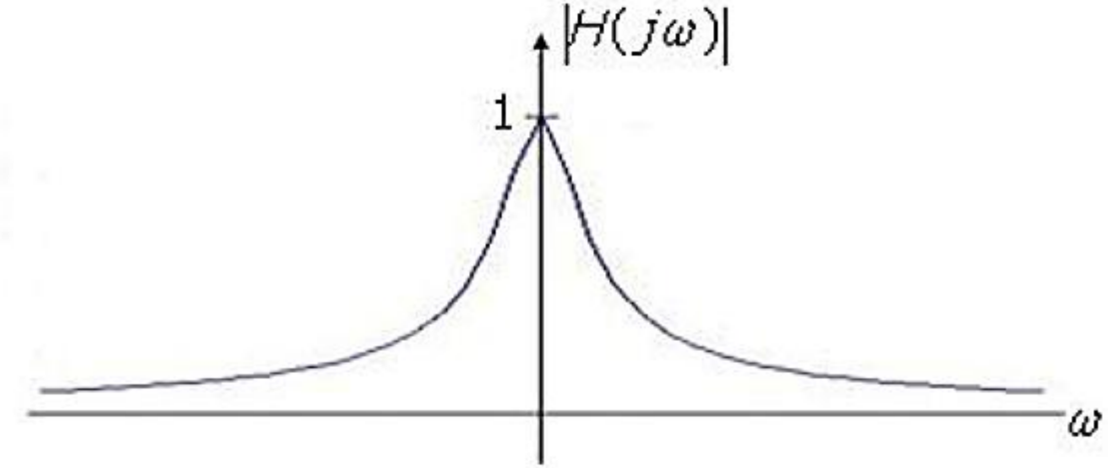


تشخیص نوع فیلتر:

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t)\;; \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_c(t) = e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$\Rightarrow RC(j\omega)e^{j\omega t}H(j\omega) + e^{j\omega t}H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

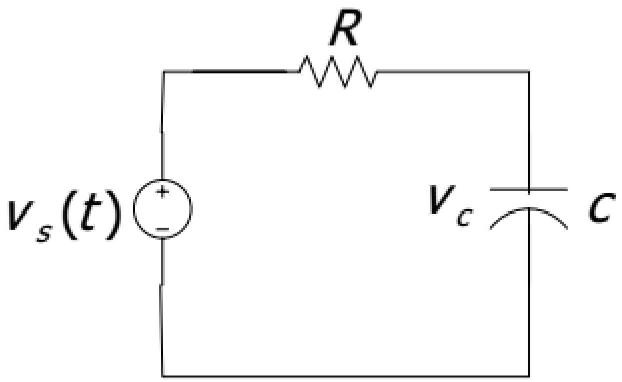
$$H(j\omega) = \frac{1}{RC(j\omega)+1}\;; \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$



فیلتر پایین گذر

Fourier Series of Periodic Signals

$$v_o = v_R(t)$$

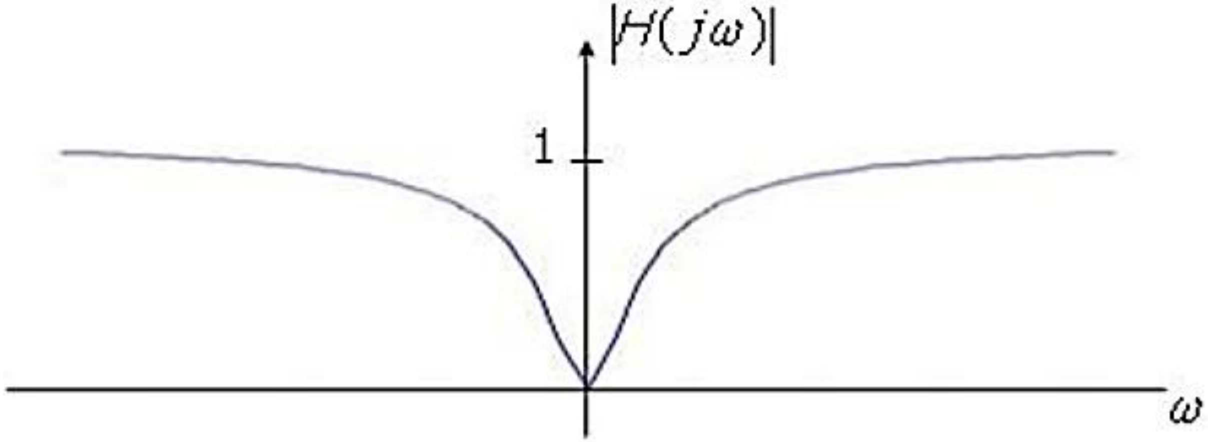


تشخیص نوع فیلتر:

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_R(t) = \frac{dv_s(t)}{dt} \;; \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_R(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega e^{j\omega t} + \frac{1}{RC} e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} + j\omega} \;; \quad |H(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{(\frac{1}{RC})^2 + \omega^2}}$$



فیلتر بالا گذر

Fourier Series of Periodic Signals

سری فوریه سیستم های LTI گسسته در زمان

$$x[n]=Z^n \Rightarrow y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m}\cdot h[m]=Z^n\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]Z^{-m}=Z^n\cdot H(z) \qquad H(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]Z^{-n}$$

$$Z=e^{j\Omega};\ x[n]=e^{j\Omega n}\Rightarrow y[n]=e^{jn\Omega}\cdot H(e^{j\Omega});\ H(e^{j\Omega})\overset{\Delta}{=}H(j\Omega)\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x[n]=x[n+N]\quad;\quad x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad y[n]=\sum_{k=<N>} b_k\cdot H(jk\frac{2\pi}{N})\quad;H(jk\frac{2\pi}{N})\overset{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

سری فوریه سیگنالهای گسسته در زمان متناوب با دوره تناوب سیگنال اصلی است.

Fourier Series of Periodic Signals

یادآوری سری های هندسی

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & ,\alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

Fourier Series of Periodic Signals

سری فوریه سیستم های LTI گسسته در زمان

یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h[n]=a^n u[n]$ است، پاسخ $y[n]$ به ورودی زیر را بیابید.

$$x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$$

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n]=e^{j\Omega n} \qquad H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-j\Omega})^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

سری فوریه سیستم های LTI گسسته در زمان

$$y[n]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

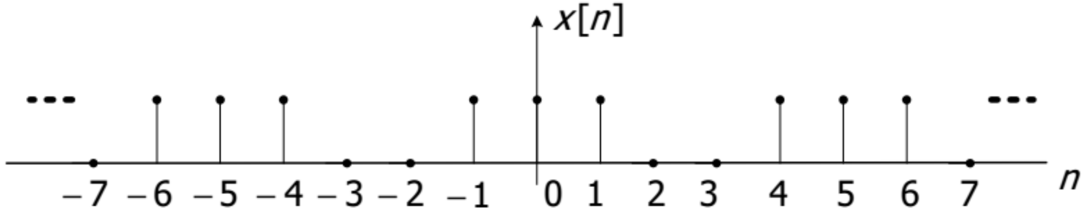
$$b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}\qquad,\qquad b_{-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\, e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

Fourier Series of Periodic Signals

سری فوریه سیستم های LTI گسسته در زمان

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی متناوب $x[n]$ داده شده است. مطلوبست تعیین خروجی

$$h[n]=(\frac{1}{2})^{|n|} \quad , \quad x[n]=\begin{cases}1 & n=0,\pm1\\ 0 & n=\pm2,\pm3\end{cases} \quad ; N=6$$



$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{6}(e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)}+1+e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)})=\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))$$

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^{|n|}\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2}\cdot e^{j\Omega})^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{j\Omega})^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{n}$$

Fourier Series of Periodic Signals

سری فوریه سیستم های LTI گسسته در زمان

$$H(j\Omega)=\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos(\Omega)+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5-4\cos(\Omega)}$$

$$H(jk\frac{2\pi}{6})=\frac{3}{5-4\cos(k\frac{\pi}{3})}\Rightarrow y[n]=\sum_{k=<6>}\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))\cdot H(jk\frac{\pi}{3})e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان گسسته)

$$x[n] \longrightarrow \overset{LTI}{\boxed{h[n]}} \longrightarrow y[n]$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

$H(j\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است پس مي‌توان نوشت:

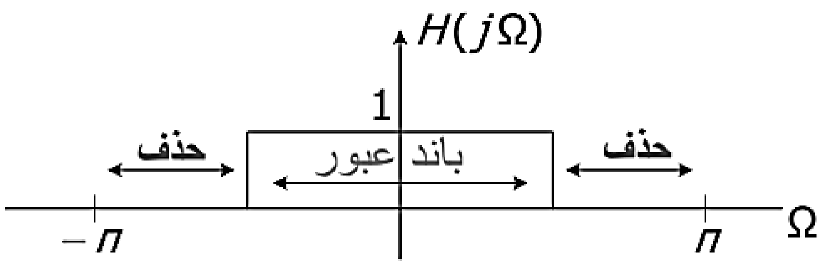
$$H(j\Omega) = H(j(\Omega + 2\pi))$$

بدين ترتيب براي تشخيص نوع فيلتر در سيستم‌هاي زمان گسسته به اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi,\pi]$ توجه شود.

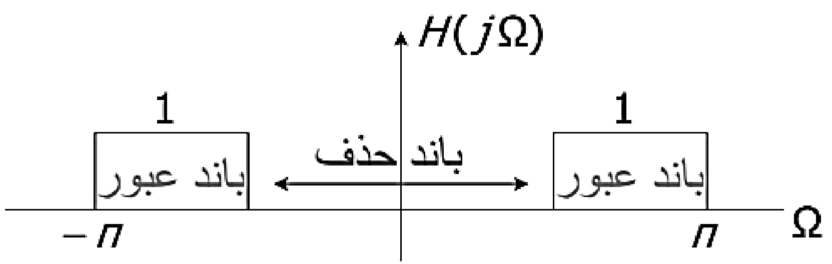
Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان گسسته)

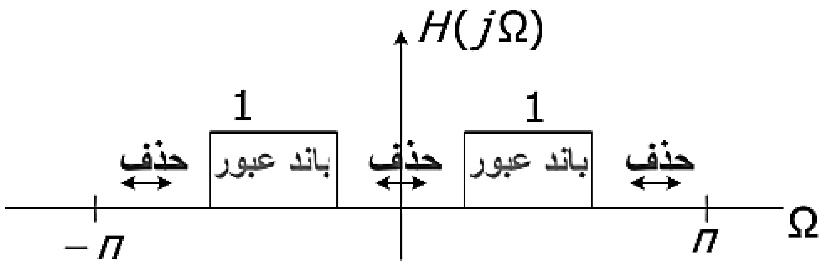
فیلتر پائین‌گذر (LPF*):



فیلتر بالاگذر (HPF*):



فیلتر میان‌گذر (BPF*):



Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان گسسته)

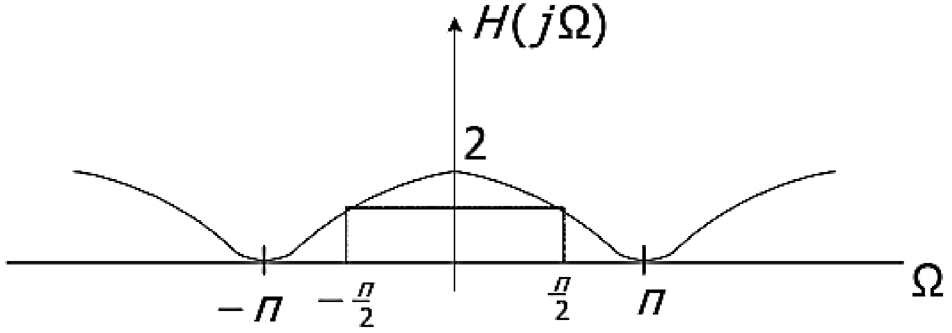
در سیستم زیر تابع تبدیل $h[n]$ و پاسخ فرکانسی آن $H(j\Omega)$ را تعیین کرده و نوع فیلتر را مشخص کنید

$$y[n]=\frac{1}{2}x[n+1]+x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n]=y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n]=\frac{1}{2}\delta[n+1]+\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\delta[n+1]+\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]\right)e^{-j\Omega n}=\frac{1}{2}e^{j\Omega}+1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}=1+\cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0 & \Omega=-\pi\\ 1 & \Omega=-\frac{\pi}{2}\\ 2 & \Omega=0\\ 1 & \Omega=\frac{\pi}{2}\\ 0 & \Omega=\pi\end{cases}$$



فیلتر پایین گذر

Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان گسسته)

در سیستم زیر تابع تبدیل $h[n]$ و پاسخ فرکانسی آن $H(j\Omega)$ را تعیین کرده و نوع فیلتر را مشخص کنید

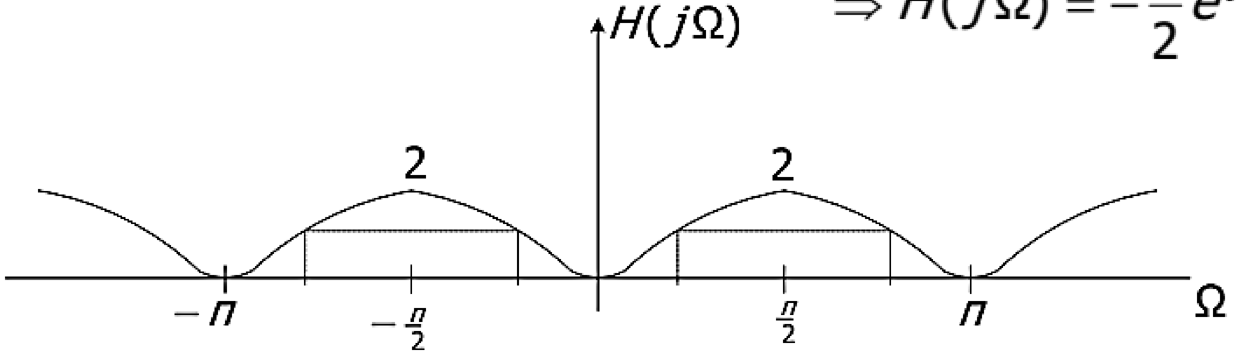
$$y[n]=-\frac{1}{2}x[n+2]+x[n]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

$$x[n]=e^{j\Omega n}\Rightarrow y[n]=e^{j\Omega n}H(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega n}H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n+2)}+e^{j\Omega n}-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n-2)}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j2\Omega}+1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega 2}=1-\cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0 & \Omega=0\\ 1 & \Omega=\pm\frac{\pi}{4}\\ 2 & \Omega=\pm\frac{\pi}{2}\\ 1 & \Omega=\pm\frac{3\pi}{2}\\ 0 & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



فیلتر میان گذر

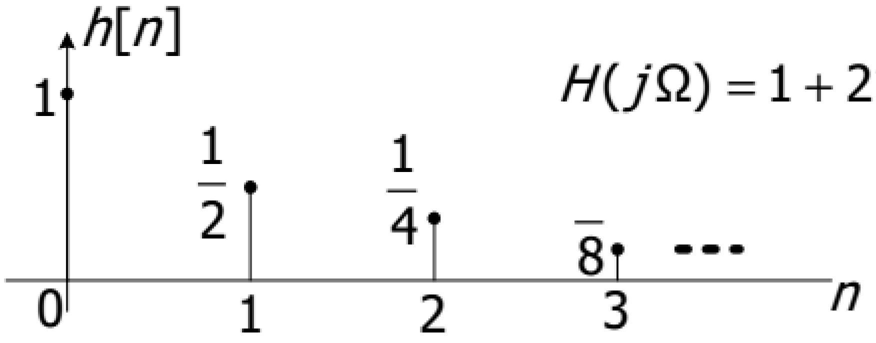
Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان گسسته)

در سیستم زیر تابع تبدیل $h[n]$ و پاسخ فرکانسی آن $H(j\Omega)$ را تعیین کرده و نوع فیلتر را مشخص کنید

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) x[n-k]$$

$$h[n] = y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k})\delta[n-k] = \delta[n] + 2^{-1}\delta[n-1] + 2^{-2}\delta[n-2] + \cdots$$



$$H(j\Omega) = 1 + 2^{-1}e^{-j\Omega} + 2^{-2}e^{-j2\Omega} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

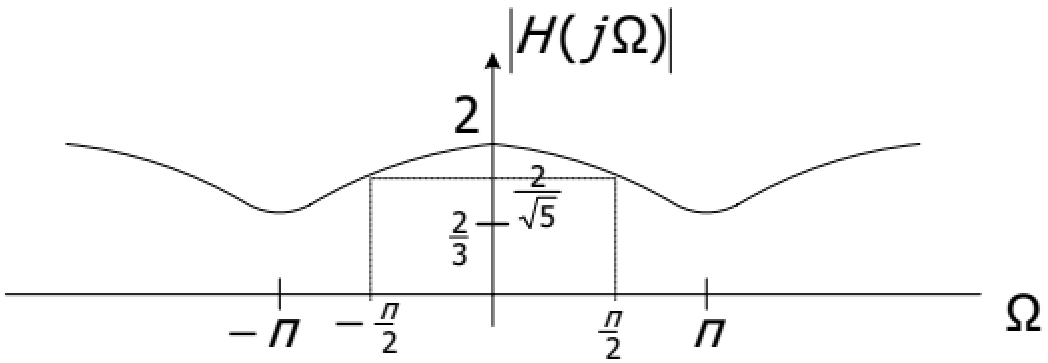
Fourier Series of Periodic Signals

فیلتر کردن (زمان گسسته)

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos\Omega + j\frac{1}{2}\sin\Omega}$$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} - \cos(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}$$

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} 2 & \Omega = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega = \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3} & \Omega = \pm\pi \end{cases}$$



فیلتر پایین گذر