

مثال

۴۰۷ چرتاب يك ماهواره به دور زمین از کیپ کاناودال. بنا بر مطالب فصل قبل، مثال ۶.۶ (الف)، می دانیم که سرعت يك ماهواره در مداري دایره ای در نزدیکی زمین حدود 8 km/s است. ماهواره ها به سمت شرق پرتاب می شوند تا از چرخش زمین استفاده شود. در مورد نقطه ای واقع بر زمین در نزدیکی خط استوا، سرعت چرخشی تقریباً عبارت است از: زمین ω زمین R که مقدار عددیش حدود 5 km/s است. برای اکثر سوخته های موشکی، سرعت پرتاب مؤثر حدود 2 تا 4 km/s است. مثلاً، اگر بگیریم: $V = 2.5 \text{ km/s}$ ، در این صورت نسبت جرمی محاسبه شده، طبق معادله (۶.۲۷)، برای اینکه موشک بعد از حرکت از زمین به سرعت مداری لازم برسد، عبارت است از

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v-v_0}{V}\right) = \exp\left(\frac{8.5-5}{2.5}\right) = e^2 = 2.01$$

بنابراین فقط پنج درصد جرم کل اولیه m_0 است که موشک آن را حمل می کند.

مسائل

۱۰۷ سیستمی شامل سه ذره، به جرمهای واحد، است که بردارهای مکان و سرعت آنها به قرار زیرند

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} & \mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{i} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{j} + \mathbf{k} & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{j} \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{k} & \mathbf{v}_3 &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

بردار مکان و سرعت مرکز جرم را بیابید. همچنین تکانه خطی سیستم را پیدا کنید. ۲۰۷ (الف) انرژی جنبشی سیستم بالا را بیابید. (ب) مقدار $mv_{cm}^2/2$ را پیدا کنید. (ج) تکانه زاویه ای حول مبدأ را بیابید.

۳۰۷ از تفنگی به جرم M گلوله ای به جرم m شلیک می شود. اگر پس زنی تفنگ بتواند آزادانه انجام گیرد و سرعت اولیه گلوله (سرعت نسبت به تفنگ هنگامی که از دهانه لوله خارج می شود) v_0 باشد، نشان دهید که سرعت واقعی گلوله نسبت به زمین $v_0/(1+\gamma)$ و سرعت پس زنی تفنگ $\gamma v_0/(1+\gamma)$ است، که $\gamma = m/M$. ۴۰۷ قطعه چوبی روی میز صاف افقی در حال سکون قرار دارد. با تفنگی به طور افقی به این قطعه چوب شلیک می شود و گلوله از میان این قطعه عبور کرده و با نصف سرعت اولیه اش، درست قبل از ورود به قطعه، از آن خارج می شود. نشان دهید که کسری از انرژی جنبشی اولیه گلوله که به صورت گرما تلف می شود برابر $\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4}$ است؛ γ عبارت است از نسبت جرم گلوله به جرم قطعه چوب ($\gamma < 1$).

۵۰۷ يك گلولهٔ توپ نسبت به سطح افق با زاویهٔ 60° و سرعت اولیهٔ v شلیک می‌شود. این گلوله در بالاترین بخش مسیرش منفجر و به دو جزء مساوی تقسیم می‌شود؛ یکی از آنها با سرعت اولیهٔ $v/2$ ، نسبت به زمین، مستقیماً به سمت بالا حرکت می‌کند. جهت و سرعت حرکت جزء دیگر گلولهٔ توپ را بلافاصله بعد از انفجار به دست آورید.

۶۰۷ توپی از ارتفاع h روی سنگفرش افقی سقوط می‌کند. اگر ضریب بازگشت e باشد، نشان دهید که مسافت کلی که توپ ضمن حرکت قائم می‌پیماید، قبل از آنکه جهیدنش قطع شود عبارت است از $h(1+e^2)/(1-e^2)$. همچنین مدت زمانی را بیابید که توپ در حال جهش است.

۷۰۷ اتومبیل کوچکی به جرم m و سرعت اولیهٔ v روی جاده‌ای یخ زده با يك کامیون به جرم m که با سرعت $v/4$ از سوی مقابل می‌آید شاخ به شاخ برخورد می‌کند. اگر ضریب بازگشت در این برخورد $1/4$ باشد، سرعت و جهت حرکت هر کدام از این دو وسیلهٔ نقلیه را بلافاصله بعد از برخورد بیابید.

۸۰۷ نشان دهید که انرژی جنبشی يك سیستم دو ذره‌ای عبارت است از $\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$ که $m = m_1 + m_2$ ، v سرعت نسبی، و μ جرم کاهش یافته است.

۹۰۷ اگر دو جسم برخورد مستقیم انجام دهند، نشان دهید که اتلاف انرژی برابر است با

$$\frac{1}{4}\mu v^2(1-e^2)$$

که μ جرم کاهش یافته، v سرعت نسبی قبل از برخورد، و e ضریب بازگشت است.

۱۰۰۷ ذره‌ای متحرك به جرم m_1 با ذرهٔ هدف به جرم m_2 ، که ابتدا در حال سکون است، به طور کشان برخورد می‌کند. اگر برخورد رو در رو باشد، نشان دهید که ذرهٔ فرودی کسر μ/m را از انرژی جنبشی اصلی خود از دست می‌دهد؛ μ جرم کاهش یافته و $m = m_1 + m_2$.

۱۱۰۷ نشان دهید که تکانهٔ زاویه‌ای يك سیستم دو ذره‌ای عبارت است از

$$\mathbf{r}_{cm} \times m\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{R} \times \mu\mathbf{v}$$

که $m = m_1 + m_2$ ، μ جرم کاهش یافته، $\mathbf{R}$ بردار مکان نسبی، و $\mathbf{v}$ سرعت نسبی دو ذره است.

۱۲۰۷ زمان تناوب مشاهده شدهٔ ستارهٔ مزدوج دجاجة α ، که احتمال کلی می‌رود از يك ستارهٔ روشن و يك سیاهچاله تشکیل شده، ۶۵ روز است. اگر جرم مؤلفهٔ مرئی ۱۵ برابر جرم خورشید و جرم سیاهچاله ۸ برابر جرم خورشید باشد، نشان دهید که نیم قطر بزرگ مدار سیاهچاله نسبت به ستارهٔ مرئی تقریباً $1/5$ فاصلهٔ زمین تا خورشید است.

۱۳۰۷ پروتونی به جرم m_p و با بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}$ به اتم هلیوم، به جرم $4m_p$ ، که ابتدا در حال سکون است برخورد می‌کند. اگر پروتون نقطهٔ برخورد را در حالی ترك کند که

با امتداد اولیه حرکتش زاویه 45° می‌سازد، سرعت نهایی هر ذره را بیابید. فرض کنید که برخورد کاملاً کشسان باشد.

۱۴.۷ مسئله بالا را برای حالتی که برخورد ناکشسان و Q مساوی $1/4$ انرژی اولیه پروتون باشد، حل کنید.

۱۵.۷ با مراجعه به مسئله ۱۳.۷، زاویه پراکندگی پروتون در دستگاه مرکز جرم را بیابید.

۱۶.۷ در مسئله ۱۴.۷، زاویه پراکندگی پروتون در دستگاه مرکز جرم را به دست آورید. ۱۷.۷ ذره‌ای به جرم m با تکانه خطی اولیه p_1 به ذره‌ای دیگر به همان جرم که در حال سکون است، برخورد می‌کند. اگر بزرگی تکانه‌های خطی نهایی دو ذره، به ترتیب p'_1 و p'_2 باشد، نشان دهید که اتلاف انرژی در این برخورد از رابطه زیر به دست می‌آید

$$Q = \frac{p'_1 p'_2}{m} \cos \psi$$

که ψ زاویه بین مسیرهای دو ذره بعد از برخورد است.

۱۸.۷ زنجیر یکنواختی به صورت کپه‌ای روی میز قرار دارد. اگر یک سر آن با سرعت یکنواخت v به طور قائم بالا کشیده شود، نشان دهید نیرویی بالاسو که باید بر سر زنجیر وارد آید، مساوی وزن طول $(v^2/g) + z$ از زنجیر است، که z طول زنجیر حلقه نشده در هر لحظه به شمار می‌آید.

۱۹.۷ معادله دیفرانسیل حرکت یک قطره باران را به دست آورید که در داخل مه سقوط کرده و در ضمن سقوط خود جرم جمع می‌کند. فرض کنید قطره کروی باقی بماند و آهنگ افزایش جرم با سطح مقطع قطره ضریب سرعت سقوطی متناسب باشد. نشان دهید که اگر قطره در حالی که بی نهایت کوچک است از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، در این صورت شتاب آن ثابت و مساوی $g/2$ ثابت بماند.

۲۰.۷ زنجیر سنگین یکنواختی به طول a مفروض است. ابتدا قسمتی از آن به طول b از لبه میزی آویزان است. قسمت دیگرش، به طول $a - b$ روی لبه میز حلقه شده است. اگر زنجیر رها شود، نشان دهید که سرعت آن وقتی آخرین بندش از لبه میز جدا می‌شود، عبارت است از $[2g(a^3 - b^3)/3a^2]^{1/2}$.

۲۱.۷ بر موشکی که در داخل جو حرکت می‌کند مقاومت خطی هوا kV - وارد می‌آید. معادله دیفرانسیل حرکت را، وقتی تمام نیروهای خارجی دیگر چشم پوشیدنی باشند، بیابید. از این معادله انتگرال بگیرید و نشان دهید که اگر موشک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت نهایی آن از رابطه $v = V \alpha [1 - (m/m_0)^{1/\alpha}]$ به دست می‌آید که V سرعت نسبی سوخت خروجی، $\alpha = |\dot{m}/k| = \text{const}$ ، m_0 جرم اولیه موشک به اضافه سوخت، و m جرم نهایی آن است.

۲۲.۷ معادله حرکت موشکی را به دست آورید که به طور قائم به بالاسو آتش می‌شود، g