بسم الله الرحمن الرحیم

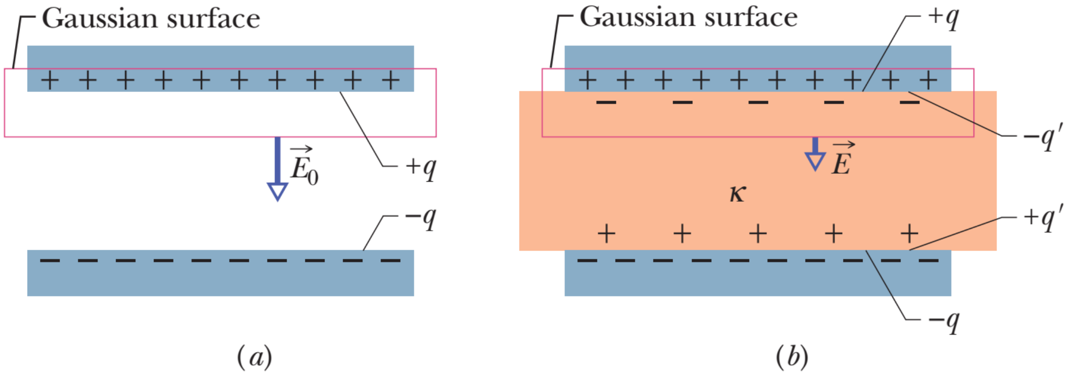
فصل ۲۱- ظرفیت

٤- دی الکتریکها و قانون گاوس

دی الکتریکها و قانون گاوس

در بحث خود در مورد قانون گاؤس در فصل ۱۹، فرض کردیم بارها در خلأ قرار دارند. در این بخش خواهیم دید که چگونه این قانون در حضور مواد دی‌الکتریک، از قبیل آنهایی که در جدول ۲۱-۱ فهرست شده‌اند، اصلاح شده و تعمیم می‌یابد. شکل ۲۱-۱۷ یک خازن تخت به مساحت سطح A را در حضور دی‌الکتریک و بدون حضور آن نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که بار q روی صفحه‌ها در هر دو وضعیت یکسان است. توجه کنید که میدان میان صفحه‌ها با یکی از روشهایی که در بخش ۲۱-۷ شرح داده شدند، روی وجوه دی‌الکتریک بارهایی را القا می‌کند.

برای وضعیت شکل ۲۱-۱۷ الف، یعنی حالتی که دی‌الکتریک حضور ندارد، می‌توانیم میدان الکتریکی $\vec{E}_0$ میان صفحه‌ها را نظیر آنچه برای شکل ۲۱-۵ انجام دادیم، پیدا کنیم: بار $q+$ روی صفحهٔ بالایی را با یک سطح گاؤسی محصور می‌کنیم و سپس قانون گاؤس را در مورد آن به کار می‌بندیم. اگر E_0 معرف بزرگی میدان باشد، خواهیم داشت



شکل ۲۱-۱۷ یک خازن تخت (الف) بدون حضور و (ب) در حضور قطعهٔ دی الکتریکی که در آن گذاشته شده است. فرض شده است که بار q روی صفحه‌ها در هر دو حالت یکسان است.

$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_\circ E_\circ A = q \qquad (۳۰-۲۱)$$

یا

$$E_\circ = \frac{q}{\varepsilon_\circ A} \qquad (۳۱-۲۱)$$

در شکل ۲۱-۱۷ ب، یعنی حالتی که دی الکتریک درون خازن حضور دارد، می‌توانیم میدان میان صفحه‌ها (و درون دی الکتریک) را با استفاده از همان سطح گاؤسی پیدا کنیم. ولی، اکنون این سطح دو نوع بار را محصور می‌کند: اگر چه این سطح هنوز بار $+q$ را روی صفحهٔ بالایی در بردارد، ولی حالا بار القا شدهٔ $-q'$ روی وجه بالایی دی‌الکتریک را نیز در برمی‌گیرد. به بارهای روی صفحهٔ رسانا *بارهای آزاد* گفته می‌شود، زیرا اگر پتانسیل الکتریکی این صفحه را تغییر دهیم، این بارها می‌توانند حرکت کنند؛ بارهای القا شده روی سطح دی‌الکتریک، بارآزاد نیستند زیرا نمی‌توانند از آن سطح حرکت کنند.

بار خالص محصور شده توسط سطح گاؤسی در شکل ۲۱-۱۷ ب برابر با $q-q'$ است، و از اینرو قانون گاؤس چنین به دست می‌دهد

$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E}.d\vec{A}=\varepsilon_\circ EA=q-q' \qquad (۳۲-۲۱)$$

یا

$$E=\frac{q-q'}{\varepsilon_\circ A} \qquad (۳۳-۲۱)$$

اثر دی‌الکتریک تضعیف میدان اولیهٔ $E_\circ$ با ضریب κ است؛ بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$E=\frac{E_\circ}{\kappa}=\frac{q}{\kappa\varepsilon_\circ A} \qquad (۳۴-۲۱)$$

از مقایسهٔ معادله‌های ۲۱-۳۳ و ۲۱-۳۴ نتیجه می‌گیریم که

$$q-q'=\frac{q}{\kappa} \qquad (۳۵-۲۱)$$

معادلهٔ ۲۱-۳۵ به درستی نشان می‌دهد که بزرگی q' بار سطحی القا شده کمتر از بار آزاد q است و در صورتی که دی‌الکتریک حضور نداشته باشد برابر با صفر است (زیرا آنگاه در معادلهٔ ۲-۳۵، $\kappa = ۱$ است).

با قراردادن $q-q'$ از معادلهٔ ۲۱-۳۵ در معادلهٔ ۲۱-۳۲، قانون گاؤس را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \text{(قانون گاؤس در حضور دی‌الکتریک)} \quad (۳۶-۲۱)$$

اگر چه این معادله را برای خازن صفحه - موازی به دست آوردیم، ولی برای کلیهٔ خازنها برقرار است و کلی‌ترین شکلی است که قانون گاؤس می‌تواند به آن صورت نوشته شود. توجه کنید که

۱. اکنون در انتگرال شار $\kappa\vec{E}$ ، و نه فقط $\vec{E}$ ، وارد می‌شود. (گاهی بردار $\varepsilon_0\kappa\vec{E}$ *جابه‌جایی الکتریکی* $\vec{D}$ نامیده می‌شود، و از این رو معادلهٔ ۲۱-۳۶ را می‌توان به صورت $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q$ نوشت.)

۲. اکنون بار q محصور شده توسط سطح گاؤسی *فقط بار آزاد* اختیار شده است. اگر چه بار سطحی القایی به طور عمد در طرف راست معادلهٔ ۲۱-۳۶ نادیده انگاشته شده است، ولی با حضور ثابت دی الکتریک κ در سمت چپ، معادله به طور کامل در نظر گرفته شده است.

۳. معادلهٔ ۲۱-۳۶ با معادلهٔ ۱۹-۷، بیان اولیهٔ ما از قانون گاؤس، فقط در یک چیز متفاوت است و آن اینکه ε_0 در معادلهٔ آخری با $\kappa\varepsilon_0$ جایگزین شده است. κ را داخل انتگرال معادلهٔ ۲۱-۳۶ گذاشتیم تا در حالتهایی که κ روی کل سطح گاؤسی ثابت نیست نیز این معادله مورد استفاده باشد.

مسئلهٔ نمونهٔ ۲۱-۷

شکل ۲۱–۱۸ یک خازن تخت را به مساحت سطح A و فاصلهٔ صفحه‌ها برابر d نشان می‌دهد. اختلاف پتانسیل $V_\circ$ بین صفحه‌ها اعمال شده است. سپس باتری قطع شده، و تیغه‌ای دی‌الکتریک به ضخامت b و ثابت دی‌الکتریک κ ، مطابق شکل میان صفحه‌ها گذاشته می‌شود. فرض کنید $A=۱۱۵\mathrm{cm}^۲$ ، $d=۱/۲۴\mathrm{cm}$ ، $V_\circ=۸۵/۵\mathrm{V}$ ، $b=\circ/۷۸\circ\mathrm{cm}$ و $\kappa=۲/۶۱$ است.

(الف) ظرفیت $C_\circ$ پیش از آنکه تیغهٔ دی‌الکتریک گذاشته شود، چقدر است؟

محاسبه: از معادلهٔ ۲۱–۹ داریم

$$C_\circ=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱\circ^{-۱۲}\mathrm{F/m})\,(۱۱۵\times۱\circ^{-۴}\,\mathrm{m}^۲)}{۱/۲۴\times۱\circ^{-۲}\mathrm{m}}$$

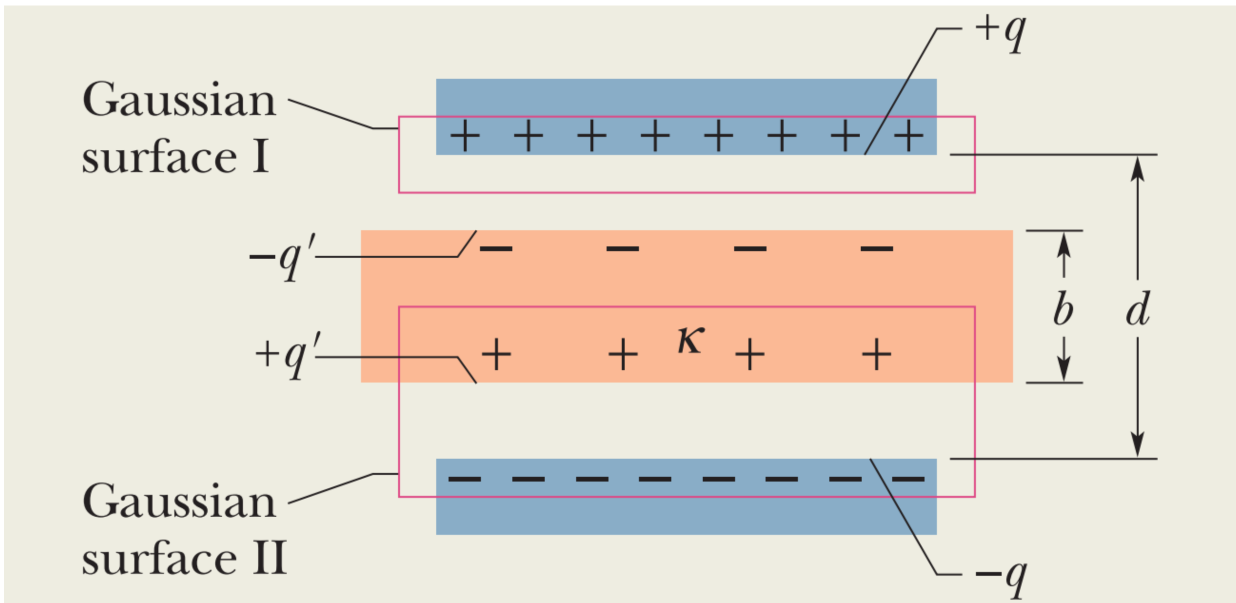
$$=۸/۲۱\times۱\circ^{-۱۲}\mathrm{F}=۸/۲۱\ \mathrm{pF} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) چقدر بار آزاد روی صفحه‌ها ظاهر می‌شود؟

محاسبه: از معادلهٔ ۲۱–۱ داریم

$$q=C_\circ V_\circ=(۸/۲۱\times۱\circ^{-۱۲}\mathrm{F})\,(۸۵/۵\,\mathrm{V})$$

$$=۷/\circ۲\times۱\circ^{-۱\circ}\,\mathrm{C}=۷\circ۲\,\mathrm{pC} \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۲۱–۱۸ یک خازن تخت شامل تیغه‌ای دی‌الکتریک است که فقط بخشی از فضای میان صفحه‌ها را پرمی‌کند.

چون باتری باردار کننده پیش از آنکه تیغه گذاشته شود، قطع شده است، وقتی که تیغه در مکان خود قرار داده شود، بار آزاد بدون تغییر باقی می‌ماند.

(پ) میدان الکتریکی $E_\circ$ در فضای خالی میان صفحه‌ها و تیغهٔ دی‌الکتریک چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی لازم است که برای سطح گاؤسی I در شکل ۲۱–۱۸ قانون گاؤس را به شکل معادلهٔ ۲۱–۳۶ به کار بریم.

محاسبه‌ها: آن سطح از فاصله می‌گذرد، و بنابراین فقط بار آزاد روی صفحهٔ بالایی خازن را محصور می‌کند. چون بردار سطح $d\vec{A}$ و بردار میدان $\vec{E}_\circ$ هر دو رو به پایین هستند، ضرب نقطه‌ای در معادلهٔ ۲۱–۳۶ چنین نوشته می‌شود

$$\vec{E}_\circ \cdot d\vec{A} = E_\circ\, dA \cos \circ^\circ = E_\circ\, dA$$

در نتیجه معادلهٔ ۲۱–۳۶ به صورت زیر در می‌آید

$$\varepsilon_\circ \kappa E_\circ \oint dA = q$$

حال انتگرالگیری به‌سادگی مساحت سطح A صفحهٔ خازن را به دست می‌دهد. بنابراین، خواهیم داشت

$$\varepsilon_{\circ}\kappa E_{\circ}A=q$$

یا

$$E_{\circ}=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}\kappa A}$$

باید در اینجا $\kappa=۱$ قرار دهیم، زیرا سطح گاؤسی I از دی الکتریک عبور نمی‌کند. بنابراین، داریم

$$E_{\circ}=\frac{q}{\varepsilon_{\circ}\kappa A}=\frac{۷/۰۲\times ۱۰^{-۱۰}\ \mathrm{C}}{(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\mathrm{F/m})(۱)\ (۱۱۵\times ۱۰^{-۴}\ \mathrm{m}^{۲})}$$

$$=۶۹۰۰\ \mathrm{V/m}=۶/۹۰\ \mathrm{V/m}$$ (پاسخ)

توجه کنید وقتی که تیغه گذاشته می‌شود، مقدار $E_{\circ}$ تغییر نمی‌کند زیرا مقدار بار محصور شده توسط سطح گاؤسی I در شکل ۲۱–۱۸ تغییر نمی‌کند.

(ت) میدان الکتریکی $E_{۱}$ در تیغهٔ دی‌الکتریک چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی برای سطح گاؤسی II در شکل ۲۱–۱۸، قانون گاؤس را به شکل معادلهٔ ۲۱–۳۶ به کار می‌بریم.

محاسبه‌ها: این سطح، بار آزاد $q-$ و بار القایی $q'+$ را در بردارد، ولی هنگامی که از معادلهٔ ۲۱–۳۶ استفاده می‌کنیم دومی را نادیده می‌گیریم. از آنجا داریم

$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E}_1 . d\vec{A} = -\varepsilon_0 \kappa E_1 A = -q \qquad (۲۱–۳۷)$$

(اولین علامت منفی در این معادله ناشی از ضرب نقطه‌ای $\vec{E}_1 . d\vec{A}$ است، زیرا اکنون بردار میدان $\vec{E}_1$ رو به پایین و بردار سطح $d\vec{A}$ رو به بالا قرار دارند.) حالا $\kappa = ۲/۶۱$ است. بنابراین، معادلهٔ ۲۱–۳۷ چنین به دست می‌دهد

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \kappa A} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{۶/۹۰\,\text{kV/m}}{۲/۶۱} = ۲/۶۴\,\text{kV/m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ث) پس از آنکه تیغه گذاشته شد، اختلاف پتانسیل V میان صفحه‌ها چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی باید V را با انتگرالگیری در امتداد مسیر یک خط راست که مستقیماً از صفحهٔ پایینی تا صفحهٔ بالایی امتداد دارد، پیدا کنیم. در داخل دی‌الکتریک، طول مسیر برابر با b و میدان الکتریکی E_1 است.

محاسبه: در داخل دی‌الکتریک، طول مسیر برابر با b و میدان الکتریکی E_1 است. در داخل دو فضای خالی بالا و پایین دی‌الکتریک، طول کل مسیر $d-b$ و میدان الکتریکی E_0 است. بنابراین، معادلهٔ ۲۱-۶ چنین به دست می‌دهد

$$V = \int_{-}^{+} E\,ds = E_\circ (d-b) + E_1 b$$
$$= (۶۹۰۰\,\mathrm{V/m})(۰/۰۱۲۴\,\mathrm{m} - ۰/۰۰۷۸۰\,\mathrm{m})$$
$$+ (۲۶۴۰\,\mathrm{V/m})(۰/۰۰۷۸۰\,\mathrm{m})$$
$$= ۵۲/۳\,\mathrm{V}$$ (پاسخ)

که این مقدار کمتر از اختلاف پتانسیل اولیهٔ ۸۵/۵V است.

(ج) ظرفیت خازن با قطعه‌ای که میان صفحه‌های خازن قرار داده شده است، چقدر است؟

نکتهٔ کلیدی ظرفیت C ، درست مثل وقتی که دی‌الکتریک قرار داده نشده است، بنابر معادلهٔ ۱۹-۱ با بار آزاد q و اختلاف پتانسیل V رابطه دارد.

محاسبه: با اختیار q از قسمت (ب) و V از قسمت (ث)، خواهیم داشت

$$C = \frac{q}{V} = \frac{۷/۰۲ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{C}}{۵۲/۳\,\mathrm{V}}$$
$$= ۱/۳۴ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{F} = ۱۳/۴\,\mathrm{pF}$$ (پاسخ)

که این بزرگتر از ظرفیت اولیهٔ ۸/۲۱ pF است.

بازنگری و خلاصهٔ درس

خازن؛ ظرفیت **خازن** شامل دو رسانای منزوی (*صفحه‌ها*) با بارهای $+q$ و $-q$ است. **ظرفیت** C آن با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$q = CV \qquad (۱-۲۱)$$

که در آن V اختلاف پتانسیل میان صفحه‌هاست. یکای SI ظرفیت، فاراد است (۱ کولن بر ولت = ۱ فاراد).

تعیین ظرفیت در حالت کلی ظرفیت آرایش خازنی خاص بدین ترتیب تعیین می‌شود (۱) فرض می‌کنیم بار q روی صفحه‌ها قرار گرفته است، (۲) میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از این بار را می‌یابیم، (۳) اختلاف پتانسیل V را تعیین می‌کنیم، (۴) C

را از روی معادلهٔ ۱۹-۱ محاسبه می‌کنیم. چند نتیجهٔ ویژه به قرار زیرند:

ظرفیت *خازن تخت* با صفحه‌های موازی بـه مسـاحت A و فاصلهٔ d برابر است با

$$C=\frac{\varepsilon_{\circ}A}{d} \qquad (۲۱-۹)$$

ظرفیت *خازن استوانه‌ای* (دو استوانهٔ هم محور بلند) به طول L و شعاعهای a و b برابر است با

$$C=۲\pi\varepsilon_{\circ}\frac{L}{\ln(b/a)} \qquad (۲۱-۱۴)$$

ظرفیت *خازن کروی* با صفحه‌های کروی به شعاعهای a و b برابر است با

$$C=۴\pi\varepsilon_{\circ}\frac{ab}{b-a} \qquad (۲۱-۱۷)$$

اگر در معادلهٔ ۲۱-۱۷، $b\to\infty$ میل کند و $a=R$ باشد، برای ظرفیت یک *کرهٔ منزوی* به شعاع R داریم

$$C=۴\pi\varepsilon_{\circ}R \qquad (۲۱-۱۸)$$

خازنهای موازی و متوالی   ظرفیت معادل C_{eq} ترکیبی از خازنهای مجزا را که به طور **موازی** و به طور **متوالی** بسته شده‌اند، می‌توان از رابطه‌های زیر به دست آورد

$$C_{eq}=\sum_{j=1}^{n}C_j \quad (n \text{ خازن موازی}) \qquad (۱۹-۲۱)$$

و

$$\frac{1}{C_{eq}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_j} \quad (n \text{ خازن متوالی}) \qquad (۲۰-۲۱)$$

از ظرفیتهای معادل می‌توان برای محاسبهٔ ظرفیت ترکیبهای پیچیده‌تر متوالی - موازی استفاده کرد.

انرژی پتانسیل و چگالی انرژی   انرژی پتانسیل الکتریکی U یک خازن باردار

$$U=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2 \qquad (۲۱-۲۱ \text{ و } ۲۲-۲۱)$$

برابر با کاری است که برای باردارکردن خازن لازم است. این انرژی را می‌توان به میدان الکتریکی $\vec{E}$ خازن وابسته کرد. با بسط آن می‌توانیم انرژی ذخیره شده را به میدان الکتریکی

مربوط کنیم. در خلأ، **چگالی انرژی** u ، یا انرژی پتانسیل بر یکای حجم، درون میدانی به بزرگی E با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (۲۵-۲۱)$$

ظرفیت با وجود دی‌الکتریک اگر فضای میان صفحه‌های خازن با مادهٔ دی‌الکتریکی به طور کامل پرشود، ظرفیت C خازن با ضریب κ ، موسوم به **ثابت دی‌الکتریک**، که مشخصهٔ آن ماده است، افزایش می‌یابد. در ناحیه‌ای که با دی‌الکتریک به طور کامل پرشده است، تمام معادله‌های الکتروستاتیکی که شامل ε_0 هستند باید با جایگزین کردن ε_0 با $\kappa\varepsilon_0$ اصلاح شوند.

اثر اضافه کردن دی‌الکتریک را می‌توان با کنش میدان الکتریکی بر دوقطبیهای دائمی یا القایی در یک جسم دی‌الکتریک، درک

کرد. نتیجه، تشکیل بارهای القایی روی سطحهای دی‌الکتریک است که به ازای مقدار معین بار آزاد روی صفحه‌ها به تضعیف میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک می‌انجامد.

قانون گاؤس با وجود دی‌الکتریک وقتی دی‌الکتریک وجود داشته باشد، قانون گاؤس را می‌توان چنین تعمیم داد

$$\varepsilon_\circ \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \qquad (۳۶-۲۱)$$

که در اینجا q بار آزاد است؛ وجود هرگونه بار سطحی القایی با قراردادن ثابت دی‌الکتریک κ در داخل انتگرال به حساب می‌آید.

فصل ۲۲- جریان و مقاومت الکتریکی

۱- مقدمه

۲- جریان الکتریکی

آذرخش با فاصله‌ای کمتر از 1km از زمین بازی فوتبال در ویرجینیا به زمین اصابت کرده است. شانس اینکه آذرخش مستقیماً به یک شخص اصابت کند بسیار ضعیف است خطر بزرگتر مربوط به جریان در زمین است– جریانی که از نقطهٔ برخورد گسترش می‌یابد. هرکس واقع در زمین بازی یا جایگاه تماشاچیان می‌تواند از جریان به وجود آمده زمین بخورد، فلج شود، یا از پای درآید. اگر موقع آذرخش در فضای بازی از این نوع گرفتار شدید برای کم کردن خطر جریان زمین راه ساده‌ای وجود دارد.

چگونه می‌توانید خطر ناشی از جریان زمین را کاهش دهید؟

پاسخ در همین فصل.

مقدمه

در پنج فصل گذشته دربارهٔ الکتروستاتیک، فیزیک بارهای ساکن بحث کردیم. دراین فصل و فصل بعدی، دربارهٔ فیزیک جریانهای الکتریکی، یعنی بارهای در حال حرکت بحث می‌کنیم.

مثالهای جریانهای الکتریکی فراوان است و شامل حرفه‌های زیادی می‌شود. هواشناسان با آذرخش و با جریان بسیار آرام بار از طریق جوّ رو به رو هستند. زیست شناسان، اندام شناسان و مهندسانی که در فناوری پزشکی کار می‌کنند با جریانهای عصبی که ماهیچه‌ها را کنترل می‌کنند و به ویژه با چگونگی برقراری دوبارهٔ این جریانها پس از جراحتهای نخاعی سر و کار دارند. مهندسان برق با دستگاههای بی شمار الکتریکی مانند دستگاههای مولد برق، دستگاههای حفاظت از آذرخش، دستگاههای ذخیرهٔ اطلاعات و دستگاههای موسیقی سر و کار دارند. مهندسان فضا جریان ذره‌های باردار از خورشید را آشکار و مطالعه می‌کنند، چون این جریان می‌تواند دستگاههای ارتباطی در مدار یا حتی دستگاههای انتقال برق در زمین را مختل کند.

دراین فصل دربارهٔ مبانی فیزیک جریانهای الکتریکی و اینکه چرا آنها در بعضی مواد می‌توانند برقرار شوند و در بعضی مواد دیگر نمی‌توانند بحث می‌کنیم. با مفهوم جریان الکتریکی شروع می‌کنیم.

جریان الکتریکی

هر چند جریان الکتریکی جریانی از بارهای متحرک است ولی همهٔ بارهای متحرک جریان الکتریکی به وجود نمی‌آورند. وقتی یک جریان الکتریکی در سطح معینی وجود دارد که در آنجا شارش خالصی از بار از سطح بگذرد. دو مثال منظور ما را روشن می‌کنند.

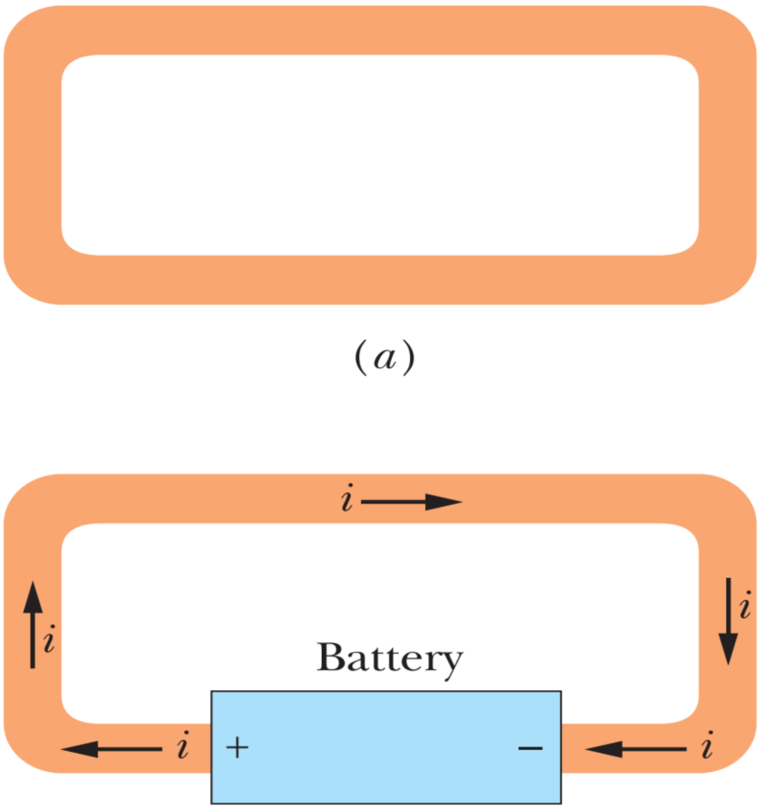
۱- الکترونهای آزاد (الکترونهای رسانش) در طول یک سیم منزوی مسی با حرکت کاتوره‌ای با تندیهایی از مرتبهٔ بزرگی 10^6 m/s در حال حرکت‌اند. اگر یک صفحهٔ فرضی از چنین سیمی بگذرانید، الکترونهای رسانش با آهنگ چند میلیارد بر ثانیه در هر دو جهت از آن عبور می‌کنند، ولی هیچ *انتقال خالصی* از بار الکتریکی در سیم وجود ندارد و بنابراین، هیچ جریان خالصی از آن نمی‌گذرد. با وجود این، اگر دو طرف سیم را به یک باتری وصل کنیم، شارش آرامی در یک جهت به وجود می‌آید که نتیجهٔ آن انتقال خالص بار است و در نتیجه یک جریان الکتریکی از سیم می‌گذرد.

۲- شارش آب در شیلنگ باغبانی حاکی از شارش جهتداری از

بارهای مثبت (پروتونها در مولکولهای آب) با آهنگی حدود چندین میلیون کولن بر ثانیه است. ولی در اینجا انتقال خالص بار وجود ندارد، زیرا یک جریان موازی از بارهای منفی (الکترونهای مولکولهای آب) دقیقاً با همان مقدار وجود دارد که درست در همان جهت حرکت می‌کنند.

در این فصل خود را- در چهار چوب فیزیک کلاسیک- به مطالعهٔ *جریانهای پایای الکترونهای رسانش* محدود می‌کنیم که در *رساناهای فلزی* مانند سیمهای مسی حرکت می‌کنند.

همان‌طور که شکل ۲۲-۱ الف نشان می‌دهد، در تمام نقطه‌های یک حلقهٔ رسانای منزوی- بدون توجه به اینکه بار اضافی دارد یا نه- پتانسیل یکسان است و هیچ میدان الکتریکی در داخل یا در سطح آن وجود ندارد. اگر چه الکترونهای رسانش وجود دارند، ولی نیروی الکتریکی خالص بر آنها وارد نمی‌شود و در نتیجه هیچ جریان خالصی وجود ندارد.



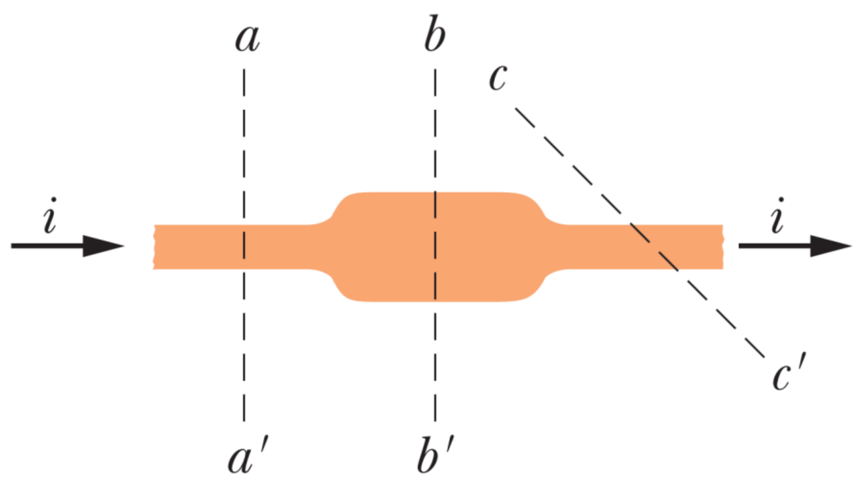
شکل ۲۲–۱ (الف) یک حلقهٔ مسی در تعادل الکتروستاتیکی. کل حلقه در یک پتانسیل قرار دارد، و میدان الکتریکی در همهٔ نقطه‌ها داخل مس صفر است. (ب) با اضافه کردن یک باتری یک اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو سر حلقه که به پایانه‌های باتری متصل است برقرار می‌شود. بنابراین، باتری در داخل حلقه یک میدان الکتریکی از یک پایانه به پایانهٔ دیگر ایجاد می‌کند و میدان موجب می‌شود که بارها در حلقه حرکت کنند. این حرکت بارها جریان i را ایجاد می‌کند.

اگر همانند شکل ۲۲-۱ ب، در حلقه یک باتری قرار دهیم، حلقهٔ رسانا دیگر در یک پتانسیل قرار نخواهد داشت. میدانهای الکتریکی در داخل مادهٔ تشکیل دهندهٔ حلقه، بر الکترونهای رسانش نیروهایی وارد می‌کنند، که موجب حرکت آنها و در نتیجه برقراری جریان می‌شود. پس از زمان کوتاهی، شارش الکترونها به مقداری ثابت و جریان الکتریکی به *حالت پایا* می‌رسد، (نسبت به زمان تغییر نمی‌کند.)

شکل ۲۲-۲ مقطعی از یک رسانا، بخشی از یک حلقهٔ رسانا را نشان می‌دهد که جریان الکتریکی در آن برقرار شده است. اگر بار dq از یک صفحهٔ فرضی (مانند aa') در زمان dt عبور کند، آنگاه جریان i که از این صفحه می‌گذرد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(تعریف جریان الکتریکی)} \qquad (۲۲-۱)$$

The current is the same in any cross section.



شکل ۲۲-۲ جریان i که از رسانا می‌گذرد در صفحه‌های aa'، bb' و cc' یک مقدار دارد.

باری که در بازهٔ زمانی از ۰ تا t از صفحه می‌گذرد، با انتگرالگیری به دست می‌آید

$$q = \int dq = \int_0^t i\, dt \qquad (۲-۲۲)$$

که در آن جریان، ممکن است با زمان تغییر کند.

در شرایط حالت پایا، جریان در صفحه‌های aa' ، bb' و cc' و در واقع در همهٔ صفحه‌هایی که به طور کامل از رسانا عبور می‌کنند، بدون توجه به موقعیت یا سمتگیری آنها یکسان است. این واقعیت ناشی از پایستگی بار الکتریکی است. در شرایط حالت پایای فرض شده در اینجا، به ازای هر الکترونی که از صفحه cc' می‌گذرد باید الکترونی از صفحهٔ aa' بگذرد. به همین ترتیب، اگر شارش پایایی از آب در شیلنگ داشته باشیم، به ازای هر قطره آبی که از آن خارج می‌شود باید از انتهای دیگر قطره‌ای وارد شود. مقدار آب در شیلنگ کمیت پایسته‌ای است.

یکای SI جریان کولن بر ثانیه یا آمپر (A) است، که یک یکای پایهٔ SI است:

۱ آمپر = ۱ A = ۱ کولن بر ثانیه = ۱ C/s

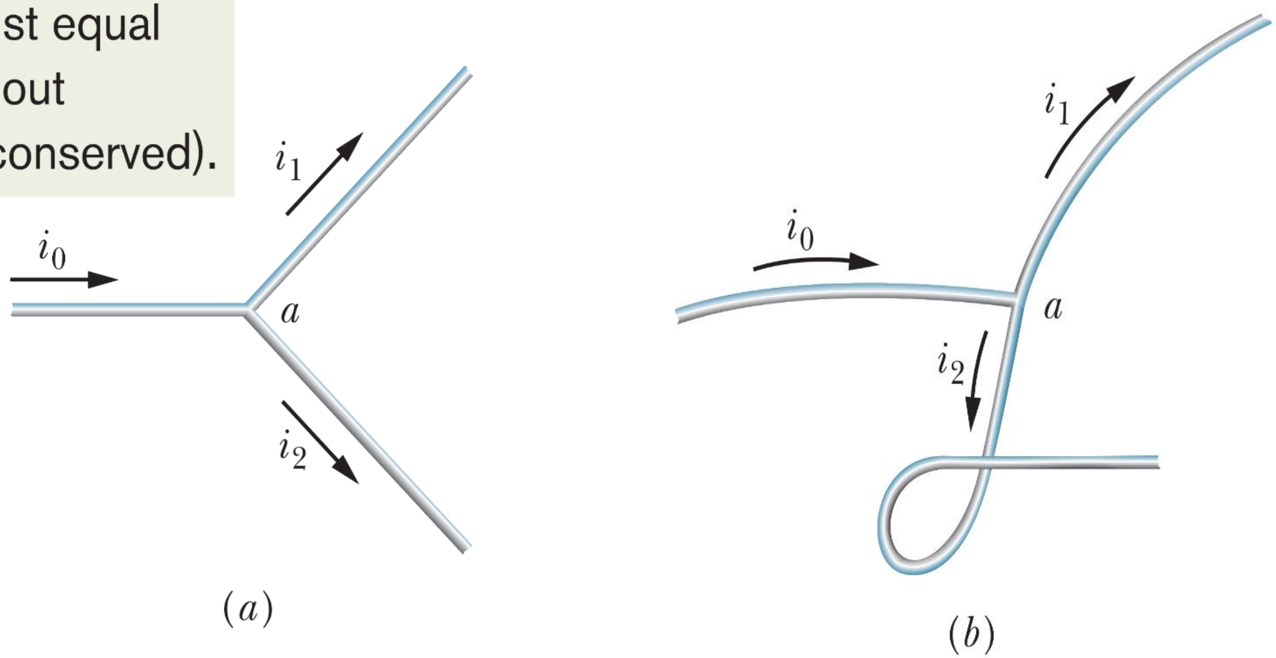
تعریف رسمی آمپر در فصل ۲۵ بحث شده است.

جریان الکتریکی، به صورتی که با معادلهٔ ۲۲-۱ تعریف شده، نرده‌ای است، چون در آن معادله بار و زمان هر دو نرده‌ای هستند. مانند شکل ۲۲-۱ ب ، جریان را اغلب با پیکانی نمایش می‌دهیم که بار در حال حرکت را نشان می‌دهد. ولی، چنین پیکانهایی بردار نیستند و نیاز به جمع برداری وجود ندارد. شکل ۲۲-۳ الف رسانایی با جریان $i_{\circ}$ را نشان می‌دهد که در یک پیوندگاه به دو شاخه تقسیم شده است. چون بار الکتریکی پایسته است، بزرگی این جریانها در شاخه‌ها باید جمع شود تا جریان در رسانای اصلی به دست آید، پس

$$i_{\circ} = i_{۱} + i_{۲} \qquad (۲۲\text{-}۳)$$

همان‌طور که شکل ۲۲-۳ ب نشان می‌دهد، خم کردن یا تغییر در سمتگیری سیمها در فضا اعتبار معادلهٔ ۲۲-۳ را تغییر نمی‌دهد. پیکانهای جریان فقط جهت (یا سوی) جریان در راستای یک رسانا را نشان می‌دهد، نه جهت آن را در فضا.

The current into the junction must equal the current out (charge is conserved).



شکل ۲۲–۳ رابطهٔ $i_0 = i_1 + i_2$ در پیوندگاه a بدون توجه به سمتگیری سه سیم در فضا برقرار است. جریانها نرده‌ای‌اند نه بردار.

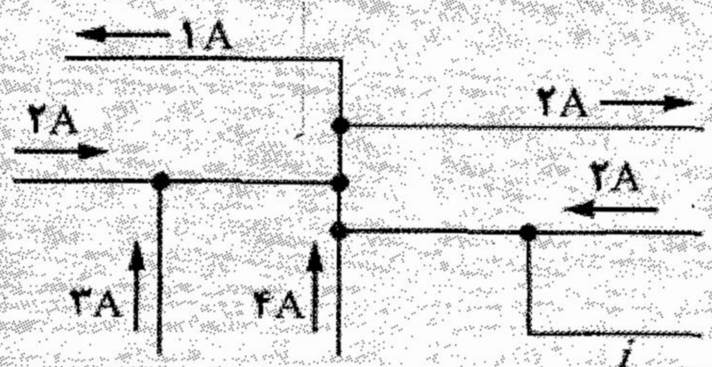
جهت جریان ها

در شکل ۲۲-۱ ب پیکانهای جریان در جهتی که ذره‌های باردار مثبت مجبور به حرکت در حلقه توسط میدان الکتریکی می‌شوند رسم شده‌اند. چنین *حاملهای بار* مثبت، که اغلب به این صورت نامیده می‌شوند، از پایانهٔ مثبت باتری دور می‌شوند و به طرف پایانهٔ منفی آن حرکت می‌کنند. در واقع حاملهای بار در حلقهٔ مسی شکل ۲۲-۱ ب الکترونها هستند که بار منفی دارند. میدان الکتریکی آنها را در جهت مخالف پیکانهای جریان، از پایانهٔ منفی به پایانهٔ مثبت حرکت می‌دهد. ولی به دلایل تاریخی قرارداد زیر را به کار می‌بریم:

پیکان جریان در جهتی رسم می‌شود که حاملهای بار مثبت حرکت می‌کنند، حتی اگر حاملهای واقعی بار منفی بوده و در جهت مخالف حرکت کنند.

از این قرارداد استفاده می‌کنیم چون در بیشتر وضعیتها، حرکت فرضی حاملهای بار مثبت در یک جهت همان اثر حرکت حاملهای بار منفی در جهت مخالف را دارد. (هرگاه این اثر یکسان نباشد، این قرارداد را کنار می‌گذاریم و حرکت واقعی را در نظر می‌گیریم.)

✔ ***نکتهٔ وارسی ۱*** این شکل بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد. بزرگی و جهت جریان i در سیم پایین سمت راست چگونه است؟



پاسخ: ۸ آمپر به سمت راست

چگالی جریان

گاهی علاقه‌مند به جریان i در یک رسانای خاص هستیم. گاهی هم شارش بارها در نقطهٔ خاصی از یک مقطع رسانا مورد نظر است. برای توصیف این شارش، از **چگالی جریان** $\vec{J}$ استفاده می‌کنیم که در همان جهت سرعت حرکت بارهاست. اگر بارها مثبت باشند چگالی جریان در جهت حرکت بارها و اگر منفی باشند در خلاف جهت حرکت بارهاست. در هر عنصری از سطح مقطع، بزرگی J برابر با جریان عبور کرده از یکای مساحت آن عنصر است. مقدار جریانی که از این عنصر می‌گذرد به صورت $\vec{J}.d\vec{A}$ نوشته می‌شود، که در آن $d\vec{A}$ بردار مساحت عنصر، عمود بر عنصر است. کل جریانی که از سطح می‌گذرد عبارت است از

$$i = \int \vec{J}.d\vec{A} \qquad (۲۲-۴)$$

اگر جریان در تمام سطح یکنواخت و موازی با $d\vec{A}$ باشد، آنگاه $\vec{J}$ نیز یکنواخت و موازی با $d\vec{A}$ خواهد بود. بنابراین، از معادلهٔ ۲۲-۴ داریم

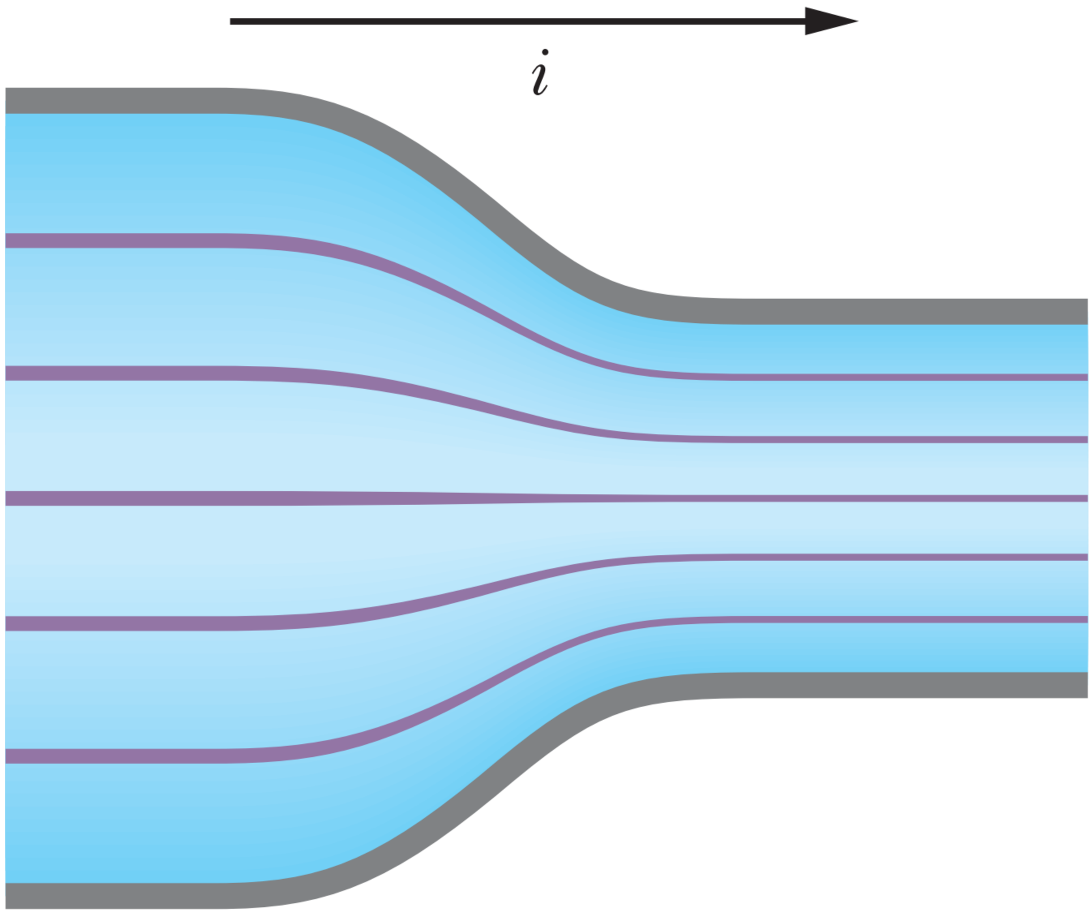
$$i = \int J \, dA = J \int dA = JA$$

پس

$$J = \frac{i}{A} \qquad (۵–۲۲)$$

که در آن A مساحت کل سطح است. از معادلهٔ ۲۲–۴ یا ۲۲–۵ می‌توان دید که یکای SI چگالی جریان آمپر بر متر مربع (A/m^2) است.

در فصل ۱۸ دیدیم که میدان الکتریکی را می‌توان با خطهای میدان الکتریکی نمایش داد. شکل ۲۲–۴ نحوهٔ نمایش چگالی جریان را با مجموعه‌ای از خطهای مشابه، که آنها را *خطهای جریان* می‌نامیم نشان می‌دهد. جریان، که در شکل ۲۲–۴ جهتش به سمت راست است، در حال عبور از رسانای پهن در سمت چپ به رسانای باریک در سمت راست است. چون در ضمن عبور بار پایسته است، مقدار بار و در نتیجه مقدار جریان تغییر نمی‌کند. با وجود این چگالی جریان تغییر می‌کند و مقدار آن در رسانای باریک بیشتر است. فاصلهٔ کمتر خطهای جریان در این قسمت افزایش در چگالی جریان را نشان می‌دهد؛ خطهای جریان نزدیک به هم به معنای بیشتر بودن چگالی جریان است.



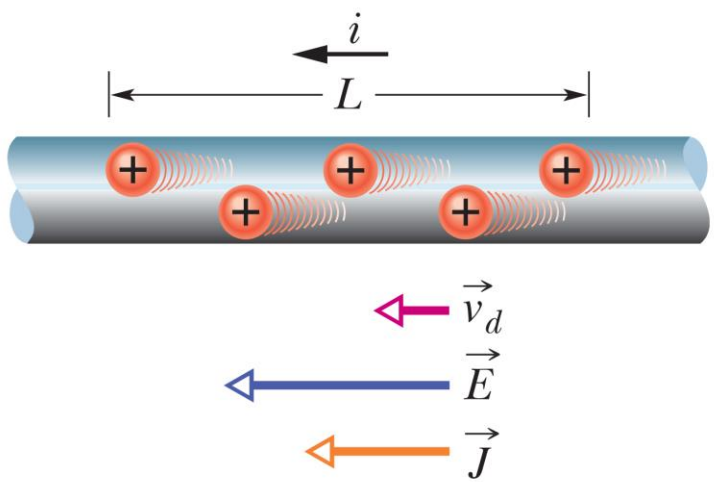
شکل ۴-۲۲ خطهای جریان چگالی جریان را در شارش بار در یک رسانای محدود نمایش می‌دهد.

تندی سوقی (سرعت سوق)

هرگاه از رسانا جریانی عبور نکند، الکترونهای رسانش آن به طور کاتوره‌ای، بدون هیچ حرکت خالص در جهتی خاص حرکت می‌کنند. هرگاه از رسانا جریانی عبور کند، این الکترونها هنوز به طور کاتوره‌ای حرکت می‌کنند، اما تمایل دارند با **تندی سوقی** v_d در جهت مخالف میدان الکتریکی اعمال شده که موجب جریان شده است، سوق داده شوند. تندی سوقی در مقایسه با تندیهای حرکت کاتوره‌ای بسیار کوچک است. برای مثال، در سیمهای مسی در برق خانه‌ها، تندی سوقی الکترونها ممکن است 10^{-5} m/s یا 10^{-4} m/s باشند، در حالی که تندیهای حرکت کاتوره‌ای آنها تقریباً 10^{6} m/s است.

برای تعیین رابطهٔ مربوط به تندی سوقی v_d الکترونهای رسانش در جریانی که با چگالی جریان J از سیمی می‌گذرد می‌توان از شکل ۲۲–۵ استفاده کرد. برای سهولت، شکل ۲۲–۵ حرکت سوقی معادل حاملهای بار مثبت در جهت میدان الکتریکی اعمال شدهٔ $\vec{E}$ را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که این حاملهای بار همگی با یک تندی سوقی v_d حرکت می‌کنند و

Current is said to be due to positive charges that are propelled by the electric field.



شکل ۲۲-۵ حاملهای بار مثبت با تندی v_d در جهت میدان الکتریکی اعمال شدهٔ $\vec{E}$ سوق داده می‌شوند. بنابر قرارداد، جهت چگالی جریان $\vec{J}$ و پیکان جریان در یک جهت رسم شده‌اند.

چگالی جریان J در تمام مساحت مقطع A سیم یکنواخت است. تعداد حاملهای بار در طول L سیم برابر nAL است، که در آن n تعداد حاملها بر یکای حجم است. بنابراین بـار کـل حاملهـا در طول L ، هر یک با بار e ، عبارت است از

$$q = (nAL)e$$

چون همهٔ حاملها با تندی v_d در طول سیم حرکت می‌کنند، این بار کل از هر مقطع سیم در بازهٔ زمانی زیر عبور می‌کند

$$t = \frac{L}{v_d}$$

معادلهٔ ۲۲–۱ بر آن دلالت دارد که جریان i عبارت است از آهنگ زمانی عبور بار الکتریکی از یک مقطع، پس داریم

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d \qquad (۶–۲۲)$$

با حل آن برای v_d و با یادآوری $(J=i/A)$، خواهیم داشت

$$v_d=\frac{i}{nAe}=\frac{J}{ne}$$

یا به صورت برداری

$$\vec{J}=(ne)\vec{v}_d \qquad (\text{۷–۲۲})$$

در اینجا حاصلضرب ne ، که یکای SI آن کولن بر متر مکعب (C/m^3) است، *چگالی بار حاملهاست*. در مورد حاملهای مثبت، ne مثبت و معادلهٔ ۲۲–۷ پیش‌بینی می‌کند که جهت $\vec{J}$ و $\vec{v}_d$ یکسان است. در مورد حاملهای منفی، ne منفی است و جهتهای $\vec{J}$ و $\vec{v}_d$ مخالف یکدیگرند.

نکتهٔ وارسی ۲ این شکل الکترونهای رسانش یک سیم را در حال حرکت به سمت چپ نشان می‌دهد. جهت این کمیتها به سمت چپ است یا راست؟ (الف) جریان i ، (ب) چگالی جریان $\vec{J}$ ، (پ) میدان الکتریکی $\vec{E}$ در سیم

پاسخ: همه به سمت راست

مسئلهٔ نمونه ۲۲-۲

(الف) چگالی جریان در یک سیم استوانه‌ای به شعاع $R = ۲/۰\ \mathrm{mm}$ برابر با $J = ۲/۰ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{A/m^{۲}}$ و در مقطع آن یکنواخت است. جریان در قسمت بیرونی سیم بین فاصلهٔ شعاعی $R/۲$ و R چقدر است (شکل ۲۲-۶ الف)؟

نکتهٔ کلیدی چون چگالی جریان در مقطع یکنواخت است، چگالی جریان J، جریان i و مساحت مقطع A با معادلهٔ ۲۲-۵ $(J = i/A)$ به هم مرتبط هستند.

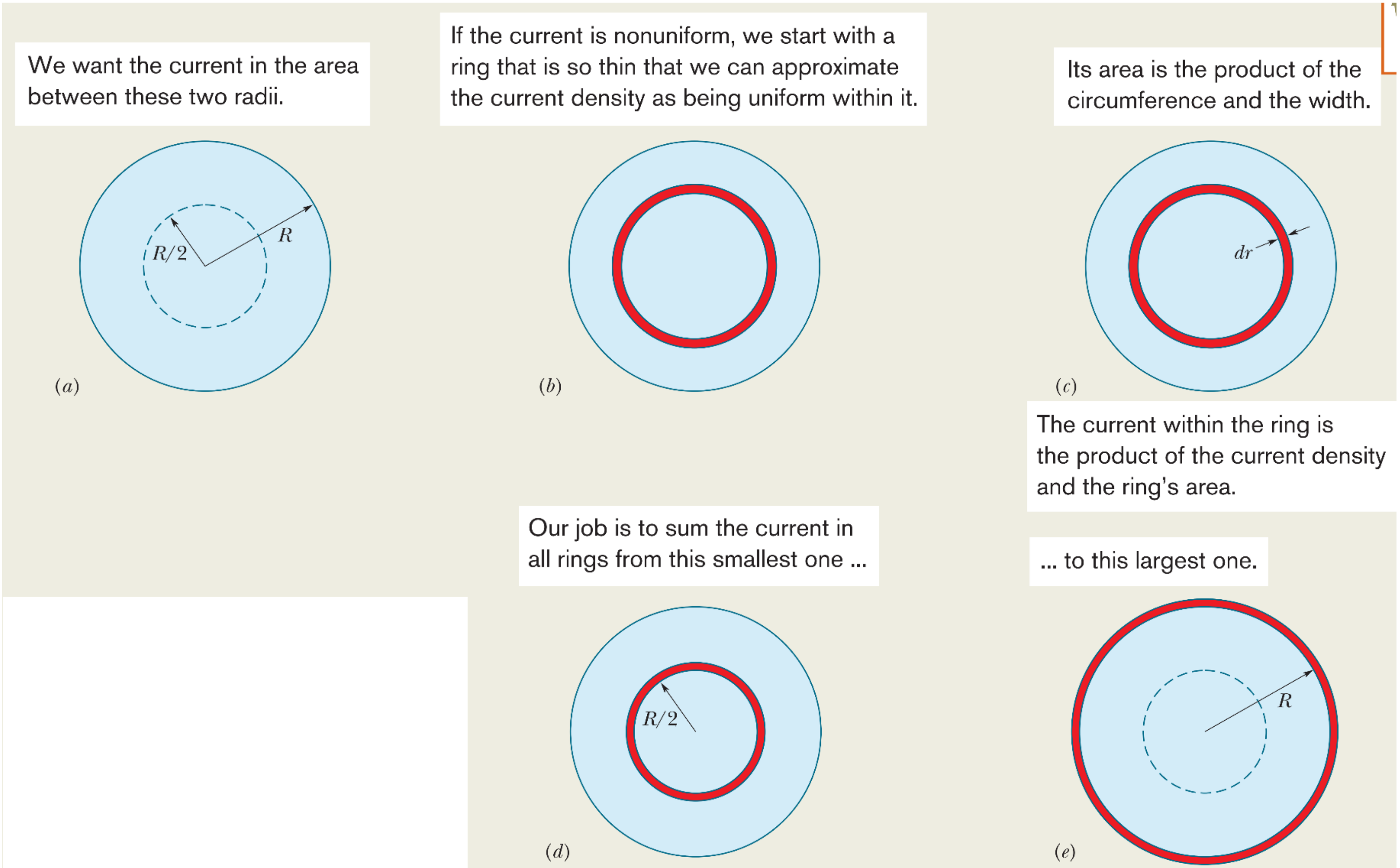
محاسبه‌ها: فقط به دنبال جریان عبوری از یک سطح مقطع کاهش یافته A' در سیم (به جای سطح کل) هستیم، که برابر است با

$$A' = \pi R^{۲} - \pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲} = \pi\left(\frac{۳R^{۲}}{۴}\right)$$

$$= \frac{۳\pi}{۴}(۰/۰۰۲۰\mathrm{m})^{۲} = ۹/۴۲۴ \times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{m^{۲}}$$

اکنون معادلهٔ ۲۲-۵ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$i = JA'$$



شکل ۲۲–۶ (الـف) مقطـع سـیمی بـه شـعاع R. (ب) پهنـای حلقـهٔ نازک dr و پیرامون آن ۲πr است، بنـابراین، مسـاحت دیفرانسـیلی آن $dA=2\pi r dr$ است.

و سپس داده‌ها را در ان قرار دهیم، داریم

$$i = (۲/۰\times ۱۰^{۵}\ \mathrm{A/m^{۲}})(۹/۴۲۴\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{m^{۲}})$$
$$= ۱/۹\ \mathrm{A}$$ (پاسخ)

(ب) حال فرض کنید چگالی جریانی که از سطح مقطع سیم می‌گذرد برحسب فاصلهٔ شعاعی r به صورت $J = ar^{۲}$ تغییر می‌کند، که در آن $a = ۳/۰\times ۱۰^{۱۱}\ \mathrm{A/m^{۴}}$ و r برحسب متر است. در این حالت چه جریانی از همان قسمت بیرونی سیم می‌گذرد؟

نکتهٔ کلیدی چون چگالی جریان در این مقطع سیم یکنواخت نیست، باید از معادلهٔ ۲۲-۴ $(i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A})$ استفاده کنیم و از چگالی جریان در قسمتی از سیم از $r = R/۲$ تا $r = R$ انتگرال بگیریم.

محاسبه‌ها: بردار چگالی $\vec{J}$ (در طول سیم) و بردار سطح دیفرانسیلی $d\vec{A}$ (عمود بر مقطع سیم) در یک جهت‌اند. بنابراین،

$$\vec{J}\cdot d\vec{A} = J\,dA\cos ۰ = J\,dA$$

باید به جای مساحت دیفرانسیلی dA چیزی قرار دهیم تا بتوان بین حدود $r = R/۲$ تا $r = R$ انتگرالگیری کرد. ساده‌ترین جایگزینی قرار دادن مساحت $۲\pi r\,dr$ حلقهٔ نازک با پیرامون $۲\pi r$ و پهنای dr است (شکل ۲۲–۶ ب) (چون J برحسب تابعی از r داده شده است). حال برحسب r به عنوان متغیر انتگرالگیری انتگرال می‌گیریم. از معادلهٔ ۲۲–۴ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
i &= \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int J\,dA \\
&= \int_{R/۲}^{R} ar^{۲}\, ۲\pi r\,dr = ۲\pi a \int_{R/۲}^{R} r^{۳}\,dr \\
&= ۲\pi a \left[\frac{r^{۴}}{۴}\right]_{R/۲}^{R} = \frac{\pi a}{۲}\left[R^{۴} - \frac{R^{۴}}{۱۶}\right] = \frac{۱۵}{۳۲}\pi a R^{۴} \\
&= \frac{۱۵}{۳۲}\pi(۳/۰\times۱۰^{۱۱}\ \mathrm{A/m^{۴}})(۰/۰۰۲۰\,\mathrm{m})^{۴} = ۷/۱\ \mathrm{A} \qquad \text{(پاسخ)}
\end{aligned}
$$