



شکل ۲۲۰۱ يك چرخ چرخان روی يك پایه چرخان.

مسائل

۱۰۱ دو بردار $A = i + j$ و $B = j + k$ معلوم اند، کمیت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A + B$ و $|A + B|$

ب) $3A - 2B$

ج) $A \cdot B$

د) $A \times B$ و $|A \times B|$

۲۰۱ سه بردار $A = 2i + j$ ، $B = i + k$ ، و $C = 4j$ مفروض اند، کمیت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $(A + B) \cdot C$ و $A \cdot (B + C)$

ب) $(A \times B) \cdot C$ و $A \cdot (B \times C)$

ج) $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$

۳۰۱ زاویه بین بردارهای $A = ai + 2aj$ و $B = ai + 2aj + 3ak$ را پیدا کنید (گوشرد).

این دو بردار قطر یکی از فجوه و یکی از قطرهای خود قطعه مکعب مستطیلی به ابعاد a ،

$2a$ و $3a$ را مشخص می‌کنند).

۴۰۱ بردار متغیر با زمان

$$A = i\alpha t + j\beta t^2 + k\gamma t^3$$

معلوم است، α ، β ، و γ ثابت اند؛ مشتق‌های زمانی اول و دوم dA/dt و d^2A/dt^2 را

به دست آورید.

۵.۱ به ازای چه مقدار (یا مقادیر) q ، بردار $A = i\mathbf{q} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ بر بردار $B = i\mathbf{q} - q\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ عمود است؟

۶.۱ اثبات جبری و هندسی روابط زیر را بیان کنید

$$|A+B| \leq |A| + |B|$$

$$|A \cdot B| \leq |A| |B|$$

۷.۱ تساوی برداری $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ را اثبات کنید.

۸.۱ دو بردار A و B نمایشگر دو ضلع متقاطع يك متوازی الاضلاع اند. نشان دهید که مساحت این متوازی الاضلاع عبارت است از $|A \times B|$.

۹.۱ سه بردار A ، B ، و C سه یال متقاطع يك متوازی السطوح را نمایش می دهند. نشان دهید که حجم متوازی السطوح عبارت است از $|A \cdot (B \times C)|$.

۱۰.۱ ماتریس تبدیل را برای چرخش حول محور z به اندازه زاویه ϕ که در پی آن چرخش حول محور y به اندازه زاویه θ صورت می گیرد، مطابق مثال ۱۳.۱، بررسی کنید.

۱۱.۱ بردار $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را در مجموعه سه تایی $i'j'k'$ بیان کنید؛ در صورتی که محورها $x'y'z'$ از چرخش xyz حول محور z (که منطبق بر محور z' است) به اندازه زاویه 30° به دست آمده باشند.

۱۲.۱ اتومبیل مسابقه ای روی دایره ای به شعاع ثابت b حرکت می کند. اگر بزرگی سرعت این اتومبیل با زمان t طبق معادله $v = ct$ تغییر کند (c ثابتی مثبت است) نشان دهید که زاویه میان بردار سرعت و بردار شتاب در زمان $t = \sqrt{b/c}$ برابر 45° است (دانهمایی: در این زمان بزرگی مؤلفه های مماسی و قائم شتاب یکسان اند).

۱۳.۱ گوی کوچکی را که به يك نوار طویل لاستیکی محکم بسته شده است، می چرخانند به طریقی که گوی در مسیری بیضوی به معادله زیر، حرکت می کند

$$\mathbf{r}(t) = i b \cos \omega t + j 2b \sin \omega t$$

b و ω ثابت اند. بزرگی سرعت توپ را به صورت تابعی از t به دست آورید. در حالت خاص، v را در زمانهای $t = 0$ و $t = \pi / 2\omega$ به دست آورید که به ترتیب زمانهایی اند که گوی در کمینه و بیشینه فاصله خود از مبدأ قرار دارد.

۱۴.۱ مگسی در مسیری مارپیچ مانند به معادله

$$\mathbf{r}(t) = i b \sin \omega t + j b \cos \omega t + k c t^2$$

حرکت می کند. نشان دهید که بزرگی شتاب حرکت این مگس ثابت است به شرطی که b ، ω ، و c ثابت باشند.

۱۵۰۱ زنبور عمل از کندوی خود در مسیری مارپیچ خارج می‌شود؛ معادله مسیر در مختصات قطبی عبارت است از

$$r = be^{kt}, \quad \theta = ct$$

k, b, c و ثابت‌هایی مثبت‌اند. نشان دهید در حالی که سوی حرکت به خارج است، زاویه میان بردار سرعت و بردار شتاب ثابت باقی می‌ماند (دانه‌مایی: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} / va$ را بیابید).

۱۶۰۱ مسئله ۱۴۰۱ را با بهره‌گیری از مختصات استوانه‌ای که در آن $R = b$ ، $\phi = \omega t$ ، و $z = ct^2$ حل کنید.

۱۷۰۱ مورچه‌ای بر روی توبی به شعاع b چنان می‌خزد که حرکت آن را در مختصات کروی معادلات زیر بیان می‌کنند

$$r = b \quad \phi = \omega t \quad \theta = \frac{\pi}{4} \left[1 + \frac{1}{4} \cos(4\omega t) \right]$$

بزرگی سرعت این مورچه را به صورت تابعی از زمان t به دست آورید. معادلات بالا چه نوع مسیری را نمایش می‌دهند؟

۱۸۰۱ ثابت کنید که $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = v$ ؛ و از آنجا ثابت کنید که اگر بزرگی سرعت v ثابت باشد، در مورد يك ذره متحرك $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بر هم عمودند. (دانه‌مایی: از دو طرف معادله $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ نسبت به t مشتق بگیرید. به یاد داشته باشید که v با $|\mathbf{a}|$ یکی نیست.)
۱۹۰۱ ثابت کنید

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a})] = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{a}})$$

۲۰۰۱ نشان دهید که مؤلفه مماسی شتاب را عبارت زیر بیان می‌کند

$$a_\tau = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v}$$

بنابراین، مؤلفه قائم عبارت است از

$$a_n = (a^2 - a_\tau^2)^{1/2} = \left[a^2 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{v^2} \right]^{1/2}$$

۲۱۰۱ با بهره‌گیری از نتیجه بالا مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را در مسئله‌های ۱۴۰۱ و ۱۵۰۱، به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

۲۲۰۱ ثابت کنید که $|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = v^2 / \rho$ شعاع انحنای مسیر يك ذره متحرك است.

۲۳۰۱ چرخي به شعاع b با شتاب ثابت a_0 بر روی زمین به جلو می‌غلتد. نشان دهید که در

هر لحظه معین، بزرگی شتاب هر نقطه روی چرخ نسبت به مرکز چرخ به صورت

$$\frac{1}{2}(a_0^2 + v^4/b^2)^{1/2}$$
 است، و نسبت به زمین نیز عبارت خواهد بود از

$$a_0[2 + 2 \cos \theta + v^4/a_0^2 b^2 - (2v^2/a_0 b) \sin \theta]^{1/2}$$
 که v سرعت لحظه‌ای به جلو،
 و θ وضعیت نقطه‌ای را روی چرخ تعیین می‌کند که از بالاترین نقطه به جلو اندازه‌گیری
 شده است. شتاب کدام نقطه نسبت به زمین بیشترین مقدار است.