فصل ۹

متر ریمان

۱.۹ ضرب داخلی

در فصول قبل تقریباً همهٔ ساختهای ممکن با فضاهای برداری، و لذا ساختهای با کلافها را مطرح کردیم. اما، یک مورد مهم از قلم افتاده است — هرگز راجع به ضرب داخلی سختی بگفتیم. اکنون زمان آن رسیده است که این ابزار جا افتاده را معرفی کنیم.

منظور از یک **ضرب داخلی** بر فضای برداری V بر میدان F، تابعی است دو خطی از $V \times V$ به F، که با نماد $\langle v, w\rangle \mapsto (v, w)$ نشان می‌دهیم، و بایستی متقارن بوده، یعنی $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ و ناتباهیده باشد: اگر $v \neq ۰$، آنگاه $w \neq ۰$ ای چنان وجود دارد که $\langle v, w\rangle \neq ۰$. از این پس، هیأت (میدان) F را $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) می‌گیریم.

به ازای هر r با $۰ \leq r \leq n$، یک ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_r$ بر $\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ

$$\langle a, b\rangle_r := \sum_{i=۱}^{r} a^i b^i - \sum_{i=r+۱}^{n} a^i b^i$$

می‌توانیم تعریف کنیم. این نابتاهیده است، چرا که اگر $a \neq ۰$، آنگاه

$$\Big\langle (a^۱, \cdots, a^n), (a^۱, \cdots, a^r, -a^{r+۱}, \cdots, -a^n) \Big\rangle = \sum_{i=۱}^{n} (a_i^i)^۲ > ۰$$

به ویژه، برای $r = n$، به ضرب داخلی استاندارد $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ بر $\mathbb{R}^n$ می‌رسیم: $\langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle = \sum_{i=۱}^{n} a^i b^i$. در مورد این ضرب داخلی، به ازای هر $a \neq ۰$ ای داریم $\langle\!\langle a, a\rangle\!\rangle > ۰$.

در کل، یک تابع دو خطی متقارن $\langle , \rangle$ را در صورتی **مثبت معین** گوئیم که به ازای هر $v \neq 0$ ای $\langle v, v \rangle > 0$ روشن است که هر تابع دو خطی مثبت معین، نابتاهیده است و در نتیجه، یک ضرب داخلی است.

توجه کنید که هر ضرب داخلی $\langle , \rangle$ بر V منحصری از $\mathcal{T}^2(V)$ است، و لذا اگر $f : V \to w$ تبدیلی خطی باشد، آنگاه $F^*\langle , \rangle$ یک تابع دو خطی متقان بر W است. این تابع دو خطی متقارن ممکن است بتاهیده باشد حتی اگر f یک‌به‌یک باشد. مثلاً، اگر $\langle , \rangle$ ضرب $\langle a, b \rangle = a^1 b^1 - a^2 b^2$ بر $\mathbb{R}^2$ باشد و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ تابع $f(a) = (a, a)$. با این حال، اگر f ایزومورفیسمی بروی V باشد، آنگاه به وضوح $f^*\langle , \rangle$ نابتاهیده است. همچنین اگر $\langle , \rangle$ مثبت معین باشد، آنگاه $f^*\langle , \rangle$ وقتی و تنها وقتی مثبت معین است که f یک‌به‌یک باشد.

به ازای هر پایه $v_1, \cdots, v_n$ برای V، با پایهٔ دوگان نظیر $v_1^*, \cdots, v_n^*$ برای V^*، می‌توانیم بنویسیم

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, v_i^* \otimes v_j^*$$

که در این عبارت

$$g_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$$

بنابراین، متقارن بودن $\langle , \rangle$ ایجاب می‌کند که ماتریس (g_{ij}) متقارن باشد: $g_{ij} = g_{ji}$. ماتریس (g_{ij}) تعبیر مهم دیگری نیز دارد. چون هر ضرب داخلی $\langle , \rangle$ نسبت به مؤلفهٔ دومش خطی است، نگاشتی خطی $\varphi_v \in V^*$ به ازای هر $v \in V$ می‌توانیم تعریف کنیم: $\varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$. چون $\langle , \rangle$ نسبت به مؤلفهٔ اولش نیز خطی است، نگاشت $v \mapsto \varphi_v$ تبدیلی خطی از V به V^* می‌باشد. نابتاهیدگی $\langle , \rangle$ ایجاب می‌کند که اگر $v \neq 0$، آنگاه $\varphi_v \neq 0$. بنابراین، اگر V با بعد متناهی باشد، هر ضرب داخلی $\langle , \rangle$، یک ایزومورفیسم $\alpha : V \to V^*$ با ضابطهٔ

$$\langle v, w \rangle = \alpha(v) w$$

به ما می‌دهد. به وضوح، ماتریس (g_{ij}) درست ماتریس $g : V \to V^*$ نسبت به پایه‌های $\{v_i\}$ برای V و $\{v_i^*\}$ برای V^* است. بنابراین، نابتاهیدگی $\langle , \rangle$ معادل با شرط زیر است:

$$(g_{ij}) \text{ ناتکین است یعنی و } \det(g_{ij}) \neq 0$$

مثبت معین بودن $\langle , \rangle$ به شرطی پیچیده‌تر در مورد (g_{ij}) متناظر است: (g_{ij}) باید مثبت معین باشد، یعنی

به ازای هر $a^1, \cdots, a^n$ که لااقل یکی از آنها مخالف صفر است، داریم $\sum_{i=1}^{n} g_{ij} a^i a^i > 0$

به ازای هر ضرب داخلی مثبت معین $\langle\langle , \rangle\rangle$ بر V، فرم $\|.\|$ نظیر را به صورت

$$\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2} \qquad \text{(ریشه‌از عددی مثبت گرفته شده است)}$$

تعریف می‌کنیم. فرم متناظر به $\langle , \rangle$ در $\mathbb{R}^n$ را با نماد

$$\|a\| = \langle a, a\rangle^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} (a^i)^2\Big)^{1/2}$$

نشان می‌دهیم. خواص اصلی $\|.\|$ در ذیل آمده است:

۱.۱.۹ قضیه. به ازای هر $v, w \in V$ ای داریم

۱) $\|av\| = |a|.\|v\|$، که $a \in \mathbb{R}$.

۲) $\langle v, w\rangle \leq \|v\|.\|w\|$، که که تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که v و w وابستهٔ خطی باشند، یعنی $\lambda \in \mathbb{R}$ یافت شود که $v = \lambda w$ (نامساوی شوارتز).

۳) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

اثبات:

(۱) بدیهی است.

(۲) اگر v و w مستقل خطی نباشند، به وضوح تساوی برقرار است. در غیر این صورت، یعنی اگر v و w مستقل خطی باشند، آنگاه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ای $\lambda v - w \neq 0$ و لذا

$$0 < \|\lambda v - w\|^2 = \langle \lambda v - w, \lambda v - w\rangle = \lambda^2 \|v\|^2 - 2\lambda\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

پس سمت راست یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب λ است و هیچ ریشه‌ای ندارد. در نتیجه، باید مبین آن منفی باشد. پس

$$4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \langle 0$$

و برهان تمام است.

(۳) بنابه (۲) داریم

$$\begin{aligned} \|v+w\|^{۲} &= \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^{۲} + \|w\|^{۲} + ۲\langle v, w\rangle \\ &\leq \|v\|^{۲} + \|w\|^{۲} + ۲\|v\|, \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^{۲} \end{aligned}$$

اکنون کافی است از طرفین جذر بگیریم.

تابع $\|.\|$ خواص نامطلوبی دارد —مثلاً، تابع $|.|$ بر $\mathbb{R}^n$ در $۰ \in \mathbb{R}^n$ دیفرانسیل‌پذیر نیست — که تابع $\|.\|^{۲}$ این مشکلات را ندارد. تابع اخیر، تابعی درجه دوم بر V است — بر حسب پایهٔ $\{v_i\}$ برای V، آنرا به صورت یک چند جمله‌ای همگن از درجهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\Big\| \sum_{i=۱}^{n} a^i v^i \Big\|^{۲} = \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij} a^i a^j$$

به بیان دیگر

$$\|.\|^{۲} = \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij} v_i^* . v_j^*$$

با توجه به قضیهٔ ذیل می‌توان تعریفی ناوردا برای تابع درجه دوم بدست آورد (مسألهٔ ۱).

۲.۱.۹ قضیه (اتحاد قطبی سازی). اگر $\|,\|$ فرم متناظر به ضرب داخلی $\langle,\rangle$ بر V باشد، آنگاه

$$(۱) \quad \langle v, w\rangle = \frac{۱}{۲}\{\|v+w\|^{۲} - \|v\|^{۲} - \|w\|^{۲}\}$$

$$(۲) \quad \langle v, w\rangle = \frac{۱}{۴}(\|v+w\|^{۲} - \|v-w\|^{۲})$$

اثبات: محاسبه است. □

قضیهٔ ۲.۱.۹ نشان می‌دهد که هر دو ضرب داخلی که یک فرم را القاء کنند، با هم برابرند. به ضرورت مشابه اگر $f : V \to W$ حافظ فرم باشد (یعنی به ازای هر $v \in V$ ای $\|f(v)\| = \|v\|$)، آنگاه f حافظ ضرب داخلی نیز هست (یعنی، به ازای هر $v, w \in V$ ای $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$).

حال نشان می‌دهیم که در حد ایزومورفیسم تنها یک ضرب داخلی مثبت معین بر هر فضای برداری وجود دارد.

۳.۱.۹ قضیه. اگر $\langle , \rangle$ یک ضرب داخلی مثبت معین بر فضای برداری n−بعدی V باشد، آنگاه پایه‌ای $\{v_1, \cdots, v_n\}$ برای V چنان وجود دارد که $\langle v_i, v_i \rangle = \delta_i j$. (چنین پایه‌ای را، پایهٔ **متعامد** نسبت به $\langle , \rangle$ می‌نامیم.) نتیجتاً، ایزومورفیسمی $f : \mathbb{R}^n \to V$ وجود دارد که

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

به عبارت دیگر، $f^* \langle , \rangle = \langle , \rangle$.

اثبات: گیریم $\{w_1, \cdots, w_n\}$ پایه‌ای دلخواه برای V است. با بکارگیری الگوریتم متعامدسازی گرام—اثمیت، این پایه را بدست می‌آوریم. چون $w_1 \neq 0$، می‌توانیم تعریف کنیم $v_1 := w_1/\|w_1\|$، و به وضوح $\|v_1\| = 1$. فرض کنید موفق به ساخت $v_k, \cdots, v_1$ شده‌ایم. پس

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

و بعلاوه

$$\{v_1, \cdots, v_k\} = - \quad \{w_1, \cdots, w_k\}$$

بنابراین، w_{k+1} نسبت به v_1، $\cdots$ و v_k مستقل خطی است. گیریم

$$w'_{k+1} := w_{k+1} - \langle v_1, v_{k+1} \rangle v_1 - \cdots - \langle v_k, v_{k+1} \rangle v_k \neq 0$$

به سادگی مشاهده می‌گردد که

$$\langle w'_{k+1}, v_i \rangle = 0 \qquad i = 1, \cdots, k$$

و لذا می‌توانیم تعریف کنیم $w_{k+1} := w'_{k+1}/||w'_{k+1}||$ به استقراء ادامه می‌دهیم. □

برخی اوقات، ضرب داخلی مثبت معین ⟨ و ⟩ بر V را، **تراقلیدسی** بر V می‌نامند. دلیل آن این است که با تعریف $p(v, w) = \|v - w\|$، به یک تراقلیدسی بر V می‌رسیم. نامساوی مثلثی (قسمت (۳) از قضیهٔ ۱.۱.۹) نشان می‌دهد که p عملاً یک متر است. $\|v\|$ را **طول** v می‌نامند.

برای آغاز به کار، به تنها یک نکتهٔ جبری دیگر نیاز داریم. یادآور می‌ش.یم که هر ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ بر V یک ایزومورفیسم $\alpha : v \to V^*$ با $\alpha(v)(w) = \langle v, w\rangle$ بر V تعریف می‌کند. به کمک ایزومورفیسم طبیعی $i : V \to V^{**}$ تعریف می‌کنیم

$$i(v)(\lambda) = \lambda(v)$$

به این ترتیب، ایزومورفیسم

$$\beta : V^* \xrightarrow{\alpha^{-1}} V \xrightarrow{i} (V^*)^*$$

را داریم. اکنون از β برای تعریف یک تابع دو خطی $\langle\ ,\ \rangle^*$ بر V^* با ضابطهٔ

$$\langle \lambda, \mu\rangle^* = \beta(\lambda)(\mu) = i\alpha^{-1}(\lambda)(\mu) = \mu(\alpha^{-1}(\lambda))$$

می‌توانیم استفاده کنیم. اکنون متقارن بودن $\langle\ ,\ \rangle$ را به صورت

$$\alpha(v)(w) = \alpha(w)(v)$$

می‌توان توضیح داد. با فرض $\alpha(v) = \lambda$ و $\alpha(w) = \mu$، این رابطه را به صورت

$$\lambda(\alpha^{-1}(\mu)) = \mu(\alpha^{-1}(\lambda))$$

می‌توان نوشت، که نشان می‌دهد $\langle\ ,\ \rangle^*$ نیز متقارن است. $\langle \lambda, \mu\rangle^* = \langle \mu, \lambda\rangle^*$ نتیجتاً، $\langle\ ,\ \rangle^*$ یک ضرب داخلی بر V^* است (در واقع، همان β است).

برای اینکه ببینیم این کلاً به چه معنی است، پایه‌ای $\{v_i\}$ برای V در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $\{v_i^*\}$ پایهٔ دوگان نظیر برای V^* است و

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, v_i^* \otimes v_j^*$$

در این صورت (g_{ij}) ماتریس $\alpha : V \to V^*$ نسبت به $\{v_i\}$ و $\{v_i^*\}$ است. بنابراین g_{ij}^{-1} پایهٔ $\alpha^{-1} : V^* \to V$ نسبت به $\{v_i^*\}$ و $\{v_i\}$ است. بنابراین $(g_{ij})^{-1}$ ماتریس $\beta : V^* \to V^{**}$ نسبت به $\{v_i^*\}$ و $\{v_i^{**}\}$ است. ور نتیجه، اگر تعریف کنیم $(g^{ij})-(g_{ij})^{-1}$، آنگاه

$$\sum g^{ik}\, g_{kj} = \delta^i_j$$

و به علاوه، اگر v_i را عضوی V^{**} بگیریم:

$$\langle , \rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, v_i^{**} \otimes v_j^{**} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, v_i \otimes v_j$$

توجه کنید که اگر ⟨ و ⟩ مثبت معین باشد، آنگاه به ازاء $\alpha(v) = \lambda$ داریم

$$\lambda(\alpha^{-1}(\lambda)) = \beta(\lambda)(\lambda) > 0$$ به ازاء هر $\lambda \neq 0$ ای

بنابراین، $\langle\ ,\ \rangle^*$ نیز مثبت معین است. این را مستقیماً از تعریف بر حسب پایه‌ها می‌توان اثبات نمود. در حالت مثبت معین، ساده‌ترین راه برای توصیف $\langle\ ,\ \rangle^*$ به شرح ذیل است: پایهٔ $\{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ برای V^* وقتی و تنها وقتی نسبت به $\langle\ ,\ \rangle^*$ متعامد است که $\{v_1, \cdots, v_n\}$ نسبت به ⟨ و ⟩ متعامد باشد.

تکنیک‌های مشابهی را (مسألهٔ ۴) برای تهیهٔ ضرب داخلی بر کلیهٔ فضاهای برداری $\mathcal{T}^k(V)$، $\mathcal{T}_k(V) = \mathcal{T}^k(V^*)$ و $\Omega^k(V)$ می‌توان اجرا کرد. البته ما تنها به یک حالت توجه داریم، که بطور کامل به شکل ناوردا قابل توصیف نیست. فضای برداری $\Omega^n(V)$ یک بعدی است، بنابراین برای تعریف یک ضرب داخلی بر آن، به تنها دو عنصر w و $-w$ بطول یک نیاز داریم. گیریم $\{v_1, \cdots, v_n\}$ و $\{w_1, \cdots, w_n\}$ دوپایه‌ای برای V اند که نسبت به ⟨ و ⟩ متعامد می‌باشند. اگر بنویسیم $w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\, v_j$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle w_i, w_j\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, v_k\ ,\ \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell j}\, v_\ell \Big\rangle \\
&= \sum_{k,\ell=1}^{n} \langle v_k, v_\ell\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\, \alpha_{kj}
\end{aligned}$$

بنابراین، ترانها A^t ماتریس A در رابطهٔ $AA^t = I$ صدق می‌کند، که از آن ایجاب می‌شود $\det A = \pm 1$. از قضیه‌ی ۷–۵ نتیجه می‌گردد که به ازاء هر $w \in \Omega^n(v)$ ای داریم

$$w(v_1, \cdots, v_n) = \pm w(w_1, \cdots, w_n)$$

از این به وضوح نتیجه می‌گردد که

$$v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^* = \pm w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^*$$

بنابراین، دو عنصر متفاوت از $\Omega^n(V)$ داریم؛ آنها به شکل $\pm v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ نسبت به پایه‌ای متعامد $\{V_i\}$ برای V هستند. آنها را عناصر به طول یک در $\Omega^n(V)$ می‌نامیم. اگر جهتی μ نیز در اختیار باشد، آنها را باز هم می‌توان بیشتر از هم متمایز کرد و یکی از بردارها $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ که به صورت $[v_1, \cdots, v_n] = \mu$ است، مثبت می‌نامیم، آن را عنصر به طول مثبت یک در $\Omega^n(V)$ می‌نامیم.

برای بسط عناصر به طول یک بر حسب یک پایه‌ای دلخواه $\{w_۱, \cdots, w_n\}$، پایه‌ای متعامد $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ متعامد انتخاب کرده و می‌نویسیم $w_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ji}\, v_j$ ایجاب می‌گردد که

$$\det(\alpha_{ij})\, w_۱^* \wedge \cdots \wedge w_n^* = v_۱^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$$

اگر بنویسیم

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}\, w_i^* \otimes w_j^*$$

آنگاه

$$g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{ki}\, v_k, \sum_{\ell=۱}^{n} \alpha_{\ell j}\, v_\ell \Big\rangle = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{ki}\, \alpha_{kj}$$

و لذا اگر $A = (\alpha_{ij})$، آنگاه

$$\det(g_{ij}) = \det(A^t.A) = (\det A)^۲$$

به ویژه، $\det(g_{ij})$ **هموار مثبت** است. نتیجتاً عناصر به طول یک در $\Omega^n(V)$ عبارتند از

$$\pm\sqrt{\det(g_{ij})}\, w_۱^* \wedge \cdots \wedge w_n^* \qquad , \qquad g_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$$

۲.۹ متر ریمان

اکنون این ابزار جدید را در مورد کلاف‌های برداری بکار می‌گیریم. اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری باشد، تابعی $\langle$ و $\rangle$ که به هر $p \in B$ یک ضرب داخلی مثبت معین $\langle_p$ و $\rangle$ را نسبت می‌دهد (بر فضای $\pi^{-۱}(p)$) و پیوسته است، به این تعبیر که به ازاء هر دو برش پیوستهٔ $s_۱, s_۲ : B \to E$، تابع

$$\langle s_۱, s_۲ \rangle = p \mapsto \langle s_۱(p), s_۲(p) \rangle$$

نیز پیوسته است، **یک متر ریمان** بر ξ می‌گوئیم. اگر ξ یک کلاف برداری هموار بر منیفلد هموار B باشد، از متر ریمان هموار می‌توانیم سخن بگوئیم.

[روش دیگری هم برای تعریف وجود دارد. گیریم $\mathrm{Euc}(V)$ مجموعهٔ همهٔ ضرب‌های داخلی مثبت معین بر V است. اگر هر $\pi^{-1}(p)$ را با $\mathrm{Euc}(\pi^{-1}(p))$ تعویض کنیم و فرض شود

$$\mathrm{Euc}(\xi) = \bigcup_{p\in B} \mathrm{Euc}(\pi^{-1}(p))$$

در این صورت، منظور از یک متر ریمان بر ξ، برشی از $\mathrm{Euc}(\xi)$ است. تنها مشکل این است که $\mathrm{Euc}(V)$ فضای برداری نیست. به همین دلیل $\mathrm{Euc}(\xi)$ یک نمونه از ساختار کلی‌تر بنام کلاف تاری است.]

۱.۲.۹ قضیه. گیریم $\xi = \pi : E \to M$ یک کلاف k–صفحه‌ای (به ترتیب هموار) روی منیفلد هموار M است. در این صورت یک متر ریمان (به ترتیب هموار) بر ξ وجود دارد.

اثبات: یک پوشش موضعاً متناهی U برای M مرکب از مجموعه‌های باز U وجود دارد که بر هر یک از آنها یک بدیهی سازی (به ترتیب هموار) $t_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ در اختیار است. بر $U \times \mathbb{R}^K$ به وضوح یک متر ریمان $\langle (p,a),(p,b)\rangle_p = \langle a,b\rangle$ وجود دارد. چنانچه $v, w \in \pi^{-1}(p)$، تعریف می‌کنیم

$$\langle v,w\rangle_p^U := \langle t_U(v), t_U(w)\rangle_p^U$$

در این صورت، $\langle\ \text{و}\ \rangle^U$ یک متر ریمانی (به ترتیب، هموار) بای $\xi\Big|_U$ است. گیریم $\{\varphi_U\}$ یک افراز یکانی زیردست U است. $\langle\ \text{و}\ \rangle$ را به صورت

$$\langle v,w\rangle_p := \sum_{U\in U} \varphi_U(p)\langle v,w\rangle_p^U \qquad v,w\in\pi^{-1}(p)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\langle\ \text{و}\ \rangle$ پیوسته (به ترتیب هموار) است و به ازاء p ای $\langle v,w\rangle_p$ بر $\pi^{-1}(p)$ تابعی دوخطی و متقارن است. برای نشان دادن مثبت معین بودن آن، توجه می‌کنیم که

$$\langle v,v\rangle_p = \sum_{U\in u} \varphi_U(p).\langle v,v\rangle_p^U$$

و هر یک از $\varphi_v(p)\langle v,v\rangle_p^U$ ها نامنفی‌اند، و به ازای یکی از U ها مثبت است. □

شبیه همین استدلال نشان می‌دهد که هر کلاف برداری روی یک فضای پارافشرده، متر ریمان می‌پذیرد.

توجه شود که استدلال مرحلهٔ آخر در حالتی که ناتباهیدگی ضربهای داخلی $\langle,\rangle U$ را از قبل نداشتیم، درست نبود. در واقع (مسألهٔ ۷) بر $T\mathbb{S}^۲$ هیچ $\langle,\rangle$ ای وجود ندارد که بر هر $T_p\mathbb{S}^۲$ ای تابع — متقارن دوخطی القاء کند که مثبت معین باشد، ولی نابتاهیده نباشد.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۴، چند پرسش در مورد کلاف‌های برداری که تاکنون مانده، حل می‌کنیم.

۲.۲.۹ نتیجه. اگر $\xi = \pi : E$ یک کلاف k–صفحه‌ای باشد، آنگاه $\xi = \xi$.

اثبات: گیریم $\langle,\rangle$ یک متر ریمانی برای ξ است. در این صورت به ازای هر $p \in M$، ایزومورفیسمی

$$\alpha_p : \pi^{-۱}(p) \to \{\pi^{-۱}(p)\}^*$$

با ضابطهٔ

$$\alpha_p(v)(w) = \langle v, w\rangle_p \qquad v, w \in \pi^{-۱}(p)$$

داریم پیوستگی $\langle,\rangle$ ایجاب می‌کند که گردایه همهٔ α_p ها هومورفیسمی از E به $E' = \bigcup_{p\in M}\{\pi^{-۱}(p)\}^*$ تعریف می‌کند. $\square$

۳.۲.۹ نتیجه. اگر $\xi = \pi : E \to M$ کلاف ۱ – صفحه‌ای باشد، آنگاه ξ وقتی و تنها وقتی بدهی است که جهت‌پذیر باشد.

اثبات: قسمت تنها اگر بدیهی است. اگر ξ دارای جهت μ بوده و $\langle,\rangle$ متر ریمانی بر M باشد، آنگاه $s(p) \in \pi^{-۱}(p)$ ای منحصر بفرد وجود دارد که

$$\langle s(p), s(p)\rangle_p = ۱ \qquad , \qquad [s(p)] = \mu_p$$

به وضوح s یک برش است؛ سپس هم‌ارزی $f : E \to M \times \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(\lambda s(p)) = (p, \lambda)$ تعریف می‌کنیم.

۴.۲.۹ اثباتی دیگر. می‌دانیم (به توضیح پس از قضیهٔ ۷—۹ توجه کنید) که اگر ξ جهت‌پذیر باشد، آنگاه یک برش همه جا ناصفر برای $\Omega^۱(\xi) = \xi^*$ وجود دارد، و لذا ξ^* بدهی است. اما $\xi\tilde{\xi}^*$. $\square$

همهٔ این مشاهدات هنگامی اهمیت بیشتر پیدا می‌کنند که کلاف ما، کلاف مماس TM به یک منیفلد هموار M باشد. در این حالت، به یک متر ریمان هموار $\langle,\rangle$ برای

TM، که بر هر T_pM ای یک ضرب داخلی مثبت معین القاء می‌کند، را **متر ریمان بر** M می‌نامیم. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی بر M باشد، متر ریمان $\langle , \rangle$ را بر U به صورت

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^i$$

می‌توان نوشت، که توابع هموار $g - ij$ در رابطهٔ $g_{ij} = g_{ji}$ صدق می‌کنند، چرا که $\langle , \rangle$ متقارن است، و $\det(g_{ij}) > 0$ زیرا $\langle , \rangle$ مثبت معین است.

البته روشن است که هر متر ریمان $\langle , \rangle$ بر M، تانسوری کواریان از مرتبهٔ دو است. پس به ازای هر نگاشت هموار $f : N \to M$، تانسوری کواریان $f^*\langle , \rangle$ بر N وجود دارد، که به وضوح دو خطی است؛ این وقتی وتنها وقتی متر ریمان بر N است که f ایمرشن باشد (یعنی به ازای هر $p \in N$ ای f_{*p} یک‌به‌یک باشد).

متر ریمان $\langle , \rangle^*$ القایی توسط $\langle , \rangle$ بر کلاف دوگان T^*M، یک تانسور کنترل واریان از مرتبهٔ دو است می‌توانیم بنویسیم

$$\langle , \rangle^* = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

توصیف ضرب داخلی بر V^* نشان می‌دهد که به ازای هر p، ماتریس $(g^{ij}(p))$ وارون ماتریس $(g_{ij}(p))$ است؛ در نتیجه

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$$

به صورت مشابه، به ازای هر $p \in M$، متر ریمان $\langle , \rangle$ بر M دو عنصر از $\Omega^n(T_pM)$ را مشخص می‌کند: عناصر بطول یک. قبلاً دیده‌ایم می‌توان نوشت

$$\pm\sqrt{\det(g_{ij}(p))} dx^1(p) \wedge \cdots \wedge dx^n(p)$$

اگر M دارای جهت μ باشد، آنگاه μ_p امکان تعیین عنصر بطول یک مثبت را فراهم می‌سازد، و به این ترتیب به یک $n-$ فرم بر M می‌رسیم؛ اگر $x : U \to \mathbb{R}^n$ حافظ جهت باشد، آنگاه این فرم را بر U به صورت

$$\sqrt{\det(g_{ij})} |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$$

می‌توان نوشت. این المان حجم را با نماد dV نشان می‌دهیم، که البته d در اینجا بی معنی است (حتی وقتی M جهت‌پذیر باشد و آنرا بتوان به‌عنوان یک $n-$ فرم بتوان

تصور کرد) و آن را المان حجم مشخص شود توسط متر $\langle , \rangle$ می‌نامیم. به این ترتیب، حجم M را به صورت $\int_M dV$ می‌توانیم تعریف کنیم. روشن است که اگر M فشرده باشد، این فرمول با معنی است، در حالت M غیر فشرده (به مسألهٔ ۸—۱۰ توجه کنید) یا این انتگرال عددی مشخص است و یا از هر عدد بزرگ دلخواه بزرگتر است (بر زیر مجموعه‌های فشردهٔ M برابر هر عدد بزرگ دلخواه می‌شود). در این حالت می‌گوییم M به حجم نامتناهی است.

اگر M یک $n-$ منیفلد مرزدار در $\mathbb{R}^n$ بامتر ریمان معمولی $\langle , \rangle = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i$ باشد، آنگاه $g_{ij} = \delta_{ij}$. در نتیجه، $dV = |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$ و «حجم» به معنی معمولی آن می‌شود.

۳.۹ طول منحنی

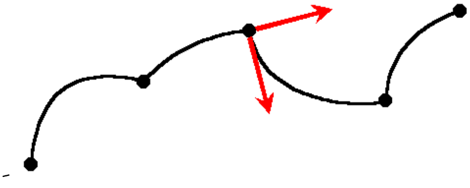
ساخت مهمتری نظیر به هر متر ریمان بر M وجود دارد که تا پایان فصل به آن می‌وردازیم. به ازای هر منحنی هموار $\gamma : [a, b] \to M$، بردارهای مماس

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$$

را داریم، و بنابراین از $\langle , \rangle$ برای محاسبهٔ طول آن می‌توان استفاده کرد

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} \qquad \left(= \left[\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle_{\gamma(t)}\right]^{1/2} \text{ دقیق‌تر} \right)$$

اگر γ **هموار تکه‌ای** باشد، به این معنی که افرازی $a = t_0 \langle \cdots \langle t_n = b$ برای $[a; b]$ چنان وجود داشته باشد که γ بر هر یک از $[t-i-1; t_i]$ ها هموار است (البته با مشتقات چپ و راست مختلف در $(t_1, \cdots, t_{n-1}$)، طول γ را به صورت



شکل ۱.۹: منحنی تکه‌ای هموار

$$\ell_a^b(\gamma) = \sum_{i=۱}^{n} \ell_{t_{i-۱}}^{k_i}\left(\gamma\Big|_{[t'_{i-۱}, t_i]}\right)$$

می‌توان تعریف کرد. هرگاه ابهامی در میزان محاسبهٔ ℓ_a^b وجود داشته باشد، تنها از نماد ℓ می‌توان استفاده کرد. استدلالی مختصر (مسألهٔ ۱۵) نشان می‌دهد که به ازای هر منحنی تکه‌ای هموار در $\mathbb{R}^n$، با متر ریمان معمولی، این تعریف طول کوچکترین کران بالایی طول منحنی‌های چند ضلعی واقع بر منحنی، یکی است.

همچنین، تابعی $s : [a; b] \to \mathbb{R}$ به نام تابع طول قوس γ به صورت

$$s(t) = \ell_a^t(\gamma) = \int_a^{\gamma} \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt$$

می‌توان تعریف نمود. طبیعتاً

$$s'(t) = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \tag{۱.۹}$$

در نتیجه، $d\gamma/dt$ دقیقاً در صورتی به طول یک است که $s(t) = t$، و این دقیقاً به این معنی است که $s(t) = t = a$. در این صورت $a - b = s(b) = \ell_a^b(\gamma)$. منحنی γ را به صورت منحنی‌ای بر $[۰; b-a]$ با ضابطهٔ $\overline{\gamma}(t) = \gamma(t-a)$ می‌توان تجدید پارامتر کرد. در مورد این منحنی جدید $\overline{\gamma}$ داریم

$$s_{\text{جدید}}(t) = \ell_{۰}^t(\overline{\gamma}) = \ell_a^{t+a}(\gamma) = s_{\text{قدیم}}(t+a) - s_{\text{قدیم}}(a) = t$$

چنانچه γ در شرط $s(t) = t$ صدق کند، می‌گوئیم γ **توسط طول قوس پارامتره شده** است. (و لذا می‌توان به جای t از s استفاده کرد).

در کتب کلاسیک، فرم $\|,\|$ بر M را با ds نشان می‌دهند و این نماد اصطلاح شده است. معادلهٔ (۱.۹) چنین اذعان می‌دارد که به ازاء هر منحنی γ و $s : [a; ۱] \to \mathbb{R}$ نظیر، بر $[a; b]$ داریم $|ds| = \gamma^*(\|,\|)$.

نتیجتاً، در نوشتجات کلاسیک، مورد

$$ds^۲ = \sum_{i,j=۱} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

وجود دارد. امروزه، این معادله را به صورت

$$\langle,\rangle = \sum_{i,j=۱} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

تعبیر می‌کنند، ولی عملاً آن را به معنی

$$\|,\|^{۲} = \sum_{i,j=۱} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

می‌گیرند. نماد $dx^i dx^j$ در اینجا، جایگزین $dx^i \otimes dx^i$ به شکل کلاسیک نیست — مقدار $dx^i dx^j$ در p (یعنی، $(dx^i dx^j)(p)$) را به صورتتابعی دوخطی نمی‌توان تعبیر کرد، تابعی است درجه دوم

$$v \mapsto dx^i(p).dx^j(p)(v) \qquad v \in T_pM$$

و امروزه از همین نماد استفاده می‌شود. روش کلاسیک کار بار $dx^i \otimes dx^j$ بسیار دشوار است: می‌شود نوشت

$$\sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}\, dx^i\, \delta x^j$$

که dx و δx دو بینهایت کوچک مستقل هستند. (از نظر کلاسیک، متر ریمان تابعی بر بردارهای مماس نیست، بلکه ضرب داخلی دو تغییر مکان بینهایت کوچک dx و δx است.)

حال یک متر ریمان $\langle,\rangle$ بر منیفلد همبند M در نظر بگیرید. اگر p و q دو نقطهٔ دلخواه باشند، آنگاه حداقل یک منحنی تکه‌ای هموار $\gamma : [a;b] \to M$ از p به q وجود دارد (حتی می‌شود ثابت کرد که منحنی‌ای هموار از p به q وجود دارد). تعریف می‌کنیم

$$d(p,q) := \inf\left\{\ell(\gamma) \text{ که در آن } \gamma \text{ یک منحنی تکه‌ای هموار از } p \text{ به } q \text{ است}\right\}$$

روشن است که $d(p,q) \geq ۰$ و $d(p,p) = ۰$. به علاوه، اگر $r \in M$ نقطهٔ سومی باشد، به ازاء هر $\varepsilon > ۰$، منحنی‌های تکه‌ای هموار

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_۱) - d(p,q) &< \varepsilon \quad \text{با } \gamma_۱ : [a;b] \to M \text{ از } p \text{ به } q \\ \ell(\gamma_۲) - d(q,r) &< \varepsilon \quad \text{با } \gamma_۲ : [b;c] \to M \text{ از } q \text{ به } r \end{aligned}$$

را انتخاب می‌کنیم. چنانچه $\gamma : [a;c] \to M$ را بر $[a;b]$ به صورت $\gamma_۱$ و بر $[b;c]$ به صورت $\gamma_۲$ تعریف کنیم، در این صورت γ منحنی تکه‌ای هموار از p به r است و

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_۱) + \ell(\gamma_۲) < d(p,q) + d(q,r) + ۲\varepsilon$$

چون این مطلب به ازاء هر ε ای درست است، نتیجه می‌گیریم که

$$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$$

[چنانچه منحنی‌های تکه‌ای هموار را مجاز نمی‌دانستیم، در چسبانیدن γ_1 و γ_2 مشکلاتی رخ می‌داد، اما همچنان d این ویژگی را می‌داشت (مسألهٔ ۱۷).] تابع $d : M\times M \to \mathbb{R}$ کلیهٔ خواص متر را دارد، به جز اینکه روشن نیست که اگر $p \neq q$ آنگاه حتماً $d(p,q) > 0$. این به شکل زیر حل می‌شود.

۱.۳.۹ قضیه. تابع $d : M\times M \to \mathbb{R}$ متری بر M است، و اگر $p : M\times M \to \mathbb{R}$ متر اولیه بر M باشد (که M را به منیفلد توپولوژیک تبدیل می‌کند)، آنگاه (M,d) با (M,p) معادل است.

اثبات: به وضوح هر دو بخش قضیه، نتایج لم زیرند. □

۲.۳.۹ لم. گیریم U همسایگی بازی از گوی $B = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| \leq 1\}$ است. گیریم $\langle,\rangle_e$ متر ریمان معمولی با اقلیدسی بر U است: $\langle,\rangle_e = \sum_{i,j=1}^{n} dx^i \otimes dx^j$. همچنین، فرض کنیم $\langle,\rangle$ متر ریمان دلخواهی بر U است. گیریم $\|,\|_e = |,|$ و $\|,\|$ فرم‌های نظیر هستند. در این صورت اعداد $m, M > 0$ چنان وجود دارند که

$$m.|,| \leq \|,\| \leq M.|,|$$

و نتیجتاً، به ازاء هر $\gamma : [a;b] \to B$ ای، داریم

$$m.\ell_e(\gamma) \leq \ell(\gamma) \leq M.\ell_e(\gamma)$$

اثبات: $G : B\times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ را به صورت $G(p,a) := \|a_p\|_p$ نعریف می‌کنیم. در این صورت G پیوسته و مثبت است. چون $B \times \mathbb{S}^{n-1}$ فشرده است، اعداد $m, M > 0$ ای چنان یافت می‌شوند که

$$m < G < M \quad \text{بر} \quad B \times \mathbb{S}^{n-1}$$

حال اگر $p \in B$ و $0 \neq b_p \in T_p\mathbb{R}^n$، گیریم $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ برابر $a = b/|b|$ باشد. در این صورت

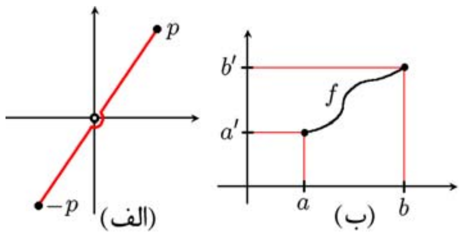
$$m|b| < |b|\, G(p,a) < M|b|$$

چرا که

$$|b|G(p,a) = |b|.|a_p|_p = \|(|b|a)_p\|_p = \|b\|_p$$

این نامساوی مورد نظر را نتیجه می‌دهد، که به وضوح برای حالت $b = 0$ هم درست است. □

توجه کنید که فاصلهٔ $d(p,q)$ تعریف شده ممکن است با طول $\ell(\gamma)$ هیچ منحنی تکه‌ای هموار از p به q برابر نباشد. مثلاً، ممکن است منیفلد M برابر $\mathbb{R}^n - \{0\}$ باشد، و q برابر $-p$. اما اگر $d(p,q) = \ell(\gamma)$ به ازای یک γ ای برقرار باشد، آنگاه γ به وضوح کوتاهترین منحنی هموار تکه‌ای از p به q است (ممکن است بیش از یک کوتاهترین منحنی موجود باشد. به عبارت دیگر، دو نیم دایرهٔ بین نقاط p و $-p$ بر $\mathbb{S}^1$) به قسمت الف از شکل ۲.۹ توجه شود.



شکل ۲.۹

۴.۹ حساب تغییرات

به منظور مطالعهٔ بیشتر مسایل در خصوص کوتاهترین منحنی‌ها، به تکنیکهایی از حساب تغییرات نیاز داریم. برای توضیح اینگونه روش‌ها، با مساله‌ای ساده شدوع می‌کنیم. فرض کنید تابعی (با اندازهٔ کافی دیفرانسیل‌پذیر) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در اختیار است. در بین توابع $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ با $f(a) = a'$ و $f(b) = b'$ (به قسمت ب از شکل ۲.۹ توجه شود) به دنبال آن تابعی هستیم که کمیت

$$\int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$

را ماکزیمم (یا مینیمم) می‌سازد. مثلاً اگر $F(t,x,y) = \sqrt{1+y^2}$ آنگاه به دنبال تابعی f بر $[a;b]$ هستیم که به ازای آن، منحنی $t \mapsto (t, f(t))$ بین (a,a') و (b,b') کوتاهترین طول را دارد

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

به عنوان دومین مثال، چنانچه $F(t,x,y)=x\sqrt{۱+y^۲}$ ، به دنبال مینیمم کردن مساحت سطح حاصل از دوران نمودار تابع f حول $x-$ محور هستیم (به قسمت الف از شکل ۳.۹ توجه شود):

$$\int_a^b f(t)\sqrt{۱+(f'(t))^۲}dt$$

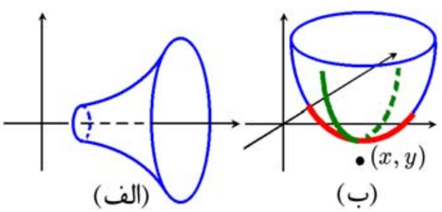
به جهت پرداختن به این نوع مسایل، ابتدا روش‌های مورد استفاده در انواع ساده‌تر این مسایل، درخصوص ماکزیمم و مینیمم توابع به شکل $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای حل این مسئله، **نقاط تکی** f را در نظر می‌گیریم ـ نقاطی x که $f'(x)=۰$. نقطه تکی لزومی ندارد که ماکزیمم یا مینیمم، و یا حتی ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد، با این حال نقاط تکی تنها کاندید برای ماکزیمم و مینیمم هستند، به شرط آنکه f در همه جا دیفرانسیل‌پذیر باشد. به صورت مشابه، به ازای هر تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ مفروض، نقاطی $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$ را در نظر می‌گیریم که برای آنها

$$D_۱f(x,y)=D_۲f(x,y)=۰ \tag{۲.۹}$$

(به قسمت ب از شکل ۳.۹ توجه شود) این بدان معنی است که منحیهای

$$t\mapsto f(x+t,y) \qquad t\mapsto f(x,y+t)$$

در $t=۰$ مشتق صفر دارند. ممکن است با در نظر گرفتن شرط ذیل، اطلاعات بیشتری به دست آید: به ازای هر منحنی دلخواه $c:(-\varepsilon;\varepsilon)\to\mathbb{R}^۲$ ای $(f\circ c)'(۰)=۰$ که $c(۰)=(x,y)$. ولی اثبات می‌گردد که به کمک قاعده زنجیری مشتق، همه این شرایط از (۲.۹) قابل استنتاج هستند.



شکل ۳.۹

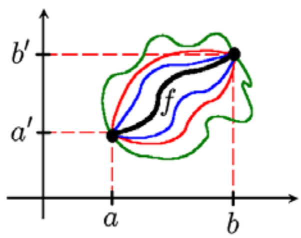
مایلیم برای یافتن ماکزیمم و مینیمم

$$J(f)=\int_a^b F(t,f(t),f'(t))dt$$

به طریق مشابه عمل کنیم. در این راستا منحنی‌های در مجموعهٔ همه توابع $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. این را با در نظر گرفتن «تغییر f» یعنی تابعی $\alpha : (-\varepsilon;\varepsilon)\times[a;b] \to \mathbb{R}$ که $\alpha(\circ,t) = f(t)$، انجام می‌دهیم (به شکل ۴.۹ توجه شود). در این صورت توابع $t \mapsto \alpha(u,t)$ ، خانواده‌ای از توابع بر $(-\varepsilon,\varepsilon)$ است که به ازای $u = \circ$ از f می‌گذرد. این تابع را با $\overline{\alpha}(u)$ نشان می‌دهیم. پس $\overline{\alpha}$ تابعی از $(-\varepsilon,\varepsilon)$ به مجموعه توابع $f : [a;b] \to$ است. اگر هر $\overline{\alpha}(u)$ ای در شرط $\overline{\alpha}(u)(a) = a'$ و $\overline{\alpha}(u)(b) = b'$ صدق کند، به عبارت دیگر، به ازای هر $u \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ ای

$$\alpha(u,a) = a' \quad , \quad \alpha(u,b) = b'$$

آنگاه می‌گوییم α تغییری از f است که نقاط انتهایی را ثابت نگاه می‌دارد.



شکل ۴.۹

حال به ازای هر تغییر α ، داریم

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=\circ} &= \left.\frac{d}{du}\right|_{u=\circ}\int_a^b F\Big(t,\alpha(u,t),\frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big\{\left.\frac{d}{du}\right|_{u=\circ} F\Big(t,\alpha(u,t),\frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)\Big)\Big\}\,dt \\
&= \int_a^b \Big\{\frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ,t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) \\
&\qquad + \frac{\partial^{۲} u}{\partial u\partial t}(\circ,t)\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big\}\,dt
\end{aligned}$$

چون $\frac{\partial^{۲}\alpha}{\partial t\partial u} = \frac{\partial^{۲}\alpha}{\partial u\partial t}$، از قاعده جزء به جزء در مورد جمله دوم انتگرال بالا می‌توانیم استفاده کنیم، و به دست بیاوریم

$$\left.\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=\circ} = \int_a^b \frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}(t,f(t),f'(t))$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big)\Big\}\,dt \quad (۳.۹)$$
$$+\frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ,t)\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big|_a^b$$

چنانچه α نقاط انتهایی را حفظ کند، جمله دوم صفر است، و لذا داریم

$$\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=\circ} = \int_a^b \frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) -\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t)))\Big\}\,dt \quad (۴.۹)$$

در مباحث کلاسیک حساب تغییرات، تغییرات α ای در نظر گرفته می‌شود که به شکل خاص

$$\alpha(u,t)=f(t)+u\eta(t)$$

است، که $\eta:[a;b]\to\mathbb{R}$ تابعی با $\eta(a)=\eta(b)=\circ$ است. به این ترتیب، داریم

$$\frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=\circ}=\int_a^b \eta(t)\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t))-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big)\Big\}\,dt$$

البته، حکم نهایی در هر دو حالت یکی است. مشتق $dJ(\overline{\alpha}(u))/du(\circ)$ را «اولین تغییر» J نامیده و به صورت

$$\delta J=\int_a^b \eta\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}\Big\}\,dt$$

در کتب کلاسیک نشان داده می‌شود. در نمادگذاری کلاسیک، اغلب متغیرهای تابع جلو و یا عقب اسم تابع ذکر می‌شود و نه در پرانتز ـ در این حالت نه تنها متغیرهای t و $(t,f(t),f'(t))$ حذف شده‌اند (نتیجه این است که تابع هدف fL عملاً ناپدید شده است) بلکه بستگی δJ به α نیز مشخص نشده است (که کمی ابهام در پی دارد).

اگر f تابعی J را ماکزیمم یا مینیمم کند، آنگاه $\delta J(\alpha)$ بایستی به ازای هر تغییر α از f که نقاط انتهایی را حفظ می کند، صفر باشد. همچون در حالت حسابان یک ــ بعدی، دلیلی وجود ندارد که از برقراری شرط $\delta J(\alpha)=\circ$ به ازای هر α، ایجاب گردد که حتی f ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی برای J است. بر این اساس یک تعریف می آوریم.

f نقطه تکین J (یااکسترمال J) است که به ازای همه تغییرات α از f که حافظ دو انتها هستند، داشته باشیم $\delta J(\alpha)$. شکل خاص (۴.۹) اکنون موجب می‌گردد که شرط زیر را به راحتی بتوانیم مطرح کنیم.

۱.۴.۹ قضیه (معادله اولر). تابع f از کلاس $C^{۲}$ وقتی و تنها وقتی یک نقطه تکین J است که f در شرط زیر صدق کند:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\Big) = ۰$$

اثبات: روشن است که بایستی f انتگرال در (۴.۹) را به ازای هر $\eta(t) = \partial\alpha/\partial u$ ای

که a و b صفر می‌شود، صفر کند. پس، قضیه از لم ساده زیر نتیجه می‌گردد.

۲.۴.۹ لم. اگر تابعی پیوسته $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ ، به ازای هر تابع هموار η بر $[a;b]$ با $\eta(a) = \eta(b)$ در شرط $\int_a^b \eta(t)g(t)dt = ۰$ صدق کند، آنگاه $g = ۰$.

اثبات: η را φg می‌گیریم که φ بر $(a;b)$ مثبت است و $\varphi(a) = \varphi(b) = ۰$. □

به عنوان مثال، حالتی را در نظر بگیرید که $F(t,x,y) = \sqrt{۱+y^{۲}}$. معادله اولر، در این حالت چنین است:

$$\begin{aligned} ۰ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{f'(t)}{\sqrt{۱+(f'(t))^{۲}}}\Big) = \frac{f''\sqrt{۱+f'^{۲}} - f'(f'/\sqrt{۱+f'^{۲}})}{۱+(f')^{۲}} \\ &= (۱+f'^{۲})f'' - f'f'' = (۱-f'+f'^{۲})f'' \end{aligned}$$

در نتیجه $f'' = ۰$ و لذا f خطی است.

توجه کنید که اگر حالت $F(t,x,y) = ۱+y^{۲}$ را در نظر می‌گرفتیم نیز همین نتیجه حاصل می‌شد. زیرا در این حالت معادله اولر به شکل ساده $\frac{d}{dt}(۲f'(t)) = ۰$ می‌شود. این شباهت بسیاری با حالت در حسابان یک بعدی دارد، که نقاط تکین $\sqrt{f}$ همچون نقاط تکین f اند، چرا که $(\sqrt{f})' = f'/۲\sqrt{f}$.

در حالت رویه دوار، که $F(t,x,y) = x\sqrt{۱+y^{۲}}$ ، معادله اولر

$$۰ = \sqrt{۱+(f'(t))^{۲}}\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{f(t)f'(t)}{\sqrt{۱+(f'(t))^{۲}}}\Big)$$

است. این به معادله $۱+f'^{۲} - f'f'' = ۰$ منتهی می‌گردد، که آن را به شکل کلاسیک به صورت

$$۱ + (\frac{dy}{dx})^{۲} \quad y\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}} = ۰$$

می‌توان نوشت. برای حل این معادله، یکی از ?? تا تکنیک استاندارد را مورد استفاده قرار می‌دهیم (این جمله را برای خودتان تحلیل کنید). گیریم $p = y' = \frac{dy}{dx}$. در این

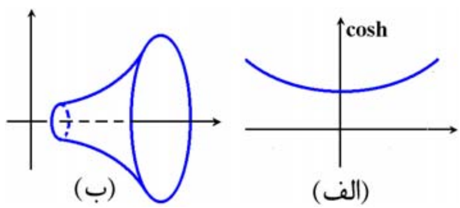
صورت

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

بنابراین، معادله ما چنین می‌شود

$$\begin{aligned}
1+p^2-yp\frac{dp}{dy}=0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{p}{1+p^2}dp=\frac{1}{y}dy\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\log(1+p^2)=\log y+\text{ثابت}\\
&\Rightarrow \quad y=\text{ثابت}\times\sqrt{1+p^2}\\
&\Rightarrow \quad p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{cy^2-1}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{cy^2-1}}=dx\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{c}\cosh^{-1}(cy)=x+k
\end{aligned}$$

(در مورد تعریف و خواص «کسینوس هیپر بولیک» cosh و وارونش به مسئله ۲۰ توجه کنید).



شکل ۵.۹

با تعویض c با $\frac{1}{c}$ این معادله را به صورت

$$y=c\cosh\left(\frac{x+k}{c}\right) \tag{5.9}$$

می‌توان نوشت که $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$، به شکل مقابل است و ملاحظه می‌گردد که نمودار آن نسبت $y-$محور متقارن است، با افزایش $0\leq x$ صعودی است؛ با کاهش $x\leq 0$ نزولی است. پس رویه‌ها به شکل ذیل است. اینکه همواره بتوان ثابتهای c,k را طوری تعیین که نمودار (۵.۹) از (a,a') و (b,b') بگذرد، به هیچ وجه ساده و بدیهی نیست. در مسألهٔ ۲۱ حالت خاص $a'=b'$ ذکر شده است.

تعمیم این مشاهدات در حالتی که $f : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ و $J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt$ برای $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ساده است. در این حالت، $\alpha : (-\varepsilon;\varepsilon) \times [a;b]$ با $\overline{\alpha}(\circ) = f$ در نظر گرفته و به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\overline{\alpha}(u))}{du}\Big|_{u=\circ} \quad = \quad & \int_a^b \sum_{\ell=۱}^{n} \frac{\partial \alpha^{۲}}{\partial u}(\circ, t)\Big\{\frac{\partial F}{\partial y^{\ell}}(t, f(t), f'(t)) \\ & -\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y\ell}(t, f(t), f'(t))\Big)\Big\}\, dt \\ & +\sum_{\ell=۱}^{n} \frac{\partial \alpha^{\ell}}{\partial u}(\circ, t)\frac{\partial F}{\partial y^{\ell}}(t, f(t), f'(t))\Big|_a^b \end{aligned} \tag{۶.۹}$$

بنابراین، هر نقطهٔ تکین f از J بایستی در n معادلهٔ به شرح زیر صدق کند:

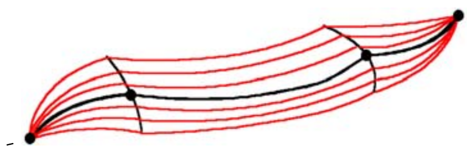
$$\frac{\partial F}{\partial x^{\ell}}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y^{\ell}}(t, f(t), f'(t)) = \circ \qquad \ell = ۱, \cdots, n$$

اکنون این احکام را در مورد مسألهٔ یافتن کوتاهترین مسیرهای در یک منیفلد دلخواه M، بکار می‌گیریم. اگر $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}$ یک منحنی تکه‌ای هموار با $\gamma(a) = p$ و $\gamma(b) = q$ باشد، تغییر γ را تابعی چون $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a;b] \to M$ با $\varepsilon > \circ$ تعریف می‌کنیم که

(۱) $\alpha(\circ, t) = \gamma(t)$.

(۲) افرازی $a = t_\circ < t_۱ < \cdots < t_N = b$ از $[a;b]$ چنان وجود دارد که α بر هر نوار $(-\varepsilon;\varepsilon) \times [t_{i-۱}; t_i]$ هموار است. α را در صورتی یک تغییر از γ حافظ نقاط انتهایی گوئیم که

(۳) به ازاء هر $u \in (-\varepsilon;\varepsilon)$ ای $\alpha(u, b)$ و نیز $\alpha(y, a) = p$.



شکل ۵.۹

همچون قبل، فرض کنیم $\overline{\alpha}(u)$ مسیر $t \mapsto \alpha(u,t)$ است. مایلیم مسیرهای γ ای را بیابیم که در شرط $\left.\frac{dL(\overline{\alpha}w)}{du}\right|_{u=\circ} = \circ$ به ازاء هر تغییر α حافظ نقاط انتهایی صدق می‌کنند، هستیم. البته، تجربه‌ای از اولین مثال داریم، و ابتدا نقاط تکین

$$E(\gamma) = \frac{۱}{۲}\int_a^b \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^۲ dt = \frac{۱}{۲}\int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt$$

را در نظر می‌گیریم، که مناسب‌ترین تابع انتگرال را دارد؛ پیش از هر کاری، ارتباط بین انتگرال‌ها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

می‌توانیم فرض کنیم که هر $\gamma\Big|_{[t_{i-۱};t_i]}$ ای در یک دستگاه مختصات (x,U) قرار دارد (در غیر این صورت، بازه‌ها را کوچکتر می‌کنیم). اگر (u,t) دستگاه مختصات استاندارد در $[a;b] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ باشد، می‌نویسیم

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t) = \alpha_*\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,t)}\Big) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t) = \alpha_*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(u,t)}\Big)$$

بنابراین، $\partial\alpha/\partial t(u,t)$ بردار مماس در لحظهٔ t به منحنی $\overline{\alpha}(u)$ است. اگر خلاصه نویسی‌های

$$\alpha^i(u,t) = x^i(\alpha(u,t)) \qquad \gamma^i(t) = x^i(\gamma(t)) = \alpha^i(\circ,t)$$

را مطرح کنیم، در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t) &= \sum_{i=۱}^n \frac{\partial\alpha^i}{\partial t}(u,t).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(u,t)}\\ \frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \sum_{i=۱}^n \frac{\partial\alpha^i}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}E\Big(\gamma\Big|_{t_{i-۱};t_i}\Big) &= \frac{۱}{۲}\int_{t_{i-۱}}^{t_i} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt\\ &= \frac{۱}{۲}\int_{t_{i-۱}}^{t_i} \sum_{i,j=۱}^n g_{i,j}(\gamma(t))\Big\langle \frac{d\gamma^i}{dt}, \frac{d\gamma^i}{dt}\Big\rangle dt\end{aligned}$$

اگر از دستگاه مختصات x برای یکی گیری U با $\mathbb{R}^n$ استفاده کنیم، و g_{ij} ها را به عنوان توابعی بر $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم، در این صورت $\int_{t_{i-۱}}^{t_i} F(\gamma(t),\gamma'(t))dt$ را در نظر می‌گیریم که

$$F(x,y) = \frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^n g_{ij}(x).y^i\, y^j$$

بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial x^\ell}\Big(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\Big)=\frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial y^\ell}\Big(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\Big)=\sum_{r=۱}^{n}g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y^\ell}(\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}\Big)=\sum_{r=۱}^{n}g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^r}{dt^۲}+\sum_{r,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt}$$

به جهت اینکه شکل ظاهری معادلات متقارن‌تر می‌شود، توجه می‌کنیم که

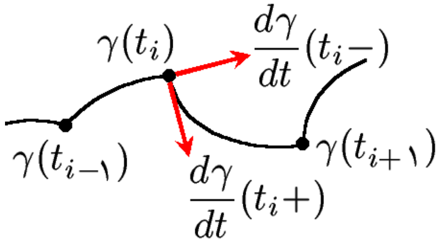
$$\begin{aligned}\sum_{r,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt} &= \sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}\\ &= \sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{r,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{\ell r}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^r}{dt}=\frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}+\frac{۱}{۲}\sum_{i,j=۱}^{n}\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}$$

از $(***)$، اکنون بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\Big(E(\overline{\alpha}(u))\Big|_{[t_{i-۱};t_i]}\Big)\Big|_{u=\circ} &= -\int_{t_{i-۱}}^{t_i}\sum_{\ell=۱}^{n}\frac{\partial\alpha^\ell}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\sum_{r=۱}g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^r}{dt^۲}\\ &+\sum_{i,j=۱}\frac{۱}{۲}\Big\{\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j}(\gamma(t))-\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^i}(\gamma(t))+\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^i}(\gamma(t))\Big\}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\Big\}dt\\ &+\sum_{\ell=۱}^{n}\frac{\partial\alpha^\ell}{\partial u}(\circ,t)\sum_{r=۱}^{n}g_{\ell r}\,(\gamma(t))\frac{d\gamma^r}{dt}\Big|_{t_{i-۱}}^{t_i}\end{aligned}$$



شکل ۶.۹

یادآور می‌شویم که γ تنها تکه‌ای هموار است. گیریم میدان برداری دست راست γ در $\frac{d\gamma}{dt}(t_i+) = t_i$ میدان برداری سمت چپ γ در $\frac{d\gamma}{dt}(t_i-) = t_i$ توجه شود که مجموع آخری در فرمول بالا، بطور ساده عبارت است از

$$\Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ, t_i), \frac{d\gamma}{dt}(t_i-)\Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ, t_{i-۱}), \frac{d\gamma}{dt}(t_{i-۱}+)\Big\rangle$$

به منظور ساده‌تر شدن انتگرال، نمادهای زیر را

$$[ij,\ell] = \frac{۱}{۲}\Big(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\Big)$$

مطرح می‌کنیم. این توابع به دستگاه مختصاتی بستگی دارند، ولی انتگرال

$$-\int_{t_{i-۱}}^{t_i} \sum_{\ell=۱}^{n} \frac{\partial \alpha^\alpha}{\partial u}(\circ, t)\Big\{\sum_{r=۱}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^r}{dt^۲} + \sum_{i,j=۱}^{n}[ij,\ell](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\Big\}\,dt$$

که در حکم ما ظاهر می‌گردد، به وضوح چنین نیست. نتیجتاً درست همین عبارت را برای هر $[t_{i-۱}; t_i]$ استفاده می‌کنیم حتی اگر دستگاه‌های مختصاتی متفاوت در میان باشد (و لذا g_{ij} ها و γ^i ها متفاوتند).

حال این احکام را جمع‌بندی می‌کنیم. گیریم

$$\begin{aligned} \Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i-) \qquad && i = ۱, \cdots, N-۱ \\ \Delta_{t_\circ}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt}(t_\circ+) && \Delta_{t_N}\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\gamma}{dt}(t_N-) \end{aligned}$$

بنابراین، فرمول زیر را داریم (که در انتگرال از یک خلاصه نویسی استفاده شده است).

۵.۹ اولین فرمول تغییراتی و ژئودزی

۱.۵.۹ قضیه (اولین فرمول تغییراتی).

$$\begin{aligned}\frac{dE(\bar{(}\alpha)(u))}{du}\Big|_{u=\circ} \quad = \quad & -\int_a^b \sum_{\ell=۱}^{n} \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial u}(\circ,t)\Big\{\sum_{r=۱}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^۲}{dt^۲} \\ & + \sum_{i,j=۱}^{n} [ij,\ell](\gamma(t))\frac{\gamma^i}{dt}\frac{\gamma^j}{dt}\Big\}\,dt \\ & - \sum_{i=\circ}^{n}\Big\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(\circ,t_i), \Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt}\Big\rangle\end{aligned}$$

(در حالت تغییر حافظ دو انتها مجموع را از ۱ تا $N-۱$ می‌توان گرفت.)

این حکم چندان زیبا نیست، ولی نمونهٔ زیبای آن وجود دارد. بایستی توجه شود که $[ij,\ell]$ ها مؤلفه‌های هیچ تانسوری نیستند. پس از این هیچ تغییر ناوردایی برای اولین فرمول تغییراتی نداریم. در بخش مانده از این فصل، البته با عذر خواهی، همین روند وابسته به مختصات را ادامه می‌دهیم. البته، حکم سادهٔ زیر در مورد نقاط تکین E از اولین فرمول تغییراتی به دست می‌آید.

۲.۵.۹ نتیجه. اگر $\gamma:[a;b]\to M$ مسیری هموار باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی γ یک نقطهٔ تکین E_a^b است که به ازاء هر دستگاه مختصات (x,U) داشته باشیم

$$\sum_{r=۱}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d^۲\gamma^۲}{dt^۲} + \sum_{i,j=۱}^{n}[ij,\ell](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt} = \circ \qquad \gamma(t)\in U \text{ به ازای هر } t \text{ با}$$

اثبات: فرض کنید γ نقطه‌ای تکین است. به ازای هر tبا $\gamma(t)\in U$، افرازی $[a;b]$ با $t\in(t_{i-۱};t_i)$ به ازای یک i ای، انتخاب می‌کنیم که $\gamma\Big|_{[t_{i-۱};t_i]}$ در U واقع باشد. اگر α تغییری از γ با نقاط انتهایی ثابت باشد، آنگاه می‌توان در اولین فرمول تغییراتی فرض کرد که قسمت انتگرال از $t_{i-۱}$ تا t_i بر حسب (x,U) نوشته شده است. جملهٔ نهایی در فرمول صفر است، زیرا γ همپار است. حال روش بکار رفته در اثبات لم ۸ را استفاده نموده و همهٔ $\partial\alpha^\ell/\partial u(\circ,t)$ ها را صفر می‌گیریم، بجز یکی که در خارج از $(t_{i-۱}t_i)$ صفر است، اما تابعی مثبت ضرب در براکتهای بر $(t_{i-۱},t_i)$ است.
به جهت بیان معادلات در نتیجهٔ ۱۰ به شکل استاندارد، نمادهای زیر را مطرح

می‌کنیم:

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell}[ij,\ell] = \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell}\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial g_{i\ell}}{dx^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}\Big\}$$

به این ترتیب، معادلات مذکور را به شکل

$$\frac{d^2\gamma^2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0$$

می‌توان نوشت. از قضیهٔ استاندارد در خصوص دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (مسألهٔ ۵—۴) می‌دانیم که به ازای هر $p \in M$ و هر $v \in T_pM$، $\gamma : (-\varepsilon;\varepsilon) \to M$ ای منحصر بفرد (به ازای یک $\varepsilon > 0$) وجود دارد، به گونه‌ای که

$$\begin{cases} \gamma(0) = p \\ \dfrac{d\gamma}{dt}(0) = v \\ \dfrac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0 \end{cases}$$

بعلاوه، این γ بر $(-\varepsilon,\varepsilon)$ هموار است. این حکم آخر نشان می‌دهد که اگر $\gamma_1 : [0;\varepsilon) \to M$ و $\gamma_\varepsilon : (-\varepsilon;0) \to M$ توابعی هموار و صادق در این روابط باشند، و نیز اگر

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt}(0+) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0-)$$

آنگاه γ_1 و γ_2 همراه با هم یک تابع هموار بر $(-\varepsilon,\varepsilon)$ تشکیل می‌دهند. طبیعی است که 0 را با هر مقدار دیگری از t می‌توان تعویض نمود. حال حکمی دقیق‌تر بیان می‌کنیم.

۳.۵.۹ نتیجه. سیر تکه‌ای هموار $\gamma : [a;b] \to M$ وقتی و تنها وقتی یک نقطهٔ تکین E^b_a است که γ عملاً بر $[a;b]$ هموار باشد و به ازای هر دستگاه مختصاتی (x,U) ای که برد γ را قطع می‌کتد، در معادلات زیر صدق کند:

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = 0 \qquad \gamma(t) \in U \text{ به ازای هر } t \text{ ای که}$$

اثبات: گیریم γس نقطه‌ای تکین است. α^ℓ را مثل قبل انتخاب کرده (همهٔ α^ℓ ها خارج (t_{i-1},t_i) صفرند) و مشاهده می‌کنیم که $\gamma|[t_{i-1};t_i]$ در معادله صدق می‌کند،

زیرا جملهٔ آخر در اولین فرمول تغییراتی باز هم صفر است. حال α را طوری می‌گیریم که

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u}(\circ; t_i) = \Delta_{t_i}\frac{d\gamma}{dt} \qquad i = ۱, \cdots, N - ۱$$

از قبل می‌دانیم که همهٔ $\Delta_i \frac{d\gamma}{dt}$ ها صفرند. بنابه اشارات بالا، این درست به معنی این است که γ عملاً بر کل $[a;b]$ هموار است.

مثل در ساده‌ترین حالت، متر ریمان اقلیدسی بر $\mathbb{R}^n$، یعنی $\langle , \rangle = \sum_{i=۱}^{n} dx^j \otimes dx^i$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا $g_{ij} = \delta_{ij}$ و لذا همهٔ $\partial g_{ij}/\partial x_k$ ها صفرند و بنابراین همهٔ Γ_{ij}^k ها نیز صفرند. نقاط تکین γ برای تایع انرژی بایستی در معادلات

$$\frac{d^۲\gamma^k}{dt^۲} = \circ \qquad k = ۱, \cdots, n$$

صدق کنند. بنابراین، γ بر یک خط راست واقع است. به همین ترتیب، هر نقطهٔ تکین برای تابع طول قوس نیز چنین است. چنانچه ما تنها منحنی‌های به شکل $t \mapsto (t, f(t))$ را در نظر بگیریم، بسیار وضعیت متفاوت خواهد بود. در حالت کلی مورد بررسی قرار گرفته، چنانچه γ یک نقطهٔ تکین باشد، آنگاه هر تجدید پارامتر آن نیز جواب مسأله است، چرا که طول مستقل از پارامتره کردن است (مسألهٔ ١٦). این نشان می‌دهد که نقاط تکین برای طول وجود دارد که مشخصاً نقطهٔ تکین انرژی نیستند، زیرا کمی قبل ملاحظه کردیم که برای اینکه γ نقطهٔ تکین برای انرژی باشد، لازم است مؤلفه‌های γ خطی باشند و لذا بایستی γ حتماً به صورت تابعی خطی از طول قوس پارامتره شود. چنین وضعیتی بسیار شایع است.

۴.۵.۹ قضیه. اگر $\gamma : [a;b] \to M$ نقطه‌ای تکین برای E باشد، آنگاه γ به صورت نسبتی از طول قدس پارامتره شده است.

اثبات: ابتدا از تعاریف ملاحظه می‌گردد که

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} = [i\ell, j] + [j\ell, i] \qquad (۷.۹)$$

اکنون داریم

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^۲ = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i,j=۱}^{n} g_{ij}(\gamma(t)).\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t))\frac{d\gamma^\ell}{dt}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}$$
$$+\sum_{r,j=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}\frac{d\gamma^j}{dt}+\sum_{i,r=1}^{n} g_{ir}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}$$

با جایگزاری مقدار $\partial g_{ij}/\partial x^\ell$ از (۷.۹) می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dt}\Big\|\frac{d\gamma}{dt}\Big\|^2 = \frac{d\gamma^j}{dt}\Big(\sum_{r=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}+\sum_{j,\ell=1}^{n}[i\ell,j](\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{g\gamma^\ell}{dt}\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{d\gamma^j}{dt}\Big(\sum_{r=1}^{n} g_{rj}(\gamma(t))\frac{d^2\gamma^r}{dt^2}+\sum_{j,\ell=1}^{n}[j\ell,i](\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{g\gamma^\ell}{dt}\Big)$$

چون γ نقطه‌ای تکین برای E است، هر دو جملهٔ دو پرانتز صفرند (نتیجهٔ ۱۰). بنابراین طول $\|d\gamma/dt\|$ همواره ثابت است. □

فرمول (۷.۹) مطرح شده در اثبات قضیهٔ بالا، بعداً به مناسبت‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آن همچنین برای کسب فرمولی برای $\partial g^{ij}/\partial x^k$ می‌توان استفاده کرد. برای استخراج آن، ابتدا از فرمول $\sum_{m=1}^{n} g_{\ell m}\, g^{mj}=\delta_{ij}$ مشتق می‌گیریم، بنابراین

$$\sum_{m=1}^{n} g_{\ell m}\frac{\partial g^{mj}}{\partial y^k}=-\sum_{m-1}^{n}\frac{\partial g_{\ell m}}{\partial y^k}\, y^{mj}$$

از حل این دستگاه معادلات، داریم

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k} = \sum_{\ell,m} g^{i\ell}\, g_{\ell m}\frac{\partial g^{mj}}{\partial y^k}=-\sum_{\ell,m} g^{i\ell}\, g^{mj}\frac{\partial g_{\ell m}}{\partial y^k}$$
$$= -\sum_{\ell,m} g^{i\ell}\, g^{mj}([\ell k,m]+[mk,\ell]) \qquad \text{(بنا به ۷.۹)}$$
$$= -\sum_{\ell} g^{i\ell}\Gamma^i_{\ell k}-\sum_{m} g^{mj}\,\Gamma^i_{mk}$$

و در نتیجه

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^k}=-\sum_{\ell=1}^{n}(g^{i\ell}\Gamma^j_{\ell k}+g^{\ell j}\Gamma^i_{\ell k}) \qquad (۸.۹)$$

درست به همان شیوه‌ای که نقاط تکین تابع انرژی را به دست آوردیم، می‌توانیم معادلات برای نقاط تکین برای تابع طول را به دست بیاوریم. فعلاً، تنها منحنی‌هایی $\gamma : [a;b] \to$

M را در نظر می‌گیریم که در همه جا $d\gamma/dt \neq 0$. در مورد بخش $\gamma\big|_{[t_{i-1};t_i]}$ از γ واقع در یک دستگاه مختصاتی (x, U) مفروض، داریم

$$L(\gamma|[t_{i-1};t_i]) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}}\, dt$$

با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی استاندارد بر $\mathbb{R}^n$، عملاً در این حالت با

$$F(x,y) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, y^i\, y^j}$$

مواجه هستیم. فرض کنیم $s(t) = \mathcal{L}_a^t(\gamma)$ تابع طول قوس است. در این صورت

$$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = F\Big(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x^\ell}\Big(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big) &= \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell}(\gamma(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \\
\frac{\partial F}{\partial y^\ell}\Big(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big) &= \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} g_{\ell r}(\gamma(t))\frac{d\gamma^r}{dt}}{\frac{ds}{dt}}
\end{aligned}$$

پس از کمی محاسبات بیشتر، سرانجام به معادلات به شرح زیر برای نقاط تکین $\mathcal{L}$ می‌رسیم:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} - \frac{d\gamma^k}{dt}\frac{d^2 s/dt^2}{ds/dt} = 0$$

از این فرمول مشهود است که نقاط تکین E، نقاط تکین $\mathcal{L}$ نیز هستند (زیرا در $d^2 s/dt^2 = 0$ صدق دارند.) بالعکس، به ازاء هر نقطه تکین γ برای $\mathcal{L}$، تابع $\forall t : d\gamma/dt \neq= 0$ دیفئومورفیسم است، و منحنی تجدید پارامتر شده $S : [a;b] \to [0;\mathcal{L}_a^b(\gamma)]$ را می‌توانیم در نظر بگیریم. این منحنی تجدید پارامتره شدهٔ $\gamma.s^{-1} : [0\,\mathcal{L}_a^b(\gamma)] \to M$ را می‌توانیم در نظر بگیری. این منحنی پارامتره شده، به طور خودکار یک نقطه تکین برای $\mathcal{L}$ است،

و لذا بایستی در همین معادلات دیفرانسیل صدق کند. چون این منحنی تجدید پارامتره شده، با پارامتر طول قوس پارامتره شده است، دومین جمله صفر است، و لذا $\gamma \circ s^{-۱}$ یک نقطه تکین برای E می‌باشد.

تنها یک نکته ناگفته مانده است و آن این که ممکن است نقطه تکینی برای $\mathcal{L}$ باشد که در نقطه‌ای چاه ($\sin k$) است (یعنی به شکل مقابل)، ولی همچنان هموار است، زیرا دارای بردار مماس صفر است. در این حالت امکان ندارد که بتوان γ را توسط طول قوس پارامتره نمود. مسئله ۳۷ نشان می‌دهد که این وضعیت ممکن نیست.

از این پس، به هر نقطه تکین برای E، **ژئودزی** بر M (برای متر ریمان $\langle , \rangle$) می‌گوئیم. این اصطلاح از علم ژئودزی آورده شده است، که در ارتباط با اندازه‌گیری زوایای خطوط مداری و نصف‌النهارها می‌باشد، و شامل شاخه‌ای به نام نقشه‌برداری (از زمین) است. هر ژئودزی بر سطح زمین، قطعه‌ای از یک دایرهٔ عظیمه است، که کوتاهترین مسیر بین نقاط می‌باشد و پیش از اینکه بگوئیم این مطلب در مورد ژئودزی‌های کلی درست است یا خیر، که از قبل می‌دانیم نقاط تکین برای طول هستند، بایستی ژئودزی‌ها را به شکل موضعی مطالعه کنیم.

خواص مقدماتی‌تر ژئودزی‌ها تنها به احکام در مورد معادلات دیفرانسیل بستگی دارد. توجه کنید که معادلات ژئودزی

$$\frac{d^۲\gamma^k}{dt^۲} + \sum_{i,j=۱}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = ۰$$

هستند، که خاصیت مهمی به شرح ذیل دارند: اگر γ ژئودزی باشد، آنگاه $t \mapsto \gamma(ct)$ نیز به وضوح ژئودزی است. این جنبه از معادله امکان اصلاح احکام به کمک قضایای وجود و یکتایی اساسی را فراهم می‌سازد.

۵.۵.۹ قضیه. گیریم $p \in M$. همسایه‌ای U از p و عددی $\varepsilon > ۰$ چنان وجود دارد که به ازای هر $q \in U$ و هر بردار مماس $v \in T_qM$ با $\|v\|\langle\varepsilon$، ژئودزی منحصر به فردی $\gamma_v : (-۲,۲) \to M$ وجود دارد که

$$\gamma_v(۰) = q \quad , \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(۰) = v$$

اثبات: قضیه وجود یکتایی اساسی می‌گوید که همسایگی‌ای U از p و اعداد $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲ >$ ۰ چنان وجود دارد که $q \in U$ و $v \in T_qM$ با $\|v\|\langle\varepsilon_۱$، ژئودزی منحصر به فردی $\gamma_v : (-۲\varepsilon_۲, ۲\varepsilon_۲) \to M$ با شرایط اولیه مورد نظر وجود دارد.

گیریم $\varepsilon\langle\varepsilon_۱\varepsilon_۲$: در این صورت اگر $|v|\langle\varepsilon$ و $|t|\langle ۲$، داریم $\|v/\varepsilon_۲\|\langle\varepsilon_۱$ و $|\varepsilon_۲ t|\langle ۲\varepsilon_۲$. پس می‌توانیم $\gamma_v(t)$ را $\gamma_{U/\varepsilon_۲}(\varepsilon_۲ t)$ تعریف کنیم. □

۶.۹ نگاشت نمایی

اگر $v \in T_qM$ برداری باشد که برای آن ژئودزی $\gamma : [\circ; ۱] \to M$ صادق در $\gamma(\circ) = q$ و $\frac{d\gamma}{dt}(\circ) = v$ باشد، آنگاه **نمای** v را به صورت

$$\exp(v) = \exp_q(v) = \gamma(۱)$$

می‌توانیم تعریف کنیم. (دلیل این اسم‌گذاری در فصل بعد مشخص می‌گردد.) بنابراین، ژئودزی را به صورت

$$\gamma(t) = \exp_q(tv)$$

می‌توان توصیف نمود. چون T_qM فضای برداری $n-$ بعدی است، طریقی طبیعی برای تعیین ساختار هموار بر آن وجود دارد. اگر $V \subseteq T_qM$ مجموعه همه بردارهایی $v \in T_qM$ باشد که به ازای آنها $\exp_q(v)$ تعریف می‌گردد، در این صورت نگاشت $\exp_q : V \to M$ هموار است، زیرا جواب‌های معادلات دیفرانسیل برای ژئودزی‌ها، دارای شار هموار است. با یکی گیری فضای مماس $T_v(T_qM)$ در $v \in T_qM$ با T_qM، به نگاشت القایی

$$(\exp_q)_{v^*} : T_qM \to T_{\exp_q} M$$

می‌رسیم. به ویژه، ادعا می‌کنیم که نگاشت $(\exp_q)_{\circ *} : T_qM \to T_qM$ همانی است. در واقع، برای به دست آوردن منحنی c در منیفلد T_qM با $\frac{dc}{dt}(\circ) = v \in T_qM$ (البته با یکی گیری T_qM با $(T_\circ(T_qM)$)، می‌توانیم فرض کنیم $c(t) = tv$. در این صورت $\exp_q \circ c(t) = \exp_q(tv)$، ژئودزی با بردار مماس v در زمان $\circ$ و در نتیجه

$$(\exp_q)_{\circ *}(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=\circ} \exp_q(c(t)) = v$$

قبل از اثبات حکم بعدی، چند حکم در مورد منیفلد TM را یادآور می‌شویم. اگر (x, U) دستگاهی مختصات بر M باشد، آنگاه برای $q \in U$ می‌توانیم هر بردار $v \in T_qM$ ای را به صورت یکتا به شکل $v = \sum_{i=۱}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q$ بست دهیم. چنانچه a^i را با $x^i(v)$ نشان دهیم، داریم

$$v = \sum_{i=۱}^{n} x^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(v)}$$

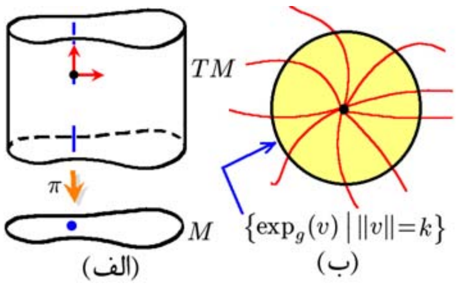
که $\pi : TM \to M$ تصویر طبیعی است. در این صورت

$$(x^{۱} \circ \pi, \circ, x^n \circ \pi, \dot{x}^{۱}, \cdots, \dot{x}^n) = (\bar{x}^{۱}, \cdots, \bar{x}^n, \dot{x}^{۱}, \cdots, \dot{x}^n)$$

دستگاهی مختصاتی بر $\pi^{-۱}(U)$ است. به ازاء $v \in T_qM$ و $q \in U$، بردارهای مماس

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\Big|_v, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\Big|_v \in T_v(TM)$$

را داریم. همه بردارهای $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\Big|_v$ به زیرمنیفلد $T_qM \subseteq TM$ مماس هستند، حال آنکه بردارهای $\partial/\partial \bar{x}^i\Big|_v$، زیر فضای متمم T_qM در TM را تولید می‌کند (به قسمت الف از شکل ۷.۹ توجه شود).



شکل ۷.۹

۱.۶.۹ قضیه. به ازاء هر $p \in M$، همسایگی W و عدد $\varepsilon > \circ$ چنان وجود دارند که هر دو نقطه از W توسط یک ژئودزی منحصر به فرد در M به طول $\langle \varepsilon$ متصل می‌شود.

(۲) گیریم $v(q, q')$ نمایشگر بردار منحصر به فرد $v \in T_qM$ به طول $\varepsilon > \circ$ است به گونه‌ای که $\exp_q(v) = q'$. در این صورت $(q, q') \mapsto v(q, q')$ تابعی هموار از $W \times W$ به TM است.

(۳) به ازاء هر $q \in W$، نگاشت $\exp_q$، ε–گوی باز در T_qM را به شکل دیفئومورف به روی مجموعه‌ای باز U_q که W را در بر دارد می‌نگارد.

اثبات: قضیه ۱۳ می‌گوید که بردار $\circ \in T_pM$ یک همسایگی V در منیفلد TM دارد به گونه‌ای که $\exp$ بر V تعریف می‌گردد. تابع همراه $F : V \to M \times M$ را با ضابطه $F(v) = (\pi(v), \exp(v))$ تعریف می‌کنیم.

گیریم (x, U) دستگاه مختصاتی حول p است. از دستگاه مختصات $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$ توصیف شده در بالا برای $\pi^{-1}(U)$ استفاده می‌کنیم. اگر $\pi_1 : M \times M \to M$ تصویر بر مؤلفهٔ i ام باشد، در این صورت

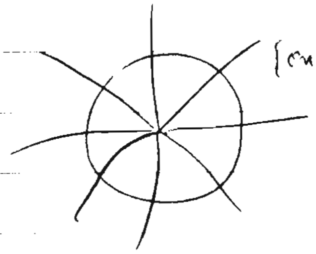
$$(x^1 \circ \pi_1, \cdots, x^n \circ \pi_1, x^1 \circ \pi_2, \cdots, x^n \circ \pi_2) = (x_1^n, \cdots, x_1^n, x_2^1, \cdots, x_2^n)$$

دستگاه مختصاتی بر $U \times U$ است. حال با استفاده از اینکه $(\exp_p)_{\circ *} : T_pM \to T_pM$ همانی است، مشاهده این که در $0 \in T_pM$ روابط زیر برقرار است، کار دشواری نیست.

$$F_*\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\Big|_0\Big) = \frac{\partial}{\partial x_1^i}\Big|_{(p,p)} + \frac{\partial}{\partial x_2^i}\Big|_{(p,p)} \quad , \quad F_*\Big(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\Big|_0\Big) = \frac{\partial}{\partial x_2^i}\Big|_{(p,p)}$$

نتیجتاً F_* در $0 \in T_pM$ یکبیک است، و لذا F همسایگی ای V' از 0 را به صورت دیفئومورف بروی همسایگی از $(p, p) \in M \times M$

نتیجتاً F_* در $0\in T_pM$ یکبیک است، ولذا F همسایگی‌ای V' از 0 را به صورت دیفئومورف بروی همسایگی‌ای از $(p,p)\in M\times M$ می‌نگارد. سرانجام فرض کنیم که V' از همهٔ بردارهای $v\in T_qM$ با q در یک همسایگی U' از p و $\|v\|<\varepsilon$ تشکیل شده است. W را همسایگی‌ای به اندازهٔ کافی کوچک از p می‌گیریم که $W\times W\subseteq F(V')$. □



به ازاء هر W مانند در قضیهٔ بالا و هر $q\in W$، ژئودزیهای گذرنده از q به شکل $t\mapsto \exp_q(tv)$ با $\|v\|<\varepsilon$ را در نظر می‌گیریم. اینها T_qU را پر می‌کنند.

تحلیل بهتر ژئودزیها به حکم ذیل بستگی دارد.

۱۵. لم (لم گاوس). در T_qU، ژئودزیهای گذرنده از q به ابررویه‌های

$$\{\exp_p(v) : \|v\| = \text{ثابت} < \varepsilon\}$$

عمودند.

اثبات اول: گیریم $v:\mathbb{R}\to T_qM$ منحنی هموار با "$\|v(t)\|=k<\varepsilon$ ثابت" به ازاء همهٔ tها است و تعریف کنیم

$$\alpha(u,t)=\exp_q(u\cdot v(t)) \qquad -1<u<1$$

ادعا می‌کنیم که به ازاء هر چنین αای

$$\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)\right\rangle = 0 \qquad \text{به ازاء هر } (u,t) \text{ای}$$

محاسباتی درست شبیه آنچه که در اثبات قضیهٔ ۱۲ آمد، ثابت می‌کند که معادلهٔ ذیل، که در آن متغیرهای (u,t) و $\alpha(u,t)$ حذف شده‌اند (به جهت ایجاد سادگی) برقرارند:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\alpha^j}{\partial t}\left(g_{rj}\frac{\partial^2\alpha^r}{\partial u^2} + \sum_{i,j=1}^n [il,j]\frac{\partial\alpha^i}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial u}\right)$$

(1)

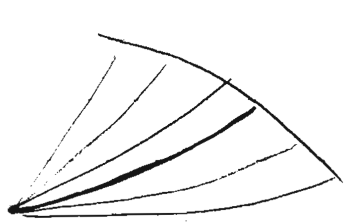
$$+\sum_{i=1}^n \frac{\partial\alpha^i}{\partial u}\left(\sum_{r=1}^n g_{ir}\frac{\partial^2\alpha^r}{\partial u\partial t} + \sum_{j,l=1}^n [jl,i]\frac{\partial\alpha^j}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial t}\right)$$

اولین جملهٔ سمت راست صفر است، زیرا هر منحنی $u\mapsto\alpha(u,t)$ ژئودزی است. به صورت مشابه داریم

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right\rangle = 2\sum_{i=1}^n\frac{\partial\alpha^i}{\partial u}\left(\sum_{r=1}^n g_{ir}\frac{\partial^2\alpha^r}{\partial u\partial t}+\sum_{j,l=1}^n[jl,i]\frac{\partial\alpha^j}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial t}\right)$$

که درست دو برابر جملهٔ دوم در سمت راست (۱) است. اما $\partial\alpha/\partial u(u,t)$ درست بردار مماس به ژئودزیک $u\mapsto\exp_q(u\cdot v(t))$ در لحظهٔ u است که $\|v(t)\|=k$؛ پس $\|\partial\alpha/\partial u\|$ برابر k است. بنابراین دومین جمله در سمت راست (۲) نیز صفر است. پس $\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle$ مستقل از u است. اما $\alpha(0,t)=\exp_q(0)=q$ ولذا $\partial\alpha/\partial t(0,t)=0$. نتیجه اینکه به ازاء هر (u,t)ای $\left\langle\frac{\partial\alpha}{\partial u},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle=0$.

اثبات دوم: گیریم $v : \mathbb{R} \longrightarrow T_qM$ منحنی همواری با $\|v(t)\| = k < \varepsilon$ ثابت به ازای هر t است، و تعریف کنیم $\beta(u,t) = \exp_q(t \cdot v(u))$ (در مورد نقش t و u دقت شود). در این صورت، β تغییری از ژئودزی $\gamma(t) = \exp_q(t \cdot v(0))$ است که بر $[0;1]$ تعریف می‌گردد. بنا به اولین فرمول تغییراتی، داریم



$$\frac{dE(\bar\beta(u))}{du}\Big|_{u=0} = -\left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1), \frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,0), \frac{d\gamma}{dt}(0)\right\rangle$$
$$= -\left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1), \frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle$$

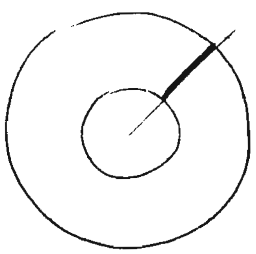
پس، چون γ ژئودزی است، انتگرال صفر می‌شود. اما هر منحنی $\bar\beta(u)$ دارای انرژی

$$E(\bar\beta(u)) = \int_0^1 \left\| \frac{d\bar\beta(u)(t)}{dt} \right\|^2 dt = \int_0^1 k^2 dt = k^2$$

است. در نتیجه

$$0 = \frac{dE(\bar\beta(u))}{du}\Big|_{u=0} = -\left\langle \frac{\partial\beta}{\partial u}(0,1), \frac{d\gamma}{dt}(1)\right\rangle$$

و برهان تمام است. □



۱۶. نتیجه. گیریم $c : [a;b] \longrightarrow T_qU - \{q\}$ یک منحنی تکه‌ای هموار با ضابطهٔ $c(t) = \exp_q(u(t) \cdot v(t))$ که $0 < u(t) < \varepsilon$ و $\|v(t)\| = 1$ است. در این صورت $L_a^b c > |u(b) - u(a)|$، که تساوی وقتی و تنها وقتی ممکن است که u یکنوا و v ثابت باشد؛ یعنی c یک ژئودزی شعاعی واصل بین دو کرهٔ هم‌مرکز به گرد q است.

اثبات: اگر $\alpha(u,t) = \exp_q(u \cdot v(t))$، در این صورت $c(t) = \alpha(u(t), t)$،

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

چون $\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle = 0$ و $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right\| = 1$، داریم

$$\left\|\frac{dc}{dt}\right\|^2 = |u'(t)|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 \geq |u'(t)|^2$$

که تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که $\partial\alpha/\partial t = 0$، و لذا $v'(t) = 0$. بنابراین

$$\int_0^b \left\|\frac{dc}{dt}\right\| dt \geq \int_0^b |u'(t)| dt \geq |u(b) - u(a)|$$

و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که u یکنوا و v ثابت باشد. □

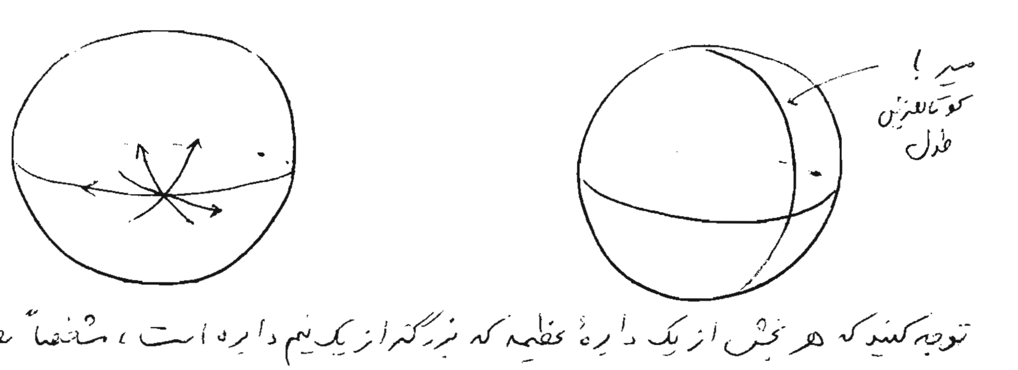
۱۷. نتیجه. گیریم W و ε همچون در قضیهٔ ۱۵ باشند. گیریم $\gamma : [0,1] \to M$ ژئودزی بطول $< \varepsilon$ واصل بین $q, q' \in W$ است، و $c : [0,1] \to M$ مسیری تکه‌ای هموار از q به q' است. در این صورت $L(\gamma) \leq L(c)$، که تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که c تجدید پارامتر γ باشد.

اثبات: می‌توانیم فرض کنیم $q' = \exp_q(tv) \in T_qU - \{q\}$ (در غیر این صورت c را به قطعات کوچک می‌شکنیم). به ازاء $\delta > 0$، مسیر c باید پاره‌خطی که پوستهٔ کروی به گرد δ را به پوستهٔ کروی به گرد t متصل می‌کند، شامل باشد، در بین آنها قرار دارد. بنا به نتیجهٔ ۱۶، طول این قطعه $\geq t - \delta$ است. پس طول $c \geq t$، و به وضوح c بایستی یک تجدید پارامتر از γ باشد، برای اینکه تساوی برقرار شود. $\square$

تا اینجا دیدیم که قطعات باندازهٔ کافی کوچک از ژئودزیها، مسیرهای حداقل طول نسبت به طول توس هستند. از نتیجهٔ ۱۷ برای تعیین ژئودزیهای برای بسیاری از سطوح ساده، بدون هیچ گونه محاسبه‌ای، می‌توانیم استفاده کنیم، مشروط به آنکه ابتدا یک مفهوم کلیدی در این زمینه را مطرح کنیم.

اگر $(M, \langle\,,\rangle)$ و $(M', \langle\,,\rangle')$ دو منیفلد هموار با متر ریمانی باشند، در این صورت تابع یکبیک هموار $f : M \to M'$ را در صورتی ایزومتری از M به M' گوئیم که $\langle\,,\rangle = f^*\langle\,,\rangle'$. بعنوان مثال، انعکاس نسبت به صفحهٔ $E^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (دلخواه)، یک ایزومتری $I : S^n \to S^n$ است. روشن است که اگر $c : [0,1] \to M$ منحنی هموار باشد، آنگاه طول c نسبت به $\langle\,,\rangle$ با طول $f \circ c$ نسبت به $\langle\,,\rangle'$ برابر است؛ و اگر c ژئودزی باشد، آنگاه $f \circ c$ نیز هست.

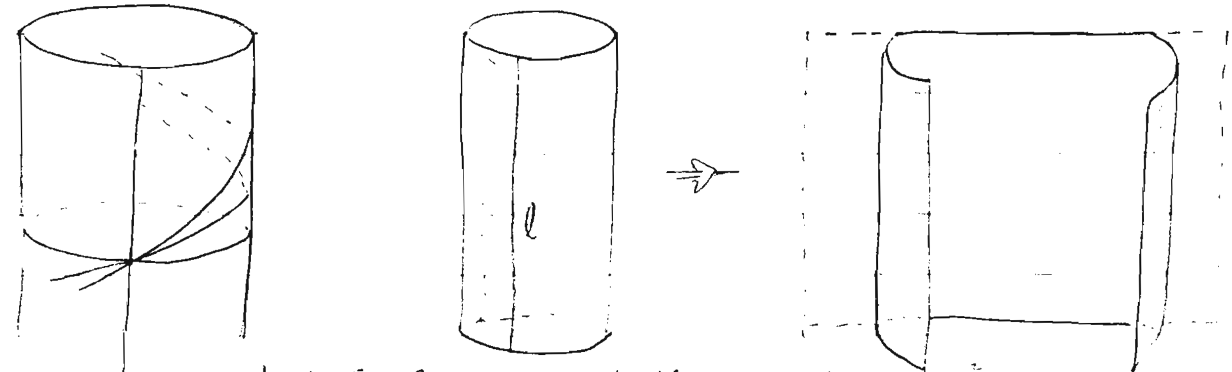
در مورد ایزومتری $I : S^n \to S^n$ مطرح شده در بالا، مجموعهٔ نقطهٔ ثابت ایزومتری I عبارت است از دایرهٔ عظیمهٔ $C = S^n \cap E^2$. گیریم p و $q \in C$ دو نقطه با یک ژئودزی منحصربفرد C' با طول حداقل بین آنها باشند. در این صورت $I(C')$ ژئودزی با همان طول است (طول C') بین $I(p) = p$ و $I(q) = q$. پس $C' = I(C')$، که ایجاب می‌کند $C' \subset C$، ولذا C ژئودزی است. چون از هر نقطهٔ از S^n دایرهٔ عظیمه می‌گذرد (والبته با هر جهت دلخواه مفروض)، همهٔ اینها ژئودزی هستند.



توجه کنید که هر بخش از یک دایرهٔ عظیمه که بزرگتر از یک نیم دایره است، مشخصاً بطول حداقل نیست، حتی بین همهٔ مسیرهای در نزدیکی اش. نقاط متقاطر بر کره، بینهایت ژئودزی بطول حداقل بینشان وجود دارد. سایر نقاط بر کره دارای ژئودزی با حداقل طول منحصربفرد بینشان دارند، اما بینهایت ژئودزی غیرحداقل، بسته به اینکه ژئودزی به چه

تعداد گرد که بگرد دنده یا به دو جهتی پیچ خورده، وجود دارد.

ژئودزیهای بر استوانهٔ مستدیر قائم Z عبارتند از خطوط مولد، دوایر قطایی حاصل از برخورد صفحات قائم با استوانه، و مارپیچهای بر Z. در واقع، اگر L یک خط مولد برای Z باشد، آنگاه با غلتاندن Z بروی $\mathbb{R}^2$ یک ایزومتری $I : Z - L \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حاصل می‌گردد:



ژئودزیهای بر Z دقیقاً عبارتند از تصویر خطوط راست در $\mathbb{R}^2$ توسط I^{-1}. بین هر دو نقطه از Z بینهایت ژئودزی وجود دارد.

اکنون موقعیت آن است که بحث درخصوص متر ریمان بر M را با اثبات ارتباط مهمی بین متر ریمان $\langle , \rangle$ و متر $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ مشخص شده توسط آن بر M، یعنی

$$d(p,q) = \inf \{ L(\gamma) : \text{است } q \text{ به } p \text{ یک منحنی تکه‌ای هموار از } \gamma \}$$

توجه کنید که هم در حالت کره و هم در حالت استوانه، هر ژئودزی γ تعریف شده بر یک بازه $[a , b]$ را به یک ژئودزی بر کل $\mathbb{R}$ میتوان تعمیم داد. این مطلب درمورد استوانهٔ با ارتفاع متناهی، یعنی بخشی کراندار از $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{R}^n - \{0\}$، غلط است. درحالت کلی، یک منفلد M با یک متر ریمان $\langle , \rangle$ را درصورتی کامل ژئودزیک گوئیم که هر ژئودزی $\gamma : [a , b] \longrightarrow M$ قابل گسترش به یک ژئودزی از $\mathbb{R}$ به M باشد.

۱۸. قضیه (هوپف - راینو - دورام). اگر $\langle , \rangle$ متر ریمان بر M باشد، آنگاه وقتی وتنها وقتی M بطور ژئودزی کامل است که نسبت به متر d مشخص شده توسط $\langle , \rangle$، M کامل باشد. بعلاوه، هر دو نقطه از یک منفلد بطور ژئودزی کامل را با یک ژئودزی بطول حداقل میتوان بهم متصل نمود.

اثبات: فرض کنید M بطور ژئودزی کامل است. بازاء هر $p , q \in M$ با $d(p,q) = r > 0$، مجموعهٔ U_p را مثل در قضیهٔ ۱۴ انتخاب می‌کنیم. گیریم $S \subseteq U_p$ پوستهٔ کروی به شعاع $\varepsilon < \delta$ است. نقطه‌ای $p_0 = \exp_p \varepsilon v$ با $\|v\| = 1$ بر S به گونه‌ای وجود دارد که بازاء هر $s \in S$ ای $d(p_0 , q) \leq d(s , q)$. ادعا می‌کنیم

$$\exp_p (rv) = q \qquad (*)$$

این نشان میدهد که ژئودزی $\gamma(t) = \exp_p (tv)$، یک ژئودزی با طول حداقل بین p و q است. برای اثبات این حکم، ثابت می‌کنیم که

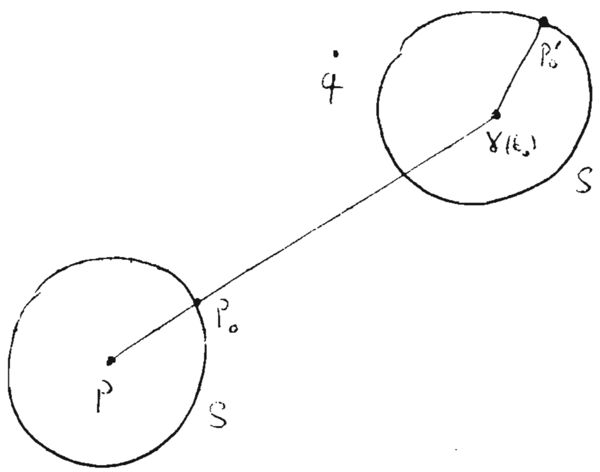
(**) $\qquad d(\gamma(t), q) = r - t \qquad t\in[\delta ; r]$

اول از همه، چون هر منحنی از p به q باید S را قطع کند، به وضوح داریم

$$d(p,q) = \min_{s\in S}\left(d(p,s)+d(s,q)\right) = \delta + d(p_0,q)$$

پس $d(p_0,q) = r-\delta$. این ثابت می‌کند که (**) به ازاء $t=\delta$ درست است.

حال فرض کنیم $t_0\in[\delta ; r]$ که کوچکترین کران بالایی همهٔ tهای صادق در (**) است، در این صورت (**) به ازاء t_0 نیز درست است، بنا به پیوستگی. فرض کنیم $t_0<r$. گیریم S' پوسته‌ای کروی به شعاع δ' حول $\gamma(t_0)$ است و $p'_0 \in S'$ نقطه‌ای است به نزدیکی q.



در این صورت

$$d(\gamma(t_0),q) = \min_{s\in S}\left(d(\gamma(t_0),s)+d(s,q)\right) = \delta' + d(p_0',q)$$

پس

(***) $\qquad d(p_0',q) = (r-t_0)-\delta'$

بنابراین

$$d(p,p_0') \geq d(p,q) - d(p_0',q) = t_0+\delta'$$

اما مسیر c حاصل از طی γ از p تا $\gamma(t_0)$ و سپس ژئودزی حداقل طول از $\gamma(t_0)$ به p_0' به طول دقیقاً $t_0+\delta'$ است. پس c مسیری بطول حداقل است، و بنابراین بایستی ژئودزی باشد؛ و این یعنی تطابق آن با γ است. در نتیجه $p_0' = \gamma(t_0+\delta')$. در نتیجه، از (***) نتیجه می‌شود $d(\gamma(t_0+\delta'),q) = r-(t_0+\delta')$، و بنابراین (**) به ازاء $t_0+\delta'$ برقرار است. این با چگونگی انتخاب t_0 در تضاد است، ولذا بایستی $t_0=r$. به بیان دیگر، (**) برای $t=r$ برقرار است، که (*) را ثابت می‌کند.

از این حکم براحتی نتیجه می‌گردد که M نسبت به متر d کامل است. درواقع، اگر $A\subset M$ با قطر d باشد، و $p\in A$، آنگاه نگاشت $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ دیسک بستهٔ به شعاع d در T_pM را بروی مجموعه‌ای فشرده که A را دربردارد می‌نگارد. به بیان دیگر، مجموعه‌های کراندار در M، بستار کراندارند. از این به وضوح همگرایی دنباله‌های کوشی نتیجه می‌گردد.

بالعکس، فرض کنیم M بعنوان فضای متری کامل است. به ازاء هر ژئودزی $\gamma : (a;b) \longrightarrow M$، دنباله‌ای $\{t_n\}$ همگرا به b درنظر می‌گیریم. به وضوح $\gamma(t_n)$ دنباله‌ای کوشی در M است، ولذا به نقطه‌ای $p\in M$ همگرا است. به کمک قضیهٔ ۱۴، با کمی کار می‌توان ثابت کرد که γ می‌توان طوری گسترش یابد که از b بگذرد. نتیجتاً، بنا به یک استدلال مبتنی بر کوچکترین کران بالایی، هر ژئودزی را به $\mathbb{R}$ می‌توان توسیع داد. □

بعنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۸ چنین می‌توان گفت که هر دو نقطه از یک منیفلد فشرده را با یک ژئودزی بطول حداقل می‌توان بهم متصل کرد.

۱۳۸۳/۳/۱۴

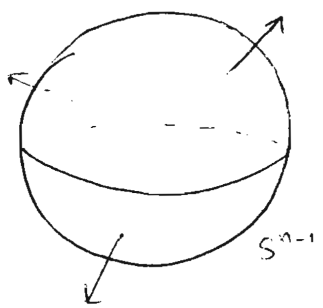
ضمیمه. همسایگی جدولی

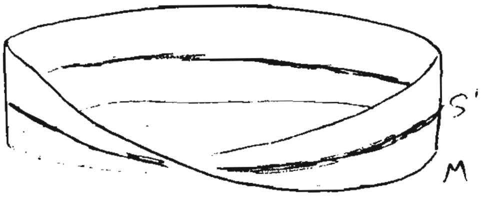
گیریم $M^n \subseteq N^{n+k}$ زیرمنیفلدی از N با نگاشت احتوای $i : M \to N$ است. پس به ازاء هر $p \in M$ ای $i_*(T_pM) \subseteq T_pN$. اگر $\langle\ ,\ \rangle$ یک متر ریمان بر N باشد، آنگاه $T_pM^\perp \subset T_pN$ را به صورت

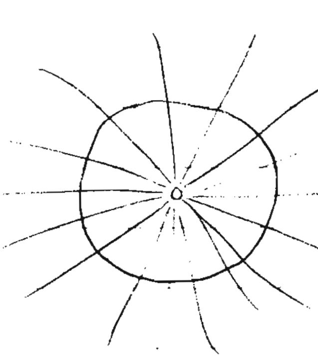
$T_pM^\perp = \{ v \in T_pN : \langle v, i_*w\rangle = 0$ به ازاء هر $w \in T_pM$ ای $\}$

میتوانیم تعریف کنیم. گیریم $E = \biguplus_{p\in M} T_pM^\perp$ و $\varpi : E \to M$ کل $T_pM^\perp$ را به p تصویر کند. شاهد این مطلب که $\nu = \varpi : E \to M$ یک کلاف k-صفحه‌ای روی M است، کار دشواری نیست. این را کلاف قائم M در N مینامیم.

مثلاً: کلاف قائم ν کره $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ یک کلاف ۱-صفحه‌ای بدیهی است، زیرا ν برشی فراگیر مرکب از بردارهای قائم یکهٔ برونسوی دارد. از سوی دیگر، اگر M نوار موبیوس باشد و $S^1 \subset M$ دایرهٔ به گرد مرکز آن، در این صورت شاهد این مطلب که کلاف قائم ν با کلاف (غیربدیهی) $S^1 \to M$ ایزومورف است، کار دشواری نیست. چنانچه $S^1 \subset M \subset \mathbb{P}^2$ را درنظر بگیریم، در این صورت S^1 در $\mathbb{P}^2$ کلاف قائمی دارد که درست همان کلاف قائم S^1 در M است، ولذا آن نیز غیربدیهی است.







هدف ما اثبات این مطلب است که به ازاء هر منیفلد فشرده M، کلاف قائم M در N همواره با کلافی $\pi : U \to M$ که در آن U یک همسایگی باز از M در N است، و برای آن برش صفر $s : M \to U$ درست همان نگاشت احتوای M در N می‌باشد، هم‌ارز است. درحالی که N فضای کلی یک کلاف روی M است، این همسایگی باز را کل فضای کلی N میتوان گرفت. اما در حالت کلی، ممکن است این همسایگی تمام N نباشد. مثلاً، همسایگی مناسب $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ را $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ میتوانیم بگیریم.

کلاف $\pi : U \to M$ که U همسایگی بازی از M در N است و به ازاء آن، برش صفر $s : M \to U$ نگاشت احتوای M در U میباشد، همسایگی جدولی M در N نامیده میشود. قبل از اثبات وجود همسایگیهای جدولی، چند نکته و یک لم ذکر کنیم.

اگر $\pi : U \to M$ همسایگی جدولی باشد، آنگاه

$\pi \circ s =$ نیز M همانی است.

$s \circ \pi =$ با نگاشت همانی U هوموتوپ است.

پس π یک انقباض دگردیسی است، و $H^k(U) \approx H^k(M)$؛ بنابراین، کوهومولوژی دورام M همچون همسایگی باز U در N است. بعلاوه، اگر یک متر ریمان $\langle\ ,\ \rangle$ برای $\pi : U \to M$ انتخاب شود و تعریف کنیم

$D = \{e\in U : \langle e,e\rangle \le 1\}$، آنگاه D یک زیرمنیفلد مرزدار از U است، و نگاشت $\pi|_D : D \to M$ نیز انقباض دگردیسی است. پس M نیز همان گروههای همولوژی دوران مجموعهٔ (همسایگی) بستهٔ D در N را دارد.

۱۹. لم. گیریم X یک فضای متری فشرده است و $X_0 \subset X$ زیرمجموعه‌ای بسته. گیریم $f : X \to Y$ همئومورفیسمی موضعی است به گونه‌ای که $f|X_0$ یکبیک می‌باشد. در این صورت یک همسایگی U از X_0 به گونه‌ای وجود دارد که $f|U$ نیز یکبیک است.

اثبات: گیریم $C = \{(x,y)\in X\times X : x\neq y \text{ و } f(x)=f(y)\} \subset X\times X$. در این صورت C بسته است، زیرا اگر (x_n,y_n) دنباله‌ای در C با $\lim x_n = x$ و $\lim y_n = y$ باشد، آنگاه

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(y)$$

و بنابراین، چون f موضعاً یکبیک است، پس $x\neq y$ و لذا $(x,y) = \lim (x_n,y_n)$ به C متعلق است.

اگر $g : C \to \mathbb{R}$ به صورت $g(x,y) := d(x,X_0) + d(y,X_0)$ تعریف شود، آنگاه g بر C مثبت است. چون C فشرده است، $\varepsilon>0$ ای چنان یافت می‌شود که $g > 2\varepsilon$ بر C. در این صورت f بر یک ε-همسایگی از X_0 یکبیک است. □

۲۰. قضیه. گیریم $M \subset N$ زیرمنیفلدی فشرده از N است. در این صورت M دارای یک همسایگی جدولی $\pi : U \to M$ در N است که با کلاف قائم M در N هم‌ارزی باشد.

اثبات: یک متریک $\langle\, ,\rangle$ برای N انتخاب کرده، نرم نظیرش را $\|\ \|$ و متر متناظرش را $d : N\times N \to \mathbb{R}$ می‌گیریم. فرض کنیم

$E := \{v : v\in T_pN \,,\, v\in T_pM^{\perp}$ به ازای یک $p\in M$ ای$\}$

$E_\varepsilon := \{v\in E : \|v\| < \varepsilon\}$ $\qquad$ $U_\varepsilon := \{q\in N : d(q,M) < \varepsilon\}$

اکنون از قضیهٔ ۱۳ و فشردگی M به سادگی نتیجه می‌گردد که $\exp$ به ازاء $\varepsilon>0$ به اندازهٔ کافی کوچک بر E_ε تعریف می‌گردد. ادعا می‌کنیم که نگاشت $\exp$ برای $\varepsilon>0$ به اندازهٔ کافی کوچک، یک دیفئومورفیسم از E_ε بروی U_ε می‌باشد. این به وضوح قضیه را اثبات می‌کند.

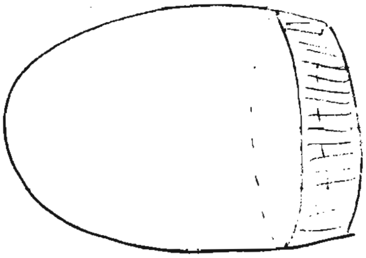
گیریم $V \subset E$ مجموعهٔ نقاط غیرتکین $\exp$ است. در این صورت $M \subset V$ (به عنوان زیرمجموعه‌ای از E توسط برش صفر در نظر گرفته شده است)؛ و $V_1 = (V \cap E_1)$ فشرده است؛ چون $\exp$ بر $M \subset V_1$ یکبیک می‌باشد، از لم ۱۹ نتیجه می‌گیریم که نگاشت $\exp$ برای ε به اندازهٔ کافی کوچک یک دیفئومورفیسم بر E_ε می‌باشد.

همچنین روشن است که $\exp(E_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$. برای اثبات اینکه $\exp$ بروی U_ε می‌باشد، یک $q\in U_\varepsilon$

نقطهٔ $p\in M$ در نزدیکی q انتخاب می‌کنیم. اگر $\gamma:[0,1]\to N$ ژئودزی بطول $<\varepsilon$ با $\gamma(0)=p$ و $\gamma(1)=q$ باشد، بسادگی ملاحظه می‌گردد که γ در p بر M عمود است (با در سی اثبات از لم گاوس مقایسه گردد). این بدین معنی است که $q=\exp_p(d\gamma/dt(0))$ که $d\gamma/dt(0)\in E_\varepsilon$. □

یکی از جالب‌ترین جنبه‌های قضیهٔ ۲۰، این است که در اثبات آن از همهٔ قدرت هندسه ریمانی و ژئودزی استفاده شده است، ولی در صورت قضیه از هیچ کدام آنها خبری نیست. از قضیهٔ ۲۰ تنها در فصل ۱۱ استفاده می‌شود که در آنجا هم از نوع اصلاح شدهٔ به شرح زیر استفاده می‌گردد:

۲۱. قضیه. گیریم N یک منیفلد مرزدار، با مرز فشردهٔ ∂N است. در این صورت ∂N دارای همسایگی‌های (باندازه کافی کوچک) باز [و بترتیب، بسته] است که برای آنها انقباض دگردیسی بروی ∂N وجود دارد.



اثبات: درست مثل قضیهٔ ۲۰ است، منتهی باید از بردارهای نرمال بسمت داخل استفاده شود. □

مسایل فصل ۹

۱. گیریم V فضایی برداری بر هیأت F با مشخصهٔ $\neq 2$ است و $h:V\times V\to F$ دوخطی متقارن است.

(الف) $q:V\to F$ را بصورت $q(v)=h(v,v)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ پایه‌ای برای V^* باشد، آنگاه به ازاء یک سری a_{ij} ها $q=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_i^*\cdot v_j^*$.

(ب) نشان دهید $q(-v)=q(v)$ و $h(u,v)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$.

(ج) فرض کنید $q:V\to F$ در شرط $q(-v)=v$ صدق کرده و $h(u,v)=q(u+v)-q(u)-q(v)$ دوخطی باشد. نشان دهید که

$$q(u+v+w)-q(u)-q(v+w)=q(u+v)-q(u)-q(v)-q(u+w)-q(u)-q(w)$$

نتیجه بگیرید که $q(0)=0$ و $q(2u)=4q(u)$. سپس نشان دهید که $q(v)=h(v,v)$.

۲. گیریم $\langle\ ,\ \rangle$ یک ضرب اقلیدسی بر V^* است. فرض کنید $\varphi_i,\psi_i\in V^*$ ها در روابط $\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k=\psi_1\wedge\dots\wedge\psi_k\neq 0$

صدق می‌کنند و W_φ و W_ψ زیرفضاهای تولیدشده توسط φ_iها و ψ_iها در V^* هستند.

الف) نشان دهید وقتی و تنها وقتی $\omega \in W_\varphi$ که $\omega \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = 0$. نتیجه بگیرید $W_\varphi = W_\psi$.

ب) گیریم $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ پایه‌ای متعامد برای $W_\varphi = W_\psi$ است. اگر $\varphi_i = \sum_j a_{ji}\sigma_j$، نشان دهید حجم k-بعدی متوازی‌السطوح تولیدشده توسط $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ برابر $\det(a_{ij})$ است. (علامت در صورتی + است که $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ دارای همان جهت $\psi_1, \dots, \psi_k$ باشد، و در غیر این صورت − است.)

ج) در مقایسه با مسألهٔ ۷-۹ نشان دهید که این حجم برابر همان حجم برای $\psi_1, \dots, \psi_k$ است.

د) بالعکس اگر $W_\varphi = W_\psi$ و حجم متوازی‌السطوح آنها یکی باشند، نشان دهید $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$.

چنانچه V را با V^{**} یکی بگیریم، از ضرب گوه‌ای $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ بردارهای $v_i \in V$ در V می‌توان سخن گفت. به این ترتیب، شرطی هندسی برای تساوی $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ با آن داریم. الی کارتان در کتاب "درسهایی در هندسهٔ فضاهای ریمانی" این شرط را برای تعریف $\Omega^k(V^*)$ به صورت مجموعهای سوری از دسته‌های هم‌ارزی از k بردار تعریف کرده است؛ او سپس شرایط متناظر بر مختصات v_iها و w_iها را به صورت هندسی مطرح کرده است.

۳. گیریم V یک فضای برداری n-بعدی است و $\langle\,,\rangle$ ضربی داخلی بر V است که الزاماً مثبت معین نیست. پایهٔ $\{v_1, \dots, v_n\}$ برای V را در صورتی قائم گوییم که به ازای i و jای $\langle v_i, v_j\rangle = \pm\delta_{ij}$.

(الف) اگر $V \neq \{0\}$، آنگاه برداری $v \in V$ وجود دارد که $\langle v, v\rangle \neq 0$.

(ب) به ازای $W \subset V$، تعریف می‌کنیم $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0$ به ازای هر $w \in W\}$. ثابت کنید که $\dim W^\perp \geq n - \dim W$. راهنمایی: اگر $\{w_i\}$ پایه‌ای برای W باشد، تابعی‌های خطی $\lambda_i : V \to \mathbb{R}$ را به صورت $\lambda_i(v) = \langle v, w_i\rangle$ تعریف می‌کنیم.

(ج) اگر $\langle\,,\rangle$ بر W ناتباهیده باشد، آنگاه $V = W \oplus W^\perp$ و $\langle\,,\rangle$ بر $W^\perp$ نیز ناتباهیده است.

(د) V پایه‌ای (متعامد) قائم دارد. بنابراین، ایزومورفیسمی $f : \mathbb{R}^n \to V$ وجود دارد که به ازای یک rای داریم $f^*\langle\,,\rangle = \langle\,,\rangle_r$ (ضرب داخلی $\langle\,,\rangle_r$ در صفحهٔ   تعریف شده است).

(ه) شاخص ضرب داخلی $\langle\,,\rangle$ عبارتست از بزرگترین بعد زیرفضای $W \subset V$ به گونه‌ای که $\langle\,,\rangle|W$ منفی معین است. نشان دهید شاخص $\langle\,,\rangle$ برابر $n-r$ است و سپس نشان دهید که r منحصر بفرد است ("قانون بقای سیلوستر").

۴. گیریم $\langle\,,\rangle$ یک ضرب داخلی (نه لزوماً مثبت معین) بر V است و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای قائم (مسألهٔ ۳) بر V است. با دانستن اینکه

$$v^*_{i_1} \wedge \dots \wedge v^*_{i_k} \qquad 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$$

پایه‌ای قائم با

$$\langle v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*,\, v_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge v_{i_k}^*\rangle^k = \det(\langle v_{i_\alpha}, v_{i_\beta}\rangle)$$

است، ضرب داخلی $\langle\,,\rangle^k$ بر $\Omega^k(V)$ تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید $\langle\,,\rangle^k$ مستقل از تعریف با استفاده از پایهٔ $\{v_1,\dots,v_n\}$ است (مسألهٔ ۷-۱۶).

(ب) نشان دهید

$$\langle\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k,\, \psi_1\wedge\cdots\wedge\psi_k\rangle^k = \det(\langle\varphi_i,\psi_j\rangle^*) = \det(\langle\varphi_i,\psi_i\rangle')$$

(ج) اگر $\langle\,,\rangle$ با شاخص r باشد، آنگاه $\langle v_1^*\wedge\cdots\wedge v_n^*,\, v_1^*\wedge\cdots\wedge v_n^*\rangle = (-1)^r$.

(د) برای آنهایی که با $\otimes$ و $\wedge^k$ آشنا هستند. با استفاده از ایزومورفیسم $(\otimes^k V)^* \approx \otimes^k V^*$ و $\Lambda^k(V^*) \approx (\Lambda^k V)^*$ ضرب داخلی بر $\otimes^k V$ و نیز بر $\Lambda^k V$ تعریف کنید، در اینجا از ایزومورفیسم $V \to V^*$ مطرح شده توسط ضرب داخلی بر V استفاده می‌شود. نشان دهید که این ضرب داخلی‌ها، با آنها که در بالا تعریف شدند، یکی اند.

۵. تعریف $v_1\times\cdots\times v_{n-1}$ را از مسألهٔ ۷-۲۶ به یاد بیاورید.

(الف) نشان دهید که به ازاء هر i ای $\langle v_1\times\cdots\times v_{n-1},\, v_i\rangle = 0$.

(ب) نشان دهید $|v_1\times\cdots\times v_{n-1}| = \sqrt{\det(g_{ij})}$، که $g_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. راهنمایی: از حکم در صفحهٔ برای بدست آوردن زیرفضای $(n-1)$-بعدی بخصوص از $\mathbb{R}^n$ استفاده کنید.

۶. گیریم $\xi = \pi: E \to B$ کلاف برداری است. متر نامعین بر ξ، انتخابی پیوسته از یک ضرب داخلی نامثبت‌معین $\langle\,,\rangle_p$ بر هر یک از $\pi^{-1}(p)$ ها تعریف می‌کنیم. نشان دهید که شاخص $\langle\,,\rangle_p$ بر هر مؤلفهٔ B ثابت است.

۷. این مسأله به اطلاعاتی در خصوص همبند ساده بودن و فضاهای پوششی بستگی دارد.

(الف) هیچ طریقی برای انتخاب پیوستهٔ زیرفضاهای ۱-بعدی از T_pS^2 به ازاء $p\in S^2$ های مختلف وجود ندارد. (فضای متشکل از دو بردار یکه در هر زیرفضا را درنظر بگیرید.)

(ب) هیچ متر ریمانی با شاخص ۱ بر S^2 وجود ندارد.

۸. گیریم $\langle\,,\rangle$ و $\langle\,,\rangle'$ دو متر ریمان بر کلاف برداری $\xi = \pi: E \to B$ هستند. گیریم S مجموعهٔ همهٔ $e\in E$ های با $\langle e,e\rangle = 1$ است، و S' را به صورت مشابه تعریف می‌کنیم. نشان دهید S با S' همیومورف است. اگر ξ کلاف هموار روی منیفلد M باشد، نشان دهید S با S' دیفئومورف است.

۹. با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که اگر توابع g_{ij} و g'_{ij} به صورت

$$g'_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}$$

با $\det(g_{ij}) \neq 0$ مرتبط باشند و توابع g^{ij} و g'^{ij} به صورت

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \qquad \sum_{k=1}^{n} g'^{ik} g'_{kj} = \delta^i_j$$

تعریف شوند. در این صورت

$$g'^{\alpha\beta} = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^j}$$

این طریق کلاسیک برای تعریف تانسور (با مؤلفه‌های) g^{ij} است.

۱۰. (الف) گیریم $\langle\, ,\, \rangle$ یک متر ریمان بر M است و A تانسوری از نوع $\binom{1}{1}$. پس به ازاء هر $p \in M$ ای $A(p): T_pM \to T_pM$. تانسور B از نوع $\binom{2}{0}$ را به صورت $B(p)(v_1, v_2) = \langle A(p)(v_1), v_2 \rangle$ تعریف می‌کنیم. اگر بیان A در دستگاه مختصاتی به شکل $A = \sum_{i,j=1}^{n} A^j_i \, dx^i \otimes \partial/\partial x^j$ باشد، نشان دهید $B = \sum_{i,k} B_{ik}\, dx^i \otimes dx^k$، که $B_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A^j_i g_{jk}$.

(ب) به صورت مشابه تانسوری از نوع $\binom{0}{2}$ به صورت $C(p)(\lambda_1, \lambda_2) = \langle A(p)^*(\lambda_1), \lambda_2 \rangle$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که اگر مؤلفه‌های C عبارت از C^{kj} باشد، در این صورت $C^{kj} = \sum_{i=1}^{n} g^{ki} A^j_i$.

تانسورهای B و C شروح در بالا را تانسورهای حاصل از A به ترتیب با بالابری و پائین‌بری اندیس‌ها می‌نامیم.

۱۱. (الف) گیریم X_1، ...، X_n میدانهای برداری مستقل خطی بر منیفلد M با متر ریمان $\langle\, ,\, \rangle$ هستند. نشان دهید که روش گرام اشمیت را می‌توان برای این میدانهای برداری بکار گرفت، و به n میدان برداری در همه جا متعامد Y_1، ...، Y_n رسید.

(ب) در حالت متر غیر مثبت معین، Y_1، ...، Y_n را در همسایگی‌ای از هر نقطه به گونه‌ای بیابید که $\langle Y_i, Y_j \rangle = \pm \delta_{ij}$.

۱۲. (الف) اگر $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ مثبت باشد، نشان دهید مساحت رویهٔ حاصل از دوران نمودار f حول x-محور $\int_a^b 2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}$ است.

(ب) مساحت S^2 را ثابت کنید.

۱۳. گیریم $M \subset \mathbb{R}^n$ زیرمنیفلدی $(n-1)$-بعدی با جهت μ است. بردار یکهٔ برونسوی $\nu(p)$ در نقطهٔ $p \in M$ را به صورت برداری در $T_p\mathbb{R}^n$ بطول یک تعریف می‌کنیم که $\{\nu(p), (v_1)_p, \dots, (v_{n-1})_p\}$ در $T_p\mathbb{R}^n$ با جهت مثبت باشد، به شرط آنکه $\{(v_1)_p, \dots, (v_{n-1})_p\}$ در T_pM با جهت مثبت باشد.

(الف) اگر به ازاء یک منیفلد مرزدار n-بعدی $N \subset \mathbb{R}^n$ ای $M = \partial N$، نشان دهید که $\nu(p)$ها همانند در فصل ۸ برونسوی است.

(ب) گیریم dV_{n-1} المان حجم M حاصل از متر ریمان، به عنوان زیرمنیفلد M از $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که اگر $\nu(p)$ را عنصری از $\mathbb{R}^n$ درنظر بگیریم، آنگاه

$$dV_{n-1}(p)\left((v_1)_p,\dots,(v_{n-1})_p\right)=\det\begin{pmatrix} v(p)\\ v_1\\ \vdots\\ v_{n-1}\end{pmatrix}$$

نتیجه بگیرید که تحدید عنصر زیر به T_pM دقیقاً $dV_{n-1}(p)$ است:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}v^i(p)\,dx^1(p)\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i(p)}\wedge\dots\wedge dx^n(p)$$

(ج) توجه کنید که به ازای یک $\alpha\in\mathbb{R}$ ای $v_1\times\dots\times v_{n-1}=\alpha v(p)$ (بنا به مسئلهٔ). نشان دهید که به ازای $w\in\mathbb{R}^n$ داریم

$$\langle w, v(p)\rangle\cdot\langle v_1\times\dots\times v_{n-1}, v(p)\rangle=\langle w, v_1\times\dots\times v_{n-1}\rangle$$

نتیجه بگیرید که تحدید عنصر زیر به T_pM عبارتست از $v^i(p)\cdot dV_{n-1}(p)$:

$$(-1)^{i-1}dx^1(p)\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i(p)}\wedge\dots\wedge dx^n(p)$$

(د) گیریم $M\subset\mathbb{R}^n$ یک منیفلد مرزدار n-بعدی فشرده است، و v نرمال یکهٔ برونسوی بر ∂M است. المان حجم M را با dV_n نشان داده و المان حجم ∂M را با dV_{n-1}. گیریم $X=\sum_i a^i\partial/\partial x^i$ میدانی برداری بر M است. قضیهٔ دیورژانس را اثبات کنید:

$$\int_M \operatorname{div}(X)\,dV_n=\int_{\partial M}\langle X, v\rangle\,dV_{n-1}$$

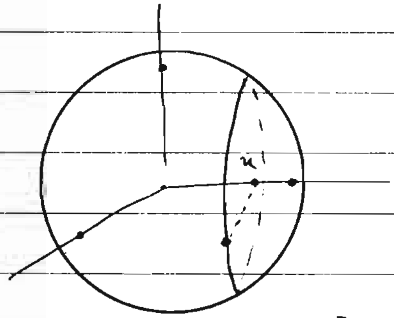
که $\operatorname{div}(X)$ در مسئلهٔ ۷-۲۷ تعریف شده است. راهنمایی: فرم ω بر M با ضابطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a^i\,dx^1\wedge\dots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\dots\wedge dx^n$$

(هـ) گیریم $M\subseteq\mathbb{R}^3$ یک منیفلد مرزدار ۲-بعدی فشرده با جهت μ و نرمال یکهٔ برونسوی v است. گیریم T میدان برداری بر ∂M متشکل از بردارهای یکهٔ با جهت مثبت است. المان حجم بر M را با dA و المان حجم بر ∂M را با ds نشان دهید. گیریم X میدانی برداری بر M است. قضیهٔ (اولیهٔ) استوکس را ثابت کنید:

$$\int_M\langle\nabla\times X, v\rangle\,dA=\int_{\partial M}\langle X, T\rangle\,ds$$

که $\nabla\times X$ در مسئلهٔ ۷-۲۷ تعریف شده است.



۱۴. (الف) گیریم V_n حجم گوی یکه در $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که

$$V_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,V_{n-1}\,dx$$

(ب) [illegible] $I_n=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}dx$، نشان دهید $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

(ج) با توجه به اینکه $V_1=2$ و $V_2=\pi$، نشان دهید

$$V_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & n \text{ زوج}\\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\cdot\pi^{(n-1)/2}}{1\cdot3\cdot5\cdots n} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

این را برحسب تابع Γ به صورت $\pi^{n/2} / \Gamma(1+n/2)$ میتوان نوشت.

(د) گیریم A_{n-1} عبارت از $(n-1)$-حجم S^{n-1} است. با استفاده از روش در اثبات نتیجهٔ ۸ - ۸، اما تعویض ترتیب انتگرالگیری، نشان دهید

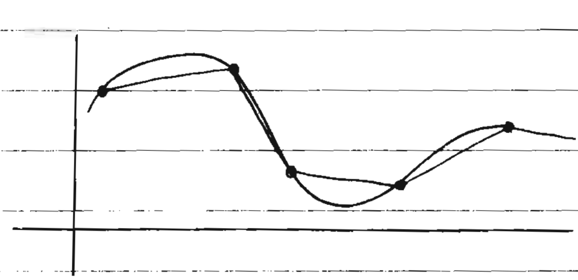
$$V_n = \int_0^1 r^{n-1} A_{n-1}\, dr = \frac{1}{n} A_{n-1}$$

(ه) همین حکم را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس (مسألهٔ ۱۳) و $X(p) = p_p$ بدست آورید.

۱۵ - ۱. (الف) گیریم $c: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ یک منحنی دیفرانسیلپذیر است، که $\mathbb{R}^n$ دارای متر ریمانی معمولی $\sum_i dx^i \otimes dx^i = \langle , \rangle$ است. نشان دهید

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (c^{i\prime}(t))^2}\, dt$$

(ب) در حالت خاص $c: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $c(t) = (t, f(t))$، نشان دهید که این طول $\int_0^1 \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$ کوچکترین کران بالایی طول منحنیهای چندضلعی استوار بر آن است. راهنمایی: به ازای $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ داریم

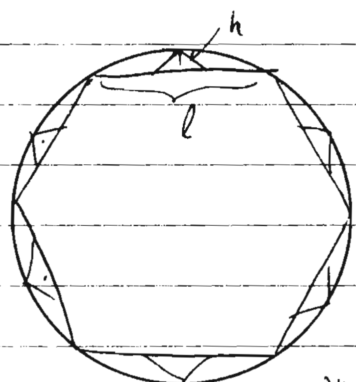


$$|c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}$$
$$= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(\xi_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2}$$

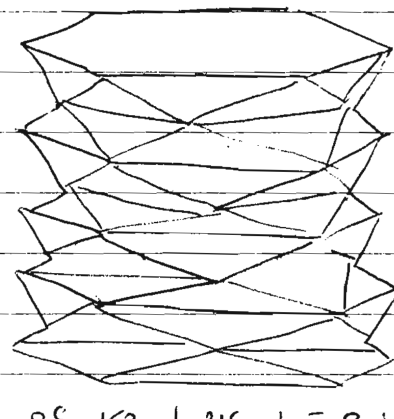
به ازای یک $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

(ج) همین حکم را در حالت کلی اثبات کنید. راهنمایی: از احکام مسألهٔ ۸ - ۱ و پیوستگی یکنواخت $\sqrt{\ }$ بر مجموعه‌ای فشرده بحث کنید.

طبیعی است فرض کنیم که مساحت رویه را به صورت مشابه به شکل کوچکترین کران بالایی مساحت رویه‌های چندوجهی استوار بر آن تعریف کرد. اما مثالی مشهور از ه. شوارتز هست که نشان میدهد این کوچکترین کران بالایی برای بخشی کراندار از یک استوانه، بینهایت است! من به جهت ارائهٔ مثال شوارتز، از شکل زیر استفاده میکنم که در کتاب ... از ... آمده است.



نمای بالا



برای افزایش تعداد مثلثها، شکل شش وجهی‌ها را تغییر نمی‌دهیم، بلکه ترتیب صفحات شامل شش ضلعی‌ها را به هم نزدیک می‌کنیم. به این ترتیب مثلثها در صفحات موازی‌تری قرار می‌گیرند تا که همگی با قاعده موازی شوند.

بدین طریق تعداد مثلثها را به شکل نامحدودی شود زیاد کرد، که مساحت هریک به $h\ell/2$ میل می‌کند. موضوع مساحت رویه برای رویه‌های غیر دیفرانسیل‌پذیر، بسیار پیچیده است و به آن وارد نمی‌شویم.

۱۶. گیریم $c : [0,1] \to M$ یک منحنی در منیفلد M با متر ریمان $\langle\ ,\ \rangle$ است. اگر $p : [0,1] \to [0,1]$ دیفئومورفیسم باشد، نشان دهید $\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(c \circ p)$.

۱۷. نشان دهید متر d بر M را بجای منحنی‌های تکه‌ای هموار، به کمک منحنی‌های هموار می‌توان تعریف نمود. راهنمایی: نشان دهید که به ازاء هر $\varepsilon > 0$ چگونه می‌توان گوشه‌های هر منحنی تکه‌ای هموار را طوری اصلاح کرد که طول تغییر کرده کمتر از ε شود؛ بیاد بیاورید که فرمول طول تنها مشتقات مرتبه اول دارد.

۱۸. (الف) گیریم $B \subset M$ با گوی $\{p \in \mathbb{R}^n : |p| \le 1\}$ همیومورف است و $S \subset M$ زیرمجموعهٔ با $\{p \in \mathbb{R}^n : |p| = 1\}$ نظیر است. نشان دهید $M - S$ ناهمبند است؛ به این ترتیب که $M - B$ و $M - S$ دو زیرمجموعهٔ باز مجزا از $M - S$ هستند.

(ب) اگر $p \in B - S$ و $q \in M - B$، نشان دهید $d(p,q) \ge \min\limits_{q' \in S} d(p,q')$. با استفاده از این و نیز لم V' اثبات قضیهٔ V را تکمیل کنید. (در نظریهٔ منیفلدهای با بعد نامتناهی، این احکام بسیار مهم هستند، زیرا $M - S$ ناهمبند نیست و قضیهٔ V غلط است.)

۱۹. (الف) با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء در مورد اولین معادلهٔ در صفحهٔ ، نشان دهید که

$$\left.\frac{dJ(\bar{\alpha}(u))}{du}\right|_{u=0} = \int_a^b \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial t}(0,t) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t)) - \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)) \right\} dt$$

اگر تنها f از کلاس C^1 باشد، این حکم با معنی است.

(ب) لم دوبویس رایمن. اگر تابع پیوستهٔ g بر $[a,b]$ به ازاء هر تابع هموار η بر $[a,b]$ با $\eta(a) = \eta(b) = 0$ در شرط $\int_a^b \eta'(t) g(t)\, dt = 0$ صدق کند، در این صورت g ثابت است. راهنمایی: بایستی ثابت c برابر $c = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(u)\, du$ باشد. به وضوح داریم $\int_a^b \eta'(t)(g(t) - c)\, dt$ و لذا کافی است ηای مناسب با $\eta'(t) = g(t) - c$ انتخاب شود.

(ج) نتیجه بگیرید که اگر تابع از کلاس C^1 چون f یک نقطهٔ تکین J باشد، آنگاه همچنان f در معادلات اولر صدق می‌کند (که اگر f از کلاس C^2 نباشد، از قبل این حکم بدیهی نیست).

۲۰. توابع سینوس، کسینوس و تانژانت هیپربولیک بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

(الف) توابع sinh، cosh و tanh را ترسیم کنید.

(ب) نشان دهید $\cosh^2-\sinh^2=1$، $\tanh^2+1/\cosh^2=1$، $\cosh'=\sinh$، $\sinh'=\cosh$ و

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$

(ج) آنهایی که با سریهای توان مختلط آشنایند، ثابت کنند

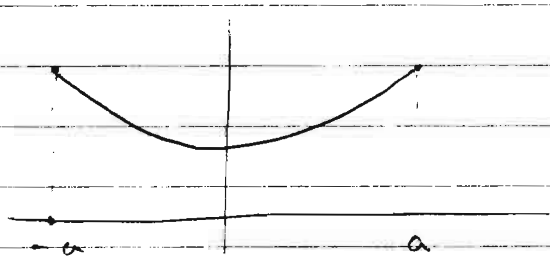
$$\sinh x=\frac{1}{i}\sin(ix) \qquad \cosh x=\cos ix$$

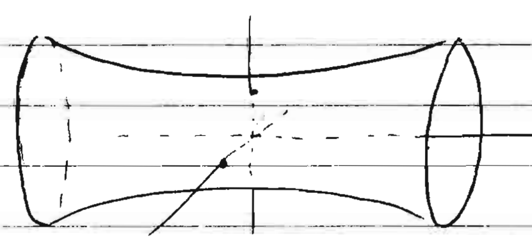
(د) توابع وارون sinh و tanh را بترتیب با $\sinh^{-1}$ و $\cosh^{-1}$ نشان میدهیم - وارون تابع $\cosh|_{[0,\infty)}$ را با $\cosh^{-1}$ نشان میدهیم. ثابت کنید:

$$\sinh(\cosh^{-1}x)=\sqrt{x^2-1} \qquad \cosh(\sinh^{-1}x)=\sqrt{1+x^2} \qquad \cosh(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sinh^{-1})'(x)=1/\sqrt{1+x^2} \qquad (\cosh^{-1})'(x)=1/\sqrt{x^2-1}$$

۲۱. مسألهٔ یافتن رویه‌ای دوار واصل بین دو دایرهٔ به شعاع یک که به جهت افقی با مراکز در a و $-a$ - نشان داده شده‌اند، در نظر بگیرید. ما به دنبال تابعی $f(x)=c\cosh(x/c)$ هستیم که c در شرایط $c>0$ و $c\cosh(\frac{a}{c})=1$ صدق می‌کند.



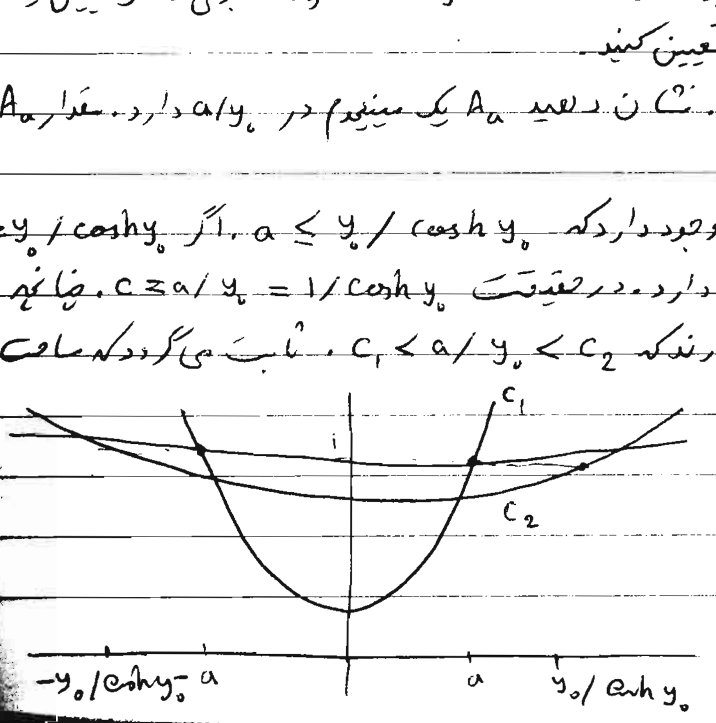


(الف) $y_0>0$ ای منحصربفرد با $\tanh y_0=1/y_0$ وجود دارد. علامت $\tanh y-1/y$ را برای $y>0$ تعیین کنید.

(ب) علامت $y\sinh y-\cosh y$ را برای $y>0$ تعیین کنید.

(ج) گیریم $A_a(c)=c\cosh(a/c)$ با $c>0$. نشان دهید A_a یک مینیمم در a/y_0 دارد. مقدار A_a را در آن نقطه پیدا کرده و نمودارش را ترسیم کنید.

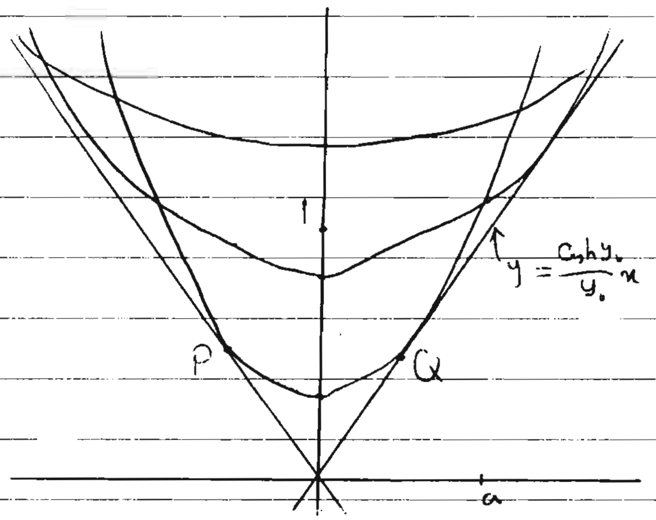
(د) وقتی و تنها وقتی یک c با $c\cosh(a/c)=1$ وجود دارد که $a\le y_0/\cosh y_0$. اگر $a=y_0/\cosh y_0$، در این صورت چنین c منحصربفردی وجود دارد، در حقیقت $c=a/y_0=1/\cosh y_0$. چنانچه $a<y_0/\cosh y_0$، دو تا از این cها وجود دارند که $c_1<a/y_0<c_2$. ثابت می‌گردد که مساحت رویهٔ برای c_2 کمتر از دیگری است.



(هـ) به کمک قسمت (د) از مسألهٔ ۲۰ نشان دهید

$$\frac{y_0}{\cosh y_0}=\sqrt{y_0^2-1}$$

[توجه شود که $y_0 \approx 1{,}2$ و لذا $\sqrt{y_0^2-1} \approx 0{,}67$. چنانچه از مفهوم پوش یک خانواده از منحنیها استفاده شود (صفحهٔ ۲۵۵ به بعد از جلد سوم)، این روند را ساده‌تر می‌توان تشریح کرد. پوش خانوادهٔ یک‌پارامتری از منحنیهای $f_c(x) = c\cosh(x/c)$ با حل معادلات $\frac{\partial f_c(x)}{\partial c} = \cosh\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\sinh(\frac{x}{c}) = 0$ بدست می‌آید. در نتیجه $x/c = \pm y_0$ و $y = c\cosh(x/c) = c\cosh y_0$. یعنی، پوش مورد نظر عبارت است از خطوط راست $y = \pm(\cosh y_0 / y_0)x$.



عنصر منحصر بفردی از خانواده که از نقطهٔ به مختصات $(y_0/\cosh y_0, 1)$ می‌گذرد، در این نقطه به پوش مماس است. برای $a < y_0/\cosh y_0$، نمودار f_{c_1} در نقطهٔ $P, Q \in (-a;a)$ به پوش مماس است، اما نمودار f_{c_2} در نقاطی خارج از $[-a;a]$ به پوش مماس است. نقطهٔ Q را مزدوج P نسبت به اکسترمال f_{c_1} می‌نامند، و در حساب تغییرات نشان داده می‌شود که وجود این نقطهٔ مزدوج ایجاب می‌کند که قسمتی از f_{c_2} که از P تا $(a,1)$ است، مینیمم موضعی $\int f\sqrt{1+(f')^2}$ را در برندارد. (با بحث در خصوص نقاط مزدوج یک ژئودزی که در فصل ۸ از جلد IV آمده است مقایسه کنید و به یادداشت پائین صفحهٔ   از جلد V توجه کنید.)]

۲۲. در تمام بحث ما در خصوص حساب تغییرات، با F هایی کار می‌کردیم که t در بر نداشتند. به همین دلیل معادلات اویلر آنها عملاً به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(f(t), f'(t))\right) = 0$$

(الف) نشان دهید که به ازاء هر f و هر $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ای داریم

$$\frac{d}{dt}\left(F - f'\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f'\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

نتیجه بگیرید که اکسترمال‌های مسئلهٔ ما در $F = f'\frac{\partial F}{\partial y}$ صدق می‌کنند.

(ب) با بکارگیری الف در مورد $F(x,y) = x\sqrt{1+y^2}$، مستقیماً معادلهٔ $dy/dx = \sqrt{cy^2-1}$ را بدست بیاورید که قبلاً در حل مسئله بدست آورده بودیم.

۲۳. (الف) گیریم x و x' دو دستگاه مختصات هستند و g_{ij} و g'_{ij} بیان یک متریک نسبت به هر یک از آنها است. نشان دهید

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}} + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\gamma}}\right)$$

ب) در مورد تناظر $[ij,k]$ و $[\alpha\beta,\gamma]'$ ثابت کنید

$$[\alpha\beta,\gamma]' = \sum_{i,j,k=1}^{n} [ij,k]\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^k}{\partial x'^\gamma} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}$$

پس، $[ij,k]$ها مؤلفه‌های تانسور نیستند.

ج) نشان دهید

$$\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^l}$$

۲۴. نشان دهید که هر ساختار هموار بر $\mathbb{R}$، با ساختار هموار معمولی بر $\mathbb{R}$ دیفئومورف است. (تابع طول قوس بر یک ژئودزی برای یک متر ریمان بر $\mathbb{R}$ را درنظر بگیرید.)

۲۵. گیریم $\sum dx^i \otimes dx^i = \langle\,,\rangle$ متر ریمان معمولی بر $\mathbb{R}^n$ است و $\sum_{i,j} g_{ij}\, du^i \otimes du^j$ یک متر دیگر است که $(u^1,\dots,u^n)$ باز هم نمایشگر دستگاه مختصات استاندارد بر $\mathbb{R}^n$ است. فرض کنید بدانیم دیفئومورفیسمی $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که $\sum_{i,j} g_{ij}\, du^i \otimes du^j = f^*\langle\,,\rangle$. در مورد چگونگی یافتن f چه میتوان گفت؟

الف) گیریم $e_i = \partial f/\partial u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. چنانچه e_i را میدانی برداری بر $\mathbb{R}^n$ درنظر بگیریم، نشان دهید $f_*(\partial/\partial u^i) = e_i$.

ب) نشان دهید $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$.

ج) حداقل از نظر تئوری، برای یافتن f، کافی است e_iها را بیابیم و برای این منظور کافی است معادلات دیفرانسیل $\partial e_i/\partial u_j = \sum_{r=1}^{n} A^r_{ij}\, e_r$ که باید e_iها در آن صدق کنند، بیابیم. نشان دهید که بایستی داشته باشیم

$$B_{ij,k} = \sum_{r=1}^{n} g_{kr} A^r_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f^l}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial f^l}{\partial u^k}$$

د) نشان دهید

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f^l}{\partial u^i \partial u^k}\frac{\partial f^l}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 f^l}{\partial u^j \partial u^k}\frac{\partial f^l}{\partial u^i} = \sum_{r=1}^{n} g_{jr}A^r_{ik} + g_{ir}A^r_{kj} = B_{ik,j} + B_{kj,i}$$

هـ) با تعویض دوری i، j و k نتیجه بگیرید

$$B_{ij,k} = [ij,k]$$

پس $A^r_{ij} = \Gamma^r_{ij}$. الی کارتان در کتاب "درسهایی در هندسهٔ فضاهای ریمان" از این روش برای طرح باانگیزه‌تر Γ^k_{ij}ها استفاده کرده است.

و) مستقیماً از معادلات ژئودزیک نتیجه بگیرید که $A^r_{ij} = \Gamma^r_{ij}$. (توجه کنید که منحنیهای حاصل از ثابت گرفتن همهٔ f^iها بجز یکی، ژئودزی هستند، زیرا به خطوط راست موازی با x^i-محور متناظرند.)

۲۶. اگر $(V', \langle\,,\rangle')$ و $(V'', \langle\,,\rangle'')$ دو فضای برداری با ضرب داخلی باشند و $\langle\,,\rangle$ را بر $V = V'\oplus V''$ بصورت $\langle v'\oplus v'', w'\oplus w''\rangle = \langle v', w'\rangle' + \langle v'', w''\rangle''$ تعریف کنیم. ثابت کنید:

(الف) $\langle\,,\rangle$ ضرب داخلی است.

(ب) هرگاه بر M و N متر ریمان موجود باشد، طریقی طبیعی برای الحاق یک متر ریمان بر $M\times N$ وجود دارد. ژئودزیهای بر $M\times N$ نسبت به این متر را توصیف کنید.

۲۷. گیریم $\gamma : [a;b] \to M$ ژئودزی است و $\rho : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ دیفئومورفیسم است. نشان دهید $c = \gamma\circ\rho$ در معادلات زیر صدق می‌کند

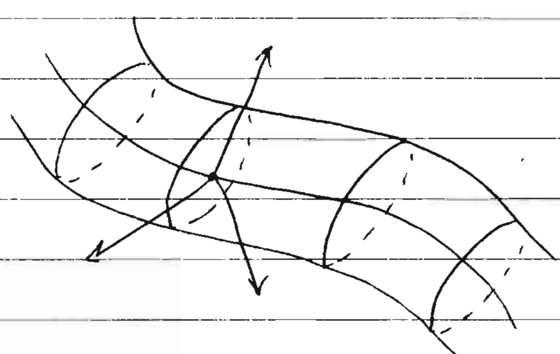
$$\frac{d^2c^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(c(t))\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} = \frac{dc^k}{dt}\frac{\rho''(t)}{\rho'(t)}$$

(ب) بالعکس، اگر c در این معادلات صدق کند، آنگاه γ ژئودزی است.

(ج) اگر به ازاء یک $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، c در روابط

$$\frac{d^2c^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(c(t))\frac{dc^i}{dt}\frac{dc^j}{dt} = \frac{dc^k}{dt}\mu(t)$$

صدق کند، آنگاه c تجدید پارامتر یک ژئودزی است. (معادلهٔ $\rho''(t) = \rho'(t)\mu(t)$ را به شکل صریح می‌توان حل نمود: $\rho(t) = \int^t e^{M(s)}ds$ که $M'(s) = \mu(s)$.)



۲۸. گیریم c منحنی‌ای در M است که در همه جا $dc/dt \neq 0$ و ابررویه‌های به شرح زیر را در نظر بگیرید:

$$\{\exp_{c(t)} v : \|v\| = \text{ثابت},\ v \in T_{c(t)}M,\ \langle v, dc/dt\rangle = 0\}$$

نشان دهید که به ازاء $v \in T_{c(t)}M$ با $\langle v, dc/dt\rangle = 0$ ژئودزی $u \mapsto \exp_{c(t)} u\cdot v$ بر این ابررویه‌ها عمود است. (لم گاوس، حالت خاص است که c ثابت است.)

۲۹. گیریم $\gamma : [a;b] \to M$ یک ژئودزی با $\gamma(a) = p$ است و فرض کنیم $\exp_p$ دیفئومورفیسمی بر یک همسایگی $\mathcal{O}$ از $\{t\gamma'(a) : 0 \le t \le 1\}$ در T_pM است. نشان دهید که γ یک منحنی بطول حداقل بین p و $q = \gamma(b)$ است، در بین همهٔ منحنیهای $\exp(\mathcal{O})$. (هنوز هم لم گاوس در مورد $\exp(\mathcal{O})$ قابل اجرا است.)

۳۰. اگر $\langle\,,\rangle$ یک متر ریمان بر M است و $d : M\times M \to \mathbb{R}$ متر متناظرش است، نشان دهید منحنی $\gamma : [a;b] \to M$ با $d(\gamma(a), \gamma(b)) = \mathcal{L}(\gamma)$ ژئودزی است.

۳۱. نامساوی شوارتز برای توابع پیوسته اذعان می‌دارد که $\left(\int_a^b fg\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که f و g (روی $\mathbb{R}$) وابستهٔ خطی باشند.

(الف) نامساوی شوارتز را به کمک اثبات قسمت (۲) از قضیهٔ ۱ ثابت کنید.

(ب) ثابت کنید که به ازاء هر منحنی γ ای $(L_a^b(\gamma))^2 \le (b-a)E_a^b(\gamma)$ و تساوی وقتی و تنها وقتی برقرار است که γ با پارامتری متناسب با طول قوس پارامتر شده باشد.

(ج) گیریم $\gamma:[a,b]\to M$ یک ژئودزی با $L_a^b(\gamma)=d(\gamma(a),\gamma(b))$ است. اگر $c(a)=\gamma(a)$ و $c(b)=\gamma(b)$، نشان دهید

$$E(\gamma)=\frac{L(\gamma)^2}{b-a}\le\frac{L(c)^2}{b-a}\le E(c)$$

نتیجه بگیرید که $E(\gamma)\le E(c)$، مگر آنکه c نیز یک ژئودزی با $L_a^b(c)=d(c(a),c(b))$ باشد. بخصوص قطعات به اندازهٔ کافی کوچک از هر ژئودزی، انرژی را حداقل می‌کنند.

۳۲. گیریم p نقطه‌ای بر منیفلد M با متریک $\langle\,,\rangle$ است. پایه‌ای $\{v_1,\dots,v_n\}$ برای T_pM انتخاب کنید. پس دستگاهی مختصاتی χ بر T_pM با ضابطهٔ $(a^1,\dots,a^n)\mapsto\sum_i a^i v_i$ وجود دارد (مختصات مستطیلی)؛ گیریم x دستگاه مختصات $\chi\circ\exp^{-1}$ تعریف شده بر یک همسایگی U از p است.

(الف) نشان دهید که در این مختصات $\Gamma_{ij}^k(p)=0$. راهنمایی: معادلات ژئودزی را در نظر گرفته و توجه کنید که هر ژئودزی γ گذرنده از p درست عبارتست از ترکیب exp با یک خط راست گذرنده از 0 در T_pM و لذا هر یک از γ^k ها خطی هستند.

(ب) گیریم $r:U\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $r(q)=d(p,q)$ است. پس $r\circ\gamma=\sum_k(\gamma^k)^2$. نشان دهید

$$\frac{d^2((r\circ\gamma)^2)}{dt^2}=2\left\{\sum_k\left(\frac{d\gamma^k}{dt}\right)^2-\sum_{i,j,k}\gamma^2\,\Gamma_{ij}^k\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\right\}$$

(ج) توجه کنید

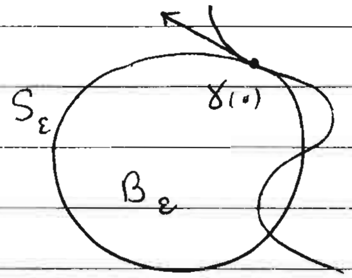
$$\sum_{i,j}\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt}\le n^2\sum_k\left(\frac{d\gamma^k}{dt}\right)^2$$

به کمک قسمت (الف) نتیجه بگیرید که اگر $\|\gamma'(0)\|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه $d^2(r\circ\gamma)^2/dt^2>0$. پس $d(r\circ\gamma)^2/dt$ در همسایگی ای از 0 صعودی است.

(د) گیریم $S_\varepsilon=\{v\in T_pM:\|v\|=\varepsilon\}$ و $B_\varepsilon=\{v\in T_pM:\|v\|<\varepsilon\}$. نشان دهید که حکم ذیل به ازاء همهٔ $\varepsilon>0$ های به اندازهٔ کافی کوچک درست است: اگر γ یک ژئودزی باشد به گونه‌ای که $\gamma(0)\in\exp(S_\varepsilon)$ و نیز $\gamma'(0)$ به $\exp(S_\varepsilon)$ مماس باشد، آنگاه $\delta>0$ ای (وابسته به γ) چنان وجود دارد که برای هر $t\in(-\delta,\delta)-\{0\}$ ای $\gamma(t)\notin\exp(B_\varepsilon)$. راهنمایی: اگر $\gamma'(0)$ به $\exp(S_\varepsilon)$ مماس باشد، آنگاه $d(r\circ\gamma)/dt$ صفر است.

(ه) گیریم q و q′ دو نقطه با $r(q),r(q')<\varepsilon$ هستند و γ ژئودزی منحصر بفردی بطول $<2\varepsilon$ واصل بین آنها است

نشان دهید که به ازای $\varepsilon>0$ های به اندازه کافی کوچک، ماکزیمم $r\circ\gamma$ در q یا q' رخ میدهد.



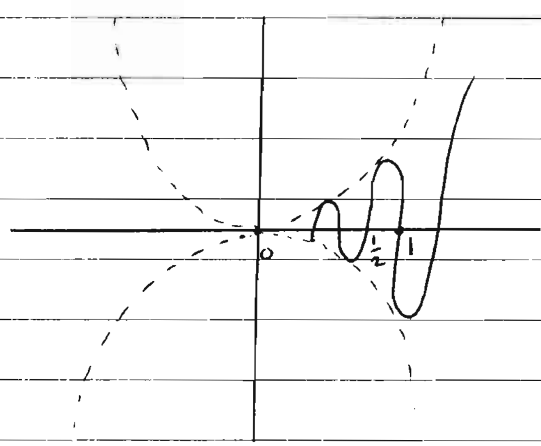
(د) مجموعهٔ $U \subset M$ را در صورتی محدب ژئودزیک گوییم که به ازای هر $q, q' \in U$ یک ژئودزی منحصر بفرد با طول حداقل بین آنها وجود داشته باشد، و این ژئودزی کاملاً در U قرار بگیرد. نشان دهید $\exp(\{v \in T_pM : \|v\| < \varepsilon\})$ به ازای $\varepsilon>0$ های به اندازه کافی کوچک، محدب ژئودزی است.

(ه) فرض کنیم $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ دیفئومورفیسمی از یک همسایگی U از $0\in\mathbb{R}^n$ بتوی $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید که به ازای $\varepsilon>0$ به اندازه کافی کوچک، تصویر هر ε-گوی باز، محدب ژئودزی است.

۳۳. (الف) منحنی همواره دیفرانسیل‌پذیر $c(t)=(t, f(t))$ در $\mathbb{R}^2$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$\lim_{h\to 0} \left(\text{طول } c|[0,h]\right) / |c(h)-c(0)| \neq 1$$

راهنمایی: c چیزی شبیه به شکل ذیل است.



طول از $(\frac{1}{2},0)$ تا $(1,0)$ برابر یک است و طول از $(\frac{1}{4},0)$ تا $(\frac{1}{2},0)$ برابر یک است و ...

(ب) وضعیت در نتیجهٔ ۱۵ را در نظر بگیرید بجز اینکه: وقتی و تنها وقتی $q=c(t)$ که $t=0$ و به ازای t های نزدیک ۰ داشته باشیم $u'(t)>0$. اگر c از کلاس C^1 باشد، آنگاه وقتی $t\to 0$، $v(t)$ به مقداری می‌گراید (حتی اگر $v(0)$ تعریف نشده باشد). نشان دهید که اگر c از کلاس C^1 باشد، آنگاه $K>0$ ای چنان وجود دارد که به ازای هر t در نزدیکی صفر، به ازای $0\le u\le 1$ داریم

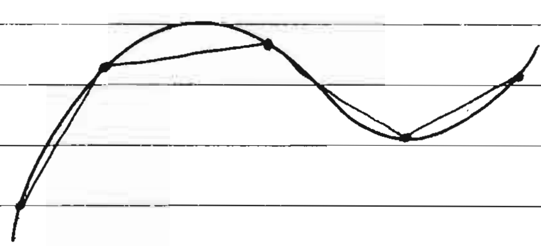
$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(u,t)\right\| \le Ku\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(1,t)\right\|$$

راهنمایی: به وضوح در T_qM داریم

$$\left\|\frac{d(u\cdot v(t))}{dt}\right\| = |u|\cdot\left\|\frac{dv(t)}{dt}\right\|$$

چون $\exp_q$ موضعاً دیفئومورفیسم است، K_1، K_2 ای با $0<K_1<K_2$ چنان وجود دارند که به ازای همهٔ بردارهای مماس v در نقاط نزدیک به q داریم $K_1\|v\| \le \|\exp_{q*}v\| \le K_2\|v\|$.

(ج) اگر c از کلاس C^1 باشد، نشان دهید $L(c)$ کوچکترین کران بالای طول منحنیهای ژئودزی تکه‌ای استوار بر c است.



۳۴. (الف) با استفاده از روش در مسألهٔ ۳۳ نشان دهید که اگر c خط راست واصل بین $v, w \in T_pM$ باشد، آنگاه

$$\lim_{v,w\to 0} L(\exp\circ c)/L(c) = 1$$

(ب) به صورت مشابه، اگر $\gamma_{v,w}$ ژئودزی منحصر بفرد واصل بین $\exp(v)$ و $\exp(w)$ باشد، و نیز اگر فرض شود

، $\gamma_{v,w} = \exp\circ c_{v,w}$ آنگاه $\lim_{v,w\to 0} L(\gamma_{v,w})/L(c_{v,w}) = 1$.

(ج) نتیجه بگیرید

$$\lim_{v,w\to 0}\frac{d(\exp v, \exp w)}{\|v-w\|} = 1$$

۳۵. گیریم $f: M\to N$ ایزومتری است. نشان دهید که f نسبت به ساختارهای فضای متری القایی بر M و N از متریک‌های ریمان مربوطه، نیز ایزومتری است.

۳۶. گیریم M منیفلدی با متر ریمان $\langle\,,\rangle$ و متر نظیر d است. گیریم $f: M\to M$ نگاشتی از M بروی خودش است که متر d را حفظ می‌کند.

(الف) اگر γ ژئودزی باشد، آنگاه $f\circ\gamma$ نیز ژئودزی است.

(ب) $f': T_pM \to T_{f(p)}M$ را به شکل ذیل تعریف می‌کنیم: به ازاء ژئودزی γ با $p=\gamma(0)$ تعریف می‌کنیم $f'(\gamma'(0)) = d f(\gamma(t))/dt|_{t=0}$. نشان دهید $\|f'(X)\| = \|X\|$ و $f'(cX) = c f'(X)$.

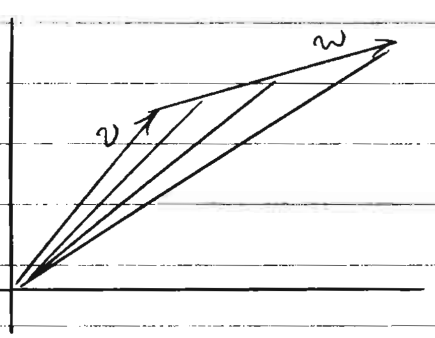
(ج) به ازاء $X, Y\in T_pM$، با استفاده از مسألهٔ ۳۴ نشان دهید که

$$\frac{2\langle X,Y\rangle}{\|X\|\cdot\|Y\|} = \frac{\|X\|^2+\|Y\|^2}{\|X\|\cdot\|Y\|} - \frac{\|tX-tY\|^2}{\|tX\|\cdot\|tY\|} = \frac{\|X\|^2+\|Y\|^2}{\|X\|\cdot\|Y\|} - \lim_{t\to 0}\frac{(d(\exp tX, \exp tY))^2}{\|tX\|\cdot\|tY\|}$$

نتیجه بگیرید که $\langle X,Y\rangle_p = \langle f'(X), f'(Y)\rangle_{f(p)}$ و بنابراین $f'(X+Y) = f'(X)+f'(Y)$.

(د) قسمت (ج) نشان می‌دهد که $f': T_pM\to T_{f(p)}M$ دیفئومورفیسم است. با استفاده از این نشان دهید که خود f دیفئومورفیسم است، و لذا ایزومتری است.

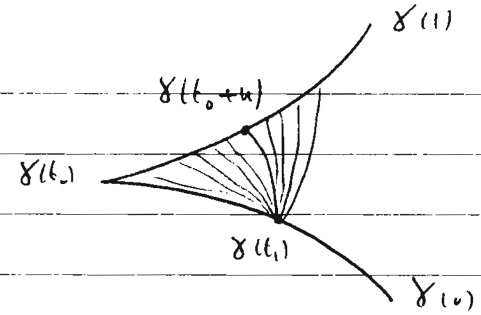
۳۷. (الف) نشان دهید که اگر $v, w\in\mathbb{R}^n$ با $v\neq 0$، آنگاه $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\|v+tw\|-\|v\|) = \langle v,w\rangle/\|v\|$. بنابراین، همین حکم در هر فضای برداری با یک ضرب داخلی $\langle\,,\rangle$ درست است. راهنمایی: اگر $\nu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ نرم باشد، آنگاه مقدار حد $D\nu(v)(w)$ است. به طریقی دیگر، می‌توان از معادلهٔ $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$ استفاده کرد که θ زاویهٔ بین u و v است.



(ب) نتیجه بگیرید که اگر v و w مستقل خطی باشند، آنگاه

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|v+tw\|-\|v\|-\|tw\|}{t}\neq 0$$

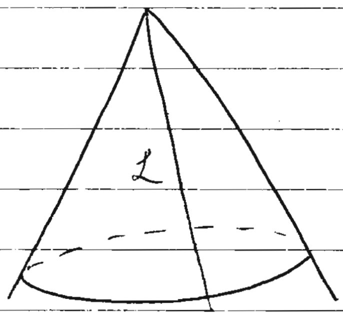
(ج) گیریم $\gamma:[0,1]\to M$ یک نقطهٔ تکین از کلاس C^1 تکه‌ای برای تابعی طول است و نیز فرض کنیم به ازاء یک $t_0\in(0,1)$ ای $\gamma'(t_0^-)\neq\gamma'(t_0^+)$. فرض کنید $t_1 > t_0$ و تغییر α که برای آن $\bar\alpha(u)$ از امتداد γ تا t_1 حاصل شود، در این صورت ژئودزی منحصر بفردی از $\gamma(t_1)$ به $\gamma(t_0+u)$ است و نهایتاً به γ توقف می‌کند. از مسألهٔ ۳۷ استفاده کرده، و نشان دهید که اگر t_1 به اندازهٔ کافی به t_0 نزدیک باشد، آنگاه



$dL(\alpha(u))/du|_{u=0} \neq 0$ که تناقض است. بنابراین، نقاط تکین برای طول نمی‌توانند متنوع باشند.

۳۸. استوانه‌ای $Z \subset \mathbb{R}^3$ به شعاع ۲ در نظر بگیرید. متر القایی توسط متریک $\mathbb{R}^3$ بر Z را بیابید.

۳۹. مخروطی C (بدون رأس) در نظر گرفته، و فرض کنید L یک خط مولد آن است. با باز کردن $C-L$ بر $\mathbb{R}^2$، نگاشتی $f : C-L \to \mathbb{R}^2$ را مشخص می‌کند، که آن هم ایزومتری موضعی است، ولی معمولاً یکبیک نیست. ژئودزیهای بر مخروط را مشخص کنید (تعداد ژئودزیهای بین دو نقطه به زاویهٔ مخروط بستگی دارد، و ممکن است ژئودزی به مکان اولیه‌اش بازگردد).



۴۰. گیریم $g : S^n \to P^n$ نگاشت $g(p) = [p] = \{p,-p\}$ است.

(الف) نشان دهید متریک منحصر بفردی $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ بر P^n وجود دارد به گونه‌ای که $g^*\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ متریک معمولی بر S^n است (یعنی که توسط نگاشت احتوایی از S^n بتوی $\mathbb{R}^{n+1}$ بر آن القاء می‌شود).

(ب) نشان دهید که هر ژئودزی $\gamma : \mathbb{R} \to P^n$ بسته است (یعنی، عددی a چنان وجود دارد که به ازاء هر t ای $\gamma(t+a) = \gamma(t)$)، و هر دو ژئودزی، دقیقاً یکبار یکدیگر را قطع می‌کنند.

(ج) نشان دهید ایزومتریایی از P^n بروی خودش وجود دارد که هر بردار مماس مفروض در یک نقطهٔ مشخص را به برداری مفروض در نقطه‌ای دیگری نگارد.

این احکام نشان میدهند که P^n مدلی برای «هندسهٔ ناقلیدسی» بیضوی تشکیل میدهد. در این هندسه، مجموع زوایای داخلی هر مثلث $> \pi$ است.

۴۱. نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره H عبارتست از منیفلد $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ با متریک $(dx\otimes dx + dy\otimes dy)$ $\langle\ ,\ \rangle = \frac{1}{y^2}$.

(الف) با محاسبه نشان دهید که $\Gamma^2_{11} = 1/y$، $\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -1/y$ و سایر Γ^i_{jk} ها صفرند.

(ب) گیریم C نیم‌دایره‌ای در H با مرکز در $(c,0)$ و شعاع R است. با در نظر گرفتن آن به عنوان یک منحنی $t \mapsto (t, \gamma(t))$ نشان دهید

$$\frac{d^2\gamma^2(t)}{dt^2} = \frac{-\gamma(t)}{t-c} - \frac{\gamma'(t)^2}{\gamma(t)}$$

(ج) به کمک مسئلهٔ ۲۷ نشان دهید که همهٔ ژئودزیهای در H (خواه بشکل مناسب پارامتره شوند) نیم‌دایره‌های با مرکز بر x-محورند، به همراه نیم‌خط‌های راست موازی y-محور.

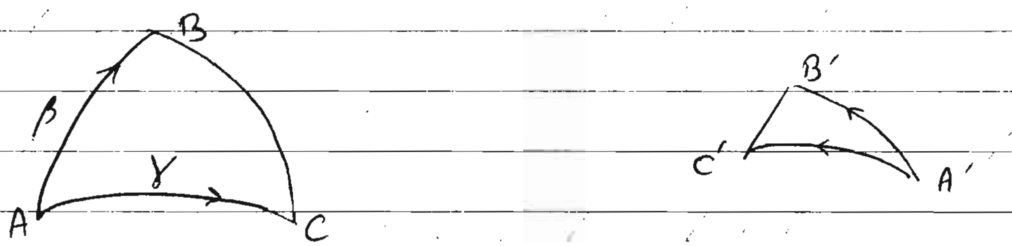
(د) نشان دهید که هر یک از این ژئودزیها دارای طول بینهایت هستند، و لذا نیم‌صفحهٔ بالایی کامل است.

(هـ) نشان دهید که اگر γ ژئودزی باشد و $p \notin \gamma$، آنگاه بینهایت ژئودزی وجود دارد که از p می‌گذرد و γ را قطع نمی‌کند.

(و) برای کسانی که کمی در مورد نگاشت کنفرمال میدانند (با مسألهٔ ۷-۶ از جلد IV مقایسه شود). نیم‌صفحهٔ بالایی را بعنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. نشان دهید که نگاشتهای

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R} \qquad ad-bc>0$$

ایزومتری هستند، و هر بردار مماس در یک نقطهٔ مفروض را به روی برداری مماس در نقطه‌ای دیگر تصویر می‌کنند. نتیجه بگیرید که اگر AB و $A'B'$ هم‌طول باشند، AC و $A'C'$ هم‌طول باشند، و زاویهٔ بین بردارهای مماس β و γ در A برابر زاویهٔ بین بردارهای مماس β' و γ' در A' باشند. در این صورت طول BC برابر طول $B'C'$ است و زاویهٔ در B و B' و در C و C' نیز برابرند (قضیهٔ ضلع - زاویه - ضلع).



این احکام نشان میدهند که نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره، مدلی برای هندسهٔ غیر اقلیدسی لباچفسکی است. در این هندسه، مجموع زوایای داخلی هر مثلث $< \pi$ است.

۴۴. گیریم p نقطه‌ای در یک منیفلد غیرفشردهٔ کامل M است. ثابت کنید یک ژئودزی $\gamma : [0,\infty) \to M$ چنان وجود دارد که $p = \gamma(0)$، و γ یک ژئودزی بطول حداقل بین هر دو نقطه از نمودارش است.

۴۵. گیریم M و N از نظر ژئودزی کامل هستند و $M \times N$ دارای متر ریمان توصیف شده در مسألهٔ ۲۶ است. نشان دهید $M \times N$ نیز کامل است.

۴۶. در این مسأله به اطلاعاتی در خصوص فضاهای پوششی نیاز داریم. گیریم $q : M \to N$ فضای پوششی است که N منیفلد هموار است. در این صورت ساختاری هموار و منحصر بفرد بر M وجود دارد که q را ایمرشن می‌سازد. اگر $\langle\,,\rangle$ یک متر ریمان بر N باشد، آنگاه $q^*\langle\,,\rangle$ یک متر ریمان بر M است، و $(M, q^*\langle\,,\rangle)$ وقتی و تنها وقتی کامل است که $(N, \langle\,,\rangle)$ کامل باشد.

۴۷. (الف) اگر $M^n \subset N^{n+k}$ زیرمنیفلدی از N باشد، نشان دهید که کلاف نرمال ν الزاماً یک کلاف k-صفحه‌ای است.
(ب) با استفاده از مفهوم مجموع ویتنی $\oplus$ مطرح شده در مسألهٔ ۳-۵۲ نشان دهید $\nu \oplus TM \simeq (TN)|M$.

۴۸. (الف) نشان دهید کلافهای نرمال ν_1 و ν_2 بر $M^n \subset N^{n+k}$ که توسط دو متر ریمانی مختلف اما هم‌ارز تعریف می‌شوند، هم‌ارزند.
(ب) اگر $\xi = \pi : E \longrightarrow M$ یک کلاف k-صفحه‌ای هموار روی M^n باشد، نشان دهید کلاف نرمال $M \subset E$ با ξ هم‌ارز است.

۴۹. (الف) دنباله‌ای دقیق از نگاشتهای کلافی $0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\bar{f}} E_2 \xrightarrow{\bar{g}} E_3 \longrightarrow 0$ همانند در مسألهٔ ۳-۲۸ در نظر بگیرید، که کلافها بر منیفلدی هموار M هستند [یا، کلی‌تر، روی یک فضای پیرافشرده]. نشان دهید $E_2 \simeq E_1 \oplus E_3$.
(ب) اگر $\pi : E \longrightarrow M$ کلافی هموار باشد، نتیجه بگیرید که $TE \simeq \pi^*(\xi) \oplus \pi^*(TM)$.

۵۰. (الف) گیریم M منیفلدی جهت‌ناپذیر است. برطبق مسألهٔ ۳-۲۲، $S^1 \subset M$ ای وجود دارد که $(TM)|S^1$ جهت‌پذیر نیست (مسأله در مورد حالتی است که $(TM)|S^1$ بدیهی نیست، اما اگر هر $(TM)|S^1$ ای جهت‌پذیر باشد، باز هم مسأله درست است؛ در واقع، نشان دادن اینکه کلاف روی S^1 وقتی و تنها وقتی بدیهی است که جهت‌پذیر باشد). با استفاده از مسألهٔ ۴۷ نشان دهید که کلاف نرمال ν به $S^1 \subset M$ جهت‌پذیر نیست.
(ب) با استفاده از مسألهٔ ۳-۲۹ نتیجه بگیرید که همسایگی‌ای از یک $S^1 \subset M$ وجود دارد که جهت‌پذیر نیست. (پس هر منیفلد جهت‌ناپذیر، یک زیرمنیفلد باز جهت‌ناپذیر بی‌اندازه کوچک دارد.)

۱۳۸۳٫۳٫۱۶