

«به نام خدا»



گروه دینامیک سیالات محاسباتی
دانشگاه صنعتی اصفهان

مدلسازی اغتشاش

محمد جدیدی

کلیه حقوق این کتاب الکترونیک متعلق به گروه دینامیک سیالات محاسباتی دانشگاه صنعتی اصفهان می باشد
هر گونه چاپ، تکثیر و استفاده از آن با ذکر منبع بلا مانع است.

<http://CFD.iut.ac.ir>

1- آشفتگی و مدل کردن آن

تمام جریانهایی که در مهندسی عملی بحساب می آیند، اعم از موارد ساده نظیر فواره‌های دوبعدی، دنباله‌ها، جریان‌های لایه مرزی لوله و صفحه تخت و یا موارد خیلی پیچیده سه‌بعدی از یک عدد رینولدز معین ($\frac{UL}{\nu}$) که U و L به ترتیب، مشخصه‌های سرعت و مقیاس طول جریان متوسط و ν لزجت سینماتیکی است) بالاتر ناپایدار می‌باشد. در اعداد رینولدز پایین جریان آرام است. در اعداد رینولدز بالا مشاهده می‌شود که جریان آشفته می‌شود، بطوریکه یک حالت تصادفی از حرکت در جاییکه سرعت و فشار به‌طور پیوسته درون بخش‌های مهمی از جریان نسبت به زمان تغییر می‌کنند گسترش می‌یابد.

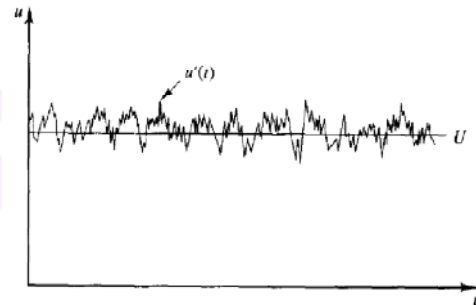
در موارد ساده معادلات پیوستگی و ناویر - استوکس را می‌توان به‌صورت تحلیلی حل کرد. جریان‌های پیچیده‌تر را می‌توان از طریق عددی با روش‌های CFD نظیر روش حجم محدود و بدون استفاده از تقریب‌های اضافی حل کرد. اغلب جریانهای با اهمیت مهندسی آشفته هستند، لذا منطقه جریان آشفته فقط از نظر تئوری مهم نیست. مهندس سیالات احتیاج به ابزار قابلی دارد که بیانگر اثرات آشفتگی باشد. این فصل مقدمه‌ای بر فیزیک آشفتگی و مدل کردن آن را در CFD ارائه می‌دهد.

2- آشفتگی¹ چیست ؟

در اینجا نگاه سریع به مشخصه اصلی جریان‌های آشفته می‌اندازیم. عدد رینولدز یک جریان نسبت اندازه نیروی اینرسی به نیروی لزجت را می‌دهد. در آزمایش‌های روی سیستم‌های سیال مشاهده شده است که در عدد رینولدز پایین‌تر از به اصطلاح بحرانی جریان صاف و لایه‌های هم جوار سیال روی یکدیگر می‌لغزند. اگر شرایط مرزی با زمان تغییر نکند جریان دائمی است. این منطقه جریان آرام نامیده می‌شود.

در مقادیر عدد رینولدز بالاتر از بحرانی یک سری حوادث اتفاق می‌افتد که نهایتاً سبب تغییرات جدی در رفتار جریان می‌شود. در نهایت رفتار جریان تصادفی و نامنظم شده و حتی با شرایط مرزی ثابت حرکت کاملاً غیردائمی می‌شود. سرعت و سایر خواص جریان بصورت تصادفی و نامنظم تغییر می‌کند. این منطقه ناحیه جریان آشفته نامیده می‌شود. یک نمونه اندازه گیری شده سرعت را می‌توان در شکل ۱ ملاحظه نمود.

¹ Turbulence



شکل ۱- اندازه سرعت نقطه‌ای در جریان مغشوش

طبیعت تصادفی جریان آشفته مانع از محاسبات و بررسی کامل حرکت همه ذرات سیال می‌شود. در عوض می‌توان سرعت را به دو بخش مقدار متوسط دائمی U و مؤلفه نوسانی $u'(t)$ که با آن جمع می‌شود، تقسیم کرد.

$$u = U + u'(t) \quad (1)$$

حتی در جریان‌هایی که سرعت‌های متوسط و فشارها فقط در یک یا دو بعد از فضا تغییر می‌کنند نوسانات آشفته همواره دارای رفتار سه‌بعدی هستند. علاوه بر این، مشاهده جریان‌های آشفته یک ساختار جریان چرخشی را که ادی^۲ آشفته گفته می‌شود با محدوده وسیعی از طول مقیاس^۳ را نشان می‌دهد.

ذرات سیال که در ابتدا در فاصله‌های زیادی گسترده شده‌اند، می‌توانند با حرکت‌های چرخشی ادی‌ها بهم نزدیک گردند در نتیجه حرارت، جرم و اندازه حرکت به صورت مؤثری تغییر می‌کند. برای مثال یک نوار رنگ که در یک نقطه از جریان آشفته قرارداده شده است به سرعت در امتداد جریان از بین می‌رود. چنین مخلوط شدن مؤثر باعث افزایش زیاد مقادیر نفوذ جرم، اندازه حرکت و حرارت می‌شود.

ادی‌های آشفته بزرگتر بوسیله تحولی که کشش گردابه^۴ نامیده می‌شود انرژی گرفته و یا می‌دهند. حضور گردان‌های سرعت متوسط در جریان‌های برشی، سبب ادی‌های آشفته چرخشی می‌شوند. در امتداد جریان ادی‌ها بطور مناسبی کشیده می‌شوند، ادی‌های کوچکتر بطور قوی توسط ادی‌های بزرگتر کشیده شده و توسط جریان متوسط ضعیف‌تر می‌شوند. در این مسیر انرژی جنبشی از ادی‌های بزرگ به ادی‌های کوچک و کوچکتر منتقل می‌شود که به آن آبشار انرژی^۵ می‌گویند.

² Eddy

³ Length scale

⁴ Vortex stretching

⁵ Energy cascade

کوچکترین مقیاس حرکت که می‌تواند در جریان آشفته رخ بدهد توسط لزجت ناشی می‌شود. عدد رینولدز کوچکترین ادی‌ها براساس سرعت مشخصه آنها ν و طول مشخصه η ($\frac{\nu\eta}{\nu}$) است. در این مقیاس‌ها (طولها از 0.1 تا 0.1 میلی‌متر و فرکانس‌ها در حدود 10 کیلو هرتز در نمونه جریان‌های آشفته مهندسی) اثرات لزجت مهم است. در مقابل عمل تنش‌های لزجی کار صورت می‌گیرد، بطوریکه انرژی جمع شده با حرکت‌های ادی از بین می‌رود و به انرژی حرارتی داخلی تبدیل می‌شود.

ساختمان ادی‌های بزرگتر کاملاً ناهمگن (از نظر جهت) است و بواسطه واکنش قوی بین آنها با جریان متوسط وابسته به جریان می‌باشد. عمل نفوذ لزجی تمایل دارد که در مقیاس کوچک مستقل از جهت، جریان را پوشش دهد بنابراین، ادی‌های کوچکتر در جریان آشفته همگن هستند.

۳- اثر آشفتگی روی معادلات میانگین زمانی ناویر - استوکس

اختلاف اساسی بین مشاهدات جریانهای آرام و آشفته حضور حرکت ادی‌ها در محدوده وسیعی از مقیاس طول در جریان آشفته است. یک نمونه از میدان جریان 0.1 متر در 0.1 متر با یک جریان آشفته با عدد رینولدز بالا، باید شامل ادی‌هایی با اندازه‌های بین 10 تا 1000 میکرومتر باشد، ما احتیاج به شبکه‌ای با 10^9 تا 10^{12} نقطه داریم تا بتوانیم تحول را در تمام مقیاس‌های طول توضیح دهیم. سریعترین نتایج با فرکانسی از مرتبه 10 کیلو هرتز صورت می‌گیرد، لذا لازم است که زمان را به قدمهای حدود 100 میکرو ثانیه تقسیم کنیم. شبیه‌سازی مستقیم جریان آشفته لوله در عدد رینولدز 500000 کامپیوتری می‌خواهد که 10 میلیون مرتبه سریعتر از تولید فعلی ابر کامپیوتر Cray باشد.

امروزه توان محاسباتی فقط جهت پیگیری مسیر حرکت ادی‌های جریان‌های ساده بکار گرفته می‌شود محاسبات مورد نیاز برای حل مستقیم معادلات ناویر استوکس وابسته به زمان برای جریان‌های کاملاً آشفته در عدد رینولدز بالا بسیار مشکل است و باید منتظر گسترش اساسی در سخت افزار رایانه‌ها بود.

در این فاصله مهندسی به روشهای محاسباتی که بتوانند اطلاعات کافی را در مورد تحول‌های آشفته تهیه کنند نیاز دارند. ولی این کار نیاز به پیش‌بینی اثرات هر ادی در جریان دارد. خوشبختانه استفاده‌کنندگان CFD اغلب با اطلاعاتی در رابطه با میانگین زمانی خواص جریان قانع می‌شوند (مثلاً سرعت‌های متوسط و فشارهای متوسط و تنش‌های متوسط) در این بخش ما اثرات حضور اغتشاشات آشفته روی خواص جریان متوسط را بررسی می‌کنیم.

۴- معادلات رینولدز

ابتدا متوسط ϕ مربوط به خاصیت جریان ϕ را بصورت رابطه (۲-۳) تعریف می‌کنیم.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \phi(t) dt \quad (۲)$$

که در آن Δt آنقدر بزرگ انتخاب می‌شود که برای مقادیر زمانی بزرگتر از Δt تغییری در اندازه انتگرال مزبور مشاهده نشود. به عبارت دیگر ϕ مستقل از زمان انتخاب شده دربیاید. علامت بار بیانگر کمیت متوسط زمانی می‌باشد. خاصیت جریان ϕ وابسته به زمان است و می‌توان آنرا بصورت مجموع مؤلفه متوسط دائمی $\bar{\phi}$ و مؤلفه نوسانی متغیر با زمان $\phi'(t)$ که مقدار متوسط آن صفر است در نظر گرفت. در نتیجه $\phi(t) = \bar{\phi} + \phi'(t)$ از این به بعد بخش وابسته به زمان ϕ' و ϕ را صریحاً می‌نویسیم و t را حذف می‌کنیم، بنابراین می‌نویسیم $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ میانگین زمانی نوسانات ϕ' طبق تعریف صفر بدست می‌آید.

$$\bar{\phi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \phi'(t) dt = 0 \quad (۳)$$

اطلاعات مربوط به نوسان بخشی از جریان می‌تواند از جذر متوسط مربع نوسانات بدست آید.

$$\phi_{rms} = \sqrt{(\phi')^2} = \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\phi')^2 dt \right]^{0.5} \quad (۴)$$

جذر متوسط مربع مقادیر مؤلفه‌های سرعت از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند، چرا که آنها را می‌توان به آسانی با یک وسیله حساس به سرعت نوسانات آشفته (نظیر سرعت سنج سیم داغ^۷) و یک مدار ساده الکتریکی اندازه گرفت. انرژی جنبشی k (در واحد جرم) مربوط به آشفتگی از رابطه (۳-۵) تعیین می‌شود.

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (۵)$$

شدت آشفتگی TI به انرژی جنبشی و سرعت جریان متوسط مرجع U_{ref} بصورت رابطه (۶) مرتبط می‌شود.

$$TI = \frac{\left[\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \right]^{0.5}}{U_{ref}} = \frac{\left[\frac{2}{3} k \right]^{0.5}}{U_{ref}} \quad (۶)$$

^۶ Root mean square (RMS)

^۷ Hot wire

برای نمایش اثر نوسانات آشفته روی جریان متوسط، معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس را همزمان برای جریان تراکم‌ناپذیر با لزجت ثابت بررسی می‌کنیم. این کار در حد زیادی روابط پیچیده را بدون کاستن از بخشهای اصلی ساده می‌کند. طبق معمول مختصات کارتزین را نظر می‌گیریم.

۴-۱- معادلات حرکت در جریانات آشفته

حال می‌خواهیم معادلات حرکت در جریانات آشفته را مورد بررسی قرار دهیم. روش به کار رفته در اینجا، در سایر مسائل نیز قابل استفاده می‌باشد.

ابتدا معادلات را برای کمیت‌های لحظه‌ای یعنی کمیت‌های متوسط به علاوه کمیت‌های نوسانی می‌نویسیم. آنگاه از طرفین هر معادله متوسط‌گیری زمانی به عمل می‌آوریم. البته در این بین بایستی به این نکته توجه نمود که چنانچه تساوی برای معادلات لحظه‌ای برقرار باشد، این تساوی برای متوسط زمانی آن برای دامنه مشخصی از زمان نیز برقرار خواهد بود. در نهایت معادلات را ساده‌سازی نموده تا جاییکه کمیت‌های متوسط زمانی ظاهر گردند.

۴-۲- معادله پیوستگی برای جریان آشفته

فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی به فرم (۷) می‌باشد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (7)$$

معادله (۷) برای مقادیر لحظه‌ای جریان آشفته نیز برقرار است. چنانچه متوسط‌گیری زمانی از معادله (۷) نمائیم معادله حاصله به صورت رابطه (۸) در خواهد آمد.

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} = 0 \quad (8)$$

با جایگذاری کمیت‌های لحظه‌ای با مقادیر متوسط زمانی به علاوه مقادیر نوسانی، و نیز استفاده از قوانین متوسط‌گیری رینولدز، خواهیم دید که

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho' u_i'}) = 0 \quad (9)$$

برای یک جریان تراکم‌ناپذیر از آنجا که $\rho' = 0$ می‌باشد معادله (۹) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

۳-۴-۳- معادله ممتوم برای جریان‌های آشفته

همان‌طور که می‌دانیم معادلات ممتوم برای یک جریان تراکم‌ناپذیر با ویسکوزیته ثابت به صورت (۱۱) می‌باشد.

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (11)$$

معادله (۱۱) هم برای جریان‌های آرام و هم برای جریان‌های آشفته معتبر می‌باشد. لیکن برای یک جریان آشفته، متغیرهای وابسته‌ای نظیر سرعت و فشار تماماً وابسته به زمان می‌باشند.

حال می‌خواهیم معادله ممتوم فوق را بر حسب کمیت‌های متوسط زمانی بیان نمائیم. با قرار دادن (۱۲)

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + p' \\ u_i &= \bar{u}_i + u'_i \end{aligned} \quad (12)$$

در معادله (۱۱) خواهیم دید

$$\rho \left[\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right] = B_i - \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \quad (13)$$

با ساده‌سازی معادله (۱۳) و نیز اعمال متوسط‌گیری زمانی بر طرفین این معادله خواهیم دید که

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] = B_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (14)$$

ترم سوم در سمت چپ معادله (۱۴) معمولاً به اشکال مختلف بیان می‌گردد. از معادله پیوستگی جریان‌های تراکم‌ناپذیر

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{می‌باشد. بنابراین}$$

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (15)$$

با اضافه و کم نمودن ترم $u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}$ که مساوی صفر می‌باشد به طرفین معادله (۱۵) به دست آمده برای ممتوم، و از آنجا

که

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (16)$$

معادله ممتوم برای جریان آشفته به صورت زیر بیان می‌گردد

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] = B_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (17)$$

تنها تفاوت معادله ممتوم (17) با معادله ممتوم با کمیتهای لحظه‌ای، اضافه شدن ترم آخر در سمت راست معادله یعنی $\overline{\rho u'_i u'_j}$ می‌باشد، این ترم را اصطلاحاً تنش آشفتگی یا تنش رینولدز می‌نامند.

تنها تفاوت معادلات جریان آرام با آشفته نیز فقط حضور همین ترم می‌باشد. به طور کلی این ترم، از لحاظ فیزیکی یک تنش نمی‌باشد، بلکه بیانگر اثر تبادل اینرسی (ممتوم) می‌باشد، فراموش نکنیم که این ترم از سمت راست معادله ممتوم (جائیکه با ترمهای اینرسی سروکار داریم) به سمت چپ منتقل شده است. بنابراین ریشه و بنیاد این ترم از جنس ممتوم می‌باشد.

در حالت کلی، معادلات بقاء حاکم بر جریان سیالات آشفته (یعنی بقای ممتوم، جرم و انرژی) بصورت زیر بیان می‌شوند.

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] = B_i - x_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad \text{بقای ممتوم}$$

$$\frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{بقای جرم}$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho C_p \overline{u'_j T'} \right) \quad \text{بقای انرژی}$$

پارامتر λ بیان کننده هدایت حرارت است. بدین سبب از این شکل استفاده شد تا با انرژی جنبشی آشفتگی که با k نمایش می‌دهیم، اشتباه گرفته نشود.

معادلات فوق را اصطلاحاً معادلات RANS⁸ نامیده و در ضمن معادلاتی صریح بوده و هیچ فرضی در بدست آمدن و احیاناً ساده‌سازی آنها نشده است. ولیکن این معادلات تشکیل یک دستگاه بسته⁹ را نمی‌دهند. (یعنی تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات است) بواسطه غیر خطی بودن این معادلات، پس از فرآیند متوسط‌گیری، دو همبسته¹⁰ جدید مطرح شده است.

⁸ Reynolds Average Navier Stokes

⁹ Closed set

¹⁰ Correlation

$$\overline{u'_i u'_j}$$

همبستگی بین نوسانات سرعت

$$\overline{u'_j T'}$$

همبستگی بین نوسانات سرعت و دما

ترم $\overline{u'_i u'_j}$ بیانگر انتقال مومنتوم در راستای x_i و بالعکس است. به این ترم اصطلاحاً تانسور تنش رینولدز^{۱۱} گفته می-شود. ترم $\overline{\rho C_p u'_j T'}$ بیانگر انتقال آنتالپی (یا انتقال انرژی) در راستای x_i و بالعکس است. به این ترم اصطلاحاً شار حرارتی آشفته^{۱۲} گفته می-شود.

تانسور تنش رینولدز بعنوان یک تنش بر روی سیال عمل کرده و مشخص کننده اثر رفتار ادیهای آشفتهگی بر روی میدان جریان متوسط می-باشند.

در بسیاری از نواحی جریان، تنشهای آشفتهگی و شارهای آشفتهگی بسیار بزرگتر از مقادیر نظیر جریان آرام می-باشند و لذا از مقادیر نظیر جریان آرام در مقایسه با مقادیر آشفته می-توان چشم پوشی نمود. هدف از مدلسازی جریانات آشفته، تعیین ترمهایی از قبیل تنش رینولدز، شار جرمی آشفته و یا شارحرارتی آشفته با استفاده از ارتباط دادن مقادیر کمیتهای مزبور به کمیتهای جریان متوسط و بالاخص گرادیانهای موجود در جریان متوسط می-باشد.

برای جریانات ساده برشی ترکیب تنش برشی منتجه از میدان سرعت متوسط با مولفه مربوط به آشفتهگی به رابطه (۱۸) منتج خواهد شد.

$$\tau = \tau_{laminar} + \tau_{turbulent} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u'v'} \quad (18)$$

جز در ناحیه زیر لایه لزج (ناحیه مجاور دیواره) در بقیه نواحی، اندازه تنشهای رینولدز $\overline{\rho u'v'}$ بسیار بزرگتر از تنشهای لزج $\mu \frac{d\bar{u}}{dy}$ می-باشد.

عبارات تنش اضافی در رابطه (۱۹) به تفصیل نوشته شده است تا ساختار آنها مشخص شود. آنها از شش تنش اضافی نتیجه شده اند که سه تنش قائم و سه تنش برشی می-باشد.

¹¹ Reynolds stress tensor

¹² Turbulent Heat flux

(۱۹)

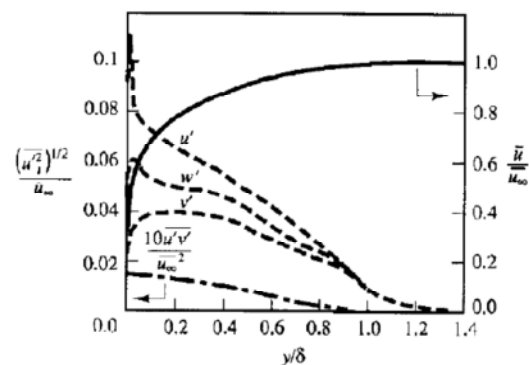
$$\begin{aligned} & \cdot \overline{\rho u'v'} \\ & \cdot \overline{\rho u'w'} \\ & \cdot \overline{\rho v'w'} \end{aligned}$$

این تنش‌های اضافی آشفته، تنش‌های رینولدز نامیده می‌شوند. در جریان‌های آشفته تنش‌های عمودی $\tau_{xx} = -\rho \overline{u'^2}$ $\tau_{yy} = -\rho \overline{v'^2}$ $\tau_{zz} = -\rho \overline{w'^2}$ همیشه مخالف صفر هستند، چون شامل مربع نوسانات سرعت می‌باشند تنش‌های برشی

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\rho \overline{u'v'} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\rho \overline{u'w'} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\rho \overline{v'w'} \end{aligned} \quad (۲۰)$$

توسط روابط بین مؤلفه‌های مختلف سرعت با یکدیگر مرتبط می‌باشند. بهر حال تنش‌های برشی آشفته مخالف صفر می‌باشند و معمولاً در مقایسه با تنش‌های لزج در یک جریان آشفته خیلی بزرگ هستند.

بیشترین مقدار مربوط به $\overline{u'^2}$ ، $\overline{v'^2}$ و $\overline{w'^2}$ در نزدیکی دیوار بدست می‌آید، که در آنجا گرادیانهای سرعت متوسط نشان می‌دهد تولید آشفتگی زیاد است. بهر حال حرکت ادیها و نوسانات سرعت مربوطه تابع شرط عدم لغزش دیوار می‌باشند. آشفتگی نزدیک دیوار ایزوتروپ نمی‌باشد، چون فرآیند تولید اساساً مؤلفه $\overline{u'^2}$ را بوجود می‌آورد. در شکل ۲ مشاهده می‌شود که این مقدار حداکثر متوسط مجذور نوسانات می‌باشد.



شکل ۲- توزیع سرعت متوسط و خواص آشفتگی برای لایه مرزی روی صفحه تخت در گرادیان فشار صفر

در مورد لایه مرزی روی صفحه تخت، وقتی y/δ از 0.8 بیشتر می‌شود، خواص آشفتگی به سمت صفر میل می‌کند. مقادیر جذر متوسط مربع (rms) مربوط به کلیه سرعت‌های نوسانی در اینجا تقریباً برابر می‌باشند، که نشان می‌دهد ساختمان آشفتگی در فاصله دور از دیوار کاملاً ایزوتروپ می‌باشد.

۴-۴- تنش برشی در جریان‌های آشفتگی

آشفتگی نوعی ناپایداری جریان است که به واسطه تنش‌های برشی (یا گرادیانهای سرعت) ایجاد می‌گردد، هرچه تنش برشی قویتر باشد، آشفتگی جریان نیز شدیدتر خواهد بود. تعیین تنش برشی برای جریان‌های آشفتگی بسیار حیاتی و در عین حال از دیدگاه محاسباتی کمی پیچیده می‌باشد، از طرفی بدون داشتن رابطه‌ای برای تنش برشی نمی‌توان با نوشتن بالانس نیروهای وارد بر یک المان سیال، توزیع سرعت را در درون جریان به دست آورد. تانسور تنش برشی τ_{ij} به صورت (۲۱) بیان می‌گردد.

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{laminar} + \tau_{ij}^{turbulent} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho u'_i u'_j \quad (21)$$

امید اندکی برای تعیین اندازه تنش رینولدز $\rho u'_i u'_j$ به صورت صریح وجود دارد. روش پیشنهاد شده مرتبط نمودن اندازه این تنش آشفتگی به میدان سرعت متوسط می‌باشد. روش‌های مختلفی برای به دست آوردن تنش برشی جریان‌های آشفتگی ارائه شده است که در ادامه به تشریح هر یک خواهیم پرداخت.

۵-۵- مدل‌سازی جریان‌های آشفتگی و مدل‌های آشفتگی

تاکنون صدها مدل توربولانسی ارائه شده‌اند که هر یک برای رژیم‌های خاص جریانی و حتی در ناحیه‌ای خاص از میدان جریان معتبر و دقیق می‌باشند، هدف نهایی تمام مدل‌های توربولانسی، محاسبه اندازه تنش $\rho u'_i u'_j$ در نقاط مختلف جریان می‌باشد.

۵-۱- رابطه اساسی Boussinesq Eddy-Viscosity

رابطه بوزینسک بر پایه این اصل بنا نهاده شده است که مولفه‌های تنش‌های رینولدز متناسب با گرادیانهای سرعت متوسط می‌باشند، یعنی

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (22)$$

که در آن S_{ij} تانسور نرخ کرنش متوسط و توسط رابطه $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ تعریف می‌شود

البته بایستی توجه داشت که رابطه (۲۲) شکل تراکم ناپذیر معادله بوزینسک است، لیکن شکل کامل این معادله که شامل اثرات تراکم پذیری جریان می‌باشد به صورت (۲۳) خواهد بود.

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (23)$$

بر خلاف ویسکوزیته مولکولی μ که یک خاصیت از سیال است μ_t رابطه‌ای مستقیم و وابستگی شدیدی به میزان آشفتگی جریان و میدان سرعت دارد و لذا تابعیتی از جریان و موقعیت دارد. در اعداد رینولدز بالا، در تمام و یا بخش عمده‌ای از جریان $\mu_t \geq \mu$ است.

چنانچه ویسکوزیته کلی را بصورت رابطه (۲۴) بنویسیم که در آن μ_0 ویسکوزیته جریان آرام و خاصیتی از سیال است در اینصورت معادلات RANS (همراه با تنشهای رینولدز) را می‌توان با حذف تنشهای رینولدز و جایگزینی ویسکوزیته μ با ویسکوزیته معادل جریانات آشفته $\mu = \mu_t + \mu_0$ بشکلی شبیه به معادلات ناویر استوکس جریانات آرام نوشت که شامل تانسور تنش رینولدز آشفته $\overline{\rho u'_i u'_j}$ نمی‌باشند. با استفاده از این استراتژی می‌توان برای مدلسازی یک جریان آشفته، به جای پیش-بینی مستقیم مقدار $\overline{\rho u'_i u'_j}$ دنبال توزیع μ_t بگردیم.

$$\mu = \mu_t + \mu_0 \quad (24)$$

۵-۲- مدل‌های Eddy-Viscosity

هدف هر مدل توصیف رابطه بین کمیت‌های قابل اندازه‌گیری فیزیکی جریان و یا کمیت‌های محاسبه شده میدان جریان است. به طور کلی این مدل‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود [۲۲].

۱- مدل‌های صفر معادله‌ای^{۱۳}

۲- مدل‌های یک معادله‌ای^{۱۴}

۳- مدل‌های دو معادله‌ای^{۱۵}

مدل‌های صفر معادله‌ای، تنها از روابط و معادلات جبری جهت توصیف رابطه بین خواص محاسبه شده و یا قابل اندازه‌گیری استفاده می‌کنند. مدل‌های یک معادله‌ای از یک معادله انتقال اضافی نیز در این بین استفاده می‌کنند، مدل‌های دو معادله‌ای شامل دو عدد PDE اضافی هستند.

¹³ Zero equation model

¹⁴ One equation model

¹⁵ Two equation model

واضح است که هیچ مدل آشفتگی وجود ندارد که برای تمامی مسائل مهندسی جوابگو باشد. انتخاب مدل از بین مدل‌های موجود بستگی به:

- فیزیک جریانی که با آن در مسأله مورد نظر درگیر هستیم.
- وجود یا عدم وجود همزمان چند رژیم متفاوت جریانی در کنار یکدیگر
- میزان دقت مورد نیاز
- امکانات محاسباتی موجود از قبیل RAM و یا CPU در دسترس
- میزان زمان مورد نیاز برای رسیدن به جوابی معقول دارد .

۱- مدل‌های صفر معادله‌ای (مدل‌های طول اختلاطی)

نظریه طول اختلاطی، فقط برای جریانات نسبتاً ساده نظیر جریانات برشی نازک و جریانات جت، جریانات ویک و جریانات لایه مرزی تشکیل شده بر روی دیواره خوب کار می‌کند، چراکه تنها برای این جریانات است که می‌توان l_m را با روابط تجربی ساده بیان نمود. اما این مدل اثرات انتقالی آشفته و نیز history effects نظیر جریانات آشفته را در نظر نمی‌گیرد (بعنوان توضیح بیشتر، این مدل نمی‌تواند اثرات اغتشاشات ایجاد شده در بالا دست جریان را بر روی جریان پائین دست پیش‌بینی نماید). از نقطه نظر ریاضی، سیستم معادلات جریان به دست آمده از مدلسازی جریان آشفته از نوع صفر معادله‌ای تقریباً همانند سیستم معادلات مربوط به جریانات آرام می‌باشد که در آن μ ثابت و یا متغیر نسبت به مکان و رژیم موضعی جریان است بنابراین از نقطه نظر محاسباتی و خواص همگرایی، می‌توان انتظار داشت که در استفاده از مدل طول اختلاطی (یا مدل‌های صفر معادله‌ای) در نهایت رفتاری شبیه به رفتار جریانات آرام را شاهد خواهیم بود. بالاخص چنانچه از شرایط مرزی مناسب استفاده شده باشد، حل عددی با استفاده از این مدل‌ها، با سرعت بالاتری همگرا شده و نتایج همگرا شده بهتری را در تعداد تکرار کمتر خواهد داد. به علاوه در استفاده از روش صفر معادله‌ای، خواص همگرایی فرآیند حل به پارامترهای ذیل حساس نمی‌باشد.

- تغییرات جزئی در چگالی و توزیع مکانی المانها
- تغییرات در شکل دامنه محاسباتی
- حدس اولیه آغازین

لازم به ذکر است که این مدل در جاهائی که فرآیند جابجائی و یا دیفیوژن کمیتهای آشفتگی مهم است نظیر:

- جریاناتی که دارای نرخ تشکیل بالائی می‌باشند^{۱۶} (نظیر جریانات انفجاری، تخلیه ظروف و یا معابر پر فشار و ...)

- انتقال حرارت در عرض صفحات بدون گرادیان جریانی

- جریانات دوباره چرخشی^{۱۷}

و به طور کلی هر جریانی که دارای رژیم‌های پیچیده در مقایسه با جریانات ساده کلاسیک می‌باشد و بالتبع آن تعیین l_m با مشکل مواجه می‌شود، مناسب نخواهد بود.

۲- مدل‌های یک معادله‌ای

در مدل‌های یک معادله‌ای، یکی از دو مقیاس مهم در جریانات آشفته، یعنی از میان زمان مقیاس جریانات آشفته و طول مقیاس جریانات آشفته و یا ترکیبی از آن دو، با استفاده از یک معادله انتقالی به دست می‌آید معمولاً این انرژی جنبشی آشفته k است که برای آن از یک معادله انتقالی استفاده می‌شود. (لازم به یادآوری است که یک معادله انتقال کمیت دلخواه ϕ معادله حاکم بر تغییرات زمان، جابجائی و دیفیوژن و به طور کلی معادله بیانگر توزیع ϕ در میدان می‌باشد).

مدل Spalart-Allmaras یک مدل تک معادله‌ای ساده بوده که یک معادله مدل شده انتقال را برای به دست آوردن μ_t حل می‌کند. مدل مزبور برای کاربردهای هوا-فضا ارائه شده است و همچنین نتایج خوبی برای لایه‌های مرزی‌ای که در معرض گرادیان فشار معکوس^{۱۸} قرار دارند، ارائه داده است. همچنین این مدل، یک مدل عمومی برای کاربردهای توربومشین است.

در شکل اصلی خود، مدل Spalart-Allmaras مدلی موثر برای اعداد رینولدز پائین محسوب می‌گردد یعنی استفاده موثر از این مدل تنها محدود به نواحی متأثر از لزجت در داخل لایه مرزی و نواحی مشابه (با عدد رینولدز پائین) می‌باشد. هر چه از نواحی با عدد رینولدز پائین دور شویم و به سمت نواحی با عدد رینولدز بالاتر (بالاخص نواحی دور از دیواره) حرکت نماییم از قابلیت‌های این مدل در تعیین مقدار μ_t کاسته خواهد شد. اما در برخی از نرم افزارهای تجاری، این مدل را می‌توان برای مواقعی که المانهای نزدیک دیواره خیلی ریز نمی‌باشند، به توابع دیواره مجهز نمود تا بتوان اثرات نواحی با ویسکوزیته بالای نزدیک دیواره را در توانایی‌های این مدل داخل نمود. این امر باعث شده است که این مدل، بهترین گزینه

¹⁶ Rapidly developing flows

¹⁷ Recirculating flows

¹⁸ Adversed pressure gradient

برای رسیدن به حل‌های خام^{۱۹} بر روی مش زمخت اولیه^{۲۰} باشد (البته برای مواقعی که محاسبات دقیق میدان جریان آشفته خیلی ضروری نبوده و هدف کلی رسیدن به یک رفتار کلی و تقریبی از جریان آشفته است). مدل‌های یک معادله‌ای (نظیر مدل Spalart-Allmaras) بخاطر عدم توانایی در وفق دادن خود با تغییرات سریع در مقیاسهای طولی^{۲۱} همواره مورد انتقاد قرار داشته‌اند. این تغییرات شدید را بالاخص در تغییرات ناگهانی از جریانات محدود به دیواره^{۲۲} به جریانات برشی آزاد (همانند تخلیه یک جت با ابعاد محدود به درون محیطی با ابعاد متناهی نامتناهی نظیر هوای اتمسفر) مشاهده می‌نمائیم. از طرفی از نقطه نظر توانایی داخل نمودن اثرات زیر مدلها (مثلا در مسائل احتراق یا مسائل درگیر با جابجائی آزاد و نیروهای بویانسی) مدل با کمبودهای جدی مواجه است.

۳- مدل‌های دو معادله‌ای

مدل‌های دو معادله‌ای به عنوان زیربنای بسیاری از تحقیقات مربوط به مدلسازی جریانات آشفته، بالاخص در سالیان اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. ساده‌ترین مدل‌های کامل آشفته‌گی (که در عین قابلیت‌های بالا، دارای معادلات نسبتاً ساده‌ای نیز می‌باشند) مدل‌های دو معادله‌ای هستند که در آنها، حل دو معادله انتقال جداگانه باعث تعیین شدن مستقلانه مقیاس سرعت آشفته‌گی^{۲۳} و مقیاس طول آشفته‌گی^{۲۴} می‌شوند.

مهمترین اختلاف بین مدل‌های دو معادله‌ای و سایر مدل‌های Eddy-Viscosity آن است که مدل‌های دو معادله‌ای مدل‌های کاملی می‌باشند یعنی از آنها می‌توان برای پیش بینی خواص یک جریان آشفته بدون آگاهی قبلی از ساختار جریان و یا هندسه جریان استفاده نمود. در حالیکه هم در معادلات صفر معادله‌ای و هم در معادلات یک معادله‌ای، طول مقیاسهائی وجود دارد که برای تعیین اندازه آنها، نیاز به دانستن از قبل رژیم جریان و شکل آن می‌باشد و این امر مدلسازی جریانات آشفته قبل از حل آنها را کمی پیچیده می‌نماید. نقطه آغاز تمام مدل‌های Eddy-Viscosity دو معادله‌ای استفاده از تقریب بوزینسک و معادله انتقال برای انرژی جنبشی آشفته‌گی k می‌باشد. انتخاب متغیر دوم دلخواه بوده تا امروز پیشنهادات بسیاری برای این انتخاب ارائه شده است.

قدرت، اقتصادی بودن و دقت قابل قبول برای طیف وسیعی از جریانات آشفته، این مدل را به یک مدل رایج برای جریانات صنعتی و مدلسازی انتقال حرارت نموده است.

¹⁹ Crude simulation

²⁰ Coarse mesh

²¹ Length scales

²² Wall bounded flows

²³ Turbulent velocity scale

²⁴ Turbulent length scale

مدل k-ε

مدل k-ε معروفترین مدل دو معادله‌ای می‌باشد چرا که فهم آن آسان و استفاده از آن در برنامه‌نویسی ساده می‌باشد.

در مدل‌های k-ε میدان آشفتنه بر حسب دو متغیر بیان می‌شود.

۱- انرژی جنبشی جریان آشفتنه^{۲۵}

۲- نرخ اضمحلال ویسکوز انرژی جنبشی آشفتنه^{۲۶}

انرژی جنبشی لحظه‌ای جریان آشفتنه $k(t)$ ، عبارت است از مجموع انرژی جنبشی متوسط $K = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2)$ و

انرژی جنبشی آشفتنه $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ در بسط‌های زیر شدیداً لازم است که نرخ تغییر شکل و تنش‌های آشفتنه را

استفاده کنیم. برای تسهیل در محاسبات بعدی معمول است

که مؤلفه‌های نرخ تغییر شکل

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad (25)$$

و تنش‌ها

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (26)$$

را بصورت تانسور (ماتریس) می‌نویسند.

تجزیه نرخ تغییر شکل المان سیال در جریان آشفتنه به یک مؤلفه متوسط و یک مؤلفه نوسانی، $e_{ij} = E_{ij} + e'_{ij}$ المان‌های

ماتریس (۲۷) را می‌دهد.

$$e_{ij} = E_{ij} + e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (27)$$

²⁵ Turbulent kinetic energy

²⁶ Viscous dissipation rate of Turbulent kinetic energy

معادله حاکم برای انرژی جنبشی جریان متوسط K

یک معادله برای انرژی جنبشی متوسط K را می‌توان با ضرب کردن مؤلفه x معادله رینولدز در U و مؤلفه y معادله در V و مؤلفه z معادله در W ، بدست آورد. پس از جمع نتایج با هم و مقداری عملیات جبری می‌توان نشان داد که معادله میانگین زمانی انرژی جنبشی متوسط حاکم بر جریان بصورت (۲۸) است.

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho K)}{\partial t}}_i + \underbrace{\text{div}(\rho K \bar{U})}_{ii} = \underbrace{\text{div}(-p \bar{U})}_{iii} + \underbrace{2\mu \bar{U} E_{ij}}_{iv} - \underbrace{\rho \bar{U} \overline{u'_i u'_j}}_v - \underbrace{2\mu E_{ij} \cdot E_{ij}}_{vi} - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_j} \cdot E_{ij}}_{vii}$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{U} + \bar{u}' \\ u &= U + u' \\ v &= V + v' \\ w &= W + w' \end{aligned} \quad (28)$$

به بصورت لغوی، برای انرژی جنبشی متوسط K داریم.

= انتقال K توسط جابجائی + نرخ تغییر K	انتقال K توسط تنش‌های لزجی
	انتقال K توسط فشار +
	انتقال K توسط تنش رینولدز +
	تولید آشفستگی +
	نرخ اضمحلال K -

عبارت انتقال iii، iv، v بوسیله دیورژانس div مشخص می‌شوند و بهتر است که همه آنها را با هم در یک گروه قرار دهیم. اثرات تنش لزجی روی K به دو بخش تقسیم می‌شود: عبارت iv، انتقال K بواسطه تنش لزجی و عبارت vi، اضمحلال لزجی انرژی جنبشی متوسط K دو عبارت که شامل تنش‌های رینولدز $\rho \overline{u'_i u'_j}$ هستند، برای محاسبه اثرات آشفستگی می‌باشند. عبارت v انتقال آشفته K توسط تنش‌های رینولدز و عبارت vii تولید آشفستگی یا کاهش خالص K بواسطه کار تغییر شکل توسط تولید تنش‌های رینولدز می‌باشد. درجریان‌های با اعداد رینولدز بالا، عبارات آشفستگی v و vii همیشه خیلی بزرگتر از عبارات iv و iv می‌باشند.

معادله حاکم برای انرژی جنبشی آشفته k

با ضرب هر کدام از معادلات زمانی ناویر استوکس در مؤلفه‌های سرعت نوسانی مربوطه (مثلاً ضرب معادله مؤلفه x در u' و غیره) و جمع همه نتایج ناشی از تکرار این عمل روی معادلات رینولدز و کم کردن دو معادله حاصل و بازنویسی خیلی اساسی معادله انرژی جنبشی k، رابطه (۳-۲۹) را نتیجه می‌دهد.

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}}_i + \underbrace{div(\rho k \bar{U})}_{ii} = \underbrace{div(-\overline{p \bar{u}'})}_{iii} + \underbrace{2\mu \overline{\bar{u}' E'_{ij}}}_{iv} - \underbrace{\rho \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j}}_v - \underbrace{2\mu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}}}_{vi} - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_j \cdot E'_{ij}}}_{vii}$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{U} + \bar{u}' \\ u &= U + u' \\ v &= V + v' \\ w &= W + w' \end{aligned} \quad (29)$$

بصورت لغوی برای انرژی جنبشی آشفته داریم.

= انتقال k توسط جابجائی + نرخ تغییر k	انتقال k توسط تنش‌های لزجی
	+ انتقال k توسط فشار
	+ انتقال k توسط تنش رینولدز
	+ تولید آشفتگی
	- نرخ اضمحلال k

معادله‌های (۲۸) و (۲۹) در چند مورد خیلی شبیه به هم هستند. کمیات موجود در سمت راست هر دو معادله تغییرات انرژی جنبشی آشفتگی می‌باشد که بیشتر توسط واکنش‌های آشفتگی حاکم می‌شوند. عبارت vii در هر دو معادله دارای مقدار مساوی ولی با علامت مختلف هستند. لذا عبارت vii یک ترکیب مثبت در معادله k می‌دهد و یک عبارت تولید را نشان می‌دهد. در معادله K بهر حال عبارت منفی وجود دارد، بنابراین انرژی جنبشی جریان متوسط را مستهلاک می‌کند. این نتایج بصورت ریاضی تبدیل انرژی جنبشی متوسط را به انرژی آشفته بیان می‌کند. عبارت اضمحلال لزجی vi یعنی

$$-2\mu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} = -2\mu (\overline{e'_{11}} + \overline{e'_{22}} + \overline{e'_{33}} + 2\overline{e'_{12}} + 2\overline{e'_{13}} + 2\overline{e'_{23}}) \quad (30)$$

یک ترکیب منفی را بدلیل حضور مجموع مربع نرخ‌های تغییر شکل نوسانی e'_{ij} ، به رابطه (۲۹) می‌دهد. اضمحلال انرژی جنبشی آشفته بدلیل کار انجام شده ادی‌های کوچکتر روی تنش‌های لزجی ایجاد می‌شود. نرخ اضمحلال بر واحد جرم که واحد آن m^2/s^3 است در مطالعات دینامیک آشفتگی بسیار مهم بوده و بصورت (۳۱) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij}.e'_{ij}} \quad (31)$$

همواره یک عبارت اصلی اتلاف کننده در معادله انرژی جنبشی آشفته وجود دارد که از نظر مرتبه بزرگی مشابه عبارت تولید می‌باشد و هرگز قابل صرف نظر نمی‌باشد. بالعکس وقتی عدد رینولدز بالا باشد، عبارت انتقال لزجی iv در معادله (29) همیشه در مقایسه با عبارت انتقال آشفته vi خیلی کوچک می‌باشد.

معادلات مدل k-ε

امکان توسعه معادلات انتقال مشابه برای همه کمیت‌های آشفتگی که شامل نرخ اضمحلال لزجی ε می‌باشد وجود دارد. معادله دقیق ε، بهر حال شامل تعداد زیادی عبارات مجهول و غیرقابل اندازه‌گیری می‌باشد. مدل k-ε استاندارد دو معادله مدل دارد، یکی برای k و یکی برای ε که بر روی بهترین درک از فرآیندهای مناسبی که سبب تغییرات این متغیرها می‌شوند، بنا شده‌اند.

ε و k را برای تعریف مقیاس سرعت v و مقیاس طول l استفاده می‌کنیم که بصورت (3-32) معرف مقیاس بزرگ آشفتگی²⁷ می‌باشند.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{k} \\ l &= \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (32)$$

سوالی که ممکن است پیش بیاید، اعتبار استفاده از متغیر ε برای تعریف مقیاس l می‌باشد. ما مجاز به انجام این کار هستیم زیرا در اعداد رینولدز بالا نرخ‌ی که در آن ادی‌های بزرگ از جریان متوسط انرژی می‌گیرند دقیقاً مطابق نرخ انتقال انرژی به ادی‌های کوچک و مستهلک کننده است. اگر چنین نبود انرژی در بعضی مقیاس‌های آشفتگی می‌توانست بدون محدودیت رشد کند و یا کاهش یابد. در عمل این اتفاق نمی‌افتد و ما را قانع می‌کند که در تعریف l از ε استفاده کنیم. می‌توان به کمک آنالیز ابعادی نشان داد که ویسکوزیته آشفته را می‌توان به طول مقیاس ادی‌های بزرگ جریان آشفته مرتبط ساخت.

$$\mu_t = C \rho \nu l \quad (33)$$

که در آن به v و l ترتیب سرعت مقیاس و طول مقیاس بزرگترین ادی‌ها در میدان جریان آشفته می‌باشند. با جایگذاری معادلات (32) درون معادله (33) به نتیجه زیر می‌رسیم.

²⁷ Large scale turbulence

$$\mu_t = C_{\mu} \rho \nu l = \rho C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (34)$$

که C_{μ} یک ضریب تجربی است که مقدار آنرا معمولاً برابر ۰/۰۹ در نظر می‌گیرند. مدل $k-\varepsilon$ استاندارد، معادلات انتقال (۳۵) و (۳۶) را که برای ε و k بکار برده شد استفاده می‌کند.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \bar{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad}(k) \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (35)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \bar{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \text{grad}(\varepsilon) \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (36)$$

معادلات بصورت لغوی می‌شوند

انتقال k یا ε توسط نفوذ = انتقال k یا ε توسط جابجائی + نرخ تغییر k یا ε
نرخ تولید k یا ε +
نرخ اضمحلال k یا ε -

معادلات شامل پنج ثابت قابل تنظیم $C_{2\varepsilon}$ ، $C_{1\varepsilon}$ ، σ_{ε} ، σ_k ، C_{μ} هستند. مدل استاندارد $k-\varepsilon$ مقادیر (۳۷) را برای ثابت‌هایی که در یک محدوده وسیع جریان‌های آشفته وارد می‌شوند، بکار می‌برد.

$$\begin{aligned} C_{\mu} &= 0.09 \\ \sigma_k &= 1.0 \\ \sigma_{\varepsilon} &= 1.30 \\ C_{1\varepsilon} &= 1.44 \\ C_{2\varepsilon} &= 1.92 \end{aligned} \quad (37)$$

اعدال پرانتل آشفته، σ_k و اشمیت آشفته، σ_{ε} قابلیت نفوذ k و ε را به لزجت ادی μ_t مربوط می‌کنند. تولید و اتلاف انرژی جنبشی آشفته همواره به یکدیگر مربوط می‌باشند نرخ اضمحلال ε در جائیکه تولید k بزرگ باشد، بزرگ است. مدل معادله (۳۶) برای ε فرض می‌کند که تولید و اتلاف عبارت مربوط به آن متناسب با عبارات تولید و اتلاف معادله k (۳۵) است. اتخاذ چنین حالتی باعث می‌شود که اگر k سریعاً رشد کند، ε هم سریعاً رشد کند و با کاهش k به اندازه کافی سریعاً کاهش یابد تا از مقادیر منفی انرژی جنبشی آشفته اجتناب شود. ضریب ε/k در عبارات تولید و اتلاف این عبارات را بصورت ابعادی در معادله ε اصلاح می‌کند.

برای محاسبه تنش‌های رینولدز با مدل $k-\varepsilon$ از رابطه بسط داده شده بوزینسک (۳۸) استفاده شده است.

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

$$S_{ij} = E_{ij} \quad (38)$$

یک جریان تراکم ناپذیر را در نظر می‌گیریم و رفتار قسمت اول رابطه (38) را توسط خودش توضیح می‌دهیم اگر همه تنش‌های قائم را جمع کنیم (یعنی $i=1,2,3$ در حالیکه $j=i$ باشد)، با استفاده از پیوستگی در می‌یابیم که این مقادیر صفر هستند، چون در هر جریان

$$2\mu_t S_{ij} = 2\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\mu_t \text{div} \vec{u} = 0 \quad (39)$$

روشن است که مجموع تنشهای قائم $-\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) - 2\rho k$ جنبشی آشفته در واحد حجم $-2\rho k$ می‌باشد. یک سوم این مقدار به هر مؤلفه تنش قائم اختصاص داده می‌شود، تا نشان دهیم که مجموع آنها همواره از نظر فیزیکی مقدار صحیحی می‌باشد. باید توجه داشت که این فرض ایزوتروپیک برای تنش‌های قائم رینولدز می‌باشد و داده‌های تجربی نشان می‌دهد که حتی در جریان‌های دو بعدی ساده غیر دقیق نمی‌باشد.

۶- معادله‌های انتقال k و ε در نرم افزار Fluent

مدل k - ε استاندارد، معادلات انتقال (40) و (41) را که برای ε و k بکار برده شد در نرم افزار Fluent استفاده می‌کند.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (41)$$

معادلات شامل پنج ثابت قابل تنظیم $C_{2\varepsilon}$ ، $C_{1\varepsilon}$ ، σ_ε ، σ_k ، C_μ هستند که مقادیر آن در بخش قبل ذکر گردید و

$G_k =$ ترم تولید انرژی جنبشی آشفته به دلیل گرادیان سرعت متوسط است.

$G_b =$ ترم تولید انرژی جنبشی آشفته به دلیل نیروی بویانسی است.

ترم G_k در معادله بیانگر میزان تولید انرژی جنبشی آشفتگی^{۲۸} ناشی از اندرکنش بین جریان متوسط^{۲۹} و میدان جریان آشفته می باشد و از همینرو به آن اصطلاحاً ترم تولید برشی گفته می شود و ترم G_b نیز بیانگر تولید-اتلاف بویانسی ناشی از میدان چگالی نوسان کننده جریان^{۳۰} می باشد.

روابط صریح^{۳۱} برای G_k بصورت (۴۲) می باشد.

$$G_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (42)$$

با قرار دادن رابطه (۳۸) (رابطه بوزینسک) در داخل (۴۲) خواهیم دید که

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (43)$$

که $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ و $S_{ij} = E_{ij}$ تانسور نرخ کرنش است.

۷- نگاهی مجدد به مدل های آشفتگی دو معادله ای

روش به کار گرفته شده در مدل طول اختلاطی (پیشنهاد شده توسط پرائنتل)، روشی وابسته به هندسه بوده و در جریانات پیچیده جواب نمی دهد، لذا مطلوبتر آن است که ویسکوزیته آشفته ν_t را بر مبنای مقیاسهای حرکت آشفته قرار دهند به طوریکه مستقل از قیود هندسی باشند از نقطه نظر ابعادی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned} [v_t] &= [Velocity][Length] \\ or \\ [v_t] &= [Velocity]^2 [Time] \end{aligned} \quad (44)$$

کاندیدای واضح برای سرعت مقیاس، ترم \sqrt{k} می باشد که در آن $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ می باشد. کمیت $\frac{k}{\varepsilon}$ معیاری از زمان بازگشت سرمایه ادی یا معیاری از این امر است که آشفتگی با چه سرعتی توسط ویسکوزیته اضمحلال می گردد. به این کمیت اصطلاحاً زمان مقیاس آشفتگی^{۳۲} گفته می شود. از آنجا که $[k] = [Velocity]^2$ و $[\frac{k}{\varepsilon}] = [Time]$ می باشد، لذا هر شکلی از ویسکوزیته آشفته که با استفاده k و ε ساخته می شود، می بایست دارای شکل (۴۵) باشد.

²⁸ Turbulent kinetic energy production

²⁹ Mean flow

³⁰ Turbulent flux of fluctuating density

³¹ Exact relation

³² Turbulent time scale

$$[v_t] = \text{cons.} \times \frac{k^2}{\varepsilon} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (45)$$

ثابت مزبور C_μ با استفاده از خواص لایه مرزی تعادلی به دست خواهد آمد. مقادیر k و ε نیز با استفاده از حل معادلات انتقالی تعیین می شوند.

۷-۱- تعیین مقدار ثابت C_μ

در ناحیه لگاریتمی مربوط به یک جریان آشفته با استفاده از رابطه لگاریتمی نشان داده شد که

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (46)$$

با فرض ثابت بودن تنش در این ناحیه (که فرض چندان موافقی با فیزیک نمی باشد)

$$\frac{\tau_w}{\rho} = -\overline{u'v'} = u^{*2} \quad (47)$$

با فرض تعادل موضعی^{۳۳} می توان گفت که

$$p^{(k)} = \varepsilon \quad (48)$$

که در آن نرخ تولید انرژی جنبشی آشفتگی (در واحد جرم) برای یک لایه مرزی (و یا هر جریان برشی ساده دیگر) از رابطه (۴۹) به دست می آید.

$$p^{(k)} = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (49)$$

اگر چه به طور کلی $p_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ می باشد، لیکن در بین گرادیانهای برشی موجود در یک جریان

برشی ساده، تنها $\frac{\partial u}{\partial y}$ دارای مرتبه قابل توجه و در بین گرادیانهای قائم موجود نیز تنها $\overline{u'v'}$ مرتبه قابل توجه می باشد. با توجه

به اینکه $-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}$ می باشد، و با توجه به فرض (۴۶)، می توان نشان داد که

$$v_t = \kappa u^* y \quad (50)$$

از طرفی

³³ Local equilibrium

$$p^{(k)} = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} = u^{*2} \frac{u^*}{\kappa y} = \frac{u^{*3}}{\kappa y} \quad (51)$$

با استفاده از فرض (48) می توان اینطور استنتاج نمود که

$$\varepsilon \times v_t = \frac{\kappa u^{*4} y}{\kappa y} = u^{*4} \Rightarrow v_t = \frac{u^{*4}}{\varepsilon} = \frac{(-\overline{u'v'})^2}{\varepsilon} \quad (52)$$

در داخل لایه لگاریتمی فرض می شود که پارامتر ساختاری $\frac{\overline{u'v'}}{\kappa}$ ثابت می باشد که این فرض با فرض تنش ثابت همخوانی دارد

$$-\frac{\overline{u'v'}}{\kappa} = \text{Cons.} \quad (53-3)$$

با توجه به اینکه $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ می باشد، و با نیز با توجه به رابطه (52) می توان اینطور استنتاج نمود که

$$C_\mu = \left(-\frac{\overline{u'v'}}{\kappa} \right)^2 \Rightarrow -\frac{\overline{u'v'}}{\kappa} = \sqrt{C_\mu} \quad (54)$$

حال می توان با استفاده از نتایج تجربی در ناحیه لگاریتمی، مشاهده نمود که $-\frac{\overline{u'v'}}{\kappa} \approx 0.3$ می باشد. به عبارت دیگر، مقدار به دست آمده $C_\mu = 0.09$ می باشد. از این مقدار (که به صورت نیمه تحلیلی، نیمه تجربی به دست آمده است) در مدل استاندارد k-ε استفاده می شود. با توجه به فرآیند طی شده برای تعیین مقدار C_μ می توان به علت عدم اعتبار مدل استاندارد k-ε در جریانات سه بعدی، جریانات دارای مکش یا دمش از طریق دیواره و جریانات دارای عدد رینولدز پائین پی برد.

با توجه به توصیفات فوق، ضعف مدل استاندارد k-ε از کجا ناشی می شود؟

چندین عامل متنوع دست به دست یکدیگر داده و کارائی مدلی همچون مدل استاندارد k-ε را به مسائل ساده محدود نموده اند.

۱- در فرآیند طی شده برای تعیین مقدار ضریب C_μ که در بالا به تفصیل بیان شد، از آنجا که مبنای محاسبات بر مبنای قانون لگاریتمی قرار داشته است، لذا در خارج از ناحیه قانون لگاریتمی بایستی مجدداً این فرآیند از ابتدا طی شده و مقدار جدید ضریب C_μ تعیین گردد.

۲- قانون لگاریتمی به کار رفته در تعیین مقدار C_μ از پروفیل سرعت تعادلی توابع دیواره برای صفحه تخت استفاده شده است. بنابراین اندازه به دست آمده ($C_\mu = 0.09$) تنها برای این شرایط معتبر است و برای شرایط

۳- دور از نقطه تعادل، مثلاً در نزدیکی نقاط جدایش جریان و یا نقاط اتصال مجدد جریان، و یا در نقاطی که انحراف زیادی از جریان بر روی صفحات تخت وجود دارد، مثلاً در تیزی پله‌های موجود در جریان، دیگر مقدار به دست آمده برای C_{μ} معتبر نبوده و بایستی از پروفیل‌های سرعت غیر تعادلی توابع دیواره اصلاح شده برای چنین جریاناتی استفاده نمود.

۴- از آنجا که قانون لگاریتمی برای محدوده جریان تمام آشفته ارائه شده است، لذا مبنای استفاده شده در به دست آوردن ضرائب نظیر معادله استاندارد $k-\varepsilon$ مبنای جریان آشفته است و لذا مدل استاندارد $k-\varepsilon$ در نزدیک دیواره، که جریان آرام می‌باشد، با ضرائب فعلی خود با مشکلات جدی روبرو است، مگر آنکه از فرمهای اصلاح شده مدل $k-\varepsilon$ که اثرات آرام بودن جریان در نزدیک دیواره در آن مد نظر قرار گرفته است، استفاده شود.

۵- راه حلی که می‌توان برای رفع چنین مشکلی پیشنهاد نمود، استفاده از یک معادله جدید برای تعیین C_{μ} علاوه بر دیگر معادلات می‌باشد، به طوریکه مقدار C_{μ} در هر نقطه در داخل میدان برحسب متغیرهای محلی جریان تعیین گردد. یعنی علاوه بر دو معادله انتقالی برای k و ε می‌توان از یک معادله انتقالی کمکی برای تعیین توزیع C_{μ} درون میدان جریان استفاده نمود، یعنی یک مدل سه معادله‌ای جدید!

۸- ویژگیهای مدل استاندارد $k-\varepsilon$

مدل استاندارد $k-\varepsilon$ وقتی در کنار رابطه Boussinesq Eddy-Viscosity بکار برده می‌شود، برای طیف وسیعی از مسائل نسبتاً مشکل بخوبی کار می‌کند. اما برای مسائلی که شامل غیرایزوتروپهای شدید جریان و نیز اثرات غیرتعادلی هستند، این مدل در نهایت به جواب‌هایی خواهد رسید که تا حدی فوق دیفیوز^{۳۴} است، یعنی مقادیر μ_t که توسط این مدل پیش بینی می‌شود، تا حدی بزرگ خواهند بود.

بعنوان یک نتیجه مهم از این عیب موجود در این مدل، می‌توان گفت که این مدل تمایل به پیش بینی پروفیل‌هایی کشیده تر برای جریان‌های Swirling و نیز ناحیه Recirculating کوتاهتر در جریان‌های جدایش یافته دارد. گاه دیده شده است که این مدل، در پیش بینی هسته‌های جدایشی تشکیل شده بر روی سطوح با انحنای ملایم، نتایج غلطی را دربرداشته است. با شناخته شدن نقاط ضعف و قوت مدل $k-\varepsilon$ بهینه‌سازی‌هایی بر روی این مدل و به منظور بهبود کارایی، این مدل صورت گرفته است. در بخش عمده‌ای از این جریان‌ها، نرخ تولید انرژی جنبشی آشفته‌گی بسیار کمتر از نرخ اضمحلال است.

³⁴ Over diffusive

برخلاف بسیاری از موفقیت‌های مدل استاندارد $k-\varepsilon$ این مدل دارای جوابهای نه چندان قوی در بحث جریان‌های غیر محصور است. برخی دیگر از این گونه نقایص عبارتند از

- مدل‌سازی لایه‌های برشی ضعیف
- مدل‌سازی جریان‌های پیچشی
- جریان‌های با کرنشهای بسیار بزرگ و سریع
- لایه‌های مرزی بسیار منحنی وار و مسیرهای واگرا
- جریان‌های دورانی و چرخشی
- جریان ثانویه در کانالهای طویل مقاطع غیر گرد.
- جریان‌های کاملاً توسعه یافته در کانالهای با مقاطع غیر گرد.

به منظور اصلاح این عیوب، تلاشهای زیادی بر روی اصلاح مدل دو معادله‌ای $k-\varepsilon$ صورت گرفت که به ظهور نسل‌های جدیدی از مدل $k-\varepsilon$ و نیز تولد مدل‌های جدیدتر منجر شد. در ادامه به بررسی یکی از این مدل‌ها خواهیم پرداخت.

۹- مدل قابل درک $k-\varepsilon$ ³⁵

تعداد زیادی از فرم‌های مختلف مدل استاندارد $k-\varepsilon$ وجود دارد که هدف هر یک بهبود تواناییهای این مدل در پیش بینی خواص جریان است. یکی از این مدل‌ها مدل $k-\varepsilon$ قابل درک می‌باشد که دو تغییر اساسی در آن بوجود آمده است که عبارتند از

- یک معادله انتقال جدید برای ε
- یک فرمول جدید برای محاسبه ویسکوزیته توربولانس

علت نامگذاری این مدل بدین نام بخاطر این است که این مدل بعضی از قیود ریاضی که با فیزیک جریان مغشوش سازگار است را ارضا می‌کند که دیگر مدل‌ها این قابلیت را ندارد که در زیر ملاحظات ریاضی مربوط به این مدل و علت نامگذاری این مدل ذکر شده است.

برای اینکه ریاضیات زمینه این مدل را درک کنیم و علت نامگذاری آن را بدانیم کافیست که از معادله بوزینسک

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

³⁵ Realizable $k-\varepsilon$ Model

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} \quad (55)$$

با استفاده از تعریف $\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$ خواهیم داشت.

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3}k - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (56)$$

همانطور که می‌بینیم در سمت چپ معادله (56) همیشه یک کمیت مثبت است ($\overline{u'^2}$). ولی با توجه به آنچه در سمت راست معادله می‌بینیم می‌تواند در هنگامی که کرنش بزرگ باشد مقادیر منفی بخود بگیرد. یعنی هنگامی که

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x} \geq \frac{1}{3C_\mu} = 3.7 \quad (57)$$

باشد. آنگاه تنش رینولدز نرمال که همیشه باید مثبت باشد یک کمیت منفی خواهد شد که اساساً با ریاضیات توربولانس همخوانی ندارد. همچنین در این مواقع نامساوی شوآرتس³⁶ $(\overline{u_\alpha u_\beta})^2 \leq \overline{u_\alpha^2} \overline{u_\beta^2}$ نیز دیگر برقرار نخواهد شد. لذا یک راه حل برای اینکه در این مواقع یک جواب قابل درک (realizable) داشته باشیم استفاده از C_μ متغییر است. که این کار در مدل $k-\varepsilon$ قابل درک گنجانده شده است. که C_μ بصورت تابعی از خواص میدان توربولانس یعنی k ، ε و تغییر شکل میدان جریان متوسط انجام شده است. این مدل دارای قابلیت‌های فراوانی نسبت به مدل $k-\varepsilon$ استاندارد است که از آن جمله می‌توان به بهبود عملکرد این مدل در

- جریانی که دچار جدایش هستند.
- جریاناتی که دچار چرخش هستند.
- جریانهایی که تحت تاثیر گرادپاله‌های فشار معکوس هستند
- جریانهایی که برای جریانه‌های دوباره چرخشی هستند

اشاره کرد.

۹-۱- معادلات انتقال در مدل $k-\varepsilon$ قابل درک

این مدل دو معادله انتقال (58) را برای k و ε حل می‌کند.

³⁶ Schwarz inequality

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon + \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} - C_{1\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} G_b C_{3\varepsilon} \quad (58)$$

$$C_1 = \max \left\{ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right\} \quad \eta = S \frac{k}{\varepsilon} \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$$

که در معادلات (58) G_k و G_b مانند مدل $k-\varepsilon$ استاندارد تعریف می‌شود. و ضرایب مدل در (59) آمده است.

$$\begin{aligned} C_{1\varepsilon} &= 1.44 \\ C_2 &= 0.9 \\ \sigma_k &= 1 \\ \sigma_\varepsilon &= 1.2 \end{aligned} \quad (59)$$

باید توجه داشت که فرم کلی معادله انتقال k تغییر نکرده است ولی ضرایب آن با مدل $k-\varepsilon$ استاندارد متفاوت می‌باشد.

نکته‌ی قابل توجه دیگر ترم استهلاک (سومین ترم در سمت راست) می‌باشد که هیچگونه نقطه منفردی ندارد. یعنی مخرج عبارت هیچگاه صفر نخواهد شد حتی اگر مقدار k یک کمیت بسیار جزئی و کوچک باشد. در حالیکه در مدل استاندارد بعثت وجود k در مخرج به تنهایی، نقاط منفرد می‌تواند وجود داشته باشد. مدل $realizable-k-\varepsilon$ برای تعداد بسیار زیادی در مسائل حل شده است و نسبت به مدل استاندارد $k-\varepsilon$ خصوصاً در مورد جریانهای جدا شونده نتایج بسیار بهتری را نشان داده است.

۹-۲- محاسبه ویسکوزیته توربولانس در مدل $realizable-k-\varepsilon$

محاسبه ویسکوزیته توربولانس μ_t در مدل $realizable-k-\varepsilon$ مانند مدل $k-\varepsilon$ استاندارد است به این تفاوت که C_μ یک عدد ثابت نخواهد بود بلکه تابعی از k ، ε و تانسور نرخ کرنش و سرعت زاویه‌ای می‌باشد که در (60) ذکر شده است.



$$\begin{aligned}\mu_t &= C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \\ C_\mu &= \frac{1}{A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon}} \\ U^* &= \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij}} \\ \tilde{\Omega}_{ij} &= \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk}\omega_k \\ \Omega_{ij} &= \overline{\Omega_{ij}} - \varepsilon_{ijk}\omega_k\end{aligned}\tag{60}$$

که $\overline{\Omega_{ij}}$ تانسور نرخ چرخش متوسط و ω_k سرعت زاویه‌ای می‌باشد. A_0 و A_s به مانند (61) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}A_0 &= 4.04 \\ A_s &= \sqrt{6} \cos \phi \\ \phi &= \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6}W) \\ W &= \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3} \\ \tilde{S} &= \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \\ S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)\end{aligned}\tag{61}$$

شرایط مرزی

معادلات مدل k و ε بیضوی هستند. رفتار آنها شبیه سایر معادلات جریان بیضوی است، که احتیاج به شرایط مرزی زیر دارد.

ورودی: توزیع k و ε باید معلوم باشد

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ و } \frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

خروجی یا متفاوت محوری:

روش به عدد رینولدز بستگی دارد

دیواره‌های جامد:

در محاسبات طراحی ممکن است، اطلاعات مربوط به جزئیات شرایط مرزی جهت مدل کردن در دسترس نباشد. استفاده کنندگان صنعتی CFD بندرت اندازه‌های k و ε را در اختیار دارند. پیشرفت در این زمینه، از طریق وارد کردن مقدار k و ε از مراجع انجام می‌شود و در نتیجه حساسیت نتایج بدلیل این توزیع ورودی از بین می‌رود. اگر هیچ اطلاعاتی در دست نباشد، تقریب‌های خام برای توزیع ورودی مربوط به k و ε جریان‌های داخلی را می‌توان از شدت آشفستگی و یک مشخصه طول معادل بدست آورد.

۱۰- ارزیابی عملکرد

مدل k - ε مدل آشفستگی معتبر و با کاربرد وسیع می‌باشد. این مدل در محاسبه مجموعه گسترده‌ای از جریان‌های لایه برشی نازک و چرخش مجدد، بدون اینک احتیاجی به تنظیم مورد به مورد ثابت‌های مدل باشد، موفقیت چشمگیری داشته است. عملکردهای مدل، بویژه برای جریان‌هایی که در آن تنش‌های برشی رینولدز اهمیت بیشتری دارد، خوب بوده است. این موضوع شامل محدوده وسیعی از جریان‌ها با کاربردهای مهندسی صنعتی هم می‌شود که این مسئله عمومیت آن را نشان می‌دهد.

با وجود موفقیت‌های زیاد، مدل استاندارد k - ε فقط برای جریان‌های غیرمحصور خوب عمل می‌کند. بر اساس گزارشها این مدل برای لایه‌های برشی ضعیف (دور از دنباله و لایه‌های مخلوط) عملکرد خوبی نداشته و برای بخش وسیعی از این جریان‌ها نرخ تولید انرژی جنبشی آشفته خیلی کمتر از نرخ اضمحلال است و برای غلبه بر مشکلات فقط با استفاده از تعدیل ثابت‌های مدل، یعنی C ، صورت می‌گیرد.

این مدل همچنین مشکلاتی با جریان‌های چرخشی و جریان‌های همراه با کرنش‌های بزرگ، سریع و اضافی (مثلاً لایه‌های مرزی قوس دار و یا گذرگاههای واگرا) دارد، چون این مدل شامل اثرات خطوط جریان خمیده در آشفستگی نیست. جریان‌های ثانویه در کانال‌های غیر دایره‌ای طولانی که با تنش‌های رینولدز عمودی غیر منظم به حرکت درمی‌آید را نیز نمی‌توان بدلیل عملکرد ضعیف تنش‌های عمودی، با مدل k - ε پیش بینی کرد. بالاخره این مدل نسبت به نیروی بدنه بدلیل چرخش چهارچوب مرجع حساس است.

۱۱- مدل‌های معادله تنش رینولدز

پیچیده‌ترین مدل کلاسیک آشفتگی مدل معادله تنش رینولدز (RSM)^{۳۷} است که مدل مرتبه‌دوم^{۳۸} نیز نامیده می‌شود. موانع زیادی در مدل k-ε، هنگامیکه پیش‌بینی جریان‌های با میدان کرنش پیچیده یا نیروهای حجمی چشمگیری مورد نظر است، وجود دارد. تحت این شرایط تنش‌های منفرد رینولدز به سختی توسط رابطه بوزینسک بیان می‌شوند حتی اگر انرژی جنبشی آشفته با دقت مناسبی محاسبه شود. از طرف دیگر، معادله انتقال تنش رینولدز دقیق را می‌توان برای اثرات جهت‌ی میدان تنش رینولدز استفاده کرد.

پیش از این در مدل‌های آشفتگی دیده شد که با استفاده از رابطه اساسی Eddy-Viscosity می‌توان مولفه‌های تنش رینولدز را به گرادیانهای سرعت میدان جریان متوسط مرتبط نمود. در مدل RSM برای محاسبه هر یک از ترمهای تنش رینولدز از یک معادله انتقالی کمک گرفته می‌شود. چنانچه به تانسور تنش رینولدز برای یک مسأله سه بعدی توجه شود، تعداد تنشهای رینولدز مستقلی که بایستی برای یک مسأله سه بعدی حل شود، ۶ عدد می‌باشد، بنابراین برای تعیین دقیق توزیع تنشهای رینولدز در یک مسأله سه بعدی به ۶ معادله انتقالی نیاز می‌باشد. در حالیکه در یک مسأله سه بعدی، چنانچه بخواهیم از مدلی مانند مدل دو معادله‌ای k-ε استفاده نمائیم، در اینصورت از بین ۶ تنش رینولدز مجهول (۶۲) مورد نظر تنها می‌توان مطمئن بود که تنها دو تنش به طور دقیق محاسبه و مابقی به صورت غیر دقیق محاسبه شده‌اند.

$$R_{ij} = -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \overline{u'_i u'_j} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} \quad (62)$$

دلایل استفاده از مدل RSM

مدل‌های Eddy-Viscosity در جریانات لایه مرزی متصله^{۳۹}، تا جائیکه تنها یک مولفه از تانسور تنش رینولدز از اهمیت برخوردار است، خوب جواب می‌دهند. در چنین جریاناتی، مدل Eddy-Viscosity معیاری از مولفه غالب تنش رینولدز (در این نوع جریانات اغلب $\overline{u'^2}$) می‌باشد. اما چنانچه جریان از این حالت بسیار ساده فرضی کمی انحراف پیدا نماید و یا به اصطلاح اندکی پیچیده‌تر گردد، دیگر فرض استفاده Eddy-Viscosity (که تنشهای رینولدز تنها به گرادیانهای

³⁷ Reynolds stress model

³⁸ Second order model

³⁹ Attached boundary layer flows

سرعت میدان جریان متوسط مربوط است) صادق نمی‌باشد و لذا دیگر نمی‌توان به اعتبار مدل‌های Eddy-Viscosity دل‌بست.

توسعه مدل‌های دیفرانسیلی RSM ابتدا از سال ۱۹۶۸ و با سخنرانی دونالدسون^{۴۰} در دانشگاه استنفورد و تاکید وی مبنی بر اهمیت مدل‌سازی تنش‌های رینولدز آغاز شد. این مدل تحت عناوین دیگری همچون Second Order Closure و یا Second Moment Closure و یا Second Order Modeling شناخته می‌شوند. از آن زمان به بعد بود که اندک اندک مدل‌های Eddy-Viscosity به کنار گذاشته شده و در عوض مولفه‌های مجهول تنش رینولدز مستقیماً از حل معادلات انتقال دیفرانسیلی (که در آنها تنش‌های رینولدز متغیرهای وابسته می‌باشند) به دست آمدند. همانطور که در (۶۳) نشان داده شد، تانسور تنش رینولدز یک تانسور متقارن^{۴۱} می‌باشد و این بدان معناست که در حالت دو بعدی تنها به حل ۳ معادله انتقال و در حالت سه بعدی تنها به حل ۶ معادله انتقال برای تعیین توزیع تنش رینولدز درون میدان جریان نیاز می‌باشد.

$$R_{ij} = -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \overline{u'_i u'_j} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} \quad R_{ij} = -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \overline{u'_i u'_j} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} \end{pmatrix} \quad (63)$$

تانسور تنش رینولدز برای یک جریان سه بعدی

تانسور تنش رینولدز برای یک جریان دو بعدی

البته هنوز هم برای تعیین طول مقیاس هم در حالت دو بعدی و هم در حالت سه بعدی، علاوه بر معادلات مذکور نیاز به حل یک معادله اضافی دیگر نیز می‌باشد. لذا مدل RSM از مدل‌های رایج Eddy-Viscosity پیچیده‌تر می‌باشد، لیکن با وجود پیچیدگی این مدل، این مدل هنوز جالب توجه می‌باشد چرا که توصیف به مراتب دقیقتری از آشفتگی را ارائه داده و بر روی طیف بسیار وسیع و متنوعی از جریانات مهندسی معتبر می‌باشند. این مدل می‌تواند بسیاری از اثرات پیچیده جریانات در طبیعت و مهندسی را در بر گیرند، از آن جمله می‌توان به جریاناتی نظیر جریانات دارای خطوط جریانی منحنی و یا جریانات دارای چرخش^{۴۲} و دوران^{۴۳} و یا جریانات جابجائی آزاد^{۴۴} یا جریانات بویانت^{۴۵} اشاره نمود که این مدل در مدل‌سازی آنها از قابلیت خوبی برخوردار است.

⁴⁰ Donaldson

⁴¹ Symetric

⁴² Swirl flows

⁴³ Rotational flows

⁴⁴ Free convection flows

⁴⁵ Buoyant flows

نکته‌ای که در اینجا بایستی بدان اشاره نمود آن است که اغلب جریانات آشفته به شدت بد شکل^{۴۳} و غیر ایزوتروپ^{۴۴} می‌باشند، یعنی علاوه بر آنکه مقادیر تنشهای اصلی $\overline{u'^2}$ ، $\overline{v'^2}$ ، $\overline{w'w'}$ مخالف صفر می‌باشند، مقادیر تک‌تک عناصر این تنشهای اصلی آشفته با یکدیگر تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارند. به عنوان نمونه نشان داده می‌شود که در ناحیه لگاریتمی جریان آشفته دو بعدی بر روی یک صفحه تخت (به عنوان ساده‌ترین جریان آشفته قابل تصور) مقادیر تنشهای اصلی آشفته به صورت ۶۴ می‌باشند.

$$\overline{u'^2} = 1k, \overline{v'^2} = 0.4k, \overline{w'w'} = 0.6k \quad (64)$$

این اختلاف شدید بین اندازه تنشهای رینولدز نشان می‌دهد که حتی در یک جریان آشفته کلاسیک بسیار ساده (یعنی جریان لایه مرزی آشفته بر روی یک دیواره تخت)، استفاده از مدل‌های Eddy-Viscosity مدل‌های دو معادله‌ای مربوطه مانند $k-\epsilon$ استاندارد و $k-\omega$ و غیره، عملاً هیچ‌گونه دقت قابل توجهی را (بالاخص در جریانات سه بعدی) به دنبال نخواهد داشت. بنابراین استفاده از مدل‌های Eddy-Viscosity در جاهائیکه با جریانات به شدت غیر ایزوتروپیک^{۴۶} سروکار داریم، مانند جریانات به شدت چرخشی^{۴۷} و جریانات ثانویه ناشی از تنش^{۴۸} اصلاً توصیه نمی‌شود.

۱۲- به دست آوردن معادله انتقالی صریح برای تانسور تنش رینولدز

معادله انتقالی صریح برای تانسور تنش رینولدز با کمی محاسبات حجیم و در عین حال ساده ریاضی به دست می‌آید. بدین منظور فرض کنید که با سیالاتی با چگالی ثابت سر و کار داریم (همانطور که می‌دانیم، در جریانات دارای سرعت‌های زیر محدوده‌های پیرسونیک، اثر پذیری آشفتگی و معادلات مربوط به آن از تراکم پذیری جریان بسیار کم می‌باشد) B_1 بیانگر نیروهای حجمی (بویانسی و یا کوریولیس) می‌باشد. مجدداً از نمادهای prime و overbar برای نمایش مولفه نوسانی و متوسط کمیت‌های آشفته استفاده می‌نمائیم یعنی

$$u = \overline{u} + u' \quad (65)$$

۱۲-۱- معادله پیوستگی

معادله لحظه‌ای

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (66)$$

⁴⁶ Anisotropic

⁴⁷ Highly swirling flows

⁴⁸ Stress driven secondary flows



معادله متوسط

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (67)$$

تفریق دو معادله ۶۶ و ۶۷ از یکدیگر

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (68)$$

ملاحظه می شود هر دو کمیت متوسط و نوسانی شرایط تراکم نا پذیری را ارضاء می نمایند.

۱۲-۲- معادله ممنتوم

معادله لحظه ای

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + B_i \quad (69)$$

معادله متوسط

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{B}_i \quad (70)$$

مرتب سازی شده معادله ممنتوم

$$\frac{D \bar{u}_i}{Dt} + = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \right] + \bar{B}_i \quad (71)$$

اپراتور $\frac{D}{Dt}$ بیانگر مشتق مادی می باشد.

تفریق دو معادله فوق از یکدیگر

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{B}_i \quad (a)$$

با تعویض اندیس ا باز به صورت مشابه خواهیم داشت.

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} - \overline{u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{B}_j \quad (b)$$

حال چنانچه عبارت $\overline{u'_j a + u'_i b}$ را تشکیل دهیم، معادله انتقالی برای تنشهای رینولدز در مدل RSM به دست می آید.



$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \left[\overline{(u'_i u'_j)} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} + \overline{(u'_j u'_k)} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} = \quad (۷۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\frac{p'}{\rho} \overline{(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik})} + \nu \frac{\partial \overline{(u'_i u'_j)}}{\partial x_k} \right] + \frac{p'}{\rho} \left[\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x'_j} - \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x'_i} \right] + \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x'_j} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x'_i} + \overline{(u'_i B'_j + u'_j B'_i)}$$

به صورت لغوی یعنی

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \text{ انتقال توسط جابجایی} + R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \text{ نرخ تغییر}$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \text{ نرخ تولید}$$

$$\text{انتقال } R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \text{ توسط نفوذ}$$

$$- R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \text{ نرخ اضمحلال}$$

$$\text{انتقال } R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \text{ بواسطه اثرات متقابل فشار کرنش آشفتگی}$$

معادله ۷۲ شش معادله دیفرانسیل جزئی را نشان می‌دهد یعنی برای انتقال هر کدام از شش تنش رینولدز مستقل یک

$$\text{معادله لازم است. } (\overline{u_1^2}, \overline{u_2^2}, \overline{u_3^2}, \overline{u_1 u_2} = \overline{u_2 u_1}, \overline{u_1 u_3} = \overline{u_3 u_1}, \overline{u_2 u_3} = \overline{u_3 u_2})$$

۱۲-۳- معادلات انتقال تنش رینولدز

$$\frac{D}{Dt} (\overline{u'_i u'_j}) = \frac{\partial d_{ijk}}{\partial x_i} + P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (۷۳)$$

که در آن

$$\frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}$$

جابجایی آشفتگی به واسطه جریان متوسط^{۴۹}

$$P_{ij} = - \left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right]$$

تولید آشفتگی به واسطه کرنش متوسط^{۵۰}

$$\overline{u'_i B'_j + u'_j B'_i}$$

تولید آشفتگی به واسطه نیروی حجمی^{۵۱}

$$\Phi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left[\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x'_j} - \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x'_i} \right] = \frac{2p'}{\rho} S'_{ij}$$

همبستگی بین فشار و کرنش آشفته^{۵۲}

$$\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x'_j} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x'_i}$$

اضمحلال آشفتگی^{۵۳}

49 Advection (By Mean Flow)

50 Production (By Mean Strain)

51 Production (By Body Force)

52 Pressure-Strain Correlation

53 Dissipation

$$d_{ijk} = \underbrace{-\frac{p'}{\rho}(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) - u'_i u'_j u'_k}_{\text{turbulent diffusion}} + \underbrace{\nu \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_k}}_{\text{molecular diffusion}}$$

دیفیوژن یا پخش آشفتگی^{۵۴}

اگر رابطه ۷۳ با معادله دقیق انتقال برای انرژی جنبشی آشفته ۳۵ مقایسه شود، ترم جدید فیزیکی در معادلات تنش رینولدز ظاهر می‌شود عبارت ارتباط کرنش فشار Φ_{ij} است.

۴-۱۲- معادله انتقال انرژی جنبشی آشفته

از آنجا که رابطه نظیر انرژی جنبشی آشفته به صورت $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ می‌باشد، با نگاهی به رابطه ۷۳ میتوان مشاهده نمود که تنها با عوض نمودن اندیس k و i در نهایت با تقسیم نمودن معادلات به دو می‌توان به معادله انتقالی انرژی جنبشی آشفته دست یافت.

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial d_i^{(k)}}{\partial x_i} + P^{(k)} + G^{(k)} - \varepsilon \quad (۷۴)$$

که در آن:

$$P^{(k)} = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \quad \text{تولید انرژی جنبشی آشفته به واسطه کرنش متوسط} \quad ۵۵$$

$$G^{(k)} = \overline{u'_i B'_i} \quad \text{تولید انرژی جنبشی آشفته به واسطه نیروی حجمی} \quad ۵۶$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad \text{اضمحلال انرژی جنبشی آشفته} \quad ۵۷$$

$$d_i^{(k)} = \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\overline{p' u'_i}}{\rho} - \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_j u'_i} \quad \text{دیفیوژن یا پخش انرژی جنبشی آشفته}$$

⁵⁴ Diffusion

⁵⁵ Production (By Mean Strain)

⁵⁶ Production (By Body Force)

⁵⁷ Dissipation

۱۳- توضیح جامعتر راجع به هر یک از ترمهای موجود در معادله انتقال تنش رینولدز

۱۳-۱- جابجائی آشفتگی به واسطه جریان متوسط^{۵۸}

$$\overline{Du'_i u'_j} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \quad (۷۵)$$

رابطه ۷۵ جابجائی^{۵۹} تنش رینولدز را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر این ترم بیانگر نرخ تغییر $\overline{u'_i u'_j}$ در طول خط جریان^{۶۰} می‌باشد. در جریانات دائمی، این ترم بیانگر نرخ است که تحت آن، تنشهای رینولدز توسط میدان جریان متوسط جابجا می‌گردد.

۱۳-۲- تولید آشفتگی به واسطه کرنش متوسط

$$P_{ij} = - \left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right] \quad (۷۶)$$

رابطه (۷۶) بیانگر تولید آشفتگی می‌باشد، به عبارت دیگر این ترم بیانگر نرخ تولید $\overline{u'_i u'_j}$ توسط گرادیان سرعت متوسط و یا تنش برشی است (گرادیان سرعت متوسط، به واسطه برهم کنش با تنشهای رینولدز، یکی از مهمترین عوامل به وجود آورنده آشفتگی در میدان جریان می‌باشد). با توجه به اهمیت و نقش برجسته گرادیان سرعت متوسط در به وجود آمدن آشفتگی در میدان جریان، هر چه گرادیانهای موجود در میدان جریان متوسط بهتر و دقیقتر مدل شوند، آشفتگی ایجاد شده و میدان جریان آشفته مربوطه دقیقتر مدل می‌شوند. از همینرو است که مدلسازی اثرات دیواره و بالاخص گرادیانهای شدید نزدیک دیواره، مدلسازی گرادیانهای شدید موجود در هسته جریان لایه‌های اختلاطی^{۶۱} مدلسازی گرادیانهای شدید موجود در هسته ویک و یا جریان جت بسیار اهمیت داشته و می‌تواند بر روی صحت و سقم نتایج آشفتگی تاثیر قابل توجهی بگذارد. ترم تولید آشفتگی، ترمی قابل توجه و در عین حال ترمی صریح^{۶۲} می‌باشد و لذا نیازی به مدلسازی ندارد. یکی از دلایل موفقیت و قدرتمندی مدل RSM وجود این ترم در داخل معادله انتقال تانسور تنشهای رینولدز می‌باشد

⁵⁸ Advection (By Mean Flow)

⁵⁹ Convection

⁶⁰ Stream line

⁶¹ Mixing layer

⁶² Exact

۱۳-۳- دیفیوژن یا پخش آشفته

$$d_{ijk} = \underbrace{-\frac{p'}{\rho}(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) - \overline{u_i u_j u_k}}_{\text{turbulent diffusion}} + \underbrace{v \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k}}_{\text{molecular diffusion}} \quad (77)$$

این ترم بیان کننده نرخ انتقال فضائی $\overline{u'_i u'_j}$ به واسطه فعالیت نوسانات آشفته^{۶۳}، نوسانات میدان فشار^{۶۴} و دیفیوژن مولکولی^{۶۵} است.

چنانچه اندکی به ترم $\overline{u_i u_j u_k}$ دقت شود، می توان این ترم را به صورت اندرکنش شکلی از تنش رینولدز $\overline{u'_i u'_j}$ با مولفه نوسانی سرعت u'_k نظر گرفت. به عبارت دیگر، ترم $\overline{u_i u_j u_k}$ بیانگر نوعی جابجائی و ادواکسیون^{۶۶} تنشهای رینولدز با استفاده از اغتشاشات موجود در میدان سرعت آشفته می باشد، لیکن از آنجا که ادواکسیون صورت گرفته در مقیاس نوسانات آشفته است، این امر باعث شده است که فرآیند رخ داده را به صورت نوعی دیفیوژن تفسیر نماییم.

با نگاهی به ترم $v \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k}$ می توان اینطور برداشت نمود که به واسطه گرادیان موجود در توزیع تنش رینولدز، به کمک ویسکوزیته مولکولی، نوعی دیفیوژن به وجود می آید. همواره به یاد داشته باشیم که هر نوع گرادیان در توزیع یک کمیت فیزیکی درون میدان جریان می تواند به عنوان پتانسیل و عامل حرکت برای آن کمیت فیزیکی (چه در مقیاس کوچک به عنوان دیفیوژن و چه در مقیاس بزرگ به عنوان ادواکسیون) گردد.

۱۳-۴- همبستگی بین فشار و کرنش آشفته

$$\Phi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right] = \frac{2p'}{\rho} S'_{ij} \quad (78)$$

وظیفه این ترم که همبستگی بین فشار و کرنش آشفته نیز خوانده می شود، توزیع مجدد^{۶۷} مقدار انرژی جنبشی آشفته موجود در میان مولفه های نوسانی سرعت با استفاده از نوسانات میدان فشار می باشد. به واسطه توزیع انرژی به وجود آمده در هر یک از مولفه های تنش رینولدز در میان سایر مولفه ها، وظیفه دیگر این ترم، انتقال آشفته از یک جریان

⁶³ Turbulent fluctuation

⁶⁴ Pressure fluctuation

⁶⁵ Molecular diffusion

⁶⁶ Advection

⁶⁷ Redistribution

غیرایزوتروپ^{۶۸} به سمت جریانی ایزوتروپ^{۶۹} می‌باشد به عبارت دیگر این ترم، انرژی ترمهای بزرگ $\overline{u'u'}$ را در اختیار ترمهای کوچک $\overline{u'u'}$ قرار می‌دهد.

جریانی را در نظر بگیرید که دارای میدان جریانی تنها در راستای x می‌باشد (یعنی از جریان در جهات دیگر صرف نظر می‌گردد) در اینصورت در داخل لایه برشی به وجود آمده بر روی دیوار، از آنجا که $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ می‌باشد، بنابراین تنها $\overline{u'^2}$ تولید می‌شود، این بدان معناست که این مولفه نسبت به سایر مولفه‌های تنش رینولدز بزرگتر می‌باشد. ترم توزیع مجدد بخشی از انرژی تنش $\overline{u'^2}$ را در اختیار $\overline{w'^2}$ و $\overline{v'^2}$ قرار می‌دهد. در اینجا ذکر سه نکته لازم به نظر می‌رسد.

۱- در جریان نمونه فوق که دارای میدان جریانی تنها در راستای x بود، مشاهده شد که $\overline{u'^2} \geq \overline{w'^2} \geq \overline{v'^2}$ می‌باشد. این امر یکی از دلایل به وجود آمدن غیرایزوتروپی در جریانات آشفته محسوب می‌شود. دلایل متعدد دیگری وجود دارند که باعث غیرایزوتروپی جریانات آشفته می‌شود، از جمله این دلایل می‌توان به وجود گرادیانهای سرعت متوسط با اندازه‌های بسیار مختلف در جهات مختلف به واسطه وجود نیروهای شناوری و بویانسی، لایه‌های اختلاطی، جریانات جت و گردابه، وجود دیواره‌های صلب، جریانات دمشی و مکشی از طریق دیواره، احتراق، جریانات ثانویه، جریانات دو فاز، کاویتاسیون و جدا شدن جابها از دیواره و اثرات متقابل بر روی جریان حول جاب و غیره اشاره نمود همین عوامل باعث می‌شوند که $\overline{u'^2} \neq \overline{w'^2} \neq \overline{v'^2}$ یعنی غیرایزوتروپی جریان آشفته.

۲- نقش اضمحلال ویسکوز^{۷۰} اضمحلال انرژی جنبشی آشفتگی و کاهش مقدار آن به سمت صفر می‌باشد بر طبق تعریف انرژی جنبشی آشفتگی، از آنجا که $k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ می‌باشد، وقتی $k \rightarrow 0$ می‌رود که هر یک از مولفه‌های عمودی تنش آشفتگی به سمت صفر بروند، یعنی آنکه

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} &\rightarrow 0 \\ \overline{v'^2} &\rightarrow 0 \\ \overline{w'^2} &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{۷۹}$$

این امر باعث حذف تدریجی غیرایزوتروپی جریان می‌گردد.

⁶⁸ Anisotropic

⁶⁹ Isotropic

⁷⁰ Viscous dissipation

۳- فشار همواره می‌تواند به عنوان چشمه و یا چاه برای ممنتوم عمل نماید. وجود فشار نوسانی می‌تواند همانند یک قلب تپنده درون میدان جریان آشفته باعث القاء ممنتوم و یا حرکت دادن یک کمیت فیزیکی نظیر غلظت یا آنتالپی درون میدان جریان گردد.

۱۳-۵- اضمحلال آشفتگی

$$\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \quad (۸۰)$$

این ترم، بیانگر اضمحلال لزج (ویسکوز) می‌باشد. به عبارت دیگر این ترم بیانگر نرخ اضمحلال $\overline{u'_i u'_j}$ به واسطه اثر ویسکوزیته ملکولی می‌باشد. دقت کنیم که در اینجا صحبتی از ویسکوزیته آشفته نمی‌شود، بلکه تمام نقش اضمحلال بر عهده ویسکوزیته ملکولی می‌باشد. به طور خلاصه می‌توان اینطور بیان نمود که اضمحلال لزج در مقیاسهای کوچک (نواحی ای که گرادیان سرعت بزرگ بوده و ادی‌ها ایزوتروپ و جهتدار می‌باشند) رخ می‌دهد.

۱۴- مدلسازی تانسور تنش رینولدز

به غیر از دو ترم تولید و جابجایی در معادله انتقال تنش رینولدز، تمام ترمهای دیگر باعث معرفی یک سری همبسته^{۷۱} جدید شده‌اند که بایستی بر حسب کمیت‌های معلوم و مجهول تعیین گردند تا دستگاه معادلات بسته گردد.

۱- ترم دیفیوژن

جمع سه ترم مختلف است که اصطلاحاً دیفیوژن ویسکوز، دیفیوژن فشار و دیفیوژن آشفتگی نامیده می‌شوند. در اعداد رینولدز آشفته بالا، سهم دیفیوژن ویسکوز در انتقال $\overline{u'_i u'_j}$ کوچک می‌باشد. عدد رینولدز آشفته را به صورت رابطه ۸۱ تعریف می‌نمائیم.

$$\begin{aligned} \text{Re}_t &= \frac{u_t l_t}{\nu} \\ u_t &\sim k^{1/2} \\ l_t &\sim k^{3/2} \end{aligned} \quad (۸۱)$$

لذا در اعداد رینولدز بالا و کاربردهائی از این دست، می‌توان از ترم دیفیوژن ویسکوز چشم پوشی نمود اگرچه وارد کردن آن در مدلسازی‌های عددی مشکلی را به وجود نمی‌آورد.

⁷¹ Correlation

اطلاعات کمی راجع به دیفیوژن فشاری وجود دارد، چرا که اندازه‌گیری مستقیم این کمیت تقریباً غیر ممکن است. تخمین اندازه دیفیوژن فشاری تنها با استفاده از روشهای غیر مستقیم امکان‌پذیر است، یعنی با اندازه‌گیری دیگر ترما و ارتباط دادن اندازه دیگر ترما به اندازه ترم دیفیوژن فشاری. اما در این بین بایستی به توجه داشت که خطای اندازه‌گیری دیگر ترما بر روی اندازه نهائی دیفیوژن فشاری می‌تواند تاثیر قابل ملاحظه‌ای داشته باشد. اما آنچه که آزمایشات مختلف نشان داده‌اند این است که در اغلب جریانات مهندسی، این ترم نسبتاً غیر مهم بوده و لذا گاهی می‌توان از آن چشم‌پوشی نمود.

هارلو و دالی^{۷۲} اولین نفراتی بودند که ترم دیفیوژن آشفته را با استفاده از نظریه^{۷۳} انتقال گرادیان مدل نمودند. نظریه انتقال گرادیان اظهار می‌دارد که دیفیوژن یک کمیت فیزیکی متناسب با گرادیان فضائی^{۷۴} همان کمیت است (رابطه ۸۲). در رابطه ۸۲ C_s یک ضریب تجربی بوده و مقدار آن معمولاً برابر ۰/۲۲ است، این مقدار با استفاده از بهینه‌سازی کامپیوتری بهینه شده است. نسبت $\frac{k}{\varepsilon}$ بیانگر زمان مقیاس مشخصه‌ادی‌های حامل انرژی می‌باشد. مدل‌های دیگری برای دیفیوژن آشفته نیز وجود دارند اما همگی در مقایسه با مدل هارلو و دالی پیچیده‌تر بوده و لزوماً کارائی بهتری در مقایسه با این مدل ندارند.

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} u'_k u'_l \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_l} \quad (82)$$

۲- ترم توزیع مجدد

مدلی که برای مدلسازی ترم توزیع مجدد در دانشگاه UMIST برای جریانات با عدد رینولدز ارائه شده است، بر مبنای کارهای لاندر و همکاران و نیز کارهای گیسون-لاندر قرار داشته و دارای شکلی به صورت ۸۳ می‌باشد.

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{(1)} + \Phi_{ij}^{(2)} + \Phi_{ij}^{(w)} \quad (83)$$

که در آن

⁷² Harlow, Daly

⁷³ Gradient transport hypothesis

⁷⁴ Spatial gradient

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}^{(1)} &= -C_1 \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \\ \Phi_{ij}^{(2)} &= -C_2 \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \\ \Phi_{ij}^{(w)} &= \left(\tilde{\Phi}_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{ik} n_j n_k - \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_{jk} n_i n_k \right) \Psi \\ \tilde{\Phi}_{ij} &= C_1^{(w)} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_i u'_j} + C_2^{(w)} \Phi_{ij}^{(2)} \\ \Psi &= \frac{k^{3/2}}{C_3 \gamma_n}\end{aligned}\tag{۵۴}$$

مقدار استاندارد ضرائب عبارتند از

$$C_1 = 1.8 \quad C_2 = 0.6 \quad C_1^{(w)} = 0.5 \quad C_2^{(w)} = 0.3 \quad C_3 = 2.5\tag{۵۸}$$

γ_n فاصله از دیواره می باشد. نقش ترمهای $\Phi_{ij}^{(1)}$ و $\Phi_{ij}^{(2)}$ بازگرداندن ایزوتروپی و یا حذف غیرایزوتروپی جریان با توزیع انرژی جنبشی تنشهای بزرگ رینولدز در میان تنشهای با اندازه کوچکتر می باشد.

به ترم $\Phi_{ij}^{(1)}$ اصطلاحاً بازگشت به ایزوتروپی^{۷۵} و به ترم $\Phi_{ij}^{(2)}$ نیز اصطلاحاً ایزوتروپ سازی تولید^{۷۶} گفته می شود. در نزدیکی دیواره، به واسطه نزدیک شدن به فیزیک جریان، تمایل به ایزوتروپی بایستی تشدید^{۷۷} گردد و از همین رو ترم کمکی $\Phi_{ij}^{(w)}$ به عنوان "تصحیح دیواره"^{۷۸} به این ترمها اضافه می گردد. ترم $\Phi_{ij}^{(w)}$ را اصطلاحاً ترم "انعکاس دیواره"^{۷۹} می نامند. ترم انعکاس دیواره برای اطمینان یافتن از سطوح صحیح غیرایزوتروپی و حفظ آن در سطوح جامد جریان است.

۳- ترم اضمحلال

این ترم بر مبنای این حقیقت بنا نهاده شده است که ویسکوزیته مولکولی (و نه ویسکوزیته آشفته) انرژی جنبشی آشفته را با اعمال بر روی حرکات فرکانس بالا و مقیاس کوچک^{۸۰} به گرما تبدیل می نماید. معمولاً این حرکات را می توان

⁷⁵ Return to isotropy

⁷⁶ Isotropisation of production

⁷⁷ Over ridden

⁷⁸ Wall correction

⁷⁹ Wall reflection term

⁸⁰ High frequency and small scale motion

ایزوتروپ فرض نمود. این بدان معناست که نرخ اضمحلال مولفه‌های تنش رینولدز را می‌توان به نرخ کل اضمحلال^{۸۱} یعنی ε مرتبط ساخت.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (۸۶)$$

انتقال RSM در نرم‌افزار Fluent

معادله انتقال صریح برای انتقال تنشهای رینولدز در نرم‌افزار Fluent به صورت ۸۷ می‌باشد.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u'_k \overline{u'_i u'_j})}_{C_{ij}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \overline{u'_i u'_j u'_k} + p \delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j)}_{D_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j}) - \underbrace{\rho (\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k})}_{P_{ij}} + \underbrace{p (\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k})}_{\Phi_{ij}} - \underbrace{2\mu (\frac{\partial u'_i}{\partial x_k})(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k})}_{\varepsilon_{ij}} \quad (۸۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \text{ترم جابجایی بوده و یک ترم صریح بدون احتیاج به مدل کردن می‌باشد} \\ D_{l,ij} &= \text{ترم دیفیوژن ملکولی بوده و یک ترم صریح بدون احتیاج به مدل کردن می‌باشد} \\ P_{ij} &= \text{تولید آشفتگی به واسطه کرنش متوسط بوده و یک ترم صریح بدون احتیاج به مدل کردن می‌باشد} \\ D_{T,ij} &= \text{ترم دیفیوژن آشفتگی بوده و به منظور بستن معادلات احتیاج به مدل کردن می‌باشد} \\ \Phi_{ij} &= \text{ترم همبستگی بین فشار و کرنش آشفته بوده و به منظور بستن معادلات احتیاج به مدل کردن می‌باشد} \\ \varepsilon_{ij} &= \text{ترم اضمحلال آشفتگی بوده و به منظور بستن معادلات احتیاج به مدل کردن می‌باشد} \end{aligned}$$

برای بدست آوردن صورت قابل حل معادله ۸۷ ما به مدلهائی برای عبارتهای نفوذ، نرخ اضمحلال و ارتباط بین کرنش فشار در سمت راست احتیاج داریم. لاندر^{۸۲} و همکارانش (۱۹۷۵) و رودی^{۸۳} (۱۹۸۰) جزئیات کاملی از اغلب مدل‌های عمومی ارائه کرده‌اند. برای سادگی مطلب ما چند نمونه از مدل‌های بدست آمده از این طریق را که در بیشتر برنامه‌های CFD تجاری هم استفاده شده است در اینجا می‌آوریم. این مدلها حتی فاقد جزئیات کمی می‌باشند، ولی ساختمان آنها برای فهمیدن آسان است و منظور اصلی نیز در همه مدلها یکسان است.

⁸¹ Total dissipation rate

⁸² Launder

⁸³ Rodi

عبارت نفوذ $D_{T,ij}$ را با فرض اینکه نرخ انتقال تنش رینولدز توسط نفوذ متناسب با گرادپانهای تنش رینولدز باشد، می-توان مدل گرد. برنامه تجاری CFD اغلب ساده ترین شکل مطلوب را دارند .

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_m} \right) \quad (88)$$

که $\sigma_k = 0.82$ ثابت مدل می باشد.

نرخ اضمحلال ε_{ij} با فرض مستقل از جهت بودن ادی های مستهلک شونده مدل می شود . ε_{ij} بگونه ای تنظیم می شود که فقط روی تنش های رینولدز عمودی ($i=j$) اثر کند و به اندازه مساوی این را می توان از طریق ۸۹ بدست آورد.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (89)$$

ε_{ij} نرخ اضمحلال انرژی جنبشی آشفته، δ_{ij} دلتای کرونگر می باشد.

ترکیب عکس العمل کرنش - فشار همزمان، مشکل ترین عبارت معادله ۸۷ و مهمترین آن در دقت مدل است. اثر آن روی تنش های رینولدز با دو فرآیند متمایز فیزیکی عمل می کند: نوسانات فشار بدلیل برخورد دو ادی با یکدیگر و نوسانات فشار بدلیل برخورد یک ادی با منطقه ای از جریان با سرعت متوسط مختلف. اثر کلی عبارت کرنش - فشار، برای تقسیم مجدد انرژی، از جمله تنش های عمودی رینولدز ($i=j$) به منظور مستقل از جهت کردن بیشتر و کاهش تنش های برشی رینولدز ($i \neq j$) می باشد.

اصلاحاتی لازم است تا اثر نزدیکی دیوار را روی عبارات کرنش - فشار حساب کند. ماهیت این اصلاحات با توابع اضمحلال دیواره که در مدل $k-\varepsilon$ به آنها برخورد کردیم فرق می کند و لازم است بدون توجه به مقدار عدد رینولدز جریان متوسط، بکار برده شود. اندازه گیری ها نشان می دهد که اثر دیوار ناهمسانی تنش های رینولدز عمودی را با استفاده از مستهلک کردن نوسانات درجهت های عمود بر دیواره افزایش می دهد و مقدار تنش های برشی رینولدز را کاهش می دهد. مدل جامعی که همه این اثرات را در نظر گرفته است توسط لاندرو و گیبسون^{۸۴} (۱۹۷۵) ارائه شده است. آنها همچنین مدل های ساده تر و مناسبی را در بعضی برنامه های CFD تجاری موجود ارائه کرده اند.

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^{(1)} + \Phi_{ij}^{(2)} + \Phi_{ij}^{(w)} \quad (90)$$

که توضیحات آن در قسمت قبل به تفصیل بررسی گردید.

انرژی جنبشی آشفته k در روابط بالا مورد نیاز است و می توان آنرا با استفاده از جمع کردن سه تنش عمودی با همدیگر بدست آورد. شش معادله برای انتقال تنش رینولدز همراه با معادله مدل مربوط به نرخ اضمحلال ε_{ij} در این مدل

حل می شود. شکل معادل مدل $k-\varepsilon$ استاندارد برای ε بخاطر سادگی، در برنامه های تجاری CFD استفاده شده است. شرایط مرزی معمولی که برای جریان های بیضوی لازم است تا معادلات انتقال تنش رینولدز حل شوند عبارتند از:

ورودی: توزیع $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ و ε و k معلوم است.

$$\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial n} = 0 \text{ و } \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ و تقارن:}$$

دیواره جامد: توابع دیواره

در غیاب هر یک از اطلاعات ورودی، مقدار تقریبی توزیع در ورودی را می توان از شدت آشفته گی TI و طول مشخصه و با استفاده از روابط فرض شده پ ۹۱ بدست آورد.

$$\begin{aligned} k &= 1.5(U_{ref} TI)^2 \\ \varepsilon &= C^{\frac{3}{4}} \mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \\ \overline{u_1'^2} &= k \\ \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} &= \frac{1}{2} k \\ \overline{u'_i u'_j} &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (91)$$

عباراتی نظیر اینها را بدلیل حساسیت نتایج، نباید بدون آزمایش، بعنوان شرایط مرزی ورودی فرض کرد. برای محاسبات در اعداد رینولدز بالا شرایط مرزی از نوع تابع دیواره را که خیلی مشابه مدل $k-\varepsilon$ است، می توان استفاده نمود. مقدار تنش های رینولدز در نزدیک دیواره از رابطه $\overline{u'_i u'_j} = c_{ij} k$ محاسبه می شود که c_{ij} از اندازه گیریها بدست می آید. با استفاده از روشهای عددی و برای "نود مجاور دیواره" می توان نشان داد شده بر روی یک صفحه تخت.

$$\frac{\overline{u'^2}}{k} = 1.098 \quad \frac{\overline{v'^2}}{k} = 0.248 \quad \frac{\overline{w'^2}}{k} = 0.654 \quad \frac{\overline{u'v'}}{k} = 0.255 \quad (92)$$

همین امر اختلاف بین تنشهای رینولدز برای یک جریان ساده برشی تشکیل شده بر روی یک صفحه تخت را نشان می دهد. بدیهی است مدل های تنش رینولدز نسبتاً پیچیده هستند، ولی بطور کلی پذیرفته شده است که ساده ترین نوع مدل می باشد که قادر به تشریح همه خواص جریان متوسط و تنش های رینولدز می باشد. مدل تنش رینولدز (RSM) به هیچ عنوان با اندازه مدل $k-\varepsilon$ کاربرد ندارد، و بدلیل قیمت گران محاسبات معمولاً در حد گسترده ای در صنعت برای محاسبات جریان ها استفاده نمی شود. توسعه و بهبود این مدل ها یک زمینه تحقیقاتی خیلی فعال می باشد. نظریه ای درباره شکل صریح

ترکیب مدل‌ها بدست آمد که موجود بودن سخت افزارهای قدرتمند می‌تواند این مدل‌های آشفته را برای استفاده-
کنندگان صنعت در آینده نزدیک عملی کند.

