«به نام خدا»

فصل ۱: خطاها و تقریب‌ها

<u>**بسط یک عدد مثبت در مبنای r ($r \geq ۲$)**</u>: اگر $m = [\log A]$ آنگاه بسط عدد مثبت A در مبنای r به صورت زیر است:

$$A = a_m \times r^m + a_{m-۱} \times r^{m-۱} + \cdots, \qquad a_m \neq ۰, \qquad ۰ \leq a_i \leq r-۱$$

مثلاً $(۴۲۵/۳۲)_{۱۰} = (۴ \times ۱۰^۲) + (۲ \times ۱۰^۱) + (۵ \times ۱۰^۰) + (۳ \times ۱۰^{-۱}) + (۲ \times ۱۰^{-۲})$

و یا $(۲۰۱/۱۰۱)_۳ = (۲ \times ۳^۲) + (۰ \times ۳^۱) + (۱ \times ۳^۰) + (۱ \times ۳^{-۱}) + (۰ \times ۳^{-۲}) + (۱ \times ۳^{-۳})$

<u>**قضیه(تمیز دادن اعداد گویا و گنگ)**</u>: اگر بسط اعشاری A مختوم و یا نامختوم متناوب باشد، A یک عدد گویا است.

<u>**نتیجه**</u>: اگر $A = a_۱ \cdots a_m / b_۱ \cdots b_n \overline{c_۱ \cdots c_k}$ عددی در مبنای r باشد، آنگاه کسر مربوط به آن برابر است با:

$$A = a_۱ \cdots a_m / b_۱ \cdots b_n \overline{c_۱ \cdots c_k} = (a_۱ \cdots a_m / b_۱ \cdots b_n)_r + \frac{(c_۱ \cdots c_k)_r}{r^n (r^k - ۱)}$$

<u>**بسط اعداد صحیح در مبنای r**</u>: با <u>تقسیمات متوالی آن عدد بر r</u>، تا جایی که خارج‌قسمت صفر شود. سپس باقیمانده‌ها را از آخر به اوّل می‌نویسیم.

<u>**بسط اعداد اعشار بین صفر و یک در مبنای r**</u>: کافی است جدول زیر را تکمیل کرده و شرط توقف آن است که یا $A = ۰$ شود که در این صورت بسط مختوم است و یا A تکرار شود که در این صورت بسط نامختوم متناوب است:

i	A	rA	$c := [rA]$	$A := rA - c$
۱	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
۲	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

خطای مطلق و نسبی: اگر a مقدار کمی با A متفاوت باشد، در این صورت a را <u>**تقریبی**</u> برای A نامیده و می‌نویسیم $\boldsymbol{a \approx A}$.
اگر $A < a$ باشد، آنگاه a را <u>**تقریب نقصانی**(کوچک‌تر)</u> و اگر $A > a$ باشد، a را <u>**تقریب اضافی**(بزرگ‌تر)</u> می‌نامیم.
خطای عدد تقریبی $\boldsymbol{a}$ را به صورت $\boxed{e(a) = A - a}$، **خطای مطلق عدد تقریبی $\boldsymbol{a}$** را به صورت $\boxed{E(a) = |e(a)| = |A - a|}$ و <u>**خطای نسبی عدد تقریبی $\boldsymbol{a}$**</u> را به صورت $\boxed{\delta(a) = \frac{|e(a)|}{|A|} = \frac{|A-a|}{|A|}}$ تعریف می‌کنیم.

<u>**خطای مطلق حدی و خطای نسبی حدی**</u>: <u>**خطای مطلق حدی عدد تقریبی $\boldsymbol{a}$**</u>، عددی است که از خطای مطلق آن کوچک‌تر نباشد. خطای مطلق حدی a را با e_a نشان داده و داریم $\boxed{E(a) = |A - a| \leq e_a}$.

<u>**قضیه**</u>: اگر a تقریبی از A باشد و e_a خطای مطلق حدی a باشد، آنگاه نامساوی $\boxed{\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a| - e_a}}$ برقرار است. کسر $\frac{e_a}{|a| - e_a}$ را با $\boldsymbol{\delta_a}$ نشان داده و <u>**خطای نسبی حدی $\boldsymbol{a}$**</u> می‌نامیم. به عبارت دیگر $\delta(a) \leq \delta_a = \frac{e_a}{|a| - e_a}$.

<u>**نکته**</u>: از آنجا که معمولاً A معین نیست. محاسبه‌ی $e(A)$ و $\delta(a)$ امکان‌پذیر نمی‌باشد. لذا در عمل معمولاً از مقادیر حدی e_a و δ_a بهره می‌بریم.

<u>**نکته**</u>: اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد، یعنی $e_a \ll |a|$، آنگاه $\boldsymbol{|a| - e_a \approx |a|}$ بوده و لذا $\boxed{\boldsymbol{\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a|}}}$ است.

<u>**نکته**</u>: اگر مقادیر $\delta(a)$ و یا δ_a محاسبه شده باشند، آنگاه روابط $\boxed{|e(a)| = |A|\, \delta(a)}$ و $\boxed{e_a = |a|\, \delta_a}$ می‌توان به ترتیب جهت محاسبه‌ی خطای مطلق و خطای مطلق حدی بهره برد.

$= ae^{b} \leq ae^{-b}$

<u>**نماد علمی و اعداد بامعنی**</u>: اگر $A \neq ۰$ عددی حقیقی باشد، آنگاه A را می‌توان به صورت $\boxed{\boldsymbol{A = a \times 10^b}}$ نوشت که b عددی صحیح و $۱ \leq |a| < ۱۰$ است. در این صورت می‌گوییم A به صورت <u>**نماد علمی**</u> نوشته شده است و a را <u>**مانتیس**</u> و b را <u>**نمای**</u> عدد A می‌نامیم. اگر a مانتیس A باشد، آنگاه <u>ارقام مخالف صفر a</u>، <u>صفرهای بین ارقام</u> و <u>صفرهایی که در سمت راست اعشار به منظور نوعی دقت قرار دارند</u>، <u>**اعداد بامعنی $\boldsymbol{A}$**</u> نامیده می‌شوند.

<u>**انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم(قطع کردن و گردکردن)**</u>: از آنجا که بسط اکثر اعداد دارای بی‌نهایت رقم است، باید به یکی از دو روش قطع‌کردن و گردکردن تعداد متناهی از ارقام بسط عدد را انتخاب نمود. قطع‌کردن و گردکردن تا <u>**رقم اعشار $\boldsymbol{k}$**</u> را با (kD) و

تا k **رقم بامعنی** را با (kS) نشان می‌دهیم. در **قطع‌کردن** کافی است بسط عدد را از رقم معینی قطع نمود. اما برای **گردکردن** **عدد اعشاری مخالف صفر** $A = a_1a_2\cdots a_m/b_1b_2\cdots b_nb_{n+1}\cdots$ **تا n رقم اعشار**، از الگوریتم زیر بهره می‌بریم:

۱. اگر $b_{n+1} > ۵$ باشد، یک واحد به b_n افزوده و عدد را از b_{n+1} قطع می‌کنیم.
۲. اگر $b_{n+1} < ۵$ باشد، عدد را از b_{n+1} قطع می‌کنیم.
۳. اگر اگر $b_{n+1} = ۵$ باشد و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشد یک واحد به b_n افزوده و عدد را از b_{n+1} قطع می‌کنیم. اما اگر بعد از این رقم، رقم دیگری نبوده و یا فقط صفر باشد، در صورتی که b_n فرد باشد، مشابه مرحله ۱ و اگر b_n زوج باشد مانند مرحله ۲ عمل می‌کنیم.

ارقام با معنای درست(صحیح): اگر $a = a_m\times ۱۰^m + a_{m-۱}\times ۱۰^{m-۱} + \cdots$ که $a_m \neq ۰$ بسط اعشاری عدد a باشد، یعنی $m = [\log a]$، همچنین d تعداد ارقام بامعنی a باشد. آنگاه بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که در هر دو شرط $\boxed{n \leq d}$ و $\boxed{|A-a| \leq ۵\times ۱۰^{m-n}}$ صدق کند را **تعداد ارقام بامعنای درست(صحیح)** می‌نامند.

قضیه: اگر a گردشده‌ی عدد مثبت A تا n رقم بامعنا باشد، یعنی $A = a\ (nS)$، آنگاه a دارای n رقم با معنای درست(صحیح) است.

قضیه: اگر $a > ۰$ تقریبی از A دارای n رقم با معنای درست(صحیح) باشد، خطای نسبی آن کمتر از ۵×۱۰^{-n} است، یعنی $\boxed{\delta(a) \leq ۵\times ۱۰^{-n}}$ است، به شر آنکه رقم‌های درست a شامل یک رقم ۱ و $n-۱$ صفر در سمت راست آن نباشد.

قضیه: اگر a گردشده‌ی عدد مثبت A تا n رقم اعشار باشد، یعنی $A = a\ (nD)$، آنگاه a داریم:

$$\boxed{|A-a| \leq ۵\times ۱۰^{-(n+۱)} = \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-n}}$$

خطای اعمال جبری(جمع و تفریق، ضرب و تقسیم): اگر $\boxed{u = \pm x_۱ \pm x_۲ \pm \cdots \pm x_n}$ باشد، آنگاه **خطای مطلق حدی** u برابر $\boxed{e_u = e_{x_1} + e_{x_2} + \cdots + e_{x_n}}$ بوده اگر علامت جملات یکسان باشد، آنگاه $\boxed{\delta_u \leq \max_{۱\leq i\leq n}\{\delta_{x_i}\}}$.

اگر $\boxed{u = x_۱ - x_۲}$ باشد، آنگاه $\boxed{e_u = e_{x_1} + e_{x_2}}$ بوده و نیز $\boxed{\delta_u = \frac{e_{x_1}+e_{x_2}}{|x_1-x_2|}}$ است.

اگر $\boxed{u = x_۱x_۲\cdots x_n}$ آنگاه $\boxed{\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n}}$ است. همچنین اگر $\boxed{u = \frac{x_۱}{x_۲}}$ آنگاه $\boxed{\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}}$ بوده و خطای مطلق حدی در هر دو حالت از رابطه‌ی $\boxed{e_a = |a|\ \delta_a}$ حاصل می‌شود.

قضیه: اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از اعداد A و B بوده و همگی مثبت باشند، آنگاه:

$$۱)\ E(ab) \lesssim aE(b) + b\,E(a), \qquad ۲)\ \delta(ab) \lesssim \delta(a) + \delta(b)$$

خطای محاسبه‌ی توابع: بسط مکلورنِ تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = f(۰) + \frac{x}{۱!}f'(۰) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(۰) + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(۰)$$

در جدول زیر، بسط مکلورنِ برخی توابع آورده شده است:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \|x\| < \infty$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots, \quad \|x\| < \infty$
$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} \mp \cdots, \quad \|x\| < \infty$	$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad \|x\| < \infty$
$\sinh x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots, \quad \|x\| < \infty$	$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots, \quad \|x\| < 1$
$\frac{۱}{۱-x} = \sum_{n=۰}^{\infty} x^n = ۱ + x + x^۲ + \cdots, \quad \|x\| < ۱$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots, \quad \|x\| < 1$

اگر چندجمله‌ای $\boxed{P_n(x) = f(۰) + \frac{x}{۱!}f'(۰) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(۰)}$ باشد، آنگاه **باقیمانده‌ی سری $f(x)$** برابر است با:

$$R(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)+\cdots,\qquad \lim_{n\to\infty}R(x)=0$$

نکته: جهت **محاسبه‌ی مقدار تقریبی تابع به کمک بسط مکلورن آن با خطای مطلق کمتر از ε** لازم است:

۱. هر جمله‌ی بسط را تاحدی گرد می‌کنیم که کمتر از خطای مذکور باشد. مثلاً اگر $\varepsilon=10^{-2}=0/01$ باشد، هر جمله را حداقل تا سه رقم اعشار گرد می‌کنیم.

۲. **شرط توقف**: تا جمله‌ای از بسط ادامه می‌دهیم که حاصل آن از نصف ε یعنی $\frac{\varepsilon}{2}$ کمتر نباشد.

نکته: اگر a تقریبی از x باشد، آنگاه خطای مطلق و نسبی $f(a)$ برابر است با:

$$e\big(f(a)\big)\approx e(a)\,|f'(a)|\le e_a|f'(a)|,\qquad \delta\big(f(a)\big)\approx\left|\frac{a\,f'(a)}{f(a)}\right|\delta(a)$$

ضریب $\delta(a)$ در رابطه‌ی فوق، یعنی مقدار $\left|\frac{a\,f'(a)}{f(a)}\right|$ را **عدد حالت** نامیده که اگر کمتر از ۱ باشد، مسئله را **خوش‌وضع**(خوش‌حالت) و در غیر این صورت **بدوضع**(بدحالت) می‌نامیم.

همچنین در مورد توابع دو متغیره‌ی $z=f(x,y)$، اگر a تقریبی از x_1 و b تقریبی از y_1 باشد، آنگاه $f(a,b)$ نیز تقریبی از $f(x_1,y_1)$ بوده و خطای مطلق و نسبی $f(a,b)$ برابر است با:

$$\begin{cases} e\big(f(a,b)\big)\le e_a\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|+e_b\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right| \\ \delta\big(f(a,b)\big)\le\left|\frac{a}{f(a,b)}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|\delta(a)+\left|\frac{a}{f(a,b)}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|\delta(b)\end{cases}$$

ضرایب $\delta(a)$ و $\delta(b)$ در رابطه‌ی فوق را **عدد حالت** نامیده که اگر کمتر از ۱ باشند، مسئله را **خوش‌وضع** و در غیر این صورت **بدوضع** می‌نامیم.

مرتبه‌ی همگرایی(نمادهای اُ بزرگ و کوچک): می‌گوییم **تابع $g(x)$ (حول a) از مرتبه‌ی $f(x)$** است هرگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=c\neq 0$$

در این صورت می‌نویسیم $\boxed{f(x)=O\big(g(x)\big)}$. همچنین می‌گوییم **تابع $g(x)$ (حول a) از مرتبه‌ی کمتر از $f(x)$** است، اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

در این صورت می‌نویسیم $f(x)=o\big(g(x)\big)$.

در مورد **دنباله‌ها**، اگر دنباله‌ی $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد حقیقی و نامنفی p و c چنان باشند که:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right|=c\neq 0$$

آنگاه p **را مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ به α** می‌نامند. هرچه p بیشتر باشد، سرعت همگرایی بیشتر است.

فصل دوم: حل عددی معادلات غیرخطی

نحوهٔ یافتن ریشهٔ α تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$:

معیارهای توقف در الگوریتم‌های تکراری بویژه یافتن ریشه‌ی تابع $f(x)$: اگر $\{x_n\}$ دنباله حاصل از روش تکراری باشد، آنگاه می‌توان از یکی از معیارهای توقف زیر با پذیرش خطای ε بهره برد:

۱. محاسبه را تاجایی ادامه می‌دهیم تا $|f(x_n)|<\varepsilon$ شود. این معیار تنها در محاسبه‌ی ریشه‌ی تابع $f(x)$ کاربرد دارد.

۲. اگر $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ عملیات را متوقف کرده و x_{n+1} را به عنوان تقریبی از جواب نهایی می‌پذیریم.

۳. اگر حد دنباله عددی بسیار بزرگ یا خیلی کوچک باشد، عملیات را زمانی متوقف می‌کنیم که $\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right|<\varepsilon$ شود.

٤. اگر تعداد تکرارها از قبل تعیین شود، مثلاً پس از N تکرار، روش متوقف می‌شود.

نکته: پیش از استفاده از روش‌های عددی لازم است که تقریبی از ریشه‌ها و حدود آنها داشته باشیم که معمولاً از دو شیوه‌ی متداول و تجربی **رسم نمودار** و یا **جدول مقادیر تابع** می‌پردازیم. اساس روش جدول‌بندی مقادیر تابع **قضیه‌ی مقدار میانی** است.

قضیه‌ی مقدار میانی: اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه عدد c در بازه‌ی باز (a,b) موجود است، به طوری که $f(c)=k$.

نام روش	فرمول‌ها	توضیحات
دوبخشی (تنصیف)	$\boxed{x_n=\frac{a+b}{2}},\quad n=\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right]+1,\quad \varepsilon=\lvert x_n-\alpha\rvert<\frac{b-a}{2^n}$	جواب تضمینی داشته و از قضیهٔ مقدار میانی استفاده می‌کند.
روش نابجایی	$x_n=\frac{\begin{vmatrix}a & f(a)\\ b & f(b)\end{vmatrix}}{f(b)-f(a)}=\frac{a\,f(b)-b\,f(a)}{f(b)-f(a)}$	جواب تضمینی داشته و از قضیهٔ مقدار میانی استفاده می‌کند.
تکرار ساده	$f(x)=0 \Rightarrow x=g(x) \Rightarrow \boxed{x_{n+1}=g(x_n)}$	جواب تضمینی ندارد.
روش Δ^2-ایتکن	۱) به کمک یک روش تکراری سه مقدار x_1، x_2 و x_3 را محاسبه می‌کنیم. ۲) با قرار دادن $\boxed{\Delta x_n=x_{n+1}-x_n}$ از رابطهٔ $\boxed{\hat{x}_n=x_{n+1}-\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_{n-1}}}$ مقدار عنصر دنباله $\{\hat{x}_n\}$ را محاسبه می‌کنیم. ۳) اگر $\hat{x}_n$ در شرط توقف صدق کند، روند را متوقف و در غیر این صورت با قرار دادن $x_0=\hat{x}_n$ به مرحله‌ی اول برمی‌گردیم.	از اِعمال روش Δ^2-ایتکن بر روش تکرار ساده، **روش استیفنسن** حاصل می‌شود. که در آن معمولاً از سه مقدار x_0، x_1 و x_2 استفاده می‌شود. به طور کلی اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به α باشد، سرعت همگرایی $\{\hat{x}_n\}$ از آن بیشتر است.
نیوتن-رافسون	ریشهٔ ساده: $\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ ریشهٔ مرتبهٔ m: $\boxed{x_{n+1}=x_n-(m-k)\frac{f^{(k)}(x_n)}{f^{(k+1)}(x_n)}}$	$k=0,1,\dots,m-1$
روش وتری	$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}}$	دو مقدار اولیه x_0 و x_1 را باید داشته باشیم.
روش هورنر	۱) $i=n-1$ ۲) $b_i=a_n$ ۳) $i:=i-1$ ۴) $b_i:=b_{i+1}r+a_{i+1}$ ۵) اگر $i>-1$ برو به مرحلهٔ ۳ ۶) $b_{-1}=R$	$\begin{cases}P_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\\ P_n(x)=(x-r)Q_{n-1}(x)+R\\ Q_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0\end{cases}$

فصل سوم: درونیابی

یافتن چندجمله‌ای $P(x)$ به طوری که $P(x_i)=f(x_i)=f_i$ برای $i=0,1,\dots,n$:

نام روش	فرمول‌ها	توضیحات
درونیابی لاگرانژ	$L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\quad \boxed{P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i\times L_i(x)}$	بازگشتی نبوده و درجه در انتها مشخص می‌شود و با اضافه شدن یک نقطه روند باید از اول آغاز گردد.
درونیابی نیوتن	$\begin{cases} f[x_i]=f(x_i), \quad f[x_i,x_j]=\frac{f[x_i]-f[x_j]}{x_i-x_j}\\ f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f[x_0,\dots,x_{n-1}]-f[x_1,\dots,x_n]}{x_0-x_n}\end{cases}$ $\Rightarrow P_n(x)=f_0+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\cdots+\left(\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\right)f[x_0,x_1,\dots,x_n]$	بازگشتی بوده و به کمک جدول به راحتی قابل محاسبه است. خطای آن برابر است با: $E(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$
عملگر تفاضلات پیشرو (Δ)	$x=x_0+Ph,\quad \binom{P}{k}=\frac{P(P-1)\cdots(P-k+1)}{k!},\quad \Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$ $P_n(x)=f(x_0)+\frac{P}{1!}\Delta f(x_0)+\cdots+\frac{P(P-1)\cdots(P-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0)=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{P}{k}\Delta^k f(x_0)}$	در نقاط متساوی‌الفاصله به کار می‌رود و خطای آن برابر است با: $\boxed{E_n(x)=h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(P-i)}$

عملگر تفاضلات پسرو (∇)	$x = x_n + Ph, \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ $P_n(x) = f(x_n) + \frac{P}{1!}\nabla f(x_n) + \cdots + \frac{P(P+1)\cdots(P+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$ $= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{P+k-1}{k} \nabla^k f(x_0)}$	در نقاط متساوی‌الفاصله به کار می‌رود و خطای آن برابر است با: $\boxed{E_n(x) = h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(P+i)}$
عملگر تفاضلات میانی (δ) (فرمول استرلینگ)	$x = x_0 + Ph, \quad \delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$ $P_n(x) = f(x_0) + \frac{P}{2\times 1!}\left(\delta f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \delta f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right) + \frac{P^2}{2!}\delta^2 f(x_0)$ $+ \frac{P(P-1)(P+1)}{2\times 3!}\left(\delta^3 f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \delta^3 f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right) + \cdots$	$E_{n=2r}(x) = h^{n+1}P(P^2-1)\cdots(P^2-r^2) \times \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$ $E_{n=2r+1}(x) = h^{n+1}P(P^2-1)\cdots(P^2-r^2)(P+r+1) \times \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$

فصل چهارم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

نام روش	فرمول‌ها	توضیحات
مشتق‌گیری عددی	$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_i + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 f_i + \cdots\right) \\ f'(x) = \frac{1}{h}\left(\nabla f_i + \left(\theta + \frac{1}{2}\right)\nabla^2 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta + \frac{1}{3}\right)\nabla^3 f_i + \cdots\right) \\ f''(x) = \frac{\partial f'}{\partial\theta}\times\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_i + (\theta-1)\Delta^3 f_i + \cdots) = \frac{1}{h^2}(\nabla^2 f_i + (\theta+1)\nabla^3 f_i + \cdots) \end{cases}$	$x = x_i + \theta h, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \Longrightarrow$
فرمول‌های نیوتن-کاتس	$\varphi_i(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n}\frac{t-k}{i-k}, \qquad \alpha_i = \int_0^n \varphi_i(t)dt \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i$	همواره داریم: $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i = n$
دستور ذوزنقه	$h = \frac{b-a}{n} \;\Rightarrow\; \begin{cases} T(h) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ T(h) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \end{cases}$	خطا از $O(h^2)$ بوده و داریم: $E_T = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(t)$
ذوزنقه تصحیح شده	$H(h) = T(h) + \frac{h^2}{12}(f_0' - f_n') = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) + \frac{h^2}{12}(f_0' - f_n')$	خطا از $O(h^4)$ بوده و داریم: $E_H = \frac{b-a}{720}h^4 f^{(4)}(t)$
سیمپسون	$h = \frac{b-a}{2n}$ $\Rightarrow \begin{cases} S(h) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}) \\ S(h) = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \end{cases}$	خطا از $O(h^4)$ بوده و داریم: $E_S = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(t)$
روش نقطه میانی	$h = \frac{b-a}{n} \;\Rightarrow\; \begin{cases} M(h) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \\ M(h) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \end{cases}$	خطا از $O(h^2)$ بوده و داریم: $E_M = \frac{b-a}{24}h^2 f''(t)$
رامبرگ بر اساس ذوزنقه	$h_i = \frac{b-a}{2^i} \;\Rightarrow\; T_{0,i} = T(h_i) \;\Rightarrow\; \boxed{T_{k,i} = \frac{4^k T_{k-1,i+1} - T_{k-1,i}}{4^k - 1}} \;\Rightarrow\; T_{n,0} =$ جواب	خطای $T_{k,i}$ از $O(h_i^{2k+2})$ است.
رامبرگ بر اساس سیمپسون	$h_i = \frac{b-a}{2^i} \;\Rightarrow\; S_{0,i} = S(h_i) \;\Rightarrow\; \boxed{S_{k,i} = \frac{4^{k+1} S_{k-1,i+1} - S_{k-1,i}}{4^{k+1} - 1}} \;\Rightarrow\; S_{n,0} =$ جواب	خطای $S_{k,i}$ از $O(h_i^{2k+4})$ است.
ضرایب مجهول نیوتن-کاتس	$h = \frac{b-a}{n} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f_i \\ f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^n \end{cases} \;\Rightarrow$ w_iها مجهول	اگر $n = 3$ قاعدهٔ $\frac{3}{8}$ سیمپسون حاصل می‌شود: $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$

روش گاوس	f_i ها و w_iها مجهول $\begin{cases}\int_a^b f(x)dx=\int_{-1}^{+1} f(t)dt=\sum_{i=0}^{n} w_i f_i\\ f(x)=1,x,x^2,\dots,x^{2n+1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}h=\frac{b-a}{n}\\ x=\frac{1}{2}\left((b-a)t+b+a\right)\end{cases}$	فرمول یک نقطه‌ای گاوس($n=0$): $x_0=0,\quad w_0=2$ فرمول دو نقطه‌ای گاوس($n=1$): $x_0,x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\quad w_0=w_1=1$

فصل پنجم: حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول $y'=f(x,y)$ با شرط $y(x_0)=y_0$

نام روش	**فرمول‌ها**	**توضیحات**
روش تکرار پیکارد	$y_0(x)=y_0,\qquad y_{m+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_m)dx,\qquad m=0,1,\dots$	
روش اویلر	$\begin{cases}x=x_0+ih\\ y_0=y(x_0)\end{cases}\Rightarrow\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),\qquad n=0,1,\dots,i-1$	
روش تک‌گامی(تیلور)	$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)+\cdots+\frac{h^P}{P!}f^{(P-1)}(x_n,y_n)\\ y^{(m+1)}=f^{(m)}=\boxed{f_x^{(m-1)}+f_y^{(m-1)}\times f}\end{cases}$	
رانگ-کوتا مرتبهٔ دوم	$\begin{cases}k_1=h\times f(x_n,y_n)\\ k_2=h\times f(x_n+h,y_n+k_1)\end{cases}\Rightarrow\ y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2)$	خطا از $O(h^3)$ است.
رانگ-کوتا مرتبهٔ چهارم	$\begin{cases}k_1=h\times f(x_n,y_n)\\ k_2=h\times f\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}k_1\right)\\ k_3=h\times f\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}k_2\right)\\ k_4=h\times f(x_n+h,y_n+k_3)\end{cases}\Rightarrow\boxed{y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)}$	خطا از $O(h^5)$ است. با کاهش مقدار h از یک سو تعداد مراحل محاسبه و از سوی دیگر خطای گرد کردن نیز افزایش می‌یابد.

فصل ششم: حل عددی دستگاه‌های معادلات خطی

حل دستگاه $AX=B$ که در آن $A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$ می‌باشد.

نام روش	**فرمول‌ها**	**توضیحات**
روش کرامر	ابتدا با جایگذاری بردار B در ستون i-ام ماتریس A، ماتریس‌های A_i را محاسبه نموده و سپس: $x_i=\frac{\lvert A_i\rvert}{\lvert A\rvert}$	در استفاده از این روش ماتریس A باید حتماً نامنفرد(وارون‌پذیر) باشد.
روش حذفی گاوس	با انجام **اعمال سطری مقدماتی**، باید ماتریس را **بالامثلثی** نمود: **الف)** تعویض دو سطر i و j ($R_i\leftrightarrow R_j$) **ب)** ضرب یک سطر در عدد مخالف صفر $\alpha\neq 0$ (αR_i) **ج)** افزودن مضربی از سطر i-ام به سطر j-ام (αR_i+R_j) تعداد اعمال جمع(و تفریق)، ضرب و تقسیم **در مثلثی نمودن و حل دستگاه** به ترتیب متناسب با n^3، n^3 و n^2 بوده و تعداد اعمال جمع(و تفریق)، ضرب و تقسیم **در حل دستگاه مثلثی** به ترتیب متناسب با n^2، n^2 و n است.	در **محورگیری جزئی** سطر i-ام با تعویض سطر: $\lvert a_{ii}\rvert:=\max_{1\le j\le n}\lvert a_{ij}\rvert$ در **محورگیری کلی**: $\lvert a_{11}\rvert:=\max_{1\le i,j\le n}\lvert a_{ij}\rvert$ اگر k بار تعویض سطر یا ستون داشته باشیم: $\det A:=(-1)^k a_{11}a_{22}^{(1)}\cdots a_{nn}^{(n-1)}$
روش مستقیم تجزیه LR	ماتریس A را به صورت حاصلضرب **ماتریس پایین مثلثی** L و **بالامثلثی** R تجزیه کرده سپس با قرار دادن $LR=A$ ابتدا دستگاه $Ly=b$ و سپس دستگاه $Rx=y$ را حل می‌کنیم. $\boxed{\det A=\det L\times\det R}$	اگر درایه‌های قطر اصلی L برابر یک باشد، تجزیه را **دولیتل** و اگر درایه‌های قطر اصلی R برابر یک باشد، تجزیه را **کرات** و اگر درایه‌های قطر اصلی L و R برابر باشند، تجزیه را **چولسکی** می‌نامند.
الگوریتم کرات(دولیتل)	۱) ابتدا سطر اول ماتریس $R=[r_{ij}]$ را برابر سطر اول ماتریس A قرار می‌دهیم $\boxed{r_{1j}=a_{1j}}$ ۲) ستون اول ماتریس $L=[L_{ij}]$ را از فرمول $\boxed{L_{i1}=\frac{a_{i1}}{r_{11}}}$ محاسبه می‌کنیم. ۳) سایر سطرها و ستون‌های دو ماتریس از فرمول‌های زیر حاصل می‌شوند: $r_{ji}=a_{ji}-\sum_{k=1}^{j-1}L_{jk}r_{ki}\,,\qquad L_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}L_{ik}r_{kj}\right)/r_{jj}$	در این حالت چون درایه‌های روی سطر اصلی ماتریس L برابر یک است، داریم: $\det A=\det R=r_{11}\cdots r_{nn}$
روش ژاکوبی	۱) در یک دستگاه n معادله n مجهولی، متغیر x_i را از i-امین معادله محاسبه می‌کنیم:	باید برای هر i، $a_{ii}\neq 0$ باشد، در غیر این صورت با جابجایی مناسب معادلات

	$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\Big), \qquad i = 1,2,\dots,n$$ ۲) حال از فرمول تکرار زیر استفاده می‌کنیم: $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big), \qquad i = 1,2,\dots,n$$ ۳) اگر ماکزیمم قدرمطلق تفاضلات $\left\lvert x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right\rvert$ کمتر از ε شود. الگوریتم متوقف می‌شود.	دستگاه می‌توان به این وضعیت رسید. همچنین اگر تقریب آغازین $x_i^{(0)}$ داده نشود، می‌توان از روابط زیر بهره برد: $$x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$
روش گاوس-سایدل	مشابه روش ژاکوبی بوده با این تفاوت که فرمول تکرار به صورت زیر است: $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad \begin{cases} i = 1,2,\dots,n \\ k = 1,2,\dots \end{cases}$$	اگر A ماتریس غالب قطری باشد، روش‌های ژاکوبی و گاوس- سایدل برای هر مقدار اولیه همگرا بوده و اگر A معین مثبت باشد، روش گاوس-سایدل برای هر مقدار اولیه همگراست.

فصل هفتم: مقادیر و بردارهای ویژه

نام روش	**فرمول‌ها**	**توضیحات**
روش محاسبه مقادیر ویژه	۱) ابتدا چندجمله‌ای مشخصه بر حسب λ، یعنی $\boxed{\det(A-\lambda I) = 0}$ را محاسبه می‌کنیم. ۲) ریشه‌های این معادله همان مقادیر ویژه اند. ۳) با جایگذاری هر مقدار ویژهٔ λ، در دستگاه $\boxed{Ax = \lambda x}$ بردارهای ویژهٔ x به دست می‌آیند.	خواص بیان شده در صفحهٔ ۳۲۵ مطالعه شوند.
روش لوریه- فادیو	اگر $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ماتریس مربعی و $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ اثر ماتریس باشد، آنگاه: ۱) ابتدا با محاسبهٔ توان‌های ماتریس A، مقادیر $S_k = \mathrm{tr}(A^k)$ را برای $i = 1,\dots,n$ محاسبه می‌کنیم. ۲) مقادیر c_1، . . .، c_n را به کمک روابط زیر محاسبه می‌کنیم: $$\begin{cases} c_1 = -S_1 \\ c_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + c_1S_1) \\ \vdots \\ c_n = -\frac{1}{n}(S_n + c_1S_{n-1} + c_2S_{n-2} + \cdots + c_{n-1}S_1) \end{cases}$$ ۳) در این صورت چندجمله‌ای مشخصه برابر است با: $$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$	
روش تکراری توان‌های ماتریس	۱) برای یک بردار ناصفر دلخواه X قرار می‌دهیم: $$Y^{(m)} = A^mX = \left(y_1^{(m)},\dots,y_n^{(m)}\right)$$ ۲) در این صورت برای مقادیر بزرگ m داریم: $$\boxed{\lambda_1 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^{(m+1)}}{y_i^{(m)}}}, \qquad \boxed{X_1 \approx Y^{(m)}}$$	با فرض اینکه λ_1، . . . ، λ_n مقادیر ویژهٔ متناظر با بردارهای ویژهٔ X_1، . . . ، X_n بوده، به‌طوری‌که: $$\lvert\lambda_1\rvert > \cdots > \lvert\lambda_n\rvert$$
روش تکراری اثر ماتریس	۱) ابتدا توان‌های مختلف A را محاسبه می‌کنیم: ۲) از یکی از فرمول‌های زیر داریم: $$\boxed{\lambda_1 \approx \sqrt[m]{\mathrm{tr}(A^m)}}, \qquad \boxed{\lambda_1 \approx \frac{\mathrm{tr}(A^{m+1})}{\mathrm{tr}(A^m)}}$$	با فرض اینکه λ_1، . . . ، λ_n مقادیر ویژهٔ متناظر با بردارهای ویژهٔ X_1، . . . ، X_n بوده، به‌طوری‌که: $$\lvert\lambda_1\rvert > \cdots > \lvert\lambda_n\rvert$$
روش توانی بزرگترین مقدار ویژه	۱) یک بردار ناصفر دلخواه $X^{(0)}$ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $i = 0$. ۲) قرار می‌دهیم: $$Y = AX^{(i)} = (y_1,\dots,y_n)$$ ۳) با توجه به بردار Y قرار می‌دهیم: $$\alpha_i = y_j;\ \lvert y_j\rvert = \max_{1\le k\le n}\lvert y_k\rvert, \qquad X^{(i+1)} := \frac{Y}{\alpha_i}$$ ۴) قرار می‌دهیم $i := i + 1$ و سپس به مرحلهٔ ۲ می‌رویم. برای مقادیر بزرگ i داریم: $$\boxed{\lambda_1 \approx \alpha_i}, \qquad \boxed{X_1 \approx X^{(i+1)}}$$	با فرض اینکه λ_1، . . . ، λ_n مقادیر ویژهٔ متناظر با بردارهای ویژهٔ X_1، . . . ، X_n بوده، به‌طوری‌که: $$\lvert\lambda_1\rvert > \cdots > \lvert\lambda_n\rvert$$
روش تکراری	۱) یک بردار ناصفر دلخواه $Z^{(0)}$ و مقدار دلخواه ρ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $i = 0$.	با فرض اینکه برای مقدار ثابت ρ و

معکوس	۲) بردار $Y=(y_۱,\dots,y_n)$ را از حل دستگاه زیر محاسبه می‌کنیم: $(A-\rho I)Y=Z^{(i)}$ ۳) با توجه به بردار Y قرار می‌دهیم: $\mu_i = y_j;\ \lvert y_j\rvert = \max_{۱\le k\le n}\lvert y_k\rvert,\qquad Z^{(i+۱)} := \frac{Y}{\mu_i}$ ۴) قرار می‌دهیم $i := i+۱$ و سپس به مرحلهٔ ۲ می‌رویم. برای مقادیر بزرگ i داریم: $\boxed{\lambda_k \approx \rho + \frac{۱}{\mu_i}},\qquad \boxed{X_k\approx Z^{(i+۱)}}$	هر $i\neq k$ داشته باشیم: $\lvert\lambda_k-\rho\rvert\le\lvert\lambda_i-\rho\rvert$

فصل هشتم: برازش منحنی

نام روش	فرمول‌ها	توضیحات
خط کمترین مربعات	خط $y=Ax+B$، خط حداقل مربعات نقاط $(x_۱,y_۱)$، . . . . ، (x_n,y_n) است، هرگاه: $\begin{cases} A=\frac{۱}{D}\left(n\sum_{k=۱}^{n}x_ky_k-\left(\sum_{k=۱}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=۱}^{n}y_k\right)\right) \\ B=\frac{۱}{D}\left(\left(\sum_{k=۱}^{n}x_k^۲\right)\left(\sum_{k=۱}^{n}y_k\right)-\left(\sum_{k=۱}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=۱}^{n}x_ky_k\right)\right)\end{cases},$ $D=n\sum_{k=۱}^{n}x_k^۲-\left(\sum_{k=۱}^{n}x_k\right)^۲$	در واقع با قرار دادن $E(A,B)=\sum_{k=۱}^{n}(Ax_k+B-y_k)^۲$ جهت یافتن مقدار مینیمم $E(A,B)$ باید دستگاه زیر را حل کرد: $\begin{cases}\frac{\partial E(A,B)}{\partial A}=۰\\ \frac{\partial E(A,B)}{\partial B}=۰\end{cases}$
سهمی کمترین مربعات	برای آنکه سهمی $y=Ax^۲+Bx+C$، خط حداقل مربعات نقاط $(x_۱,y_۱)$، . . . . ، (x_n,y_n) باشد، لازم است با قرار دادن $E(A,B,C)=\sum_{k=۱}^{n}(Ax_k^۲+Bx_k+C-y_k)^۲$ جهت یافتن مقدار مینیمم $E(A,B,C)$، دستگاه $\begin{cases}\frac{\partial E(A,B,C)}{\partial A}=۰\\ \frac{\partial E(A,B,C)}{\partial B}=۰\\ \frac{\partial E(A,B,C)}{\partial C}=۰\end{cases}$ را حل کرد.	
برازش توانی	اگر M معلوم باشد، بهترین تقریب کمترین مربعات تابع $y=Ax^M$ برابر $A=\frac{\sum_{k=۱}^{n}x_k^My_k}{\sum_{k=۱}^{n}x_k^{۲M}}$ می‌باشد.	
خطی‌سازی داده‌ها	لگاریتم تابع $y=ce^x$ تابع خطی $\ln y=x+\ln c$ می‌باشد. تابع $y=\frac{۱}{(ax+b)^n}$ نیز با تغییر متغیر $Y=y^{-\frac{۱}{n}}$ و تابع $y=\frac{x}{ax+b}$ با تغییر متغیر $Y=\frac{x}{y}$ خطی می‌شوند. برخی موارد دیگر در صفحهٔ ۳۴۲ آمده است.	
صفحهٔ کمترین مربعات	برای آنکه صفحهٔ $z=Ax+By+C$، خط حداقل مربعات نقاط $(x_۱,y_۱,z_n)$، . . . . ، (x_n,y_n,z_n) باشد، لازم است با قرار دادن $\boxed{E(A,B,C)=\sum_{k=۱}^{n}(Ax_k+By_k+C-z_k)^۲}$ جهت یافتن مقدار مینیمم $E(A,B,C)$، دستگاه $\begin{cases}\frac{\partial E(A,B,C)}{\partial A}=۰\\ \frac{\partial E(A,B,C)}{\partial B}=۰\\ \frac{\partial E(A,B,C)}{\partial C}=۰\end{cases}$ را حل کرد.	
برازش پیوسته	چندجمله‌ای $P(x)=Ax+B$، برازش پیوستهٔ تابع $y=f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ است، هرگاه با قرار دادن $S=\int_a^b(f(x)-P(x))^۲dx$ مقادیر A و B از حل دستگاه $\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial A}=۰\\ \frac{\partial S}{\partial B}=۰\end{cases}$ حاصل شوند.	