فصل ۲

ساختار دیفرانسیلپذیر

۱.۲ C^∞–ساختار

اکنون برآنیم که آنالیز را هم به مطالعهٔ منیفلدها وارد کنیم. ابزار لازم برای این کار «حساب دیفرانسیل و انتگرال» است، که احتمالاً شما آن را مطالعه نموده‌اید. فی‌المثل، در خصوص فصول ۲ و ۳ از حساب بر منیفلدها (اثر اسپیواک)، از احکام و نمادهای این دو فصل آزادانه استفاده می‌کنیم. همچنین از مسایل ۲–۹، ۲–۱۵، ۲–۲۵، ۲–۲۶، ۲–۲۹، ۳–۳۲ و ۳–۳۵ نیز استفاده می‌کنیم. نگاشت همانی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ را با نماد Id و نه π نشان می‌دهیم. سپس $\mathrm{Id}^i(x) = x^i$

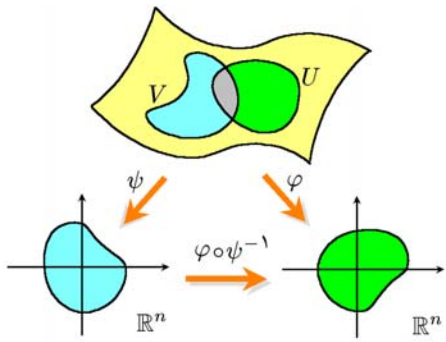
مفهوم تابع پیوسته $f : M \to \mathbb{R}$ در مورد منیفلد دلخواه M با معنی است، اما تابع دیفرانسیلپذیر $f : M \to \mathbb{R}$ چنین نیست. با وجود موضعاً شبیه بودن M با $\mathbb{R}^n$ امکان تعریف دیفرانسیلپذیری توابع وجود دارد.

اگر $U \subseteq M$ مجموعه‌ای باز بوده و همئومورفیسمی $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ در اختیار باشد، f را در صورتی بر U **دیفرانسیلپذیر** گوئیم که $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. متأسفانه اگر $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ همومورفیسم دیگری باشد و $U \cap V \neq \emptyset$، آنگاه لزومی ندارد که $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نیز دیفرانسیلپذیر باشد. چرا که

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

و تنها دیفرانسیلپذیری $f \circ \varphi^{-1}$ را داریم. پس اگر $\varphi \circ \psi^{-1}$ دیفرانسیلپذیر فرض شود، آنگاه $f \circ \psi^{-1}$ نیز دیفرانیلپذیر خواهد بود. اما این کار مشکل را حل نمی‌کند

و هیومورفیسمهای دیگر پیش می‌آیند.



شکل ۱.۲: سازگاری چارتها

برای رفع این مشکل لازم است از بین همهٔ هیومورفیسمهای ممکن برای منیفلد، آنهایی را در نظر بگیریم (یعنی، دسته‌ای بخصوص از آن) که به ازاء هر φ و ψ در آن خانواده، $\varphi\circ\psi^{-1}$ دیفرانسیلپذیر باشد. این دقیقاً همهٔ آن چیزی است که انجام می‌دهیم، منتهی با کمی تفصیل بیشتر (به شکل ۱.۲ توجه شود).

اول از همه تقریباً در همهٔ موارد به توابعی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ توجه می‌کنیم که C^∞ هستند (یعنی، هر یک از f^i ها تا هر مرتبه‌ای مشتق جزیی پیوسته دارند)؛ اغلب از اصطلاح «دیفرانسیلپذیر» یا «هموار» به معنی C^∞ استفاده می‌کنیم.

بجای در نظر گرفتن هیومورفیسمهای از زیر مجموعه‌های باز U در M بر روی $\mathbb{R}^n$، کافی است هیومورفیسمهایی $x:U\to x(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم که بروی زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ هستند. از حروف x، y و ... برای نمایش این گونه هیومورفیسمها استفاده می‌کنیم. نقاط را با نماد $p\in M$ نشان می‌دهیم که $x(p)\in\mathbb{R}^n$ و مختصات آنها $x^1(p)$، . . . و $x^n(p)$ هستند.

تنها در حالت منیفلد $\mathbb{R}^n$ ممکن است این نماد گذاری ایجاد ابهام کند. در این حالت اعضاء $\mathbb{R}^n$ را با x و y نشان می‌دهیم. اغلب بجای اینکه فقط x را ذکر کنیم، اغلب از زوج (x,U) استفاده می‌کنیم و دامنهٔ آنرا معرفی می‌کنیم.

اگر U و V زیر مجموعه‌های بازی از M باشند، در صورتی دو هیومورفیسم

$$x:U\to x(U)\subseteq\mathbb{R}^n \quad \text{و} \quad y:V\to y(V)\subseteq\mathbb{R}^n$$

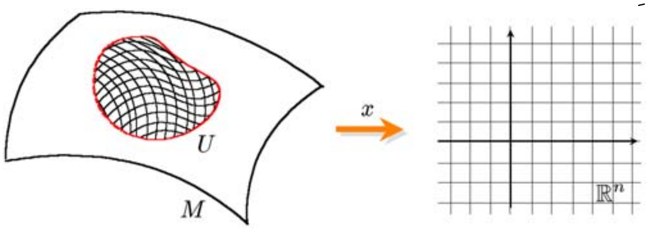
را C^∞–**مرتبط** گوئیم که نگاشتهای

$$y\circ x^{-1}:x(U\cap V)\to y(U\cap V)$$
$$x\circ y^{-1}:y(U\cap V)\to x(U\cap V)$$

C^∞ باشند. این با معنی است، زیرا $x(U\cap V)$ و $y(U\cap V)$ در $\mathbb{R}^n$ بازند. همچنین، اگر $U\cap V=\emptyset$ این شرط با معنی است و خود به خود بر قرار است.

خانوادهای از همیومورفیسمهای دو به دو C^∞–مرتبط که دامنهٔ آنها M را بپوشاند، **اطلسی برای** M نامیده می شود. هر عضو از یک اطلس $\mathcal{A}$ $(x,U)\in$ را **چارت** یا **دستگاه مختصاتی بر** U می‌نامیم.

دلیل اسم گذاری مذکور این است که به هر $p\in U$ ای مختصات $(x^1(p),\cdots,x^n(p))$ نظیر می‌گردد. بعلاوه، با تصویر کردن مجموعهٔ خطوط موازی محورهای در $\mathbb{R}^n$ بر روی U، با تصویر نمودن دستگاه مختصات، به شبکه‌ای بر کل U دست می‌یابیم (به شکل ۲.۲ توجه شود).



شکل ۲.۲: دستگاه مختصات

ساده‌ترین مثال از منیفلد به همراه اطلس، خود $\mathbb{R}^n$ به همراه اطلسی تک عضوی است که شامل نگاشت همانی $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ می‌باشد. به سادگی می‌توان اطلسهای بزرگی هم از روی آن ساخت. اگر U و V زیر مجموعه‌های بازی از $\mathbb{R}^n$ باشند که با $\mathbb{R}^n$ همیومورفند، عضو $x:U\to V$ را به اطلس می‌توانیم اضافه کنیم، مشروط به اینکه x و x^{-1} نگاشتهایی C^∞ باشند. به هر تعدادی که بخواهیم می‌توانیم چنین x هایی را بیافزائیم، زیرا به سادگی می‌توان C^∞–مرتبط بودن آنها را تحقیق نمود. مزیت این اطلس بزرگتر $\mathcal{U}$ این است که سخن گفتن در مورد اطلس تک عضوی $\mathcal{A}$ ابهام برانگیز است و استفاده از $\mathcal{U}$ مناسبتر می‌باشد. سوای این مطلب، تفاوت $\mathcal{U}$ و $\mathcal{A}$ سطحی است؛ به سهولت می‌توان $\mathcal{U}$ را از $\mathcal{A}$ ساخت.

آنچه در مورد $\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\}$ گفتیم، در مورد هر اطلسی می‌توان گفت.

۱.۱.۲ لم. اگر $\mathcal{A}$ اطلسی از چارتهای C^∞–مرتبط بر M باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ در اطلسی ماکسیمال $\mathcal{A}'$ برای M قرار دارد.

اثبات: گیریم $\mathcal{A}'$ مجموعهٔ همهٔ چارتهای y است که با همهٔ چارتهای در $x\in\mathcal{A}$ C^∞–مرتبطند. بسادگی می‌توان تحقیق نمود که همهٔ چارتهای در $\mathcal{A}'$ با هم C^∞–مرتبط

هستند و لذا $\mathcal{A}'$ هم یک اطلس است. یکتایی این اطلس ماکسیمال $\mathcal{A}'$ شامل $\mathcal{A}$ بدیهی است. $\square$

اکنون، C^∞−منیفلد (یا منیفلد دیفرانسیلپذیر یا منیفلد هموار) را به صورت زوج مرتب $(M, \mathcal{A})$ تعریف می‌کنیم که $\mathcal{A}$ یک اطلس ماکسیمال برای M می‌باشد.

بنابراین، ساده‌ترین منیفلد هموار $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ است، که $\mathcal{A}$ (ساختار C^∞ معمولی بر $\mathbb{R}^n$) اطلس ماکسیمال شامل $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ می‌باشد.

مثال دیگر، $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ است که در آن $\mathcal{V}$ از همیومورفیسم $x \longrightarrow x^3$ (که وارونش C^∞ نیست) به همراه با چارتهای C^∞−مرتبط با آن تشکیل می‌شود. با اینکه $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ و $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ یکی نیستند، تابعی یکبیک و برو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$x \in \mathcal{A} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad x \circ f \in \mathcal{V}$$

یعنی، نگاشت $f(x) = x^3$. بنابراین، $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ و $(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ از آن دسته ساختارهایی هستند که مایلیم آنها را ایزومورف بدانیم؛ البته اصطلاح مشهور، دیفئومورف است:

دو C^∞−منیفلد $(M, \mathcal{A})$ و $(N, \mathcal{B})$ را در صورتی **دیفئومورف** گوئیم که تابعی یکبیک و برو $f : M \to N$ طوری یافت گردد که

شکل ۳.۲: منیفلدهای دیفیومورف

$$x \in \mathcal{B} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad x \circ f \in \mathcal{A}$$

نگاشت f را **دیفئومورفیسم** می‌نامیم (به شکل ۳.۲ توجه شود). روشن است که در این صورت، f^{-1} نیز دیفیپوموفیسم است. چنانچه از اطلسهای ماکسیمال در استفاده نکنیم، تعریف دیفیئومورفیسم بسیار پیچیده می‌گردد.

در عمل، غالباً از ذکر اطلس خودداری می‌کنیم و M را منیفلد دیفرانسیلپذیر خطاب می‌کنیم؛ اغلب، اطلس مربوط به M را تحت عنوان ساختار دیفرانسیلپذیر برای M معرفی می‌کنیم. در بسیاری از اوقات $\mathbb{R}^n$ را بجای $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$ خطاب می‌کنیم.
بسادگی ملاحظه می‌گردد که هر دیفئوموفیسمی الزاماً پیوسته است. نتیجتاً، وارونش نیز پیوسته است و لذا دیفئومورفیسم بطور خودکار همیوموفیسم است.
طبیعی است که این سوال مطرح شود که

«آیا دو منیفلد همیومورف، الزاماً دیفیئومورفند؟»

بعداً (در مسالهٔ ۹—۲۴) قادریم ثابت کنیم که $\mathbb{R}$ با هر اطلسی با $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ استاندارد، دیفیئومورف است.
اثبات حکم مشابهی برای $\mathbb{R}^۲$ بسیار مشکتر است و اثبات برای حالت $\mathbb{R}^۳$ مشکتر از آن است که بتوان در اینجا مطرح نمود. حالت $\mathbb{R}^۴$ هنوز مشخص نیست و حکم برای $n \geq ۵$ صحیح است. یعنی C^∞–ساختار بر $\mathbb{R}^n$ که $n \geq ۵$ منحصر بفرد است، اما به تکنیکهای پیچیده‌ای از توپولوژی نیاز دارد.
در مورد کره‌ها وضعیت کاملاً متفاوت است. به وضوح تصاویر $p_۱$ و $p_۲$ بترتیب از نقاط $(۰, \cdots, ۰, ۱)$ و $(۰, \cdots, ۰, -۱)$ از $\mathbb{S}^{n-۱}$ به روی $\mathbb{R}^{n-۱}$ با هم C^∞–مرتبط هستند. لذا اطلسی برای $\mathbb{S}^{n-۱}$ می‌سازند. این اطلس را اطلس C^∞ یا C^∞–ساختار استاندارد بر $\mathbb{S}^{n-۱}$ می‌نامیم. این اطلس را با $۲n$ همیومورفیسم به شرح زیر نیز می‌توان معرفی نمود:

$$f_i : \mathbb{S}^{n-۱} - \{(۰, \cdots, ۰, ۱)\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-۱}$$
$$f_i(x) = (x^۱, \cdots, x^{i-۱}, x^{i+۱}, \cdots, x^n)$$
$$g_i : \mathbb{S}^{n-۱} - \{(۰, \cdots, ۰, -۱)\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-۱}$$
$$g_i(x) = (x^۱, \cdots, x^{i-۱}, x^{i+۱}, \cdots, x^n)$$

که با $p_۱$ و $p_۱$ C^∞–مرتبط هستند. به ازای $n \leq ۶$ در حد دیفیپومورفیسم یک و تنها یک C^∞–ساختار بر $\mathbb{S}^n$ وجود دارد. اما بر $\mathbb{S}^۷$ در حد دیفیئومورفیسم دقیقاً ۲۸ دستهٔ متفاوت از C^∞–ساختارها وجود دارد و بر $\mathbb{S}^{۳۱}$ بیش از ۱۶ میلیون C^∞–ساختار متفاوت وجود دارد. البته، حتی به اثبات این احکام نزدیک نیز نمی‌شویم، چرا که به بخشی از هندسه بنام توپولوژی دیفرانسیل متعلقند، نه به هندسهٔ دیفرانسیل!
مثالهای بیشتری از منیفلدهای دیفرانسیلپذیر خواهیم آورد، قبل از آن بر هر زیر مجموعهٔ باز N از یک منیفلد دیفرانسیلپذیر مفروض $(M, \mathcal{A})$، اطلس دیفرانسیلپذیری

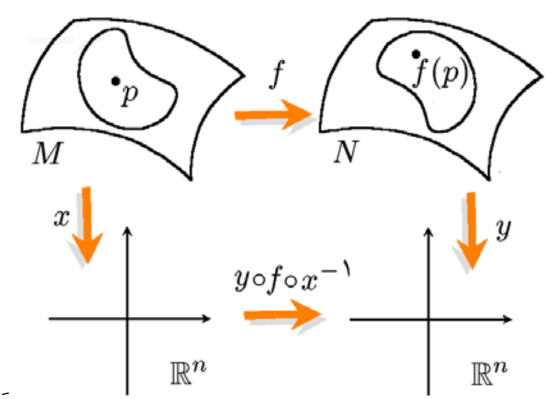
A' را معرفی می‌کنیم: اعضاء A' همه‌ی (x,U) هایی از A هستند که $U \subseteq N$.

۲.۲ C^∞–تابع

درست، همان طور که در مقابل همیومورفیسم بین فضاهای توپولوژی، دیفیئومورفیسم بین ساختارهای C^∞ مطرح می‌شود، در مقایسه با توابع پیوسته هم، توابع دیفرانسیلپذیر مطرح می‌گردد.

تابع $f : M \to N$ را در صورتی دیفرانسیلپذیر گوئیم که به ازاء هر دستگاه مختصات دلخواه (x,U) برای M و (y,V) برای N، نگاشت $y \circ f x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دیفرانسیلپذیر باشد. بخصوص، در صورتی f در $p \in M$ **دیفرانسیلپذیر** است که به ازاء هر دستگاه مختصاتی (x,U) با $p \in U$ و هر دستگاه مختصاتی (y,V) با $f(p) \in V$، $y \circ f \circ x^{-1}$ در نقطهٔ $x(p)$ دیفرانسیلپذیر باشد (به شکل ۴.۲ توجه شود).

اگر این حکم برای یک جفت از دستگاههای مختصاتی درست باشد، آنگاه برای هر جفت دیگری نیز درست خواهد بود. پس می‌توانیم دیفرانسیلپذیری f را بر هر زیر مجموعهٔ باز $M' \subseteq M$ تعریف کنیم؛ در واقع این موضوع با دیفرانسیلپذیری تحدید $f|_{M'} : M' \to M$ معادل است؛ و به وضوح، هر نگاشت دیفرانسیلپذیر، هموار است.



شکل ۴.۲: تابع دیفرانسیلپذیر

روشن است که وقتی از یک (نگاشت) تابع دیفرانسیلپذیر $f : M \to \mathbb{R}$ سخن می‌گوئیم، منظور این است که بر $\mathbb{R}$ ساختار دیفرانسیلپذیر استاندارد وجود دارد، و لذا وقتی f دیفرانسیلپذیر است که به ازاء هر چارت x ای $f \circ x^{-1}$ دیفرانسیلپذیر باشد. بسادگی ملاحظه می‌گردد که

(۱) تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ به عنوان نگاشتی بین C^∞–منیفلدها وقتی و تنها وقتی دیفرانسیلپذیر است که به معنی معمولی دیفرانسیلپذیر باشد.

(۲) وقتی و تنها وقتی تابع $f : M \to \mathbb{R}^m$ دیفرانسیلپذیر است که به ازاء هر i ای تابع مختصاتی $f^i : M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشد.

(۳) اگر (x, U) یک دستگاه مختصاتی باشد، x دیفیئوموفیسمی از U و $x(U)$ است.

(۴) تابع $f : M \to N$ وقتی و تنها وقتی دیفرانسیلپذیر است که به ازاء هر دستگاه مختصاتی y از N و هر i ای تابع $y^i \circ f : M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشد.

(۵) تابع $f : M \to N$ وقتی و تنها وقتی دیفیئومورفیسم است که f یکبیک و برو بوده و f^{-1} دیفرانسیلپذیر باشد.

در بسیاری از موارد، ساختار دیفرانسیلپذیر بر منیفلدها را به گونه‌ای مطرح می‌کنند که طی آنها توابع بخصوصی دیفرانسیلپذیرند. برای نمونه، حاصلضرب $M_1 \times M_2$ دو منیفلد دیفرانسیلپذیر M_1 و M_2 را در نظر بگیرید: $M_1 \times M_2$. در این صورت، تصاویر $\varphi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ به شکل $\varphi_i(p_1, p_2) = p_i$ تعریف می‌شوند که $i = 1, 2$. به سادگی می‌توان ساختاری بر $M_1 \times M_2$ تعریف نمود که به واسطهٔ آن φ_1 و φ_2 دیفرانسیلپذیر شوند. به ازاء هر دو دستگاه مختصات (x_i, U_i) بر M_i (که $i = 1, 2$)، هميومورفيسم

$$x_1 \times x_2 : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^{n_1 + n_2}$$

$$(x_1, x_2)(p_1, p_2) := (x_1(p_1), x_2(p_2))$$

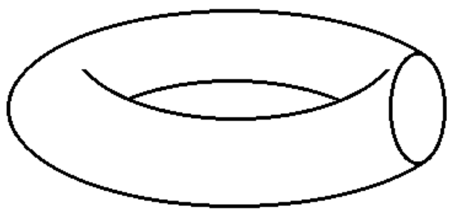
را در نظر می‌گیریم. یعنی، $(x_1 \circ \varphi_1, x_2 \circ \varphi_2) = x_1 \times x_2$. سپس، این اطلس را به اطلسی کامل توسیع می‌دهیم.

بطور مشابه، بر $\mathbb{P}^n$ ساختاری دیفرانسیلپذیر وجود دارد که به واسطهٔ آن نگاشت $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ (با ضابطهٔ $f(p) = [p] = \{p, -p\}$) دیفرانسیلپذیر می‌شود. به ازاء هر دستگاه مختصات (x, U) برای $\mathbb{S}^n$، که U دارای این ویژگی باشد که اگر $p \in U$ آنگاه $-p \notin U$ (یعنی $f|_U$ یکبیک باشد)، نگاشت $x \circ (f|_U)^{-1}$ همیومورفیسمی بروی $f(U) \subset \mathbb{P}^n$ است و هر دو چنین همیومورفیسمی با هم C^∞–مرتبط می‌باشند. گردایهٔ این همیومورفیسمها را به اطلسی ماکسیمال برای $\mathbb{P}^n$ گسترش می‌دهیم.

برای حصول به ساختارهای دیفرانسیلپذیر بر اغلب رویه‌های موجود، ابتدا باید بتوان منیفلد مرزدار C^∞ را معرفی کرد. برای این منظور کافی است بدانیم که نگاشت مفروض

$f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$ در صورتی دیفرانسیلپذیر شمرده می‌شود که قابل توسیع به نگاشتی دیفرانسیلپذیر بر یک همسایگی از $\mathbb{H}^n$ در $\mathbb{R}^n$ باشد. پس، مثلاً یک دسته، نمونه‌ای از یک منیفلد مرزدار است.

ساختار دیفرانسیلپذیر بر تیوب دو—دسته‌ای (یا دو حرفه‌ای) را با متصل کردن ساختار دیفرانسیلپذیر بر دو دسته‌اش می‌توان بدست آورد. جزئیات این بحث را در مسالهٔ ۱۴ می‌توانید ملاحظه کنید (به شکل ۵.۲ توجه شود).



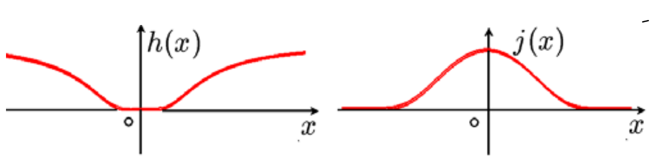
شکل ۵.۲: یک دسته

برای استفادهٔ بهینه از توابع C^∞، لازم است کمی بیشتر آنها را بشناسیم. وجود توابع C^∞ بر یک منیفلد مفروض به وجود توابع $C\infty$ بر $\mathbb{R}^n$ که در خارج یک مجموعهٔ فشرده صفرند، بستگی دارد. ذیلاً، به بیان حکم لازم در خصوص این گونه توابع C^∞ (از مثلاً صفحهٔ ۲۹ از حساب بر منیفلدها) می‌پردازیم.

(۱) تابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

هموار است و به ازای هر n ای $h^{(n)}(0) = 0$.



شکل ۶.۲

(۲) تابع $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

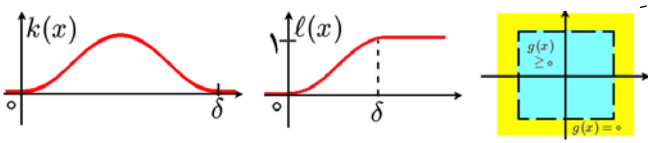
$$j(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^2} . e^{-(x+1)^2} & x \in (-1; 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

هموار است. به صورت مشابه، به ازای هر $\delta > 0$، تابع هموار $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ای وجود دارد که بر $(0;\delta)$ مثبت است و در خارج از آن صفر می‌باشد.

(۳) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با صابطهٔ

$$f(x) = \left(\int_0^x k(t)\, dt\right) \div \left(\int_0^\delta k(t)\, dt\right)$$

هموار است. به ازای $x \leq 0$ ها صفر است و به ازای $x \geq \delta$ ها یک است و کلاً صعودی می‌باشد.



شکل ۷.۲

(۴) تابع $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

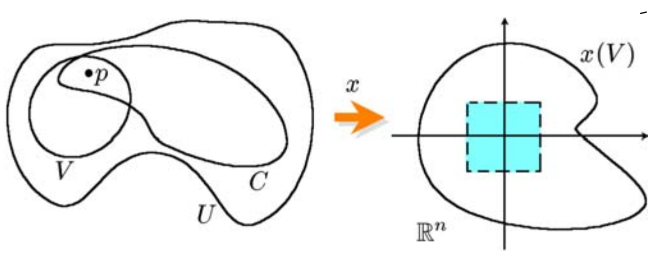
$$g(x) = j\Big(\frac{x^1}{\varepsilon}\Big) \bullet \cdots \bullet j\Big(\frac{x^n}{\varepsilon}\Big)$$

هموار است، بر $(-\varepsilon;\varepsilon)\times\cdots\times(-\varepsilon;\varepsilon)$ مثبت است و در سایر جاها صفر می‌باشد.

۱.۲.۲ لم. گیریم $C \subset U \subset M$ که C فشرده و U باز می‌باشد. در این صورت، تابعی C^∞ مانند $f : M \to [0;1]$ چنان وجود دارد که f بر U برابر یک است و $\text{Supp}(f) \subset U$، که $\text{Supp}(f) := \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$ محمل تابع f می‌باشد. (با حالت ۲ از اثبات قضیهٔ ۱۵ مقایسه گردد).

اثبات: به ازای هر $p \in C$، دستگاهی مختصاتی (x, V) با $\bar{V} \subset U$ و $x(p) = 0$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت، بازاء یک $\varepsilon > 0$ ای $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\cdots\times(-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq x(V)$. اکنون تابع $g \circ x$ (که g در قسمت (۴) از بالا تعریف شد) هموار است بر V. به وضوح چنانچه آنرا در خارج از V برابر صفر تعریف کنیم، همچنان هموار می‌نامند. گیریم f_p توسیع آن به این طریق باشد. به ازاء هر $p \in C \subset M$ ای تابع f_p را می‌توان

ساخت؛ این تابع بر یک همسایگی از p که بستارش در U قرار دارد، مثبت است. چون C فشرده است، تعدادی متناهی از آنها برای پوشش دادن C کافی است (یعنی دامنهٔ مثبت بودن f_p ها می‌توانند C را با تنها تعدادی متناهی p بپوشاند) و بعلاوه، مجموع ای توابع $f_{p_1}+\cdots+f_{p_n}$ که به همسایگی‌های مورد نظر، وابسته‌اند و محملشان در U قرار دارد، قابل ساخت می‌باشد. این تابع بر C مثبت است و لذا به ازاء یک $\delta>0$ ای به ازاء هر $p\in C$ ای از δ بزرگتر است. گیریم $f:=\ell\circ(f_{p_1}+\cdots+f_{p_n})$، که ℓ در قسمت (۳) از بالا ساخته شد. این همان تابع مورد نظر در صورت قضیه است.



شکل ۸.۲

از نظر تکنیکی به ازاء هر $r\geq 1$ ای قادر به تعریف منیفلدهای C^r هستیم، نه تنها حالت منحصر بفرد $r=\infty$. ($f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را در صورتی C^r گوئیم که تمام مشتقات جزئی تا مرتبهٔ r ام آن پیوسته باشند). C^0–تابع را همان تابع پیوسته می دانیم و لذا C^0–منیفلد دقیقاً به معنی منیفلد به تعبیر در فصل یک است. منیفلد تحلیلی را نیز می‌توان تعریف نمود. (در صورتی می‌گوئیم $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ در $a\in\mathbb{R}^n$ تحلیلی است که f را در یک همسایگی از a به صورت یک سری توان از عناصر به شکل (x^i-a^i) به گونه‌ای بتوان بسط داده که در آن همسایگی به f همگرا باشد.) از نماد C^ω برای حالت تحلیلی استفاده می‌کنیم، بعلاوه به ازاء هر $0\geq$ ای داریم $r<\infty<\omega$.

چنانچه $\alpha<\beta$، آنگاه کلیهٔ چارتهای در یک C^β–اطلس ماکسیمال با هم C^α–مرتبط هستند و بنا به لم ۱.۱.۲ چنین خانواده‌ای را می‌توان به یک اطلس ماکسیمال گسترش داد و به یک C^α–ساختار رسید. پس هر C^β–ساختار بر M به طور منحصر بفردی به یک C^α–ساختار بر M قابل گسترش است؛ ساختار کوچکتر، قویتر است. در نتیجه، C^0–ساختار (که از همهٔ همیومورفیسم‌های بشکل $x:U\to\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌گردد) بزرگترین ساختار بر M است. عکس این حکم بدیهی، قضیه‌ای بسیار دشوار است: به ازاء هر $\alpha\geq 1$، هر C^α–ساختار دارای یک C^β–ساختار است که $\alpha>\beta$ دلخواه است؛ البته این ساختار منحصر بفرد نیست، اما در حد دیفیئومورفیسمها منحصر بفرد

است. این حکم را در اینجا اثبات نمی‌کنیم. در حقیقت معرفی مجدد C^α−منیفلدها که $\alpha \neq \infty$ در بحث، کار دشواری است. تنها مطلبی که به ذکر آن بسنده می‌کنیم این است که اثبات لم ۱.۲.۲ برای تابع C^α بر منیفلدی C^α که $0 \leq \alpha \leq \infty$ کفایت می‌کند؛ ولی برای حالت $\alpha = \omega$ بکلی غلط است. تابعی تحلیلی که بر یک همسایگی باز صفر شود، صفر است.

۳.۲ مشتقات جزئی

اکنون که به قدر کافی توابع دیفرانسیلپذیر در اختیار داریم، جای آن دارد که به چگونگی دیفرانسیلگیری از آنها بپردازیم. آنچه که به دنبال آن هستیم، تعریف مشتقات جزئی یک تابع دیفرانسیلپذیر دلخواه $f : M \to \mathbb{R}$، نسبت به یک دستگاه مختصات دلخواه (x, U) است.

در این وضعیت نیز از نماد گذاری کلاسیک به وفور استفاده می‌شود، و لذا بجا که منطق استفاده از این نماد گذاری برای مشتقات جزیی توابع به شکل $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ روشن شود. عدد

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a^1, \cdots, a^i + h, \cdots, a^n) - f(a)}{h}$$

را با نماد $D_i f(a)$ نشان می‌دهیم. بنا به قضیهٔ مشتق زنجیره‌ای، اگر $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشند، در این صورت

$$D_j(f \circ g)(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(g(a)).D_j g^i(a)$$

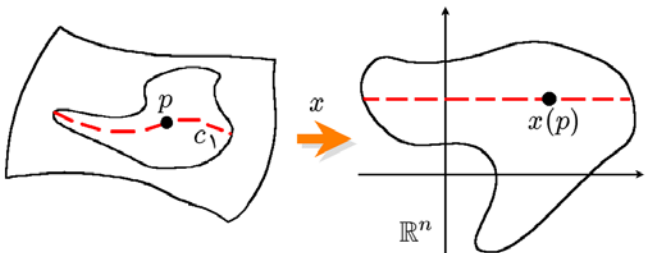
حال به ازاء هر تابع $f : M \to \mathbb{R}$ و هر دستگاه مختصات (x, U) تعریف می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = D_i(f \circ x^{-1})(x(p))$$

اگر منحنی $c_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ را با ضابطهٔ $c_i(h) = x^{-1}(x(p) + (0, \cdots, h, \cdots, 0))$ تعریف کنیم آنگاه ملاحظه خواهیم کرد که $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ دقیقاً $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(c_i(h)) - f(p))$ است. پس $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ میزان تغییرات f در امتداد منحنی c_i را می‌سنجد؛ در واقع، با $(f \circ c_i)'(0)$ برابر است. توجه شود که

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

چنانچه منحنی c_i و تصویرش در $\mathbb{R}^n$ را ترسیم کنیم، به شکل ۹.۲ می‌رسیم. اگر x نگاشت همانی $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = D_i f(p)$، که همان نماد مشتق جزئی کلاسیک است.



شکل ۹.۲

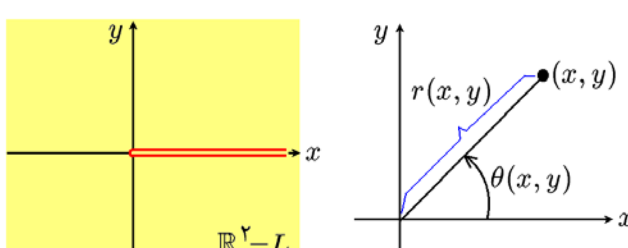
یک وضعیت کلاسیک دیگر از این نماد، وقتی پدیدار می‌شود که از نمادهای $\partial/\partial r$ و یا $\partial/\partial\theta$ در مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. بر زیر مجموعهٔ

$$A := \mathbb{R}^2 - L := \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, x \geq 0\}$$

از $\mathbb{R}^2$ دستگاه مختصات $P : A \to \mathbb{R}^2$ را به صورت

$$P(x,y) := (r(x,y), \theta(x,y))$$

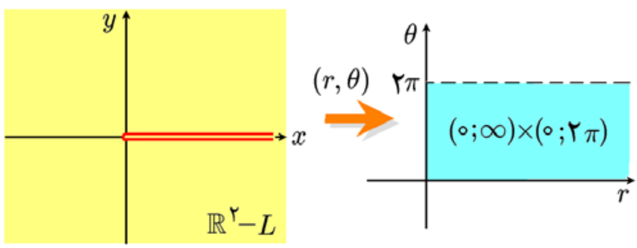
تعریف می کنیم، که $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$، $\theta(x,y)$ عددی منحصر بفرد در $(0;2\pi)$ است که



شکل ۱۰.۲

$$\begin{array}{lll} y/x=\tan(\theta(x,y)) & x\neq 0 & \text{اگر} \\ \theta(x,y)=\pi/2 & x=0<y & \text{اگر} \\ \theta(x,y)=3\pi/2 & x=0>y & \text{اگر} \end{array}$$

به این ترتیب به یک دستگاه مختصات بر A به تعبیر بالا می‌رسیم (به شکل ۱۰.۲ توجه شود)؛ تصویر آن $(0;2\pi)\times\{r|r>0\}$ است. (شایان ذکر است که دستگاه مختصات موضعی ممکن است به A محدود نشود. بجای L می‌توان هر شعاع دیگری را در نظر گرفت و به دستگاهی با تصویر $(\theta_0;\theta_0+2\pi)\times\{r|r>0\}$ رسید. به شکل ۱۱.۲ توجه شود.)

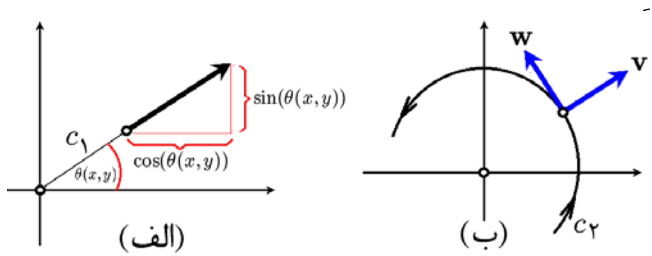


شکل ۱۱.۲

تابع وارون P^{-1} از خود P معروف تر است، چرا که آنرا به راحتی می‌توان تعریف نمود: $P^{-1}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$. از این فرمول $\partial f/\partial r$ را به صورت صریح می‌توان بدست آورد: $(f\circ P^{-1})(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}(x,y) &= D_1(f\circ P^{-1})(P(x,y)) \\ &= D_1f(p^{-1}(p(x,y)))\bullet D_1((P^{-1})^1(x,y)) \\ &\quad +D_2f(p^{-1}(p(x,y))\bullet D_2((P^{-1})^2(x,y)) \\ &= D_1f(x,y)\bullet\cos(\theta(x,y))+D_2f(x,y)\bullet\sin(\theta(x,y)) \end{aligned}$$

بر اساس این فرمول، مقدار مشتق امتدادی تابع f در نقطهٔ (x,y) و در امتداد بردار هادی $(\cos(\theta(x,y)),\sin(\theta(x,y)))$ با آغاز از نقطهٔ (x,y) محاسبه می‌کند. بردار $\mathbf{v}$ برداری است که از مبداء به (x,y) متصل می‌گردد. منحنی c_1 آغازی از (x,y) با بردار هادی $\mathbf{v}$ تصویر یک خط موازی r–محور توسط P^{-1} است. به همین دلیل، این مشتق را با نماد $\partial f/\partial r$ می‌توان نشان داد. به قسمت (الف) از شکل ۱۲.۲ توجه گردد.



شکل ۱۲.۲

با محاسبهٔ مشابه می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta}(x,y) &= D_۱ f(x,y)[-r(x,y)\sin(\theta(x,y))]\\ &\quad +D_۲ f(x,y)[r(x,y)\cos(\theta(x,y))]\end{aligned}$$

بردار $\mathbf{w} = (-\sin(\theta(x,y)), \cos(\theta(x,y)))$ به $\mathbf{v}$ عمود است و لذا جهت آن در نقطهٔ (x,y) برابر بردار $c_۲$ است که تصویر عکس منحنی موازی θ–محور توسط P است. دلیل ظهور ضریب $r(x,y)$ این است که اگر θ از ۰ تا ۲π حرکت کند، دایره به شعاع $r(x,y)$ است و هموار باندازهٔ $r(x,y)$ برابر تندتر حرکت می‌کند. بنابراین مشتق جزئی f در امتداد $\mathbf{w}$ به اندازهٔ $r(x,y)$ برابر مشتق جزئی f در امتداد $\mathbf{v}$ است. به قسمت (ب) از شکل ۱۲.۲ توجه گردد.

با استفاده از نماد $\partial f/\partial x$ بجای $D_۱ f$ و نظایر آن، و حذف تکرار متغیرهای (x,y) در همهٔ فرمولهای بالا آنها را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\end{aligned}$$

از این فرمولها، بخصوص برای محاسبهٔ $\partial x/\partial r$ و ... می‌توان استفاده نمود که (x,y) نمایشگر دستگاه مختصات همانی $\mathbb{R}^۲$ است. در این صورت، $\partial x/\partial r = \cos\theta$ و ... و لذا این فرمولها را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\end{aligned}$$

در نمادگذاری کلاسیک، اغلب قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق را به این طریق بیان می‌کنند. در ادامه، از این حکم استفاده می‌شود و بنابراین بجا است که آنرا به صورت زیر مجدداً مطرح کنیم:

۱.۳.۲ گزاره. اگر (x, U) و (y, V) دو دستگاه مختصات بر منیفلد M باشند، و $f : M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیلپذیر باشد، در این صورت بر $U \cap V$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \tag{1.2}$$

اثبات: اگر خونسردی خود را حفظ کنید، خواهید دید که این حکم همان قاعدهٔ (کلاسیک) زنجیره‌ای مشتق است:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) &= D_i(f \circ y^{-1})(y(p)) \\
&= D_i([f \circ x^{-1}] \circ [x^{-1} \circ y^{-1}])(y(p)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j(f \circ x^{-1})([x \circ y^{-1}](y(p)) \bullet D_i[x \circ y^{-1}]^j(y(p)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_j(f \circ x^{-1})(x(p) \bullet D_i[x \circ y^{-1}]^j(y(p)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)
\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

در ادامه، لازم است **نمادگذاری انیشتن** را مطرح می‌کنیم. توجه شود که در فرمول آخر، اندیس j در بالای $\partial x^j/\partial y^i$ و در پائین $\partial f/\partial x^j$ ظاهار شد. در بعضی مواقع فرمولهایی از این نوع ظاهار می‌شود که نوشتن آنها جاگیر است. در چنین مواردی می‌توان نماد $\sum$ را حذف کرد و قرار داد کرد که باید جملات از این نوع را روی اندیسی که در بالا و پائین همزمان آمده است، جمع زد. من از این نماد استفاده نمی‌کنم، زیرا یادم می‌رود جمع بزنم و تنها حسن آن کوتاهتر شده طول این فرمولها است.

فرمول (۱.۲) را به صورت

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

می‌نویسیم که $\partial/\partial y^i$ عملگری است که تابع f را به $\partial f/\partial y^i$ می‌نگارد. عملگری که f را به $(\partial f/\partial y^i)(p)$ می‌نگارد، با نماد $\partial/\partial y^i|_p$ نشان می‌دهیم. در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial y^i}=\sum_{j=۱}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

۴.۲ نقطهٔ بحرانی

عملگر $\ell=\partial/\partial x^i\big|_p$ دارای ویژگی به شرح زیر بنام «مشتق—نقطه‌ای» است، که بعداً بکار می آید.

۱.۴.۲ گزاره. به ازاء هر دو تابع دیفرانسیلپذیر $f,g:M\to\mathbb{R}$ و هر دستگاه مختصات (x,U) با $p\in U$، عملگر $\ell=\partial/\partial x^i\big|_p$ در رابطهٔ زیر صدق می کند

$$\ell(fg)=f(p)\ell(g)+\ell(f)g(p)$$

اثبات: بر عهدهٔ خواننده. □

اگر (x,U) و (x',U') دو دستگاه مختصاتی بر M باشند، $n\times n$—ماتریس $(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j})(p)$ درست برابر ژاکوبی نگاشت $x'\circ x^{-۱}$ در $x(p)$ است. این ماتریس نامفرد است. در واقع، معکوس آن $(\partial x^i/\partial x'^j)(p)$ می‌باشد.

حال اگر $f:M^n\to N^m$ نگاشتی هموار و (y,V) یک دستگاه مختصات حول $f(p)$ باشد، رتبهٔ $m\times n$—ماتریس

$$\left(\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}(p)\right)$$

به انتخاب دستگاه مختصاتی (x,U) یا (y,V) بستگی ندارد. این عدد مشترک را **رتبهٔ** f در p می‌نامند.

نقطهٔ p را در صورتی یک **نقطهٔ تکین** f گوئیم که رتبهٔ f در p کمتر از m (بعد تصویر N) باشد، چنانچه نقطهٔ p تکین نباشد، آنرا نقطهٔ منظم f نامیده و $f(p)$ را یک **مقدار منظم** f می‌گوئیم. سایر نقاط در N را **مقادیر تکین** f می‌نامیم.

پس اگر $q\in N$، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه q یک مقدار منظم f است که به ازای هر $p\notin f(q)$ ای p یک نقطهٔ منظم f باشد. این شرط در حالت خاص $q\notin f(M)$ صحیح است. یعنی، هر نامقدار f، یک مقدار منظم آن می‌باشد.

اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، آنگاه وقتی و تنها وقتی x نقطهٔ تکین f است که $f'(x)=0$. احتمال دارد که همهٔ نقاط در بازهٔ $[a;b]$ تکین باشند، که البته این حالت تنها در صورتی ممکن است که f بر $[a;b]$ ثابت باشد. اگر همهٔ مقادیر تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تکین باشد، در این صورت در همه جا $D_1f=D_2f=0$ و لذا باز هم f ثابت است. از سوی دیگر این امکان وجود دارد که همهٔ نقاط $\mathbb{R}^2$ نقاط تکین $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ باشند، اما تابع ثابت نباشد؛ مثلاً تابع $f(x,y)=x$. البته در این حالت تصویر $f(\mathbb{R}^2)$ برابر $\mathbb{R}\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ است که زیر مجموعه‌ای بسیار کوچک از $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. قضیه‌ای بسیار مهم در خصوص نقاط تکین وجود دارد که این حکم را تعمیم می‌دهد. برای معرفی آن به چند اصطلاح نیاز داریم.

یادآور می‌شویم که زیر مجموعهٔ $A\subset\mathbb{R}^n$ در صورتی **باندازهٔ صفر** است که به ازاء هر $\omega>0$ ای یک دنباله $B_1,B_2,B_3,\cdots$ از مستطیلهای (باز یا بسته) چنان یافت شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}v(B_n)<\omega \quad , \quad A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

که (B_n) حجم B_n است. مفهوم مشابهی در خصوص زیر مجموعه‌های یم منیفلد می‌خواهم تعریف کنیم. برای این منظور به لمی نیاز داریم که خود به لمی از کتاب حساب بر منیفلدها بستگی دارد، که صورت آنرا مطرح می‌کنیم.

۲.۴.۲ لم. گیریم $A\subset\mathbb{R}^n$ یک مستطیل است و $f:A\to\mathbb{R}^n$ تابعی است که بازاء هر j,i با $i,j=1,\cdots,n$، نا مساوی $\|D_jf^i1\leq M\|$ بر قرار است. در این صورت، بازاء هر $x,y\in A$ ای $\|f(x)-f(y)\|\leq n^2M\|x-y\|$.

۳.۴.۲ لم. اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ از کلاس C^1 بوده و $A\subset\mathbb{R}^n$ باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A)$ نیز باندازهٔ صفر است.

اثبات: چون $\mathbb{R}^n$ اجتماعی شما را از مجموعه‌های فشرده است، می‌توانیم فرض کنیم که A در مجموعه‌ای فشرده C قرار دارد. لم ۵ ایجاب می‌کند که M ای با این ویژگی وجود دارد که بازاء هر $y\in C$ و x ای

$$\|f(x)-f(y)\|\leq n^2M\|x-y\|$$

بنابراین، F مستطیل با قطر d را به مجموعه‌ای تصویر می‌کند که قطر آن $\geq n^2Md$ است. از این نتیجه می‌شود که اگر A باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A)$ نیز هست. □

زیر مجموعهٔ A از منیفلد هموار n بعدی M را در صورتی باندازهٔ صفر گوئیم که دنباله‌ای از چارتها (x_i,U_i) با $A\subset\bigcup U_i$ چنان یافت شود که هر یک از مجموعه‌های $x_i(A\cup U_i)\subset\mathbb{R}^n$ باندازهٔ صفر باشد باشند. به کمک لم ۳.۴.۲ بسادگی ملاحظه می‌گردد که اگر $A\subset M$ باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $x(A\cup U)\subset\mathbb{R}^n$ نیز باندازهٔ صفر است، که (x,U) دستگاه مختصاتی دلخواه است. بالعکس، اگر این شرط بر قرار باشد، M همبند باشد، و یا اینکه تعداد مولفه‌های آن شما را باشد، آنگاه بسادگی از قضیهٔ ۲.۱.۱ نتیجه می‌شود که A باندازهٔ صفر است. (اما، اگر M اجتماعی مجزا از تعداد نا شما را کپی $\mathbb{R}$ باشد و A مجموعه‌ای باشد که از هر کپی $\mathbb{R}$ تنها یک نقطه در بر دارد، آنگاه A باندازهٔ صفر نیست). به این ترتیب از لم ۳.۴.۲، حکم زیر نتیجه می گردد:

۴.۴.۲ نتیجه. اگر $f:M\to N$ تابعی از کلاس C^1 بین منیفلدهای n بعدی باشد و $A\subset M$ باندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(A)\subset N$ نیز باندازهٔ صفر است.

اثبات: دنباله‌ای از چارتها (x_i,U_i) با $A\subset\bigcup_i U_i$ چنان وجود دارد که هر مجموعهٔ $x_i(A\cap U_i)$ باندازهٔ صفر است. اگر (y,V) چارتی بر N باشد، آنگاه $f(A)\cap V=\bigcup_i f(A\cap U_i)\cap V$. بنابه لم ۳.۴.۲، هر یک از مجموعه‌های

$$y(f(A\cap U_i)\cap V)=y\circ f\circ x^{-1}(x(A\cap U_i))$$

باندازهٔ صفر است. بنابراین $y(f(A)\cap V)$ نیز باندازهٔ صفر است. چون $f(U_i,u_i)$ در اجتماعی حداکثر شما را از مولفه‌های N قرار دارد، نتیجه می‌گیریم که $f(A)$ باندازهٔ صفر است. □

۵.۴.۲ قضیه (قضیهٔ سارد). اگر $f:M\to N$ تابعی از کلاس C^1 بین n−منیفلدها باشد و M به تعداد حداکثر شما را مولفهٔ داشته باشد، آنگاه مقادیر تکین f مجموعه‌ای باندازهٔ صفر در N تشکیل می‌دهند.

اثبات: چون حکم موضعی است، کافی است حکم را در صورتی در نظر بگیریم که N,M برابر $\mathbb{R}^n$ هستند. اما این حالت دقیقاً همان قضیهٔ ۳−۱۴ از کتاب حساب بر منیفلدها است.

۵.۲ قضیه‌های ایمرشن

نوع قویتر از قضیهٔ سارد وجود دارد که ما از آن استفاده نمی‌کنیم (مگر در مسالهٔ ۸–۲۴) که اذعان می‌دارد مقادیر تکین هر C^k–نگاشت $f : M^n \to N^m$، مشروط به آنکه $k \geq \max\{m-n, 0\}+1$، باندازهٔ صفر است. قضیهٔ ۵.۴.۲ حالت ساده‌ای از این حکم کلی است و حالت $m < n$ بدیهی است (مسالهٔ ۲۰)[1] با اینکه قضیهٔ ۵.۴.۲ در آینده بسیار مفید خواهد بود، در حال حاضر توجهمان را بر این موضوع معطوف می‌کنیم که با داشتن رتبهٔ K تابع $f : M \to N$ در یک نقطه $p \in M$ تصویر آن چگونه است هنگامی که رتبهٔ f در یک همسایگی از p ثابت است، اطلاعات دقیق‌تری می‌توان بدست بدست آورد. توجه شود که اگر رتبهٔ f در p برابر k باشد، آنگاه در یک همسایگی از p رتبهٔ آن $\leq k$ خواهد بود. زیرا حداقل یک زیر ماتریس $k \times k$ از $(\partial(y^i \circ f)/\partial x^i)$ در نقطهٔ p دترمینان مخالف صفر دارد، و چون تابع دترمینان پیوسته است، پس در یک همسایگی از p مخالف صفر است.

۱.۵.۲ قضیه. اگر $f : M^n \to N^m$ در p با رتبهٔ k باشد، آنگاه یک دستگاه مختصات موضعی (x, U) حول p و یک دستگاه مختصات موضعی (y, V) حول $f(p)$ به گونه‌ای وجود دارد که $y \circ f \circ x^{-1}$ به صورت

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^k, \psi^{k+1}(a), \cdots, \psi^m(a))$$

است. بعلاوه، اگر y دستگاه مختصات دلخواهی بر N گرد $f(p)$ باشد، آنگاه با تعویض مناسب مولفه‌های آن می‌توان دستگاه مختصات مناسب حکم اخیر را بدست آورد.

اگر f در یک همسایگی از نقطهٔ p با رتبهٔ k باشد، آنگاه دستگاههای مختصاتی (x, U) و (y, V) چنان یافت خواهند شد که

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^k, \cdots, 0)$$

۲.۵.۲ یادداشت. حالت خاص $M = \mathbb{R}^n$ و $N = \mathbb{R}^m$ با قضیهٔ کلی معادل است، چرا که حکم این قضیه موضعی است. چنانچه y چارت همانی $\mathbb{R}^m$ باشد، قسمت

[1] به کتاب توپولوژی از دیدگاه دیفرانسیلپذیری اثر میلنر یا کتاب درسهایی در هندسه دیفرانسیل اثر استرنبرگ مراجعه شود.

(۱) از قضیهٔ بالا اذعان می‌دارد که با اعمال دیفیئوموفیسمی بر $\mathbb{R}^n$ و سپس اعمال جایگشتی در مختصات $\mathbb{R}^m$، می‌توانیم مطمئن باشیم که f و k مولفهٔ اول را ثابت نگه دارد. روشن است که این دیفیئومورفیسم‌های بر $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$، زیرا ممکن است حتی f بر $\mathbb{R}^k \times \{۰\} \subset \mathbb{R}^n$ یکبیک هم نباشد، و مثلاً تصویر آن تنها نقاطی را شامل باشد که اولین مولفهٔ آنها صفرند.

در حالت (۲) در انتخاب y اختیار کمتری وجود دارد، زیرا ممکن است در $f(\mathbb{R}^n)$ هیچ زیر فضای $k-$بعدی از $\mathbb{R}^n$ قرار نگیرد.

اثبات: (۱) یک دستگا مختصات u گرد p انتخاب می‌کنیم. با اعمال جایگشت در توابع مختصاتی u^i و y^i در صورت لزوم، می‌توانیم آنها را طوری مرتب کنیم که

$$\det\left(\frac{\partial(y^\alpha\circ f)}{\partial u^\beta}(p)\right)\neq ۰ \qquad \alpha,\beta=۱,\cdots,k \tag{۲.۲}$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$x^\alpha := y^\alpha\circ f \qquad \alpha=۱,\cdots,k$$

$$x^r := u^r \qquad r=k+۱,\cdots,n$$

در این صورت، (۲.۲) ایجاب می کند که

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}(p)\right)=\det\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial(y^i\circ f)}{\partial u^\beta} & \begin{matrix} X \\ ۱ & \cdots & ۱ \end{matrix} \\ \hline O & \begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰ \end{matrix} \end{array}\right)\neq ۰ \tag{۳.۲}$$

این نشان می‌دهد که $x=(x\circ u^{-۱})\circ u$ دستگاهی مختصاتی در یک همسایگی از p است، زیرا به دلیل (۳.۲) و قضیهٔ تابع وارون، نگاشت $x\circ u^{-۱}$ در یک همسایگی از $u(p)$ دیفیئومورفیسم است. اکنون $q=x^{-۱}(a^۱,\cdots,a^n)$ به معنی $x(q)=(a^۱,\cdots,a^n)$ است. بنابراین $x^i(q)=a^i$ و در نتیجه

$$y^\alpha\circ f(q)=a^\alpha \qquad \alpha=۱,\cdots,k$$

$$u^r(q)=a^r \qquad r=k+۱,\cdots,n$$

بنابراین، در مجموع داریم

$$y\circ f\circ x^{-۱}(a^۱,\cdots,a^n)=y\circ f(q)=(a^۱,\cdots,a^k,\cdots)$$

که در آن $q=x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)$.

(۲) دستگاههای مختصاتی x و v را طوری انتخاب می‌کنیم که $v\circ f\circ x^{-1}$ به شکل (۲.۲) باشد. چون در یک همسایگی از p رتبهٔ f برابر k است، ماتریس مربعی پائین و سمت چپ X در ماتریس

$$\left(\frac{\partial(y^i\circ f)}{\partial x^j}\right)=\det\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{matrix} & O \\ \hline X & \begin{matrix}D_{k+1}\psi^{k+1}&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&D_m\psi^m\end{matrix}\end{array}\right)\neq 0$$

بایستی در یک همسایگی از p صفر باشد. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\psi^r(a)=\bar{\psi}^r(a^1,\cdots,a^k)\qquad r=k+1,\cdots,m$$

اکنون، تعریف می‌کنیم

$$y^\alpha:=v^\alpha\qquad y^r:=v^k-\bar{\psi}r\circ(v^1,\cdots,v^k)$$

اگر $v(q)=(b^1,\cdots,b^m)$، آنگاه

$$y\circ v^{-1}(b^1,\cdots,b^m)=y(q)\tag{۴.۲}$$

$$=\Big(b^1,\cdots,b^k,b^{k+1}-\bar{\psi}^{k+1}(b^1,\cdots,b^k),\cdots\tag{۵.۲}$$

$$\cdots,b^m-\bar{\psi}^m(b^1,\cdots,b^k)\Big)\tag{۶.۲}$$

و در نتیجه، دترمینان ماتریس ژاکوبی

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial v^j}\right)=\det\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{matrix} & O \\ \hline X & \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{matrix}\end{array}\right)$$

مخالف صفر است، و لذا y یک دستگاه مختصاتی در همسایگی $f(p)$ تشکیل می‌دهد. بعلاوه

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)=$$

$$\begin{aligned} &= y\circ v^{-1}\circ v\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)\\ &= y\circ v^{-1}\Big(a^1,\cdots,a^n,\psi^{k+1}(a),\cdots,\psi^m(a)\Big)\\ &\overset{(1)}{=} y\circ v^{-1}\Big(a^1,\cdots,a^n,\\ &\qquad \psi^{k+1}(a)-\bar{\psi}^{k+1}(a^1,\cdots,a^n),\cdots\\ &\qquad \cdots,\psi^m(a)-\bar{\psi}^m(a^1,\cdots,a^n)\Big)\\ &= (a^1,\cdots,a^n,0,\cdots,0) \end{aligned}$$

که در (۱) از (۶.۲) استفاده شده است. □

وقتی رتبهٔ f در قضیهٔ ۱.۵.۲ برابر n یا m می‌شود، حکم آن صورت خاصی پیدا می‌یابد.

۳.۵.۲ قضیه.

۱) اگر $m \le n$ و $f: M^n \to N^m$ در p با رتبهٔ m باشد، آنگاه به ازاء هر دستگاه مختصات (y,V) حول $f(p)$، دستگاهی مختصاتی (x,U) حول p وجود دارد که

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)=(a^1,\cdots,a^m)$$

۲) اگر $n \le m$ و $f: M^n \to N^m$ در p با رتبهٔ n باشد، آنگاه به ازاء هر دستگاه مختصات (x,U) حول p، دستگاهی مختصاتی (y,V) حول $f(p)$ وجود دارد که

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\cdots,a^n)=(a^1,\cdots,a^n,0,\cdots,0)$$

اثبات (۱): حالت خاصی از حالت (۱) از قضیهٔ ۱.۵.۲ است. تنها کافی است توجه شود که اگر $k=m$، آنگاه به وضوح در اثبات این حالت نیازی به اعمال جایگشت در مختصات y^i نیست تا ثابت شود که

$$\det\Big(\frac{\partial(y^\alpha\circ f)}{\partial u^\beta}(p)\Big)\neq 0 \qquad \alpha,\beta=1,\cdots,m$$

بلکه، اعمال جایگشت بر u^i ها کافی است.

اثبات (۲): چون می بایستی رتبهٔ f در همهٔ نقاط $\geq n$ باشد، پس رتبهٔ f در یک همسایگی از p برابر n است. بهتر است حالت $M = \mathbb{R}^n$ و $N = \mathbb{R}^m$ را در نظر گرفته دستگاه مختصاتی y را برای $\mathbb{R}^m$ به گونه‌ای بسازیم که دستگاه مختصات نظیر به آن بر $\mathbb{R}^n$ به شکل همانی باشد. اکنون قسمت (۲) از قضیهٔ ۱.۵.۲ دستگاههای مختصاتی φ برای $\mathbb{R}^n$ و ψ برای $\mathbb{R}^m$ را به گونه‌ای فراهم می‌کند که

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^n, 0, \cdots, 0)$$

حتی اگر φ^{-1} را اعمال نکنیم، هنوز هم نگاشت f فضای $\mathbb{R}^n$ را به زیر مجموعه‌ای از $f(\mathbb{R}^n)$ می‌نگارد که ψ بر آن مقادیرش را در $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ اختیار می‌کند. یعنی، نقاط $\mathbb{R}^n$ به جاهایی در $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ تصویر می‌شوند، که احتمالاً مورد نظر ما نیست. این مشکل را با نگاشت دیگری بر $\mathbb{R}^m$ می‌توان اصلاح کرد. λ را به صورت

$$\lambda(b^1, \cdots, b^m) = (\varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^n), b^{n+1}, \cdots, b^m)$$

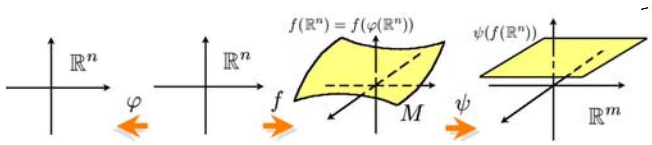
تعریف می‌کنیم. در این صورت چون $\varphi(a) = (b^1, \cdots, b^n)$، داریم

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi \circ f(a^1, \cdots, a^n) &= \lambda \circ \psi \circ \varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^n)\\ &= \lambda(b^1, \cdots, b^n, 0, \cdots, 0)\\ &= (\varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^n), 0, \cdots, 0)\\ &= (a^1, \cdots, a^n, 0, \cdots, 0)\end{aligned}$$

و لذا $\lambda\psi$ همان y مورد انتظار است. چنانچه دستگاهی مختصاتی x بجز دستگاه همانی بر $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم، کافی است تعریف کنیم

$$\lambda(b^1, \cdots, b^m) = \left(x(\varphi^{-1}(b^1, \cdots, b^m)), b^{n+1}, \cdots, b^m\right)$$

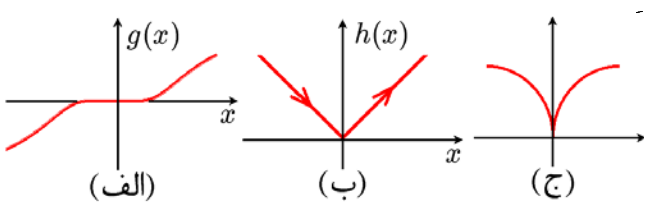
و در این صورت، به سهولت می‌توان نشان داد که باز هم $y = \lambda \circ \psi$ همان y مورد نظر است. به شکل ۱۳.۲ توجه شود. □



شکل ۱۳.۲

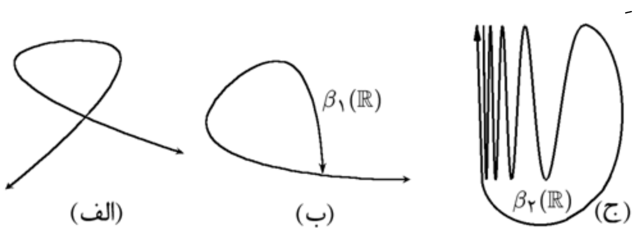
با اینکه در حالت (۱) از قضیهٔ ۳.۵.۲ نقطهٔ p یک نقطهٔ منظم f است، در حالت (۲) یک نقطهٔ تکین آن می‌باشد (چنانچه $n < m$)، اما حالت (۲) برای ما مهمتر است. تابع دیفرانسیلپذیر $f : M^n \to N^m$ را در صورتی **ایمرشن** گوئیم که رتبهٔ آن در تمام نقاط M برابر n بعد N باشد. البته در چنین وضعیتی لازم است $n \le m$، و بعلاوه بنابه قسمت (۲) از قضیهٔ ۳.۵.۲، هر ایمرشن موضعاً یکبیک است (یعنی، نظر به فصل ۱، یک ایمرشن توپولوژی است). از سوی دیگر، لزومی ندارد که هر نگاشت دیفرانسیلپذیر f حتماً ایمرشن باشد، حتی اگر بطور فراگیر یکبیک باشد. ساده‌ترین مثال از این دست، تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = x^3$ است که در آن $f'(0) = 0$. مثال دیگر، عبارت است از تابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باضابطهٔ $h(x) := (g(x), |g(x)|)$ می‌باشد، که در آن

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ -e^{-x^2} & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$



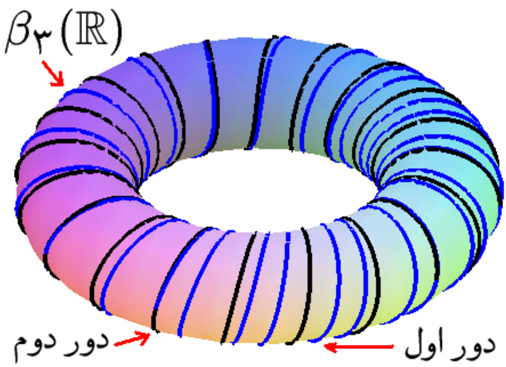
شکل ۱۴.۲

با اینکه بنظر نمودارش به نمودار تابعی غیر دیفرانسیلپذیر می آید (که این طور نیز هست!)، ولی خود این منحنی دیفرانسیلپذیر می‌باشد. در واقع می‌توان نشان داد که سرعت آن در نقطهٔ $(0, 0)$ برابر 0 است. بسادگی می‌توان منحنی‌ای را ساخت که تصویر آن شبیه شکل زیر است.



شکل ۱۵.۲

در شکل ۱۵.۲ سه ایمرشن از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^۲$ ملاحظه می‌شود. با اینکه دومین و سومین ایمرشن $(\beta_۲, \beta_۱)$ یکبیک هستند، تصاویر آنها با $\mathbb{R}$ همیومورف نیستند. البته، حتی اگر ایمرشن یکبیک $f : P \to M$ همیومورفیسمی بروی تصویرش نباشد، می‌توان مترو ساختار دیفرانسیلپذیری بر $f(p)$ یافت که به واسطهٔ آنها، نگاشت احتوی $i : f(p)$ ایمرشن شود. در کل، زیر مجموعه‌ای $M_۱$ از m با یک ساختار دیفرانسیلپذیر (البته، نه لزوماً سازگاری متر بر $M_۱$ و M شرط شود) را در صورتی زیر منیفلد ایمرزد گوئیم که نگاشت احتوی $i : M_۱ \to M$ ایمرشن باشد. در شکل زیر، تصویر ایمرشن $\beta_۳\mathbb{R} \to \mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ نشان داده شده است.



شکل ۱۶.۲

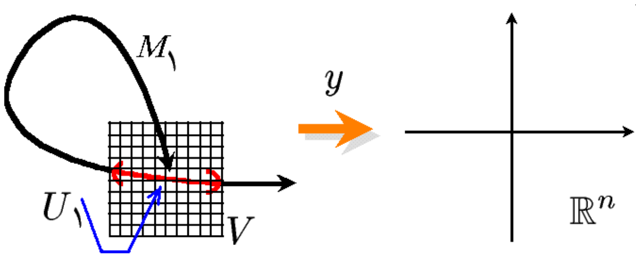
این شکل نشان می‌دهد که حتی ممکن است $M_۱$ زیر مجموعه‌ای چگال از M باشد.

با وجود این همه مشکلات، چنانچه $M_۱$ زیر منیفلدی $k-$بعدی و ایمرز از M^n بوده و $U_۱$ همسایگی‌ای از نقطهٔ $p \in M_۱$ در $M_۱$ باشد، آنگاه یک دستگاه مختصات (y, V) از M حول p چنان یافت می‌شود که

$$U_۱ \cap V = \{q \in M | y^{k+۱}(q) = \cdots = y^n(q) = ۰\}$$

این حکم، نتیجه‌ای مستقیم از قسمت (۲) از قضیهٔ ؟؟ با $f = i$ است. بنابراین، اگر $g : M_۱ \to N$ (به عنوان تابعی بر منیفلد $M_۱$) در یک همسایگی از نقطهٔ $p \in M_۱$ هموار باشد، آنگاه تابع هموار $\bar{g}$ بر یک همسایگی $V \subset M$ از p چنان وجود دارد که $g = \bar{g} \circ i$ بر $V \cap M_۱$. در واقع، می‌توانیم تعریف کنیم

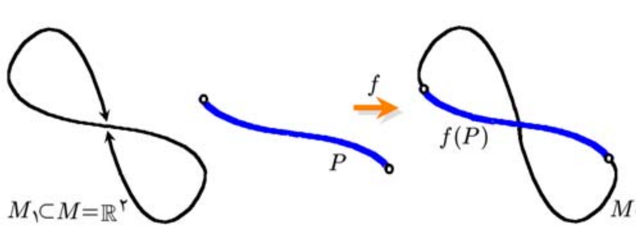
$$\begin{array}{ll} y^\alpha(q) = y^\alpha(q) & \alpha = ۱, \cdots, k \\ y^r(q') = ۰ & r = k+۱, \cdots, n \end{array} \quad \text{که} \quad \tilde{g} = g(q')$$



شکل ۱۷.۲

از سوی دیگر، حتی اگر g بر کل $M_۱$ هموار باشد، قادر به تعریف $\tilde{g}$ بر M نیستیم. مثلاً، اگر g یکی از توابع $\beta_i^{-۱} : \beta_i(M) \to \mathbb{R}$ با $i = ۱,۲,۳$ باشد، این کار ممکن نیست.

مشکل دیگری نیز در مورد زیر منیفلدهای ایمرز وجود دارد. اگر $M_۱ \subset M$ زیر منیفلد ایمرزد باشد و $f : p \to M$ تابعی هموار با $f(p) \subset M_۱$، آنگاه لزومی ندارد که وقتی f را به عنوان نگاشتی بتوی $M_۱$ (ساختار C^∞) در نظر می‌گیریم، این نگاشت f هموار باشد. مشکل زیر نشان می‌دهد که حتی اگر f به عنوان نگاشتی بتوی $M_۱$ پیوسته باشد، باز هم این مشکل وجود دارد. گزارهٔ بعدی تنها چیزی است که می‌توان مطرح کرد.

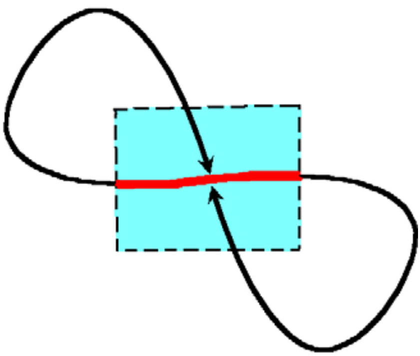


شکل ۱۸.۲

۴.۵.۲ گزاره. اگر $M_۱ \subset M$ منیفلد ایمرزد، $f : P \to M$ تابعی C^∞ با $f(P) \subset M_۱$، و f بعنوان تابعی به توی $M_۱$ پیوسته باشد، آنگاه f به عنوان تابعی بتوی $M_۱$ نیز پیوسته است.

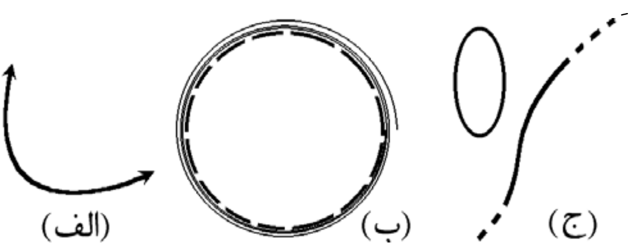
اثبات: گیریم $i : M_1 \to M$ نگاشت احتوی است. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $i^{-1} \circ f$ پیوسته باشد، آنگاه C^∞ نیز است. به ازاء هر $p \in P$ مفروض، دستگاهی مختصاتی y, V برای M حول $f(p)$ چنان انتخاب می‌کنیم که $U_1 = \{q \in V | y^{k+1}(q) = \cdots y^n(q) = 0\}$ یک همسایگی از p در M_1 باشد و $(y^1|U_1, \cdots, y^k|U_1)$ یک دستگاه مختصات موضعی برای M_1 روی U_1 باشد.

بنابه فرض، $i^{-1} \circ f$ پیوسته است، و بنمابراین به ازاء هر زیر مجموعهٔ باز $S \subset M_1$، زیر مجموعهٔ $f^{-1} \circ i(S) \subseteq P$ باز است. بنابراین، f یک همسایگی از $p \in P$ را بتوی U_1 می‌نگارد. چون همهٔ توابع $y^j \circ f$ هموارند و $y^1, \cdots, y^k$ تشکیل یک دستگاه مختصات بر U_1 می‌دهند. چنانچه f به عنوان تابعی بتوی M_1 در نظر گرفته شود، هموار است. □



شکل ۱۹.۲

وقتی ایمرشن یکبیکی که بروی تصویرشان همیومورفیسم هستند را در نظر می‌گیریم، بسیاری از این مشکلات مرتفع می‌شود. چنین ایمرشنی را **نشاننده** می‌نامیم. زیر منیفلد ایمرزد $i : M_1 \to M$ نشاننده باشد. M_1 را در صورتی یک زیر منیفلد بسته M گوئیم که بعنوان زیر مجموعه‌ای از M بسته باشد.



شکل ۲.۲۰

طریقی مهم برای حصول به زیر منیفلدها وجود دارد. کره $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ که به صورت $\{x \,|\, \|x\|^2 = 1\}$ مطرح می‌گردد، نمونه‌ای خاص از این بحث است.

۵.۵.۲ گزاره. اگر $f : M^n \to N^m$ بر یک همسایگی از $f^{-1}(y)$ با رتبهٔ ثلبت k باشد، آنگاه $f^{-1}(y)$ زیر منیفلد بسته‌ای از M با بعد $n-k$ (و یا تهی) است. به ویژه، اگر y یک مقدار منظم نگاشت $f : M^n \to N^m$ باشد، در این صورت $f^{-1}(y)$ یک زیر منیفلد $(n-m)$–بعدی از M (یا تهی) است.

اثبات: بر عهدهٔ خواننده. □

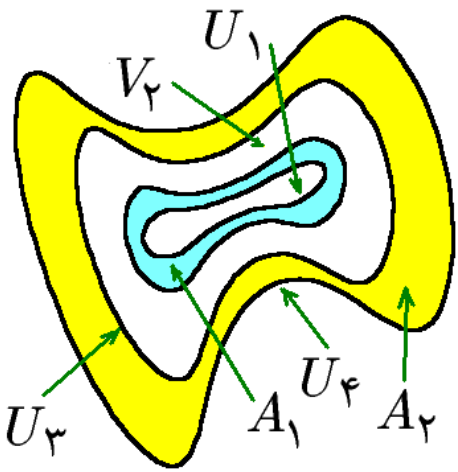
با اینکه طرح مفهوم منیفلد C^∞ به شکل مجرد خود که سابقاً آورده شد مزایایی دارد، اما چنانچه آنها را بعنوان زیر منیفلدهایی از فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ مطرح کنیم، درک شهودی آنها ملموستر خواهد بود. اکنون بر آنیم تا ثابت کنیم که هر منیفلد هموار (و همبند) را در یک $\mathbb{R}^N$ای می‌توان نشاند، و لذا هر منیفلدی را به عنوان زیر مجموعه‌ای از فضای اقلیدسی می‌توان تصور کرد (البته، این تجسم در بسیاری از موارد فایده‌ای در بر ندارد). این حکم را تنها در مورد منیفلدهای فشرده اثبات می‌کنیم، با این حال در شروع کار ابزاری که برای اثبات حالت کلی‌تر لازم است را مطرح می‌کنیم، چرا که در ادامه نیز به دفعات از این مقدمات استفاده می‌کنیم.

۶.۲ افراز یکانی

اگر $\mathcal{O}$ پوششی برای فضای M باشد، در صورتی پوشش $\mathcal{O}'$ را یک تظریف $\mathcal{O}$ گوئیم که به ازاء هر U در $\mathcal{O}'$ یک V ای در $\mathcal{O}$ یافت گردد که $U \subset V$ (مجموعه‌های در $\mathcal{O}'$ از مجموعه‌های در $\mathcal{O}$ کوچکتر باشند). هر تظریف از یک پوشش را **زیر پوشش** می‌نامند. پوشش $\mathcal{O}$ را در صورتی **موضعاً متناهی** گوئیم که به ازاء هر $p \in M$ یک همسایگی W داشته باشد که تنها تعدادی متناهی از مجموعه‌های در $\mathcal{O}$ را قطع کند.

۱.۶.۲ قضیه. اگر $\mathcal{O}$ پوشش بازی برای منیفلد M باشد، آنگاه پوشش بازی $\mathcal{O}'$ برای M وجود دارد که موضعاً متناهی است و تظریف $\mathcal{O}$ می‌باشد. بعلاوه، همهٔ اعضاء $\mathcal{O}'$ را مجموعه‌های باز دیفئومورف با $\mathbb{R}^n$ می‌توان گرفت.

اثبات: به وضوح می‌توانیم فرض کنیم که M همبند است. بنابه قضیه ۲.۱.۱، مجموعه‌های فشردهٔ C_1، C_2، C_3 و . . . به گونه‌ای وجود دارند که $M = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots$. به وضوح C_1 همسایگی بازی U_1 با بستار فشرده دارد. در این صورت، $\bar{U}_1 \cup C_2$ همسایگی بازی U_2 با بستار فشرده دارد. با ادامهٔ این روند، زنجیره‌ای از مجموعه‌های باز U_i بدست می آوریم که هر $\bar{U}_i$ فشرده است و $\bar{U}_i \subseteq U_{i+1}$، اجتماع همهٔ آنها، همهٔ C_i ها را در بر دارد و لذا M را می‌پوشاند. گیریم $U_{-1} = U_0 = \emptyset$.



شکل ۲۱.۲

اکنون M اجتماعی از مناطق حلقه‌ای شکل $A_i := \bar{U}_i - U_{i-1}$ با $i > 1$ است. چون هر یک از A_i ها فشرده‌اند، به وضوح A_i را به تعدای متناهی از مجموعه‌های باز، که هر یک در عضوی از $\mathcal{O}$ قرار دارند، و بعلاوه، هر یک در یک $V_i = U_{i+1} - U_{i-2}$ ای قرار دارند، می‌توان پوشاند. همچنین، این مجموعه‌ها را چنان می‌توانیم بگیریم که با $\mathbb{R}^n$ همئومورف باشند. به این طریق، پوششی $\mathcal{O}'$ بدست می آوریم که تظریف $\mathcal{O}$ است و موضعاً متناهی می‌باشد؛ زیرا هر، نقطه از U_i در هیچ V_j ای که $j > i + 2$ قرار ندارد.
$\square$

توجه شود که اگر $\mathcal{O}$ پوشش موضعاً متناهی و باز برای فضای M باشد و $C \subset M$ فشرده باشد، آنگاه C تنها تعدادی متناهی از اعضاء $\mathcal{O}$ را قطع می‌کند. این نشان می‌دهد که هر پوشش باز و موضعاً متناهی از یک منیفلد همبند، الزاماً شمارا است (نظیر پوششی که در اثبات قضیهٔ ۱.۶.۲ ساختیم).

۲.۶.۲ قضیه (لم کوچک شدن). گیریم $\mathcal{O}$ یک پوشش باز موضعاً متناهی برای منیفلد M است. در این صورت، به ازاء هر $U \in \mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز U' چنان می‌توان انتخاب نمود که $\bar{U} \subset U$ و گردایهٔ همهٔ U' ها نیز یک پوشش باز برای M است.

اثبات: به وضوح، می‌توانیم فرض کنیم که M همبند است. گیریم $\mathcal{O} = \{U_۱, U_۲, U_۳, \cdots\}$. در این صورت $C_۱ := U_۱ - (U_۲ \cup U_۳ \cup \cdots)$ مجموعه‌ای بسته و مشمول در $U_۱$ است و بعلاوه $C_۱ \cup U_۲ \cup U_۳ \cup \cdots$ برابر M می‌باشد. گیریم $U'_۲$ مجموعه‌ای باز با $C_۱ \subset U'_۱ \subset \bar{U}'_۱ \subset U_۱$ است. در این صورت

$$C_۲ := U_۲ - (U'_۱ \cup U_۳ \cup \cdots)$$

مجموعه‌ای بسته است که مشمول در $U_۲$ می‌باشد و $M = U'_۱ \cup C_۲ \cup U_۳ \cup \cdots$. گیریم $U'_۲$ مجموعه‌ای باز است که $C_۲ \cup U'_۲ \subset \bar{U}'_۲ \subset U_۲$. این روند را ادامه می‌دهیم.

به ازاء هر $p \in M$، n ای باندازهٔ کافی بزرگ وجود دارد که $p \in U_n$؛ زیرا $\mathcal{O}$ موضعاً متناهی است. اکنون

$$p \in U'_۱ \cup U'_۲ \cup \cdots \cup U'_n \cup (U_{n+۱} \cup U_{n+۲} \cup \cdots)$$

چون با تعویض U_{n+i} یا $U'_{n+۱}$ موجب حذف P نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم که

$$p \in U'_۱ \cup U'_۲ \cup \cdots$$

و برهان تمام است. □

۳.۶.۲ قضیه. گیریم $\mathcal{O}$ یک پوشش باز موضعا متناهی برای منیفلد M است. در این صورت، گردایه‌ای از توابع هموار $\varphi_U : M \to [۰, ۱]$، که $U \in \mathcal{O}$ دلخواه است، چنان وجود دارد که

۱) به ازاء هر U ای $\mathrm{Supp}\varphi_U$.

۲) به ازاء هر $p \in M$ ای $\sum_U \varphi_U(p) = ۱$ (چون بنا به (۱) این مجموع در یک همسایگی از p با تعدادی متناهی جمع صورت می‌پذیرد، این مجموع با معنی است).

اثبات: **حالت ۱:** هر یک از $U \in \mathcal{O}$ ها دارای بستار فشرده باشد. بنابراین، U' را مانند در قضیهٔ ۲.۶.۲ انتخاب می‌کنیم. با بکار گیری لم ۱.۲.۲ در مورد $\bar{U}' \subset U \subset M$، به تابعی هموار $\psi_U : M \to [۰, ۱]$ می‌رسیم که بر $\bar{U}'$ برابر یک است و محمل

آن زیر مجموعه‌ای از U است. چون U' ها M را می‌پوشانند، پس در همه جا داریم $\sum_{U\in'}\psi_U > 0$. اکنون کافی است تعریف کنیم

$$\varphi_U := \psi_U / \sum_{U\in\mathcal{O}} \psi_U$$

حالت ۲: حالت کلی. به شرط آنکه لم ۱.۲.۲ برای $M \subset U \subset C$ که C بسته (ولی نه لزوماً فشرده) و U باز است درست باشد، این حالت را نیز مثل قبل می‌توان اثبات نمود.

به ازاء هر $p \in C$، مجموعه‌ای باز $U_p \subset U$ با بستار فشرده انتخاب می‌کنیم. $M-C$ را با مجموعه‌های بازی V_α می‌پوشانیم که بستار فشرده دارند و مشمول در $M-C$ هستند. اکنون، پوشش باز $\{U_p, V_p\}$ دارای یک تظریف باز و موضعاً متناهی $\mathcal{O}$ است که حالت ۱ در مورد آن قابل اجرا است. گیریم

$$\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{O} | U \subset U_p \text{ به ازاء یک } p \text{ ای}\} \qquad \text{که} \quad f = \sum_{U\in\mathcal{O}'} \varphi_U$$

این حاصل جمع هموار است، زیرا به ازای هر نقطه، همسایگی‌ای از آن وجود دارد که بر آن به صورت یک مجموع متناهی است؛ چرا که به ازاء همهٔ p ها داریم $\sum_U \varphi_U(p) =$ ۱ و هر گاه $U \subset V_\alpha$ داریم $\mathrm{Supp} f \subset U$. □

۴.۶.۲ نتیجه. اگر $\mathcal{O}$ یک پوشش باز برای منیفلد M باشد، آنگاه گردایه‌ای از توابع هموار $\varphi_i M \to [0, 1]$ چنان وجود دارد که

۱) گردایهٔ مجموعه‌های $\{p | \varphi_i(p) \neq 0, i \in \mathbb{N}\}$ موضعاً متناهی است.

۲) به ازاء هر $p \in M$ ای $\sum_i \varphi_i(p)$.

۳) به ازاء هر i یک $U \in \mathcal{O}$ ای وجود دارد که $\mathrm{Supp}\varphi_i \subset U$. □

گردایهٔ $\{\varphi_i : M \to [0, 1]\}$ صادق در خواص (۱) و (۲) از نتیجهٔ بالا را یک **افراز یکانی** می‌نامند. اگر این گردایه در (۳) نیز صدق کند، آنرا **افراز یکانی زیر دست** $\mathcal{O}$ می‌نامیم.

اکنون به راحتی آخرین قضیهٔ این فصل را می‌توان اثبات نمود.

۵.۶.۲ قضیه. اگر M^n منیفلد هموار فشرده باشد، آنگاه نشاننده‌ای $f : M \to \mathbb{R}^N$ با یک N مناسب وجود دارد.

اثبات: تعدادی متناهی دستگاه مختصاتی $((x_1, U_1)$ و $\cdots, (x_k, U_k)$ با $M = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ وجود دارد. U'_i ها را مثل قضیهٔ ۲.٦.۲ انتخاب کرده و توابع $\psi_i : M \to [0, 1]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که بر U'_i برابر یک است و محمل آن در U_i قرار دارد. برای $N = nk + k$، تابع $f : M \to \mathbb{R}^N$ را به صورت

$$f := (\psi_1 \bullet x_1, \cdots, \psi_k \bullet x_k, \psi_1, \cdots, \psi_k)$$

تعریف می‌کنیم. چون هر نقطه p به ازاء یک i ای در U'_i قرار دارد و چون ψ_i بر U'_i برابر است، پس تابع f ایمرشن می‌باشد؛ چرا که $n \times N$–ماتریس ژاکوبی $(\partial f^\alpha / \partial x_i^\beta)$ ماتریس $n \times n$ همانی $(\partial x_i^\alpha / \partial x_i^\beta)$ را در بر دارد. همچنین، f یکبیک است؛ زیرا، اگر فرض شود $f(p) = f(q)$، آنگاه یک i ای وجود دارد که $p \in U'_i$. در این صورت $\psi_i(p) = 1$ و بنابراین $\psi_i(q) = 1$. این نشان می دهد که $q \in U_i$. بعلاوه $\psi_i \bullet x_i(p) = \psi_i \bullet x_i(q)$ و بنابراین $p = q$، زیرا x_i بر U_i یکبیک است. □

مساله ۳–۳۳ نشان می‌دهد که عملاً همیشه می‌شود N را $2n + 1$ اختیار نمود.

۷.۲ تمرینات

۱. (الف) نشان دهید که C^∞–مرتبط بودن، رابطهٔ همارزی نیست.

(ب) در اثبات لم ؟؟، نشان دهید که (همان طور که انتظار می‌رفت) همهٔ چارتهای در A' با هم C^∞–مرتبطند.

۲. (الف) اگر M فضایی متری با گردایه‌ای از همئومورفیسم‌ها $x : U \to \mathbb{R}^n$ باشد، که دامنهٔ آنها M را می‌پوشاند و همگی با هم C^∞–مرتبط هستند. (بدون استفاده از ناوردایی بعد) نشان دهید که در هر نقطه‌ای n منحصر به فرد است.

(ب) به صورت مشابه، نشان دهید که ∂M برای هر منیفلد مرزدار هموار M خوشتعریف است.

۳. (الف) نشان دهید که هر تابع هموار، پیوسته است، و ترکیب توابع هموار، هموار است.

(ب) نشان دهید که تابع $f : M \to N$ وقتی و تنها وقتی هموار است که به ازاء هر تابع هموار $g : N \to \mathbb{R}$ ای $g \circ f$ هموار باشد.

۴. بر $\mathbb{R}$ چند ساختار هموار متمایز وجود دارد؟ (در حد دیفئومورفیسم، تنها یکی وجود دارد؛ اما سؤال این نیست.)

۵. (الف) اگر $N \subset M$ باز و $\mathcal{A}'$ گردایه همهٔ (x, U) های در $\mathcal{A}$ باشد که $U \subset N$، نشان دهید $\mathcal{A}'$ برای N ماکسیمال است، به شرطی که $\mathcal{A}$ برای M ماکسیمال باشد.

(ب) نشان دهید که $\mathcal{A}'$ را به صورت مجموعهٔ همهٔ $(x|_{V\cap N}, V\cap N)$ که $(x, V) \in \mathcal{A}$ تعریف نمود.

(ج) نشان دهید نگاشت احتوی $i : N \to M$ هموار است و $\mathcal{A}'$ اطلس منحصر بفردی بر N است که این خاصیت را دارد.

٦. نشان دهید که دو تصویر $p_۱$ و $p_۲$ بر $\mathbb{S}^{n-۱}$ با $۲n$ همیومورفیسم f_i و g_i به طور هموار مرتبط هستند.

۷. (الف) اگر M منیفلد هموار باشد و $p, q \in M$، در این صورت نشان دهید که یک خم هموار $c : [\circ; ۱] \to M$ با $c(\circ) = p$ و $c(۱) = q$ وجود دارد.

(ب) نشان دهید که حتی c را یک به یک می‌توان در نظر گرفت.

۸. (الف) نشان دهید که $(M_۱ \times M_۲) \times M_۳$ و $M_۱ \times (M_۲ \times M_۳)$ دیفئومورفند. همچنین نشان دهید که $M_۱ \times M_۲$ و $M_۲ \times M_۱$ نیز دیفئومورفند.

(ب) فرض کنید به ازاء $\bar{p}_۱ \in M_۱$ و $\bar{p}_۲ \in M_۲$ نگاشتهای $S_{\bar{p}_۲} : M_۱ \to M_۱ \times M_۲$ و $S_{\bar{p}_۱} : M_۲ \to M_۱ \times M_۲$ با ضابطهٔ به ترتیب $p \mapsto (p, \bar{p}_۲)$ و $p \mapsto (\bar{p}_۱, p)$ تعریف کنیم. این نگاشتها را «برش» می‌نامیم. نشان دهید برشها هموارند.

(ج) کلی‌تر نشان دهید که نگاشت $f : N \to M_۱ \times M_۲$ وقتی و تنها وقتی هموار است که نگاشت‌های مرکب $\pi_۱ \circ f : N \to M_۱$ و $\pi_۲ \circ f : N \to M_۲$ هموار باشند. به علاوه،ساختار همواری که بر $M_۱ \times M_۲$ تعریف کردیم، تنها ساختاری است که این ویژگی را دارد.

(د) اگر $f_i : N \to M_i$ که $i = ۱, ۲$ هموار باشند، آیا می‌توان رتبهٔ نگاشت $(f_۱, f_۲) : N \to M_۱ \times M_۲$ در p را بر حسب رتبهٔ f_i ها در p مشخص کرد؟ برای توابع $f_i : N_i \to M_i$ که $i = ۱, ۲$، نگاشت $f_۱ \times f_۲ : N_۱ \times N_۲ \to M_۱ \times M_۲$ را با ضابطهٔ $(f_۱ \times f_۲)(p_۱, p_۲) = (f_۱(p_۱), f_۲(p_۲))$ تعریف می‌کنیم. آیا رتبهٔ آن را بر حسب رتبهٔ f_i ها می‌توان بیان نمود.

۹. گیریم $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ نگاشت با ضابطهٔ $p \mapsto [p]$ است. نشان دهید که $f : \mathbb{P}^n \to M$ وقتی و تنها وقتی هموار است که $f \circ g : \mathbb{S}^n \to M$ هموار باشد. رتبهٔ f و رتبهٔ $f \circ g$ را مقایسه کنید.

۱۰. (الف) اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز و $f : U \to \mathbb{R}$ موضعاً هموار باشد (یعنی، هر نقطه همسایگی‌ای دارد که f بر آن هموار است)، در این صورت نشان دهید که f هموار است. (بدیهی)

(ب) اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ موضعاً هموار باشد، آنگاه ثابت کنید که f هموار است. به عبارت دیگر، f را به تابعی هموار بر یک همسایگی از $\mathbb{R}^n$ می‌توان گسترش داد. (نه چندان بدیهی)

۱۱. (الف) اگر $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ دارای دو تابع توسیع هموار g و h در یک همسایگی از $\mathbb{H}^n$ باشد، آنگاه توابع $D_j\, g$ و $D_j\, h$ در همهٔ نقاط $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ یکی‌اند (و لذا می‌توان $D_j\, f$ را در این نقاط تعریف نمود).

(ب) اگر f بر بستار

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \,,\; 0 < y < e^{-1/x^2}\right\}$$

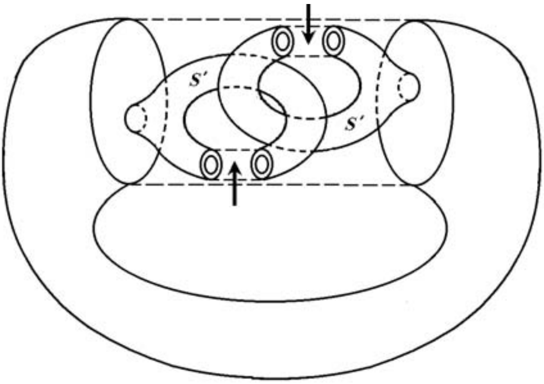
تعریف شود، نشان دهید که حکم (الف) درست نیست.

۱۲. اگر M منیفلد مرزدار هموار باشد، آنگاه ساختار هموار منحصر بفردی بر ∂M وجود دارد که نگاشت احتوی $i : \partial M \to M$ نشاننده است.

۱۳. (الف) گیریم $U \subset M^n$ مجموعه‌ای باز است که مرز U زیر منیفلدی $(n-1)$–بعدی هموار می‌باشد. نشان دهید که $\bar{U}$ یک منیفلد مرزدار n–بعدی است. (خوب است مثال زیر را در نظر بگیرید: اگر

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, 0) < 1 \text{ یا } 1 < d(x, 0) < 2\}$$

آنگاه $\bar{U}$ منیفلدی مرزدار است، ولی $\partial \bar{U}$ با مرز U متفاوت است).



شکل ۲۲.۲

(ب) شکل ۲۲.۲ را در نظر بگیرید. این شکل را با اضافه کردن کپیهای S' در نواحی مشخص شده توسط $\uparrow$ می‌توان کامل کرد، و آن را تا ابد ادامه داد. شکل حاصل از گرفتن بستار S_1 را **کرهٔ شاخه‌دار الکساندر** S می‌نامند. نشان دهید S با $\mathbb{S}^2$ همیومورف است.

راهنمایی: نقاط اضافه‌ای که در بستار وجود دارند، با مجموعهٔ کانتور همیومورف است.

اگر U مؤلفهٔ بی‌کران $\mathbb{R}^3 - S$ باشد، آنگاه S با مرز U برابر است اما $\bar{U}$ منیفلد مرزدار ۲—بعدی است. بنابراین قسمت الف تنها برای زیر منیفلدهای هموار درست است.

۱۴. (الف) نشان دهید نگاشتی $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ وجود دارد که

(۱) به ازاء هر x ای $f(x, 0) = (x, 0)$.

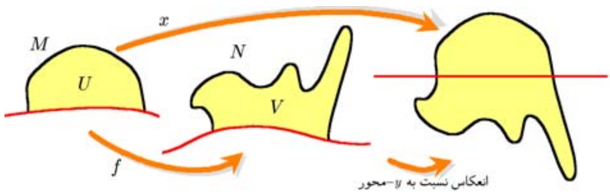
(۲) به ازاء هر $y > 0$ ای $f(x, y) \in \mathbb{H}$.

(۳) به ازاء هر $y < 0$ ای $f(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{H}^2$.

(۴) اگر f به نیم صفحهٔ بالا و یا نیم صفحهٔ پایین تحدید شود، هموار است، ولی خود f هموار است.

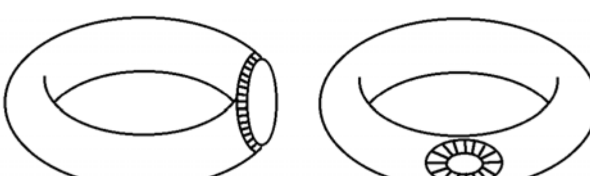
(ب) فرض کنید M و N منیفلد مرزدار هموارند و $f : \partial M \to \partial N$ دیفئومورفیسم است. گیریم $P = M \cup_f N$ مجموعهٔ حاصل از یکی‌گیری $x \in \partial M$ با $f(x) \in \partial N$ در اجتماع مجزای M و N است. اگر (x, U) دستگاه مختصاتی حول $p \in \partial M$ و (y, V) دستگاهی مختصاتی حول $f(p)$ باشند به گونه‌ای که $f(U \cap \partial M) =$

$V\cap\partial N$ و $(y\circ f)|_{U\cap\partial M} = x|_{U\cap\partial M}$، آنگاه همیومورفیسمی از $U\cup V\subset P$ به $\mathbb{R}^n$ با فرستادن U به $\mathbb{H}^n$ توسط x و V به نیمهٔ پائینی صفحه به وسیلهٔ منعکس y، تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این روش، یک ساختار هموار بر P تعریف نمی‌کند.



شکل ۲۳.۲

(ج) حال فرض کنید همسایگی‌ای U از ∂M در M و دیفئومورفیسمی $\alpha : U \to \partial M \times [0;1)$ چنان وجود دارد که به ازاء هر $p\in\partial M$ ای $\alpha(p) = (p,0)$ و به صورت مشابه دیفئومورفیسم $\beta : V \to \partial N \times [0;1)$ را در نظر می‌گیریم. (بعداً، قادریم ثابت کنیم که چنین دیفئومورفیسم‌هایی همواره وجود دارند). نشان دهید ساختاری هموار و منحصر بفرد بر P چنان وجود دارد که نگاشتهای احتوای M و N در P هموارند و نگاشت القایی توسط α و β از $U\cup V$ به $\partial M\times(-1;1)$ دیفئومورفیسم است.



شکل ۲۴.۲

(د) فرض کنید $\mathbb{R}^2$ را به صورت اجتماعی از دو کپی از $\mathbb{H}^2$ در نظر بگیریم که نقاط بر $\partial\mathbb{H}^2$ از آن دو را یکی گرفته‌ایم. همچنین، فرض کنید با دو جفت مختلف (α,β) به صورت (ج) بر $\mathbb{R}^2$ ساختار هموار تعریف کرده‌ایم. نشان دهید منیفلدهای هموار حاصل با هم دیفئومورفند، اما این دیفئومورفیسم نگاشت همانی نیست.

۱۵. (الف) ساختار هموراری بر $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1$ تعریف کنید که به واسطهٔ آن نگاشت احتوی بتوی $\mathbb{R}^2$ هموار باشد. آیا احتوی می‌تواند نشاننده باشد؟ آیا تصاویر بر هر یک از مؤلفه‌ها، هموارند؟

(ب) اگر M و N منیفلد مرزدار باشند، ساختاری هموار بر $N \times M$ به گونه‌ای بیابید که همهٔ نگاشت‌های برشی (تعریف شده در مسألهٔ ۸) هموار باشند.

۱۶. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

هموار است (البته می‌توان تابعی معرفی کرد که برای $x > 0$ ها e^{-1/x^2} است و برای $x < 0$ ها $e^{-1/|x|}$ است).

۱۷. به کمک لم ؟؟ و ضمیمه‌ای که در قضیهٔ ؟؟ آورده شده، نشان دهید که اگر C_1 و C_2 مجموعه‌های بستهٔ مجزا در M باشند، آنگاه تابعی هموار $f : M \to [0, 1]$ چنان وجود دارد که $C_1 \subset f^{-1}(0)$ و $C_2 \subset f^{-1}(1)$. در واقع f ای می‌توان یافت که $C_1 = f^{-1}(0)$ و $C_2 = f^{-1}(1)$. اثبات ساده است، به شرطی که نکته‌اش را درک کنید:

(الف) کافی است به ازاء هر مجموعهٔ بستهٔ $C \subset M$ تابعی هموار f با $C = f^{-1}(0)$ تعریف کنیم.

(ب) گیریم $\{U_i\}$ پوششی شمارا برای $M - C$ است، هر U_i ای به شکل $U_i = x^{-1}(\{a \in \mathbb{R}^n : |a| < 1\})$ است، و x دستگاهی مختصاتی است که زیر مجموعهٔ بازی از $M - C$ را بروی $\mathbb{R}^n$ می‌نگارد. گیریم $f_i : M \to [0, 1]$ تابعی هموار با $f_i > 0$ بر U_i و $f_i = 0$ بر $M - U_i$ است. توابع نظیر به $\partial f_i / \partial x^j$، $\partial^2 f_i / \partial x^j \partial x^k$ و $\cdots$ را مشتقات جزئی مرکب f از رتبهٔ ۱، ۲ و $\cdots$ می‌نامیم. فرض کنیم α_i سوپریموم همهٔ مشتقات جزئی مرکب f_1، $\cdots$ و f_i تا مرتبهٔ $i \leq$ است. نشان دهید $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i / (\alpha_i 2^i)$ هموار است و $C = f^{-1}(0)$.

۱۸. دستگاه مختصاتی (y^1, y^2) بر $\mathbb{R}^2$ با تعریف $y^1(a, b) = a$ و $y^2(a, b) = a + b$ را در نظر بگیرید.

(الف) $\partial f / \partial y^1 (a, b)$ را به کمک تعریف محاسبه کنید.

(ب) آن را از گزارهٔ ؟؟ نیز محاسبه کنید. (برای محاسبهٔ $\partial I^i / \partial y^j$، هر یک از I^i ها را بر حسب y^1 و y^2 بیان کنید.) توجه شود که $\partial f / \partial y^1 \neq \partial f / \partial I^1$ حتی

اگر $I^{۱} = y^{۱}$؛ عملگر $\partial/\partial y^j$ به y و i بستگی دارد ولی به y^i ها خیر.

۱۹. لاپلاسین $\partial/\partial x^{۲} + \partial^{۲}/\partial y^{۲}$ را در مختصات قطبی بنویسید. (ابتدا $\partial/\partial x$ را بر حسب $\partial/\partial r$ و $\partial/\partial \theta$ محاسبه کنید؛ سپس، $\partial^{۲}/\partial x^{۲}$ را از روی آن محاسبه کنید). پاسخ $\frac{۱}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]$ است.

۲۰. اگر $f : M^n \to N^m$ هموار از کلاس $C^{۱}$ باشد و $n < m$، آنگاه $f(M)$ با اندازهٔ صفر است (البته، به شرطی که تعداد مؤلفه‌های M شمارا باشد).

۲۱. در شکل زیر روش تقسیم مربع $[۰,۱] \times [۰,۱]$ به $۲^{۲n}$ مربع $A_{n,۱}, \cdots, A_{n,۲}$ به ازاء $n = ۱,۲,۳$ نشان داده شده است؛ در آنها مربع $A_{n,k}$ با اندیس k نشان داده شده است. شماره‌گزاری به صورت زیر است:

(الف) مربع پائین و دست چپ $A_{n.۱}$ است.

(ب) مربع بالا و دست چپ $A_{n,۲^{۲n}}$ است.

(ج) مربعهای $A_{n,k}$ و $A_{n,k+۱}$ وجه مشترک دارند.

(د) مربعهای $A_{n,۴\ell+۱}$، $A_{n,۴\ell+۲}$، $A_{n,۴\ell+۳}$ و $A_{n,۴\ell+۴}$ در مربع $A_{n-۱,\ell+۱}$ قرار دارند.

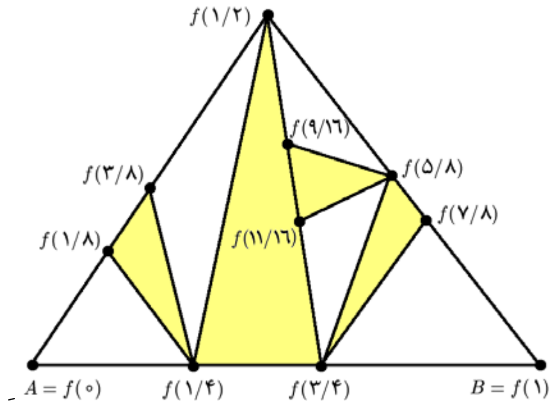
شکل ۲۵.۲

تابع $f : [۰,۱] \to [۰,۱] \times [۰,۱]$ را با شرط

$$(k-۱)/۲^{۲n} \leq t \leq k/۲^{۲n} \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \in A_{n,k}$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید f پیوسته، یک به یک و بروی $[۰,۱]\times[۰,۱]$ است.

۲۲. به ازاء $p/۲^n \in [۰,۱]$ تعریف می‌کنیم $f(p/۲^n) \in \mathbb{R}^{۲}$ به ترتیبی که در شکل زیر مشهود است.



شکل ۲۶.۲

(الف) نشان دهید f پیوستهٔ یکشکل است، و لذا دارای توسیعی پیوسته $g:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ است. نشان دهید g یکبیک است و تصویرش با اندازهٔ صفر نیست. این کار را با انتخاب مناسب مثلثهای هاشور خورده نشان دهید.

(ب) با افزودن دایره‌ای در پائین تصویر g با قطر AB، تصویری همیومورف با $\mathbb{S}^1$ به دست آورید. داخل این منحنی شبیه چه است؟

۲۳. گیریم $c:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ پیوسته است. به ازاء هر افراز $P=\{t_1,\cdots,t_k\}$ از $[0,1]$ تعریف می‌کنیم $\ell(c,P):=\sum_{i=1}^{k}(c(t_i),c(t_{i-1}))$. منحنی C را در صورتی **اصلاح‌پذیر** گوئیم که مجموعهٔ $\{\ell(c,P)\}$ از بالا کراندار باشد. $\sup_P\{\ell(c,P)\}$ را **طول** c می‌نامیم. نشان دهید که تصویر هر منحنی اصلاح شدنی، با اندازهٔ صفر است.

۲۴. (الف) اگر M منیفلد هموار باشد، ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعهٔ $M_1\subset M$ یک زیر منیفلد $k-$بعدی M است که گرد هر نقطه از M_1 دستگاهی مختصاتی (x,U) بر M به گونه‌ای یافت گردد که $M_1\cap U=\{p:x^{k+1}(p)=\cdots=x^n(p)=0\}$.

(ب) نشان دهید M_1 در صورتی زیر منیفلد بستهٔ M است که چنین دستگاه مختصاتی گرد هر نقطه از M یافت شود.

۲۵. نشان دهید مجموعهٔ $\{(x,|x|):x\in\mathbb{R}\}$ تصویر هیچ ایمرشنی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^2$ نیست.

۲۶. (الف) اگر $U \subset \mathbb{R}^k$ باز و $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ هموار باشد، ثابت کنید نمودار f بر U که به صورت $\Gamma_f = \{p, f(p) : p \in U\}$ تعریف می‌گردد، زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^n$ است.

(ب) ثابت کنید پس از تغییر مرتبهٔ مختصات (در صورت لزوم) هر زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^n$ به شکل (الف) به صورت موضعی قابل بیان است. (نه قضیهٔ ؟؟ و نه قضیهٔ ؟؟ به اندازهٔ کافی قوی نیستند؛ شما به قضیهٔ تابع ضمنی نیاز دارید (صفحهٔ ۴۱ از کتاب حساب منیفلدها.) قضیهٔ ؟؟ اساساً همان قضیهٔ ۲—۱۳ از کتاب حساب بر منیفلدها است؛ با مقایسهٔ آن با قضیهٔ تابع ضمنی نشان دهید که چگونه از ذکر برخی مطالب می‌توان دوری جست.)

۲۷. (الف) ثابت کنید که هر ایمرشن بین منیفلدها، نگاشتی باز است. (تصویر هر مجموعهٔ باز، باز است.)

(ب) اگر M منیفلد $n-$بعدی فشرده و N منیفلد $n-$بعدی همبند باشد، و $f : M \to N$ ایمرشن باشد. ثابت کنید f برو است.

۲۸. گزاره ؟؟ را ثابت کنید: اگر $f : M^n \to N$ بر همسایگی‌ای از $f^{-1}(y)$ با رتبهٔ k باشد، آنگاه $f^{-1}(y)$ زیر منیفلدی بسته با بعد $n-k$ (و یا تهی) است.

۲۹. گیریم $g([x,y,z]) = (yz, xz, xy)$ نگاشت $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ معرفی شده در فصل ۱ است، که تصویرش رویهٔ استانیر بود. نشان دهید که g در شش نقطه ایمرشن نیست (نقاط تصویری، نقاطی هستند که به فاصلهٔ $\pm ۱/۲$ از هر محور قرار دارند). روشی برای ایمرز کردن $\mathbb{P}^2$ در $\mathbb{R}^3$ تحت نام رویهٔ بوی وجود دارد. به صفحات ۳۱۷ تا ۳۲۱ از کتاب هندسه و تخیل اثر هیلبرت و کوهن—وزوت مراجعه شود.

۳۰. تابع پیوسته $f : X \to Y$ را در صورتی **سره** گوئیم که به ازاء هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $C \subset Y$، مجموعهٔ $f^{-1}(C)$ فشرده باشد. **مجموعهٔ حدی** $L(f)$ تابع f، مجموعهٔ همهٔ $y \in Y$ هایی است که به ازاء یک دنباله x_n با هیچ زیر دنبالهٔ همگرای در X، داشته باشیم $y = \lim f(x_n)$. ثابت کنید:

(الف) شرط لازم و کافی برای سره بودن f آن است که $L(f) = \emptyset$.

(ب) $f(X) \subset Y$ وقتی و تنها وقتی بسته است که $L(f) \subset f(X)$.

(ج) تابعی پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ با $f(\mathbb{R})$ بسته وجود دارد که $L(f) \neq \emptyset$.

(د) تابع پیوسته یک به یک $f : X \to Y$ وقتی و تنها وقتی همیومورفیسم است که $L(f) \cap f(M) = \emptyset$.

(ه) زیر منیفلد $M_1 \subset M$ وقتی و تنها وقتی زیر منیفلد بسته است که نگاشت احتوای $i : M_1 \to M_2$ سره باشد.

(و) اگر M منیفلد باشد، نگاشتی سره $f : M \to \mathbb{R}$ وجود دارد؛ تابع f در صورتی می‌تواند هموار باشد که M منیفلد هموار باشد.

۳۱. (الف) پوششی برای $[0, 1]$ بیابید که موضعاً متناهی است ولی نقطه متناهی نیست (یعنی، هر نقطه از $[0, 1]$ در تنها تعدادی متناهی عضو از پوشش قرار دارد).

(ب) لم کوچک شدن را در حالتی پوشش $\mathcal{O}$ شمارا و نقطه متناهی است، ثابت کنید (توجه شود که حقیقتاً از موضعاً متناهی بودن استفاده نمی‌شود).

(ج) لم کوچک شدن را در حالتی که $\mathcal{O}$ یک پوشش نقطه متناهی (نه لزوماً شمارا) برای فضایی دلخواه است، ثابت کنید. (شما به **لم زرن** نیاز دارید؛ گردایه‌های $\mathcal{C}$ از زوجهای (U, U') که $U \in \mathcal{O}$ و $U' \subset U$ و نیز اجتماع همهٔ U' هایی که $(U, U') \in \mathcal{C}$، همراه همهٔ $U \in \mathcal{O}$ هایی که فضا را می‌پوشانند، در نظر بگیرید.)

۳۲. (الف) اگر $M_1 \subset M$ زیر منیفلدی بسته، $U \supset M_1$ همسایگی‌ای دلخواه، و $f : M_1 \to \mathbb{R}$ هموار باشد، نشان دهید تابعی هموار $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ وجود دارد که بر M_1 در شرط $\tilde{f} = f$ صدق می‌کند و $\mathrm{Supp}\tilde{f} \subset U$.

(ب) نشان دهید که اگر $M = \mathbb{R}$ و $M_1 = (0, 1)$، آنگاه حکم الف غلط است.

(ج) نشان دهید که اگر $\mathbb{R}$ را با منیفلد ناگسسته‌ای عوض کنیم، آنگاه حکم الف غلط است.

یادداشت: همچنین اگر $M = \mathbb{R}^2$، $M_1 = N = \mathbb{S}^1$ و f نگاشت همانی باشد، آنگاه حکم الف غلط است؛ در واقع، در این حالت f توسیعی پیوسته به نگاشتی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{S}^1$ وجود ندارد، اما اثبات به کمی توپولوژی نیاز دارد. اما، f را به تابعی هموار بر همسایگی‌ای از M_1 می‌توان گسترش داد (به صورت موضعی گسترش داده و سپس از افرازیکانی استفاده کنید).

۳۳. (الف) مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ نامنفرد با درآیه‌های حقیقی را **گروه خطی عمومی** نامیده و با نماد $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. چون $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^{n^2}$ است، منیفلدی هموار است. **گروه خطی خاص** $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R})$ یا گروه **تک روندی**، زیر گروه همهٔ ماتریس‌های با دترمینان یک است. به کمک

فرمول در صفحهٔ ۲۴ از کتاب حساب بر منیفلدها در مورد $D(\det)$، نشان دهید که گروه $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ زیر منیفلد بسته‌ای با بعد $n^۲ - ۱$ در $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ است.

(ب) مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ متقارن را به صورت $\mathbb{R}^{n(n+۱)/۲}$ می‌توان تصور کرد. نگاشت ψ از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ به مجموعهٔ ماتریس‌های متقارن را به ضابطهٔ $\psi(A) = A.A^t$ تعریف می‌کنیم، که A^t ترانهاد A است. زیر گروه $\psi^{-۱}(I)$ از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ را **گروه متعامد** $O(n)$ می‌نامیم. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای $A \in O(n)$ آن است که سطرهای A (یا ستون‌های آن) متعامد باشند.

(ج) نشان دهید $O(n)$ فشرده است.

(د) به ازاء هر $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ مفروض، نگاشت $R_A : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ را با ضابطهٔ $R_A(B) = BA$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که R_A دیفئومورفیسم است و به ازاء هر $A \in O(n)$ ای $\psi \circ R_A = \psi$. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، نشان دهید که به ازاء هر $A \in O(n)$ ای ماتریس $(\partial\psi^{ij}/\partial x^{k\ell}(A))$ هم رتبهٔ ماتریس $(\partial\psi^{ij}/\partial x^{k\ell}(I))$ است. (در اینجا $x^{k\ell}$ ها توابع مختصاتی در $\mathbb{R}^{n^۲}$ هستند و ψ^{ij} ها $n(n+۱)/۲$ تابع مؤلفه‌ای ψ هستند.) از گزارهٔ ؟؟ نتیجه بگیرید که $O(n)$ زیر منیفلد $\mathrm{GL}(n:\mathbb{R})$ است.

(هـ) با استفاده از فرمول

$$\psi^{ij}(A) = \sum_k a_{ik}\, a_{jk} \qquad (A = (a_{ij}))$$

نشان دهید

$$\frac{\partial\psi^{ij}}{\partial x^{k\ell}}(A) = \begin{cases} a_{j\ell} & k = i \neq j \\ a_{i\ell} & k = j \neq i \\ ۲a_{i\ell} & k = i = j \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که رتبهٔ این ماتریس $n(n+۱)/۲$ است (در نقطهٔ I و لذا در هر $A \in O(n)$ ای). نتیجه بگیرید که $O(n)$ با بعد $n(n-۱)/۲$ است.

(و) نشان دهید که به ازاء هر $A \in O(n)$ ای $\det A = \pm ۱$. گروه $O(n) \cap \mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ را **گروه متعامد خاص** $\mathrm{SO}(n)$ یا **گروه دورانها** $R(n)$ می‌نامند.

۳۴. گیریم $\mathrm{Mat}(m,n)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ است و $\mathrm{Mat}(m,n;k)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m\times n$ با رتبهٔ k است. نشان دهید:

(الف) به ازاء هر $X_0 \in \mathrm{Mat}(m,n;k)$، ماتریس‌های جایگشتی P و G چنان وجود دارند که $PX_0G = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$، که A_0 یک ماتریس ناتکین $k \times k$ است.

(ب) $\varepsilon > 0$ای چنان وجود دارد که اگر همهٔ درآیه‌های $A - A_0$ کمتر از ε باشند، آنگاه A ناتکین است.

(ج) اگر $PXG = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ که درآیه‌های $A - A_0$ کمتر از ε هستند، آنگاه X با رتبهٔ K است که $D = CA^{-1}B$ وقتی و تنها وقتی. راهنمایی: اگر I_k نمایشگر ماتریس همانی $k \times k$ باشد، آنگاه

$$\begin{pmatrix} I_k & O \\ X & I_{p-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{pmatrix}$$

(د) $M(m,n;k) \subset M(m,n)$ زیر منیفلدی با بعد $k(m+n-k)$ است که $k \le m,n$.