

### ۸.۳ مسایل

۱. دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{[x] - [x^2]} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{2}{3x - 5} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{\sin x} \quad (12) \qquad f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$f(x) = \tan^{-1} \sqrt{x} \quad (13) \qquad f(x) = x + |x| \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{\tan x - 1} \quad (14) \qquad f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x - [x]) \quad (15) \qquad f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{sgn} x - 1} \quad (16) \qquad f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2 - \cos 3x} \quad (17) \qquad f(x) = \sqrt{[x] - |x|} \quad (7)$$

$$f(x) = \sqrt{\sin^{-1}(1-x)} \quad (18) \qquad f(x) = \frac{x - |x|}{\sqrt{[x] - 1}} \quad (8)$$

$$f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4 + 2 \sin x}\right) \quad (19) \qquad f(x) = |[x - 2] + 1| \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \cos^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right) \quad (20) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}} \quad (10)$$

۲. برد هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}} \quad (۷) \qquad f(x) = |\cos x| \quad (۱)$$

$$f(x) = (-1)^{[x]} \quad (۸) \qquad f(x) = [x] + [-x] \quad (۲)$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + x + 1) \quad (۹) \qquad f(x) = [|x|] \quad (۳)$$

$$f(x) = [2x] + [-2x] + 1 \quad (۱۰) \qquad f(x) = \sqrt{[|\sin x|]} \quad (۴)$$

$$f(x) = 4 + \cos^{-1} x \quad (۱۱) \qquad f(x) = \frac{x}{\operatorname{sgn} x} \quad (۵)$$

$$f(x) = x^2 + \sin^{-1} x \quad (۱۲) \qquad f(x) = \tan^{-1} \sqrt{x} \quad (۶)$$

۳. برای هر جفت از توابع  $f$  و  $g$  داده شده زیر دامنه تعریف و ضابطه توابع  $f+g$ ،  $f-g$ ،  $f \cdot g$ ،  $\frac{f}{g}$ ،  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را به دست آورید.

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad (۵) \qquad f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1} \quad (۱)$$

$$f(x) = \tan^{-1} x, \quad g(x) = \cos x \quad (۶) \qquad f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad g(x) = \frac{1}{x-1} \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}, \quad g(x) = [x] \quad (۷) \qquad f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x+1} \quad (۳)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad (۴)$$

۴. توابع  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(x) = 3x - 5$  مفروضند.  $f^{-1}$ ،  $(g \circ f)^{-1}$  و  $g^{-1}$  را به دست

آورید و نشان دهید

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

۵. اگر  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  به ازای چه مقادیری مانند  $c$  عضوی مانند  $x$  وجود دارد به طوری که  $f(x) = f(cx)$ .

۶. اگر به ازای همه مقادیر  $x$  و  $y$  داشته باشیم  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  و  $f(1) \neq 0$  آنگاه ثابت کنید که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم  $f(n) = nf(1)$  و  $f(nx) = nf(x)$ .

۷. فرض کنید  $n$  عددی فرد و  $x^{\frac{1}{n}} f(x^n) + \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} f(-x^n) = 1$  که در آن  $x \neq 0, 1, -1$  در این صورت  $f(x)$  را به دست آورید.

۸. توابعی مثال بزنید که برای تمام  $x$  و  $y$  های حقیقی در شرایط داده شده زیر صدق کنند.

(الف)  $f(2x) = 2f(x)$  (ج)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ب)  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1-f^2(x)}$  (د)  $f(x+y) = f(x)f(y)$

۹. فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  و  $g(x) = x^2$ . به ازای چه مقادیری از  $x$  روابط زیر برقرار می‌باشند.

(الف)  $f(x) \leq x$  (ج)  $g(x) \leq x$

(ب)  $f(x) \leq g(x)$  (د)  $g(g(x)) = g(x)$

همچنین  $g(f(x)) - f(x)$  را به دست آورید.

۱۰. فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع باشند که به صورت زیر تعریف شده باشند

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leq 2 \\ 2 & |x| > 2 \end{cases}$$

تابع  $h(x) = f(g(x))$  را به دست آورده و ضابطه آن را بنویسید. یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را تحقیق کنید.

۱۱. اگر  $f(x^2 + \frac{1}{x^2}) = x^6 + \frac{1}{x^6}$  آنگاه  $f(x)$  را محاسبه کنید.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x - |x|} \quad (۷) \quad f(x) = \sqrt{5x^3 - 2x}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}, \quad g(x) = \frac{1}{[x - 1]} \quad (۸) \quad f(x) = x \operatorname{sgn} x$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow [3, 4], \quad h(x) = 2x - [2x] + 3 \quad (۹) \quad f(x) = \left[ \frac{x^2}{2x^2 + 3} \right]$$

$$t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad t(x) = [x] \quad (۱۰) \quad f(x) = (x - [x])^2$$

$$u: \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}, \quad u(x) = x - [x] \quad (۱۱) \quad f(x) = \sqrt{x - [x]}$$

$$(۱۲) \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

۱۲. فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع فرد باشند در این صورت نشان دهید.

الف)  $f + g$  و  $f - g$  توابع فرد هستند.

ب)  $f \cdot g$  و  $\frac{f}{g}$  توابع زوج هستند.

۱۳. نشان دهید که هر تابع دلخواه را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

۱۴. تحقیق کنید از توابع زیر کدامیک زوج و کدامیک فرد می‌باشند.

$$f(x) = \cos 3x \quad (۳) \quad f(x) = x^2 + \tan x \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{2x \sin \sqrt{x}}{1 + x^2 + x\sqrt{x}} \quad (۴) \quad f(x) = x \sin x \quad (۲)$$

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (۶) \qquad f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \quad (۵)$$

۱۵. تحقیق کنید که از توابع زیر کدامیک متناوب می‌باشند و سپس دوره تناوب آنها را به دست آورید.

$$y = (-1)^{[x]} \sin \pi x \quad (۵) \qquad y = \left[\frac{x}{۴}\right] + \left[\frac{x}{۶}\right] \quad (۱)$$

$$y = \cos ۳x - ۲ \cos x + ۱ \quad (۶) \qquad y = \sin ۲x \quad (۲)$$

$$y = \cos(\sin x) \quad (۷) \qquad y = \tan ۲x - \cotan ۲x \quad (۳)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad y = \cos \frac{\pi x}{n} + x - n \left[\frac{x}{n}\right] \quad (۸) \qquad y = (-1)^{[x]} \quad (۴)$$

۱۶. روابط زیر را ثابت کنید.

$$[۲x] = [x] + \left[x + \frac{۱}{۲}\right] \quad (ب) \qquad [x+y] \geq [x] + [y] \quad (الف)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad [nx] = [x] + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + \left[x + \frac{n-2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{1}{n}\right] \quad (ج)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x] \quad (د)$$

۱۷. آیا تابع  $f(x) = x + [x]$  یک به یک است؟ وارون آن را در صورت وجود به دست آورید.

۱۸. هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = [\sqrt{x}] \quad (۲) \qquad f(x) = |1 - x^۲| - ۲ \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} \gamma - x^\gamma & |x| \leq \gamma \\ \gamma & |x| > \gamma \end{cases} \quad (11) \quad \circ \leq x \leq \gamma \quad f(x) = [x]^\gamma \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (12) \quad f(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x^\gamma - \gamma)}{\gamma} \quad (14)$$

$$-\gamma \leq x \leq \gamma \quad f(x) = |x| + \operatorname{sgn} x + [x] \quad (13) \quad f(x) = \gamma - [\gamma x] \quad (15)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (14) \quad f(x) = \operatorname{sgn} x^\gamma - \operatorname{sgn} x \quad (16)$$

$$f(x) = \sin \frac{1}{x^\gamma} \quad (15) \quad -\gamma\pi \leq x \leq \gamma\pi \quad f(x) = \max\{\sin x, \cos x\} \quad (17)$$

$$f(x) = x^\gamma \sin \frac{1}{x} \quad (16) \quad -\gamma \leq x \leq \gamma \quad f(x) = (x^\gamma + 1)[x] \quad (18)$$

$$f(x) = x^\gamma \cos \frac{1}{x^\gamma} \quad (17) \quad f(x) = (x^\gamma + 1)[x] + \operatorname{sgn}(x + 1) \quad (19)$$

$$f(x) = |x| \sin \frac{1}{|x|} \quad (18) \quad -\gamma \leq x \leq \gamma \quad f(x) = [x^\gamma] \quad (10)$$

(ب)  $|x^2 + x - 12| < \frac{1}{100}$

(ج)  $|x^2 + x - 12| < c$  (c عدد مثبت داده شده است)

۵. فرض کنید  $M \geq 0$  و برای همسایگی محذوفی از  $x = 0$  داشته باشیم  $f(x) \leq Mx$ . نشان دهید  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

۶. فرض کنید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2$ ، نشان دهید:

(الف)  $\lim_{x \rightarrow a} \max\{f, g\}(x) = \max\{b_1, b_2\}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow a} \min\{f, g\}(x) = \min\{b_1, b_2\}$

۷. فرض کنید در همسایگی محذوفی از  $x = a$ ،  $f(x) \leq M$  که در آن  $M$  یک عدد حقیقی ثابتی است. نشان دهید که اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجود باشد آنگاه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M$ .

۸. نشان دهید  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$ .

۹. حدود زیر را در صورت وجود محاسبه نمایید.

۱.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1 - x^m} - \frac{1}{1 - x^n} \right)$  .۷

۲.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d}$  .۸

۳.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$  .۹

۴.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+8}{\sqrt{x^2-7} + \sqrt{2x^2+14}}$  .۱۰

۵.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^n - 1}{x - 1} \right)$  .۱۱

۶.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [x^2]}{\sqrt{x} - |x|}$  .۱۲

|  |      |   |      |
|--|------|---|------|
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sin \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$        | . ٢٤ | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$  | . ١٣ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x^2} - \frac{1}{x^2} \right)$                           | . ٢٥ | $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]^2 - 9}{x - 3}$  | . ١٤ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{ \tan x - \sin x }{x^2}}$  | . ٢٦ | $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - \operatorname{sgn} x}$                           | . ١٥ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} + [x + \frac{1}{x}]}{x - 2}$                        | . ٢٧ | $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[ \frac{1}{x^2} \right]$   | . ١٦ |
| $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{ \operatorname{sgn}[x -  x ]  + 1}$                               | . ٢٨ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] - x)$  | . ١٧ |
| $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x-3}}$   | . ٢٩ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{2000} - [x^{2000}]}{3x^{2000} - [x]^{2000}}$                  | . ١٨ |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{(x-1)^2} - \sin \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right)$                | . ٣٠ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x^2] + x}{[x^2]}$  | . ١٩ |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$  | . ٣١ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ | . ٢٠ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(\sin x)}{x} - x^2 \sin \left[ \frac{1}{x} \right] \right)$ | . ٣٢ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$                                | . ٢١ |
| $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$                                     | . ٣٣ | $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}  [x] $   | . ٢٢ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \sin \left[ \frac{1}{x^2} \right]$                              | . ٣٤ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 3x}{x^2}$  | . ٢٣ |



|  |     |   |     |
|--|-----|---|-----|
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{[x]}$  | .۴۴ | $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \csc x - \frac{1}{x} \right)$                            | .۳۵ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{1 + \tan x}}$  | .۴۵ | $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$                          | .۳۶ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}$                              | .۴۶ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin x - \cos x}$                                | .۳۷ |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \left( (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \right)$                                       | .۴۷ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x + 1}}{\sqrt{x + \cos x}}$                | .۳۸ |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + 5}$   | .۴۸ | $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{x - \pi}$                                     | .۳۹ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  | .۴۹ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \sqrt{x^9 + 1} - \sin \sqrt{x^9 + 1} \right)$ | .۴۰ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sin \sqrt{\frac{x + 1}{x}} - \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$            | .۵۰ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x \cos x)$   | .۴۱ |
| $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \left[ \left[ \frac{[x]}{2} \right] - 5 \right]$                         | .۵۱ | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}$                          | .۴۲ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + x^5} - \sqrt[5]{1 + x^2}}{\sqrt[5]{1 - x^2} - \sqrt[5]{1 - x}}$ | .۵۲ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \sqrt{x^9 + 1} - \sin \sqrt{x^9 + 1} \right)$ | .۴۳ |

۱۰. نشان دهید که اگر  $f$  کراندار و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  آنگاه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = 0$ .

۱۱. دو تابع  $f$  و  $g$  چنان مشال بزنید که هیچ یک در صفر دارای حد نباشند اما  $f \pm g$  در صفر دارای حد باشند.

۱۲. دو تابع  $f$  و  $g$  چنان مشال بزنید که حداقل یکی از آن ها در صفر دارای حد نباشد

- ۱)  $f(x) = x^{17} - 2$   
 ۲)  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$   
 ۳)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$   
 ۴)  $f(x) = \frac{1}{x+9}$   
 ۵)  $f(x) = \frac{-17x}{x^7-1}$   
 ۶)  $f(x) = \frac{1}{(x-10)^{15}}$   
 ۷)  $f(x) = \frac{2x}{x^7-8}$   
 ۸)  $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$   
 ۹)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^7}$   
 ۱۰)  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
- ۱۱)  $f(x) = [x] + 1$
- ۱۲)  $f(x) = \frac{[x]}{x} \quad x \neq 0$
- ۱۳)  $f(x) = |[x]|$
۲. نشان دهید که تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  پیوسته است.
۳. برای چه مقادیری از  $a$  تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^7-4}{x-a} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  پیوسته است.
۴. نشان دهید که تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^7-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 7 & x = 1 \end{cases}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.
۵. برای چه مقادیری از  $a$  تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته است؟
۶. فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ x^3 & x \geq 1 \end{cases}$  نمودار  $f$  را رسم نموده و نشان دهید که  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.
۷. فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} p(x) & x \leq x_0 \\ q(x) & x > x_0 \end{cases}$  که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  چندجمله‌ای هستند. تحت چه شرایطی  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  موجود است؟
۸. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $f(x) = \frac{x^7+3x^2+2x+1}{x+1}$  روی بازه  $[0, 1]$  را بیابید.
۹. مثالی را از یک تابع کراندار روی بازه  $[0, 1]$  ارائه نمایید که روی بازه  $(0, 1]$  پیوسته باشد اما در نقطه  $x = 0$  پیوسته نباشد.
۱۰. تابعی مانند  $f$  مثال بزنید که پیوسته نباشد اما  $|f|$  پیوسته باشد.

۴. مشتق چپ تابع  $f(x) = x|x|[x]$  را در نقطه مبدا مختصات بدست آورید.

۵. اگر تابعی  $f$  مشتق پذیر و برای هر دو عدد حقیقی  $x_1$  و  $x_2$  داشته باشیم.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$$

ثابت کنید  $f$  تابعی ثابت است.

۶. فرض کنید  $f$  و  $g$  توابعی مشتق پذیر بوده و در روابط  $f'(x) = g(x)$  و  $f(x) = -f(x)$  صدق کنند. اگر  $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$  و  $h(0) = 5$  مطلوب است محاسبه  $h(10)$ .

۷. مشتق تابع زیر را بدست آورید.

|  |   |
|--|---|
| <p>۵. <math>f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}</math></p>                | <p>۱. <math>f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 5x^{\frac{1}{5}}</math></p> |
| <p>۶. <math>f(x) = \cos \sqrt{1 + \sqrt{x}}</math></p>                       | <p>۲. <math>f(x) = x^2 \sin x \cdot \cos x</math></p>   |
| <p>۷. <math>f(x) = \frac{x \sin^3 x - x^3 \sin x}{\sqrt{1 + x^2}}</math></p> | <p>۳. <math>f(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x}</math></p>  |
|  | <p>۴. <math>f(x) = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\tan^{-1}(x)} + \cos x \right)</math></p>                  |

۸. مشتق توابع ضمنی زیر را به دست آورید.

|   |  |
|---|--|
| <p>۳. <math>x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y}</math></p> | <p>۱. <math>\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1</math></p>               |
| <p>۴. <math>3x^2y + xy^2 + y = 0</math></p>                     | <p>۲. <math>x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1</math></p> |

۹. به کمک قاعده و زنجیری مشتق توابع زیر را بدست آورید.

|  |  |
|--|--|
| <p>۲. <math>y = \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}</math></p> | <p>۱. <math>y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}}</math></p> |
|--|--|

$$y = \sin(x + \sin(x + \sin x)) \quad .۴ \qquad y = \tan^{-1}(\sin^{-1}(\cos^{-1}(\sqrt{x}))) \quad .۳$$

۱۰. مشتق  $n$  ام هر يك از توابع زیر را بدست آورید.

$$y = \frac{1}{x} \quad .۴ \qquad y = \sin x \quad .۱$$

$$y = \frac{x+1}{x+2} \quad .۵ \qquad y = \cos x \quad .۲$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad .۶ \qquad y = \sqrt{x} \quad .۳$$

۱۱. اگر  $g(a) = 1$  و  $g'(a) = 2$  و  $f(x) = g^3(x) + \frac{1}{g(x)}$  مقدار  $f'(a)$  چقدر است؟

۱۲. اگر  $f(x) = x^3 - 1$  و  $g'(x) = \sqrt{3x+16}$  و مشتق  $g \circ f(x)$  را در  $x = 1$  بدست آورید.

۱۳. اگر مشتق تابع  $f(x)$  برابر  $\frac{1}{x}$  باشد مقدار مشتق تابع  $f(\sin^2(x))$  را نسبت به  $x$  حساب کنید.

۱۴. اگر  $f(x) = 2x^3 + x + 1$  باشد در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر  $f^{-1}$  مشتق آن را حساب کنید.

۱۵. تابع  $f(x) = x^3 + x - 6$  مفروض است در نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر تابع معکوس  $f$  خطی بر نمودار آن مماس می‌کنیم شیب خط را بدست آورید.

۱۶. تابع  $f(x) = x^3 - 4x + 7$  با دامنه  $[2, \infty)$  مفروض است مقدار مشتق تابع معکوس  $f$  را در  $b = 7$  پیدا کنید ( $b \in D_f - 1$ ).

۱۷. با حذف پارامتر  $t$  در معادلات پارامتری  $\begin{cases} y = \sin t - 1 \\ x = \cos t + 1 \end{cases}$  معادله منحنی را به صورت ضمنی بنویسید و  $\frac{dy}{dx}$  را به دو طریق پارامتری و ضمنی بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

## ۸.۷ مسایل

۱. در تمرین‌های زیر مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و مطلق توابع داده شده را بیابید. و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = -\sqrt{2-x^2} \quad (1) \quad (0 \leq x \leq 2), f(x) = |4x-1| \quad (1)$$

$$f(x) = x - 2 \tan^{-1}(x) \quad (2) \quad (-2 \leq x \leq 1), f(x) = 1 - x^2 \quad (2)$$

$$f(x) = 2x^3 - \sin^{-1} x \quad (3) \quad (-2 \leq x \leq -1), f(x) = 1 + (1+x)^2 \quad (3)$$

$$f(x) = \sin|x| \quad (4) \quad (0 < x \leq 1), f(x) = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$f(x) = |\sin x| \quad (5) \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{4}\right), f(\theta) = \tan \theta \quad (5)$$

$$f(x) = (x-1)^{\frac{1}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} \quad (6) \quad (-\pi < \theta < \pi), f(\theta) = \cos \frac{\theta}{4} \quad (6)$$

$$f(x) = (x-1)^{\frac{1}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} \quad (7) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (7)$$

۲. اگر تابع  $f$  دارای ماکزیمم مطلق باشد آیا  $f$  دارای ماکزیمم نسبی خواهد بود؟

۳. اگر تابع  $f$  دارای ماکزیمم مطلق باشد آیا  $|f|$  نیز دارای ماکزیمم مطلق خواهد بود پاسخ خود را توجیه کنید.

۴. نشان دهید که تابع  $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$  نه دارای ماکزیمم نسبی و نه دارای می‌نیمم نسبی است.

۵. فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} x \sin x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  نشان دهید که  $f$  در بازه  $[0, \infty)$  پیوسته و در بازه

$(0, \infty)$  مشتق‌پذیر است، اما در نقطه  $x = 0$  نه دارای ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است.

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \sec \sqrt{x} \cos \sqrt[3]{x} \quad (۸) \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{x} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cot x \quad (۹) \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[2]{1+x}}{x} \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \csc x \right) \quad (۱۰) \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[2]{x^2} + x^3}{x|x|} \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{\sqrt[2]{x}}}{x^{\sqrt[2]{x}-1}} - \frac{x^{\sqrt[2]{x}}}{x^{\sqrt[2]{x}+1}} \right) \quad (۱۱) \qquad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[2]{a}}{x-a}, \quad (a \neq 0) \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{\sin x}} \quad (۱۲) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{\sqrt[2]{x}} x}{\sin(x^{\sqrt[2]{x}})} \quad (۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^{\sqrt[2]{x}} + 1} - \sqrt{x^{\sqrt[2]{x}} - \sqrt[2]{x}}) \quad (۱۳) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt[2]{x} + \tan^{\sqrt[2]{x}} x}{x \sin x} \quad (۱۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt[2]{x} + \tan^{\sqrt[2]{x}} x}{x \sin x} \quad (۱۴) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{x} - \sin^{-1} x}{\sqrt[2]{x} + \tan^{-1} x} \quad (۶)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{x} \sin x}{\sec x - 1} \quad (۱۵) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^{\sqrt[2]{x}}} \quad (۷)$$

۳۶. اگر  $f'$  پیوسته باشد با استفاده از قاعده هویتال نشان دهید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{\sqrt[2]{h}} = f'(x).$$

۳۷. اگر  $f''$  پیوسته باشد نشان دهید

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - \sqrt[2]{2}f(x) + f(x-h)}{h^{\sqrt[2]{x}}} = f''(x).$$

۳۸. در تمرین‌های زیر بازه‌هایی که در آن  $f$  صعودی یا نزولی، مقادیر ماکزیمم و مینیمم نسبی، بازه‌هایی  $f$  مقعر به سمت بالا یا پایین و مختصات نقاط عطف را بیابید و سپس این اطلاعات را برای رسم نمودار  $f$  به کار ببرید.

مساله ۱۰.۱۰.۱۲. مطلوبست محاسبه

$$\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)}$$

حل. با تغییر متغیر  $\tan \frac{x}{2} = z$  داریم

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2 \sin x)} \\ &= \int \frac{2dz}{\frac{1+z^2}{1+z^2} \left( 2 + \frac{1-z^2}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2} \right)} \\ &= \int \frac{(1+t^2)}{t(t^2 - 4t + 3)} dt \\ &= \int \frac{(1+t^2)}{t(t-3)(t-1)} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{t} + \frac{5}{t-3} + \frac{-1}{t-1} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} + \int \frac{dt}{t-1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{5}{3} \ln|t-3| - \ln|t-1| + c \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} \right) - 3 \right| - \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} \right) - 1 \right| + c. \end{aligned}$$

## ۱۱.۱۲ مسایل

۱. حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

$$\int \sqrt{2x+3} dx \quad .۳ \qquad \int (x^4 + \sqrt[3]{x}) dx \quad .۱$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} x dx \quad .۴ \qquad \int \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} \right) dx \quad .۲$$

|   |     |  |     |
|---|-----|--|-----|
| $\int \tan x \sec^{\nu} x dx$                 | .١٧ | $\int e^x \sqrt{e^x - 1} dx$                           | .٥  |
| $\int a \tan^{\nu} x (1 + a \tan^{\nu} x) dx$ | .١٨ | $\int \frac{\ln x}{x} dx$                              | .٦  |
| $\int \sin(\cos x) \sin x dx$                 | .١٩ | $\int \frac{x^{\nu} + x - 1}{\sqrt{x}} dx$             | .٧  |
| $\int \cos(\sin x) \cos x dx$                 | .٢٠ | $\int \frac{x^{\nu} - 4}{\sqrt{x}} dx$                 | .٨  |
| $\int e^{\nu x} \sin x dx$                    | .٢١ | $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^{\nu} + 1}}$                | .٩  |
| $\int e^{\nu x} \cos^{\nu} x dx$              | .٢٢ | $\int \sin^{\nu} x dx$                                 | .١٠ |
| $\int e^x \sin^{\nu} x dx$                    | .٢٣ | $\int \cos^{\nu} x dx$                                 | .١١ |
| $\int e^{-4x} (x^{\nu} + 4x - 1) dx$          | .٢٤ | $\int x \sin(x^{\nu}) dx$                              | .١٢ |
| $\int \sec^{\nu} x dx$                        | .٢٥ | $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^{\nu}} dx$            | .١٣ |
| $\int x \sec x \tan x dx$                     | .٢٦ | $\int \frac{\cos^{\nu} x}{\sqrt{1 + \sin^{\nu} x}} dx$ | .١٤ |
| $\int \ln x dx$                               | .٢٧ | $\int \sin^{\nu} x \cos x dx$                          | .١٥ |
| $\int (\ln x)^{\nu} dx$                       | .٢٨ | $\int \cos^{\nu} x \sin x dx$                          | .١٦ |



|  |      |                            |      |
|--|------|----------------------------|------|
| $\int x \tan^{-1} x dx$  | . ۴۱ | $\int x \ln x dx$          | . ۲۹ |
| $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$                   | . ۴۲ | $\int x^n \ln x dx$        | . ۳۰ |
| $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(x^2+1)^2} dx$                      | . ۴۳ | $\int x^n \sin x dx$       | . ۳۱ |
| $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$                                | . ۴۴ | $\int x^n \cos x dx$       | . ۳۲ |
| $\int \sin^{-1} x \left( \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^n}} \right)$ | . ۴۵ | $\int (x^n+1) \sin^n x dx$ | . ۳۳ |
| $\int \frac{\sin^{-1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$                 | . ۴۶ | $\int (x^n+1) \cos^n x dx$ | . ۳۴ |
| $\int \sec x \cdot \tan^n x dx$                                | . ۴۷ | $\int \sin^{-1} x dx$      | . ۳۵ |
| $\int e^{nx} e^{e^x} dx$                                       | . ۴۸ | $\int \cos^{-1} x dx$      | . ۳۶ |
| $\int x e^{\sqrt{x}} dx$                                       | . ۴۹ | $\int x \sin^{-1} x dx$    | . ۳۷ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$                                 | . ۵۰ | $\int x^n \sin^{-1} x dx$  | . ۳۸ |
| $\int \sqrt{1-x^2} dx$   | . ۵۱ | $\int \sqrt{x} \ln x dx$   | . ۳۹ |
|  |      | $\int 3^x e^x dx$          | . ۴۰ |

|  |     |  |     |
|--|-----|--|-----|
| $\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)}$                 | .۶۳ | $\int \sqrt{4x^2-1} dx$                | .۵۲ |
| $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$        | .۶۴ | $\int \sqrt{4-x^2} dx$                 | .۵۳ |
| $\int \frac{(x+1)dx}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}$ | .۶۵ | $\int \frac{ax}{\sqrt{3-\sin^2 x}} dx$ | .۵۴ |
| $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$            | .۶۶ | $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$  | .۵۵ |
| $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx$            | .۶۷ | $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$        | .۵۶ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$          | .۶۸ | $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$       | .۵۷ |
| $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$             | .۶۹ | $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$        | .۵۸ |
| $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}$           | .۷۰ | $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$      | .۵۹ |
| $\int \frac{(x^2+x)dx}{x^3-x^2+x-1}$         | .۷۱ | $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$    | .۶۰ |
| $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$                  | .۷۲ | $\int \frac{dx}{3x^2+2x+4}$            | .۶۱ |
| $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)}$               | .۷۳ | $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+x^2}}$        | .۶۲ |

|   |     |  |     |
|---|-----|--|-----|
| $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$                            | .۸۵ | $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$          | .۷۴ |
| $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$                           | .۸۶ | $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-1)(x+2)}$           | .۷۵ |
| $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$                     | .۸۷ | $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$               | .۷۶ |
| $\int \frac{\sqrt{x^2}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x}} dx$           | .۸۸ | $\int \frac{(x-1)dx}{x^2-4x^2+4x}$           | .۷۷ |
| $\int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1} dx$ | .۸۹ | $\int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ | .۷۸ |
| $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}} dx$ | .۹۰ | $\int \frac{(x^2-6)dx}{x^6+6x^2+8}$          | .۷۹ |
| $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}} dx$     | .۹۱ | $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^2}$             | .۸۰ |
| $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+2)^2}{\sqrt{x^2}} dx$                  | .۹۲ | $\int \frac{(x^2+x-1)dx}{(x^2+2)^2}$         | .۸۱ |
| $\int \sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}} dx$                             | .۹۳ | $\int \frac{dx}{x^2+1}$                      | .۸۲ |
| روش $z = \tan(\frac{x}{2})$                                     |     |  |     |
| $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$                                    | .۹۴ | $\int \frac{x^5 dx}{x^2-1}$                  | .۸۳ |
| $\int \frac{dx}{2+\cos x}$                                      | .۹۵ | $\int \frac{dx}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2}$         | .۸۴ |

|   |      |   |      |
|---|------|---|------|
| $\int \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cos\left(\frac{3}{4}x\right) dx$ | .۱۰۸ | $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$               | .۹۶  |
| $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$   | .۱۰۹ | $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$                      | .۹۷  |
| $\int \sin^4 x \sin^3 x dx$   | .۱۱۰ | $\int \frac{\cos x dx}{1 + 2 \cos x}$               | .۹۸  |
| $\int \cos^3 x \cos^3 x dx$   | .۱۱۱ | $\int \frac{dx}{a \tan x (\lambda + \nu \cos^2 x)}$ | .۹۹  |
| $\int (\sin x)(\cos x + \sin x)^3 dx$                                 | .۱۱۲ | $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 1}$                    | .۱۰۰ |
| $\int \tan^4 x dx$  | .۱۱۳ | $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}$                      | .۱۰۱ |
| $\int \sec^4 x dx$  | .۱۱۴ | $\int a \tan^5 x dx$                                | .۱۰۲ |
| $\int x^2 e^x dx$   | .۱۱۵ | $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$                    | .۱۰۳ |
| $\int (\ln x)^3 dx$   | .۱۱۶ | $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \tan^2 x}$               | .۱۰۴ |
| $\int x^n e^{-x} dx$  | .۱۱۷ | $\int \sin x \cdot \sin^3 x dx$                     | .۱۰۵ |
| $\int (x^3 + 1)^n dx$   | .۱۱۸ | $\int \cos^4 x \cos^3 x dx$                         | .۱۰۶ |
| $\int \sec^3 x \cdot \csc^4 x dx$                                     | .۱۱۹ | $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$                         | .۱۰۷ |

۱۲۰.

$$\int \tan^3 x \cdot \sec^5 x dx$$

- $$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx \quad .41 \qquad \int \sin(\ln x) dx \quad .21 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}} \quad .1$$
- $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx \quad .42 \qquad \int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx \quad .22 \qquad \int (\cos x + \sin x) dx \quad .2$$
- $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x - \cos^2 x}} dx \quad .43 \qquad \int \frac{\sin^{-1}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}} dx \quad .23 \qquad \int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx \quad .3$$
- $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad .44 \qquad \int \cos^2(\ln x) dx \quad .24 \qquad \int 2x\sqrt{x+1} dx \quad .4$$
- $$\int \cos^2 x dx \quad .45 \qquad \int e^{-x} \sin^2 x dx \quad .25 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad .5$$
- $$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad .46 \qquad \int \sin x \ln(\tan x) dx \quad .26 \qquad \int \frac{2^x-1}{\sqrt{2^x}} dx \quad .6$$
- $$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad .47 \qquad \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx \quad .27 \qquad \int \sin x \sqrt{1 - \cos(2x)} dx \quad .7$$
- $$\int \sin^2 x dx \quad .48 \qquad \int \sqrt{x^{-1} - 1} dx \quad .28 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad .8$$
- $$\int \cos^2 x dx \quad .49 \qquad \int \tan x \ln(\cos x) dx \quad .29 \qquad \int \frac{\tan^{-1}(x/2)}{x^2+4} dx \quad .9$$
- $$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \quad .50 \qquad \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx \quad .30 \qquad \int \sqrt{\frac{\sin^{-1} x}{1-x^2}} dx \quad .10$$
- $$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \quad .51 \qquad \int \frac{x^2-x+1}{x^2-3x+1} dx \quad .31 \qquad \int \frac{\ln(2x) dx}{x \ln(4x)} \quad .11$$
- $$\int \frac{1}{3+\delta \cos x} dx \quad .52 \qquad \int \frac{2^x}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} dx \quad .32 \qquad \int \frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad .12$$
- $$\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx \quad .53 \qquad \int \frac{x}{(x^2+3)(x^2+1)} dx \quad .33 \qquad \int \frac{dx}{\sinh(x)} dx \quad .13$$
- $$\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx \quad .54 \qquad \int \frac{x^2+x^2}{x^{1/2}-2x+1} dx \quad .34 \qquad \int x e^{-x^2} dx \quad .14$$
- $$\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x} dx \quad .55 \qquad \int \frac{x}{x^2+x^2+1} dx \quad .35 \qquad \int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}} dx \quad .15$$
- $$\int \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx \quad .56 \qquad \int \frac{x^2}{x^2+x^2-2} dx \quad .36 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\ln(x+\sqrt{x^2+1})(x^2+1)}} \quad .16$$
- $$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad .57 \qquad \int \frac{1}{x^2-1} dx \quad .37 \qquad \int x \cos^2 x dx \quad .17$$
- $$\int \sqrt{x^2+2} dx \quad .58 \qquad \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx \quad .38 \qquad \int x e^{-x} dx \quad .18$$
- $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad .59 \qquad \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx \quad .39 \qquad \int e^{\sqrt{x}} dx \quad .19$$
- $$\int \sqrt{x^2-2x+2} dx \quad .60 \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx \quad .40 \qquad \int 2^x \cos x dx \quad .20$$

$$\int x\sqrt{1-x^r} dx \quad .83 \qquad \int xe^{-rx} dx \quad .72 \qquad \int \frac{1}{(1-x^r)\sqrt{1+x^r}} dx \quad .61$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^r x} dx \quad .84 \qquad \int \frac{x^r}{\sqrt{r+x^r}} dx \quad .73 \qquad \int (x^r + rx - 1) \sin^r x dx \quad .62$$

$$\int \frac{1}{(x^r+1)^r} dx \quad .85 \qquad \int \cos x \cos^\delta(\sin x) dx \quad .74 \qquad \int (x^r + 1) \cos(x - 1) dx \quad .63$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^r}}{x} dx \quad .86 \qquad \int \frac{\cos x + \sin rx}{\sin x} dx \quad .75 \qquad \int x^r e^{\sqrt{x}} dx \quad .64$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^r}} dx \quad .87 \qquad \int \tan x \sec^r x dx \quad .76 \qquad \int e^{-rx} \cos^r(rx) dx \quad .65$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^r x + r \cos x} dx \quad .88 \qquad \int \tan^r x \sec x dx \quad .77 \qquad \int x^r e^{-x^r} dx \quad .66$$

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^r x}} dx \quad .89 \qquad \int \csc^r x \cot^r x dx \quad .78 \qquad \int x^\delta \cos(x + r) dx \quad .67$$

$$\int (1 + \sqrt{x}) dx \quad .90 \qquad \int \sin^\delta x \sin x dx \quad .79 \qquad \int (x - 1) \sin(\pi x) dx \quad .68$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^r} dx \quad .91 \qquad \int \sqrt{1 - \cos rx} dx \quad .80 \qquad \int \frac{xe^{rx}}{(1+rx)^r} dx \quad .69$$

$$\int \frac{\sqrt{rx-1}}{rx+r} dx \quad .92 \qquad \int \frac{1}{x^r \sqrt{r-x^r}} dx \quad .81 \qquad \int \ln^r x dx \quad .70$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}} dx \quad .93 \qquad \int \frac{x^r}{\sqrt{x^r+r}} dx \quad .82 \qquad \int x^\delta \ln x dx \quad .71$$

انتگرالهای ناسره زیر را بیابید

$$\int_0^{+\infty} e^{-rx} \sin(rx) dx \quad .98 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-r\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad .96 \qquad \int_0^1 \frac{x^r}{\sqrt{1-x}} dx \quad .94$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{r}} \ln(\cos x) dx \quad .99 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x} dx \quad .97 \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad .95$$

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسره زیر را تعیین کنید.

$$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^r} dx \quad .104 \qquad \int_0^\pi \frac{\sin^r x}{\sqrt{x}} dx \quad .102 \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^r-x}} dx \quad .100$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln^r x} dx \quad .105 \qquad \int_0^1 x \ln x dx \quad .103 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1} x}{r+e^x} dx \quad .101$$

همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

$$\sum_1^{+\infty} \frac{r^n n^r}{n!} \quad .114 \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100} \quad .110 \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{n^\delta}{r^n + r^n} \quad .106$$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n} \quad .115 \qquad \sum_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} \quad .111 \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{n^r + r_{n+1}} \quad .107$$

$$\sum_r^{+\infty} (\ln n)^{\ln n} \quad .116 \qquad \sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^r n}{n} \quad .112 \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{r^n - 1}{r^n - r^n} \quad .108$$

$$\sum_1^{+\infty} (\sqrt[r]{r} - 1)^n \quad .117 \qquad \sum_r^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))} \quad .113 \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{r+(-1)^n}{r^n + 1} \quad .109$$

حل. با توجه به شکل داریم

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} a^2 \sin^6 t (-\sqrt{3}a \cos^2 t \sin t) dt \\ &= 6\pi a^3 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \sin^5 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \sin^7 t dt \right] \\ &= 6\pi a^3 \left( \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \times \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3. \end{aligned}$$

### ۸.۱۳ مسایل

۱. سطح زیر هر یک از منحنی‌های داده شده زیر را در فواصل داده شده به دست آورید.

- |  |  |
|--|--|
| ۴.                                       | ۱.                                       |
| $y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4$    | $y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$    |
| ۵.                                       | ۲.                                       |
| $y = \tan x, \quad 0 \leq x \leq 1$      | $y = \sin^{-1} x, \quad 0 \leq x \leq 1$ |
| ۶.                                       | ۳.                                       |
| $y = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq e$ | $y = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 1$    |

۲. مساحت ناحیه محدود به هر کدام از دو منحنی‌های داده شده را به دست آورید.

- |                                  |                      |
|----------------------------------|----------------------|
| ۵.                               | ۱.                   |
| $y = x^2, y = x^2 + 4x$          | $y = x^2, y = x$     |
| ۶.                               | ۲.                   |
| $x = \sqrt{y}, x = \sqrt[3]{y}$  | $y = x^2, y = x^4$   |
| ۷.                               | ۳.                   |
| $y^2 = 2x - 2, y = x - 5$        | $y = e^x, y = x^2$   |
| ۸.                               | ۴.                   |
| $x^2 - y + 1 = 0, x - y + 1 = 0$ | $y = x^2 - 4, y = 0$ |



۹.  $y^2 = x, x^2 = y$  .۱۱  
 $y = \sqrt{1-x^2}, y = -\sqrt{1-x^2}$
۱۰.  $y = x^3 - 2x^2 - 3x, y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$  .۱۲  
 $y = x^2, y = \sqrt{x}$
۳. سطح محصور بین  $y = -x^2$  و  $x = 2$  و  $x = 4$  و محور  $x$  ها را بیابید.
۴. مساحت ناحیه محصور توسط محور  $x$  ها و منحنی  $(x-3)(x-2)(x+1)$  و  $x = 0$  و  $x = 4$  را بیابید.
۵. ناحیه محصور بین  $y = x^2 + 2$  و  $y = x$  و  $x = 1$  و  $x = 2$  را به دست آورید.
۶. سطح محصور بین  $y = \cos x + 1$  و  $y = \frac{3}{4}$  و  $x = 0$  و  $x = \pi$  را بیابید.
۷. سطح محصور میان منحنی‌های  $y = \ln x$  و  $x = 2$  و  $x = 0$  را به دست آورید.
۸. مساحت نواحی مشخص شده در هر کدام از موارد زیر را به دست آورید.
۱.  $y = \sec^2 x, y = \cot x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$  .۷  
 $y = e^{-x}, x = \ln 2, x = \ln 5, y = 0$
۲.  $y = \ln x^2, y = \ln 4, x = e$  .۸  
 $y = \frac{x+1}{(x^2+2x)^2}, x = 1, y = 0$
۳.  $y = \tan^2 x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = 0$  .۹  
 $y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{x^2+1}$
۴.  $x^2 + y^2 = 4, y = 0, x \geq 0$  .۱۰  
 $y = x\sqrt{1+x^2}, x = 0, x = 1, y = 0$
۵.  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}}, x = 0, y \geq 0$  .۱۱  
 $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq y, y \geq 0$
۶.  $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi$  .۱۲  
 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x \geq 0, y \geq 0$
۹. طول قوس هر کدام از منحنی‌های زیر را در فواصل مشخص شده به دست آورید.

۱.  $y = x^{\frac{1}{2}}, 1 \leq x \leq 8$  .۶
- $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{2}{3}}, 0 \leq y \leq 4$  .۷
۲.  $y = x^4 + 2x^{-2}, 1 \leq x \leq 2$  .۸
- $y = \frac{\sqrt{x}(3x-1)}{3}, 1 \leq x \leq 4$  .۹
۳.  $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 2 \leq x \leq 5$  .۱۰
- $x = y^2, 0 \leq y \leq 4$  .۱۱
۴.  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1, \frac{1}{8} \leq x \leq 1$  .۱۲
- $x = \tan y, 0 \leq x \leq 1$  .۱۳
- $9y^2 = 4x^3, 0 \leq x \leq 3$  .۱۴
۱۰. طول قوس منحنی پارامتری  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$  را در فاصله  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  به دست آورید.
۱۱. طول قوس منحنی پارامتری  $\begin{cases} x = a \cos t + at \sin t \\ y = a \sin t - at \cos t \end{cases}$  را به ازای  $0 < a$  و  $0 \leq t \leq 2\pi$  به دست آورید.
۱۲. طول قوس منحنی  $y = \ln x$  را از نقطه  $x = \sqrt{3}$  تا  $x = 2\sqrt{2}$  به دست آورید.
۱۳. طول قوس نیم دایره  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  را به دست آورید.
۱۴. طول قوس منحنی پارامتری  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  را به دست آورید.
۱۵. حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی  $y^2 = 8x$  و خط  $x = 2$  را حول محور  $x$ ها به دو روش برشی و لایه‌های استوانه‌ای به دست آورید و نشان دهید حاصل هر دو روش یکسان هستند.
۱۶. ناحیه  $A$  محدود به سهمی  $y = 4x - x^2$  و خط  $y = 6$  و محور  $x$ ها مفروض است.  
الف) حجم حاصل از دوران ناحیه  $A$  حول محور  $x$ ها را به دست آورید.  
ب) حجم حاصل از دوران ناحیه  $A$  را حول محور  $y$ ها به دست آورید.
۱۷. حجم حاصل از دوران ناحیه درون دایره  $(x-a)^2 + y^2 = b^2$  حول محور  $y$ ها را به دست آورید.

۱۸. ناحیه  $A$  محدود به منحنی‌های  $y = -x^2 - 3x + 6$  و  $x + y = -3$  مفروض است. حجم حاصل از دوران این سطح حول محور  $x$ ‌ها و نیز حول خط  $x = 3$  را به دست آورید.

۱۹. حجم حاصل از دوران هرکدام از نواحی محدود به منحنی‌های زیر را حول محور  $x$ ‌ها و محور  $y$ ‌ها به دو روش برشی و لایه‌های استوانه‌ای به دست آورید.

۱.  $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$  ۷.  
 $y = x^2 - 5x + 6, y = 0$

۲.  $4x^2 + 9y^2 = 36$  ۸.  
 $y = e - x^2, y = 0, x = 0, x = 1$

۳.  $x = 9 - y^2, y = x - 7$  ۹.  
 $y = 2x^2, y = 2x + 4$

۴.  $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$  ۱۰.

۵.  $xy = 4, y = (x - 3)^2$  ۱۱.  
 $y = x^3, x = 0, y = 8$

۶.  $y = x^2, y = 4x - x^2$  ۱۱.  
 $y = x^2, x = y^2$

۲۰. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی  $y = x^2$  و  $0 \leq x \leq 2$  حول محور  $x$ ‌ها را به دست آورید.

۲۱. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی  $y = \sqrt{1 - x^2}$  و  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$  حول محور  $x$ ‌ها را به دست آورید.

۲۲. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی  $y = (x - 1)^2$  و  $0 \leq x \leq 1$  حول محور  $x$ ‌ها را به دست آورید.

۲۳. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی  $y = x^3$  و  $0 \leq x \leq 2$  حول محور  $x$ ‌ها را به دست آورید.

۲۴. سطح جانبی رویه حاصل از دوران منحنی  $y = \frac{x^3}{4} + \frac{1}{3x}$  و  $1 \leq x \leq 3$  حول محور  $x$ ‌ها را به دست آورید.

A large number of the fractional forms to be integrated have a single term in the numerator, while the denominator is a quadratic expression with or without a square root sign over it. The following outline will assist the student in choosing the right formula.

|                           | NUMERATOR OF FIRST DEGREE  | NUMERATOR OF ZERO DEGREE   |
|---------------------------|--|--|
| No radical in denominator | $\int \frac{dv}{v} = \log v + C$                                     | $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C$ , or,<br>$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{v-a}{v+a} + C$ |
| Radical in denominator    | $\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$<br>( $n \neq -\frac{1}{2}$ ) | $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + C$ , or,<br>$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \log(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C$  |

Students should be drilled in integrating the simple forms orally and to tell by inspection what formulas may be applied in integrating examples chosen at random.

EXAMPLES

For formulas (18)-(23).

Verify the following integrations:

1.  $\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C.$

**Solution.** This resembles (18). For, let  $v^2 = 4x^2$  and  $a^2 = 9$ ; then  $v = 2x$ ,  $dv = 2 dx$ , and  $a = 3$ . Hence if we multiply the numerator by 2 and divide in front of the integral sign by 2, we get

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2 + 9} &= \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{(2x)^2 + (3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{(2x)^2 + (3)^2} \\ &= \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C. \end{aligned} \quad \text{By (18)}$$

2.  $\int \frac{dx}{9x^2 - 4} = \frac{1}{12} \log \frac{3x - 2}{3x + 2} + C.$

6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \log(x + \sqrt{x^2 + 9}) + C.$

3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C.$

7.  $\int \frac{5 dx}{x^2 + 9} = \frac{5}{3} \arctan \frac{x}{3} + C.$

4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C.$

8.  $\int \frac{b dx}{a^2 x^2 - c^2} = \frac{b}{2ac} \log \frac{ax - c}{ax + c} + C.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} = \log(x + \sqrt{x^2 - 9}) + C.$

9.  $\int \frac{7x^2 dx}{5 - x^6} = \frac{7}{6\sqrt{5}} \log \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} + C.$

$$10. \int \frac{5x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{5}{2} \arcsin x^2 + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} \frac{2x}{3} + C.$$

$$14. \int \frac{edt}{a^2-b^2t^2} = \frac{e}{2ab} \log \frac{bt+a}{bt-a} + C$$

$$12. \int \frac{ax dx}{x^4+e^4} = \frac{a}{2e^2} \arctan \frac{x^2}{e^2} + C.$$

$$15. \int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^{2t}}} = \arcsin e^t + C.$$

$$16. \int \frac{7 ds}{\sqrt{3-5s^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \arcsin \sqrt{\frac{5}{3}} s + C.$$

$$17. \int \frac{dv}{\sqrt{av^2-b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log(\sqrt{av} + \sqrt{av^2-b}) + C.$$

$$18. \int \frac{\cos \alpha d\alpha}{a^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{\sin \alpha}{a} \right) + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}} = \arcsin(\log x) + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{b^2+e^{2x^2}}} = \frac{1}{e} \log(ex + \sqrt{b^2+e^{2x^2}}) + C.$$

$$21. \int \frac{dy}{\sqrt{b^2y^2-a^2}} = \frac{1}{b} \log(by + \sqrt{b^2y^2-a^2}) + C.$$

$$22. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-(u+b)^2}} = \arcsin \frac{u+b}{a} + C.$$

$$23. \int \frac{adz}{(z-e)^2+b^2} = \frac{a}{b} \arctan \frac{z-e}{b} + C.$$

$$24. \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

HINT. By completing the square in the denominator, this expression may be brought to a form similar to that of Ex. 17. Thus,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C. \quad \text{By (18)}$$

Here  $v = x+1$  and  $a = 2$ .

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{3} + C.$$

HINT. Bring this to the form of Ex. 16 by completing the square. Thus,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x^2-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{3} + C. \quad \text{By (20)}$$

Here  $v = x - \frac{1}{2}$  and  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$26. \int \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$27. \int \frac{dx}{3x^2-2x+4} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C.$$

$$28. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}-(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16})+\frac{5}{8}}}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C.$$

$$29. \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}} = \arcsin(2x-3) + C.$$

$$30. \int \frac{dv}{v^2-6v+5} = \frac{1}{4} \log \frac{v-5}{v-1} + C.$$

$$31. \int \frac{dy}{y^2+3y+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{2y+3-\sqrt{5}}{2y+3+\sqrt{5}} + C.$$

$$32. \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \log \left( t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1} \right) + C.$$

$$33. \int \frac{dz}{2z^2-2z+1} = \arcsin(2z-1) + C.$$

$$34. \int \frac{ds}{\sqrt{2as+s^2}} = \log(s+a+\sqrt{2as+s^2}) + C.$$

$$35. \int \frac{dx}{x\sqrt{c^2x^2-a^2b^2}} = \frac{1}{ab} \arcsin \frac{cx}{ab} + C.$$

$$36. \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3-9x^6}} = \frac{1}{3} \arcsin 18x^3 + C.$$

$$37. \int \frac{(b+ex)dx}{a^2+x^2} = \frac{b}{a} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{e}{2} \log(a^2+x^2) + C.$$

HINT. A fraction with more than one term in the numerator may be broken up into the sum of two or more fractions having the several terms of the original numerator as numerators, all the denominators being the same as the denominator of the original fraction. Thus, the last example may be written

$$\int \frac{(b+ex)dx}{a^2+x^2} = \int \frac{b dx}{a^2+x^2} + \int \frac{ex dx}{a^2+x^2} = b \int \frac{dx}{a^2+x^2} + e \int \frac{x dx}{a^2+x^2},$$

each term being integrated separately.

$$38. \int \frac{(3x-1)dx}{x^2+9} = \frac{3}{2} \log(x^2+9) - \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

$$39. \int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx = \frac{1}{3} \log(3x^2-2) - \frac{5}{2\sqrt{6}} \log \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} + C.$$

$$40. \int \frac{3s-2}{\sqrt{9-s^2}} ds = -3\sqrt{9-s^2} - 2 \arcsin \frac{s}{3} + C.$$

$$41. \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx = \sqrt{x^2+4} + 3 \log(x+\sqrt{x^2+4}) + C.$$

$$42. \int \frac{(5t-1)dt}{\sqrt{3t^2-9}} = \frac{5}{3} \sqrt{3t^2-9} - \frac{1}{\sqrt{3}} \log(t\sqrt{3}+\sqrt{3t^2-9}) + C.$$

43. Integrate the following expressions and verify your results by differentiation :

(a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$ .

(i)  $\int \frac{2 dx}{\sqrt{25x^2-4}}$ .

(q)  $\int \frac{3 dx}{\sqrt{5x^2+1}}$ .

(b)  $\int \frac{adx}{3-12x^2}$ .

(j)  $\int \frac{bdy}{12y^2+3}$ .

(r)  $\int \frac{dw}{12w^2-3}$ .

(c)  $\int \frac{2 dt}{3t^2-5t+2}$ .

(k)  $\int \frac{d\phi}{\sqrt{3\phi^2-2}}$ .

(s)  $\int \frac{3 d\theta}{\sqrt{2-3\theta^2}}$ .

(d)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-4}}$ .

(l)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-16}}$ .

(t)  $\int \frac{dt}{\sqrt{7t-4t^2+5}}$ .

(e)  $\int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{9-4\cos^2 \theta}}$ .

(m)  $\int \frac{dz}{z\sqrt{4-(\log z)^2}}$ .

(u)  $\int \frac{e^{ax} dx}{e^{2ax}+1}$ .

(f)  $\int \frac{(2x-3) dx}{x^2+4}$ .

(n)  $\int \frac{(t+2) dt}{4t^2-3}$ .

(v)  $\int \frac{(3s-5) ds}{\sqrt{1-9s^2}}$ .

(g)  $\int \frac{y+3}{\sqrt{9y^2+1}} dy$ .

(o)  $\int \frac{(ax-b) dx}{\sqrt{1+9x^2}}$ .

(w)  $\int \frac{(2x+3) dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}$ .

(h)  $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$ .

(p)  $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$ .

(x)  $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4t+2}}$ .

**168. Trigonometric differentials.** We shall now consider some trigonometric differentials of frequent occurrence which may be readily integrated by being transformed into standard forms by means of simple trigonometric reductions.

**Example I.** To find  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .

When either  $m$  or  $n$  is a positive odd integer, no matter what the other may be, this integration may be performed by means of formula (4),

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}.$$

For the integral is reducible to the form

$$\int (\text{terms involving only } \cos x) \sin x dx,$$

when  $\sin x$  has the odd exponent, and to the form

$$\int (\text{terms involving only } \sin x) \cos x dx,$$

when  $\cos x$  has the odd exponent. We shall illustrate this by means of examples.

EXAMPLES

1.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{arc} \sec \frac{x}{a} + C.$
2.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C.$
3.  $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.$
4.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin x - \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{2} + C.$
5.  $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(2x^2 - 1) \sqrt{x^2 + 1}}{3x^3} + C.$
6.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C.$
7.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C.$

MISCELLANEOUS EXAMPLES

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$                  | 14. $\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 5}.$                         | 27. $\int \frac{dx}{(a + bx)^n}.$                             |
| 2. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x + 2}.$           | 15. $\int \frac{3 \cos \theta d\theta}{5 - 7 \sin \theta}.$ | 28. $\int \frac{1 + \sec^2 \theta}{1 + \tan \theta} d\theta.$ |
| 3. $\int \frac{(ax + b) dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$ | 16. $\int \frac{(a^2 x + 1)^2}{\sqrt{ax}} dx.$              | 29. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}}.$                     |
| 4. $\int \tan^3 \frac{\theta}{3} d\theta.$      | 17. $\int \frac{ds}{\sqrt{1 + 3s - s^2}}.$                  | 30. $\int (a - 3x^2)^m 2x dx.$                                |
| 5. $\int \frac{(4x - 1) dx}{\sqrt{1 - 5x^2}}.$  | 18. $\int \cos^5 \frac{x}{5} dx.$                           | 31. $\int \frac{2x^2 dx}{(a^3 - x^3)^{\frac{2}{3}}}$          |
| 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 2x - x^2}}.$       | 19. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}.$                         | 32. $\int \frac{(a + x)^3}{\sqrt{x}} dx.$                     |
| 7. $\int \frac{5 - 3t}{\sqrt{1 - a^2 t^2}} dt.$ | 20. $\int \frac{x^3 dx}{x - 3}.$                            | 33. $\int \frac{\log^3 x dx}{x}.$                             |
| 8. $\int \frac{d\phi}{2\phi^2 - \phi + 1}.$     | 21. $\int \frac{d\theta}{\sin 2\theta}.$                    | 34. $\int e^{-ax^2} x^2 dx.$                                  |
| 9. $\int \frac{4x^2 dx}{1 - 4x^4}.$             | 22. $\int \frac{dt}{\cos 3t}.$                              | 35. $\int \frac{ax - b}{x^2 + 4m^2} dx.$                      |
| 10. $\int (\tan 3x - 1)^2 dx.$                  | 23. $\int \frac{5 dx}{\sqrt{x - 3}}.$                       | 36. $\int \frac{1 - 2x}{9x^2 - n^2} dx.$                      |
| 11. $\int \tan^3 \theta \sec^3 \theta d\theta.$ | 24. $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 6y + 10}}.$                 | 37. $\int \cos^3 ax \sin ax dx.$                              |
| 12. $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx.$               | 25. $\int \frac{ax dx}{b - cx^2}.$                          | 38. $\int \cot^4 3 ay dy.$                                    |
| 13. $\int \frac{d\theta}{\cos^4 \theta}.$       | 26. $\int \frac{x dx}{(1 + x^2)^3}.$                        | 39. $\int \sin^2 6 x dx.$                                     |



40. The following functions have been obtained by differentiating certain functions. Find the functions and verify your results by differentiation.

(a)  $5x^3 + \sin 2x$ .

**Solution.** In this example  $(5x^3 + \sin 2x) dx$  is the differential expression to be integrated. Thus  $\int (5x^3 + \sin 2x) dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$ . *Ans.*

*Verification.*  $\frac{d}{dx} \left( \frac{5x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + C \right) = 5x^3 + \sin 2x$ .

(b)  $5x^3 - 6x$ .

(c)  $2x^2 - 3x - 4$ .

(d)  $\cos^2 ax + \sin \frac{x}{a}$ .

(e)  $\sqrt{a + bx}$ .

(f)  $\frac{ax + b}{bx + a}$ .

(g)  $\frac{x}{5 + 2x}$ .

(h)  $\frac{3 + 2x}{x^2 + 1}$ .

(i)  $\frac{1 - 3x}{4x^2 - 7}$ .

(j)  $\frac{mx + n}{\sqrt{y^2 - h^2x^2}}$ .

(k)  $\frac{ax - m}{\sqrt{3 + 4x^2}}$ .

(l)  $\frac{bt + c}{\sqrt{a^2t^2 - b^2}}$ .

(m)  $\frac{5 - 6s}{9 - 4s^2}$ .

(n)  $\frac{z^3}{5 - 2z}$ .

(o)  $\sin mx \cos mx$ .

(p)  $\cos^2 4px$ .

(q)  $\tan^3 \frac{x}{a}$ .

(r)  $\frac{(1 - 2y)^3}{\sqrt[3]{y}}$ .

(s)  $\frac{1}{x^2 + 4x - 1}$ .

(t)  $\sec^4 \frac{ax}{b}$ .

(u)  $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2 + 2x}}$ .

(v)  $(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})^2$ .

(w)  $x^3(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ .

(x)  $\frac{1}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$ .

(y)  $x^2\sqrt{1 + x^2}$ .