ریاضی عمومی ۲

(برای دانشجویان علوم پایه و فنی مهندسی)

دکتر احمد عرفانیان

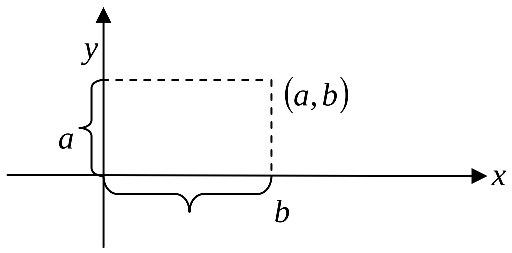
(عضو هیات علمی دانشگاه فردوسی)

فصل اول

مختصات قطبی

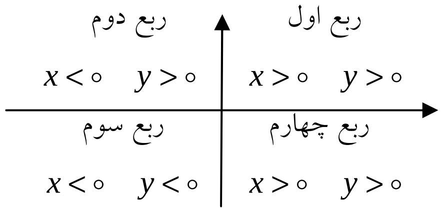
همانطوریکه ار ریاضیات مقدماتی می دانیم یکی از روشهای نمایش یک نقطه در صفحه استفاده از دستگاه مختصات دکارتی است. یک دستگاه مختصات دکارتی تشکیل شده است از دو خط عمود بر هم که در نقطه o بنام مبداء مختصات یکدیگر را قطع کرده اند. خطوط افقی و عمودی را بدین صورت مدرج نموده ایم که در نقطه o مقدار صفر و در سمت راست آن مقادیر مثبت و در سمت چپ آن مقادیر منفی قرار داده شده است. به همین صورت دو خط عمودی قسمت بالای مبداء مقادیر مثبت و در قسمت پایین آن مقادیر منفی قرار گرفته اند. در دستگاه مختصات دکارتی خط افقی و به عبارت دیگر محور افقی بنام محور طول ها و یا محور x ها و نیز محور عرض ها یا محور y ها نامگذاری شده است.

بر این اساس دستگاه مختصات دکارتی گاهی بنام دستگاه xoy نیز بیان می شود. نمایش یک نقطه در مختصات دکارتی بصورت (a,b) می باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است.



محورهای مختصات صفحه $\mathbb{R}^2$ را به چهار ناحیه تقسیم می کنند که هر ناحیه را یک ربع می نامیم. همانطوریکه در شکل زیر دیده می شود، نقاطی که در ربع اول قرار دارند، طول و عرضشان هر دو مثبتند. در ربع دوم مختص اول یعنی طول منفی و مختص دوم یعنی عرض مثبت است نقاط واقع در ربع سوم، هر دو مختصشان منفی است. در ربع چهارم مختص اول نقاط مثبت و مختص دوم آنها منفی است.

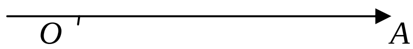
اگر p نقطه ای به مختصات (x,y) باشد، آنگاه داریم:



اکنون می خواهیم دستگاه مختصات دیگری را برای نمایش نقاط در صفحه معرفی کنیم که دستگاه مختصات قطبی نام دارد لذا به تعریف و توصیف شهودی آن می پردازیم.

۱-۱ دستگاه مختصات قطبی

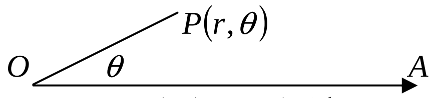
۱-۱-۱ تعریف(دستگاه مختصات قطبی): در قسمت فوق ملاحطه نمودیم که دستگاه مختصات دکارتی از دو محور عمود بر هم و یک نقطه ثابت واقع در آن تشکیل می شود. محور oA را محور قطبی و نقطه o را قطب یا مبداء می نامیم (شکل ۱-۱-۱).



شکل(۱-۱-۱)

۲-۱-۱ مختصات نقطه در دستگاه مختصات قطبی

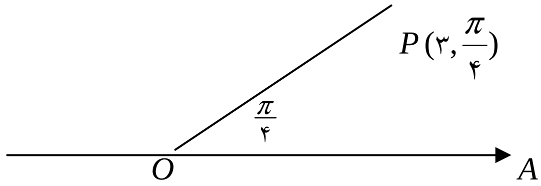
فرض کنید P نقطه ای از صفحه باشد که بر o منطبق نیست. اگر θ زاویه جهتدار AOP باشد، آنگاه پاره خط OA را شعاع نخستین و OP را شعاع نهایی θ می نامیم. جهت مثبت در اندازه گیری زاویه θ، جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت در نظر گرفته می شود. در صورتی که r فاصله جهتدار O از P باشد، زوج مرتب (r,θ) را مختصات قطبی نقطه P در صحفه می نامیم و می نویسیم $P(r,\theta)$.



شکل (۲-۱-۱ الف)

شعاع نهایی OP را شعاع حامل نقطه P نیز می نامند. برای رسم یک نقطه در مختصات قطبی بصورت $P(r,\theta)$ ابتدا نیم خطی از O رسم می کنیم تا با OA زاویه θ بسازد یعنی زاویه AOP برابر θ باشد. نقطه ای که روی شعاع نهایی این زاویه قرار دارد و فاصله اش از O برابر r $(r\geq 0)$ است نقطهٔ مطلوب یعنی

$P(r,\theta)$ می باشد بعنوان مثال برای رسم نقطهٔ $P(۳,\frac{\pi}{۴})$ ابتدا زاویه $\frac{\pi}{۴}$ را رسم می کنیم و روی این نیم خط به اندازه ۳ واحد جدا می کنیم نقطهٔ حاصل نقطهٔ $P(۳,\frac{\pi}{۴})$ می باشد.

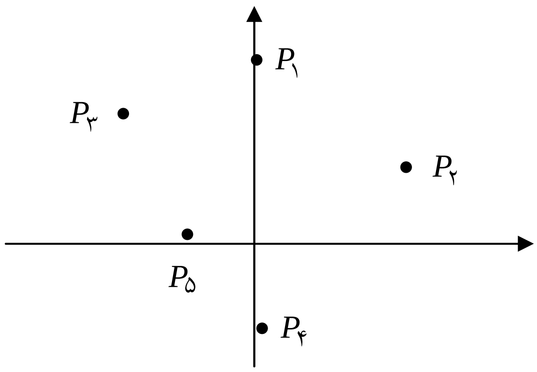


شکل (۲-۱-۱ ب)

۳-۱-۱ مثال: نقاط زیر را در یک دستگاه مختصات قطبی رسم کنید.

$$P_۱(۳,\frac{\pi}{۲}) \text{ ،} P_۲(۲,\frac{\pi}{۶}) \text{ ،} P_۳(۲,\frac{۳\pi}{۴}) \text{ ،} P_۴(۲,\frac{۳\pi}{۲}) \text{ ،} P_۵(۱,\pi)$$

حل: داریم:



شکل (۳-۱-۱)

۴-۱-۱ مثال: هریک از نقاط زیر را رسم کنید.

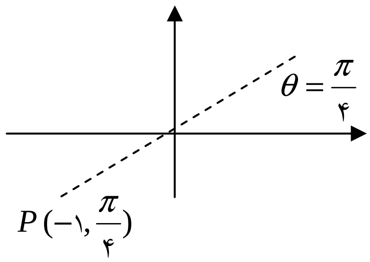
$$P_۱(۰,\frac{\pi}{۲}) \text{ ،} P_۲(۰,\frac{\pi}{۸}) \text{ ،} P_۳(۰,\pi)$$

حل: همگی نقاط $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ مختصات نقطهٔ مبداء می باشند.

۱-۱-۵ تذکر:

الف) از آنجایی که زاویه با افزودن یک یا چند دور تغییر نمی کند، لذا اگر $P(r,\theta)$ یک نقطه در صفحه باشد آنگاه واضح است که $P(r,\theta)=P(r,\theta+2k\pi)$ که $k\in\mathbb{Z}$. بنابراین یک نقطه دارای نمایش های قطبی بسیاری است.

ب) چون r فاصله جهتدار تعریف شده است، لذا r می تواند یک مقدار منفی نیز باشد در این حالت برای رسم یک نقطه بصورت $P(r,\theta)$ که $r\geq 0$ پس از رسم نیم خط مربوط به زاویه θ باید در جهت مقابل آن یعنی زاویه $\pi+\theta$ به اندازه $-r$ جدا نمود بطور مثال نقطهٔ $P(-1,\frac{\pi}{4})$ نقطه ای است که در نیم خط مقابل $\theta=\frac{\pi}{4}$ یعنی نیم خط $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ به اندازهٔ یک واحد جدا شده است بصورت شکل زیر:



شکل(۴-۱-۱ ب)

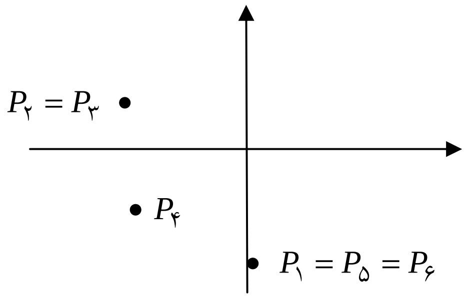
ج) گاهی ممکن است در نمایش یک نقطه در مختصات قطبی به حالتی برخورد نماییم که θ بصورت زاویهٔ منفی بیان شده باشد مانند نقاط $(1,-\frac{\pi}{4})$، $(-2,-\frac{\pi}{3})$ و $(3,-\frac{3\pi}{4})$. در این حالت زاویهٔ منفی بدین معنی است که جهت اختیار نمودن زاویه در جهت منفی یعنی در جهت حرکت عقربه های ساعت اختیار شده است. توجه داریم که در این حالت هر زاویه منفی را می توان با اضافه نمودن مقدار مناسب $2k\pi$ به زاویه مثبت تبدیل کرد بطور مثال زاویهٔ $-\frac{\pi}{2}$ برابر است با $2\pi+(-\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{2}$ و زاویهٔ $-\frac{11\pi}{4}$ برابر است با $4\pi+(-\frac{11\pi}{4})=\frac{5\pi}{4}$.

۱-۱-۶ مثال: هر یک از نقاط زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) $P_1(-2,\frac{2\pi}{3})$ ب) $P_2(2,\frac{3\pi}{4})$ ج) $P_3(-2,-\frac{\pi}{4})$

د) $P_4(2,-\frac{\pi}{4})$ ه) $P_5(2,-\frac{\pi}{3})$ و) $P_6(2,\frac{5\pi}{3})$

حل: داریم:



شکل(۵-۱-۱)

ملاحظه می شود که نقاط P_2 و P_3 و نیز نقاط P_1، P_5 و P_6 بر یکدیگر منطبق شده اند.

۷-۱-۱ نتیجه: کلیهٔ نقاط بصورت $((-1)^k r, k\pi+\theta)$ نمایش نقطهٔ (r,θ) می باشد.

برهان: می توان برای k دوحالت اختیار نمود. اگر k عددی زوج باشد آنگاه داریم:

$$((-1)^{2k'} r, 2k'\pi+\theta) = (r, 2k'\pi+\theta) = (r,\theta)$$

اگر k عددی فرد باشد آنگاه نیز خواهیم داشت:

$$((-1)^{2k''+1} r, (2k''+1)\pi+\theta) = (-r, 2k''\pi+\pi+\theta) = (-r, \pi+\theta) = (r,\theta)$$

۸-۱-۱ تعریف (نمایش قطبی مثبت): فرض کنیم (r,θ) نمایش یک نقطه در مختصات قطبی باشد این نمایش را یک نمایش قطبی مثبت یا نمایش قطبی استاندارد گوییم هر گاه $r \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

۹-۱-۱ تذکر: اگر نمایش قطبی نقطه بصورت نمایش قطبی مثبت داده شده باشد، می توان آنرا بصورت قطبی مثبت تبدیل کرد. روش بدست آوردن نمایش قطبی مثبت را می توان در حالات زیر بیان کرد.

حالت اول: فرض کنیم در نمایش داده شده مقدار r مثبت ولی زاویهٔ آن $-\theta$ باشد، در اینصورت می توان با افزودن مقدار مناسب $2k\pi$ آن را به زاویهٔ مثبت و در فاصلهٔ بین صفر و 2π تبدیل کرد. بعبارت دیگر داریم:

$$(r,-\theta) = (r, 2k\pi+(-\theta)) \quad r \geq 0, \theta \geq 0$$

بعنوان مثال نمایش قطبی مثبت نقطهٔ $(4,-\frac{2\pi}{3})$ عبارت است از

$$(4,-\frac{2\pi}{3}) = (4, 2\pi+(-\frac{2\pi}{3})) = (4,\frac{4\pi}{3}) \quad 4 \geq 0, 0 \leq \frac{4\pi}{3} < 2\pi$$

حالت دوم: فرض کنیم در نمایش داده شده مقدار r منفی ولی زاویهٔ θ مثبت و در فاصلهٔ بین صفر و 2π باشد، در این صورت می توان نمایش قطبی مثبت را به صورت زیر بدست آورد:

$$(-r,\theta) = \begin{cases} (r, \theta+\pi) & 0 \leq \theta < \pi \\ (r, \theta-\pi) & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

به عنوان مقال نمایش قطبی نقاط $(-۲,\frac{\pi}{۳})$ و $(-۳,\frac{۳\pi}{۲})$ به صورت زیر می باشند

$$(-۲,\frac{\pi}{۳})=(۲,\frac{\pi}{۳}+\pi)=(۲,\frac{۴\pi}{۳}) \quad \text{و} \quad (-۳,\frac{۳\pi}{۲})=(۳,\frac{۳\pi}{۲})=(۳,\frac{۳\pi}{۲}-\pi)=(۳,\frac{\pi}{۲})$$

حالت سوم: ممکن است نمایش قطبی هر دو حالت اول و دوم ظاهر شده باشد یعنی هم زاویه و هم فاصله جهت دار منفی باشد در این صورت می توان از روش های بیان شده در حالت های اول و دوم به صورت زیر استفاده نمود:

$$(-r,\theta)=\begin{cases}(r,\pi-\theta) & ۰\leq\theta<\pi\\ (r,۳\pi-\theta) & \pi\leq\theta<۲\pi\end{cases}$$

۱-۱-۱۰ مثال: نمایش قطبی هر یک از نقاط زیر را بدست آورید:

الف) $(-۴,-\frac{\pi}{۳})$ ب) $(-۳,-\frac{۱۰\pi}{۳})$

حل: الف) داریم $(-۴,-\frac{\pi}{۳})=(۴,\pi-\frac{\pi}{۳})=(۴,\frac{۲\pi}{۳})$

ب) چون $-\frac{۱۰\pi}{۳}=-(۳\pi+\frac{\pi}{۳})$ داریم

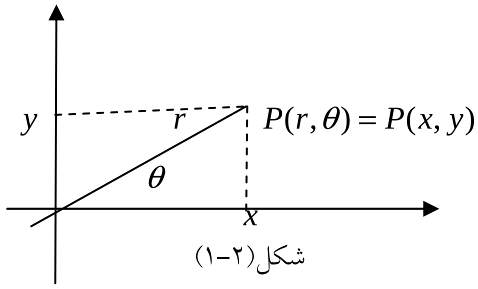
$$(-۳,-\frac{۱۰\pi}{۳})=(-۳,-۳\pi-\frac{\pi}{۳})=(-۳,۴\pi+(-۳\pi-\frac{\pi}{۳}))$$
$$=(-۳,\pi-\frac{\pi}{۳})=(-۳,\frac{۲\pi}{۳})=(۳,\pi+\frac{۲\pi}{۳})=(۳,\frac{۵\pi}{۳})$$

۱-۱-۱۱ تذکر: می دانیم اگر $r=۰$ آنگاه نمایش های $(۰,\frac{\pi}{۳})$ و $(۰,\frac{۳\pi}{۲})$ و $(۰,-\frac{\pi}{۲})$ و در حالت کلی $(۰,\theta)$ که θ زاویهٔ دلخواهی است همگی نمایش نقطهٔ مبداء مختصات می باشد لذا مبداء مختصات دارای نمایش های زیادی می باشد و نمایش منحصر بفردی ندارد ولی بجز مبداء مختصات اگر نمایش نقاط در مختصات قطبی را منحصر به نمایش قطبی مثبت نماییم آنگاه هر نقطه دارای نمایش منحصر بفردی خواهد بود.

۱-۲ رابطهٔ بین دستگاههای مختصات دکارتی و قطبی

فرض کنیم محور x ها بر محور قطبی منطبق و o مبداء دستگاه مختصات دکارتی بر روی محور قطب واقع باشد. محور y ها را منطبق بر شعاع $\theta=\frac{\pi}{۲}$ اختیار می کنیم. هر گاه مختصات قطبی نقطهٔ P نسبت به محور

قطبی ox و قطب o زوج مرتب (r,θ) و مختصات دکارتی آن نسبت به دستگاه دکارتی xoy زوج مرتب (x,y) فرض شود در این صورت می توان رابطهٔ میان مختصات دکارتی و قطبی را به صورت زیر بدست آورد .



شکل(۲-۱)

الف) تبدیل مختصات قطبی به دکارتی: همانگونه که در شکل ۲-۱ مشاهده می گردد در مثلث oPA داریم:
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ و $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ بنابراین $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$. از این روابط می توان نمایش یک نقطه از مختصات قطبی را به مختصات دکارتی تبدیل کرد.

۱-۲-۱ مثال: نمایش دکارتی هر یک از نقاط زیر را بدست آورید:

الف) $(۳,\dfrac{\pi}{۶})$ ب) $(-۲,-\dfrac{\pi}{۴})$

حل: داریم $r=۳$ و $\theta=\dfrac{\pi}{۶}$ درنتیجه

$$x=r\cos\theta=۳\cos\frac{\pi}{۶}=۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \quad \text{و} \quad y=r\sin\theta=۳\sin\frac{\pi}{۶}=۳(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

پس نمایش دکارتی نقطهٔ $(۳,\dfrac{\pi}{۶})$ عبارتست از $(\dfrac{۳\sqrt{۳}}{۲},\dfrac{۳}{۲})$

ب) مشابه قسمت الف داریم $r=-۲$ و $\theta=-\dfrac{\pi}{۴}$ درنتیجه

$$x=r\cos\theta=(-۲)\cos(-\frac{\pi}{۴})=(-۲)(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\sqrt{۲}$$

$$y=r\sin\theta=(-۲)\sin(-\frac{\pi}{۴})=(-۲)(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\sqrt{۲}$$

پس نمایش دکارتی نقطهٔ $(-۲,-\dfrac{\pi}{۴})$ عبارتست از $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$

ب)تبدیل مختصات دکارتی به قطبی: با توجه به شکل ۲-۱ در مثلث قائم الزاویهٔ oPA داریم:

$$\begin{cases} r^۲ = x^۲ + y^۲ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \pm\sqrt{x^۲ + y^۲} \\ \theta = \tan^{-۱}(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$$

چون برای r دو مقدار مثبت و منفی حاصل می شود و نیز دو زاویه θ از رابطهٔ $\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ حاصل می شود لذا باید r و θ را به گونه ای اختیار کرد که متناسب با ناحیه ای که نقطهٔ (x,y) در آن قرار دارد باشد. در مثال زیر این نکته را بیشتر توضیح خواهیم داد.

۲-۲-۱ مثال: نمایش قطبی هر یک از نقاط زیر را بدست آورید

الف) $(۱,۱)$ ب) $(-۱,-۱)$ ج) $(-۳,\sqrt{۳})$

حل: الف) داریم $x = ۱$ و $y = ۲$ لذا در ناحیهٔ اول قرار دارد. بنابراین داریم

$$\begin{cases} r = \pm\sqrt{۱^۲ + ۱^۲} \\ \theta = \tan^{-۱}(\dfrac{۱}{۱}) = \tan^{-۱} ۱ = \dfrac{\pi}{۴}, \dfrac{۵\pi}{۴} \end{cases}$$

اگر $r = \sqrt{۲}$ اختیار شود آنگاه زاویهٔ θ باید $\frac{\pi}{۴}$ اختیار شود زیرا در غیر اینصورت نقطه در ناحیهٔ اول قرار نخواهد داشت و اگر $r = -\sqrt{۲}$ اختیار شود آنگاه زاویهٔ θ باید $\frac{۵\pi}{۴}$ در نظر گرفته شود زیرا در این حالت زاویه در ناحیهٔ سوم و چون r منفی است مجدداً در ناحیهٔ اول قرار خواهد داشت بنابراین دو نمایش قطبی حاصل می شود

نمایش قطبی $(-\sqrt{۲}, \frac{۵\pi}{۴})$ = نمایش قطبی $(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴})$ = نمایش دکارتی $(۱,۱)$

ب) مشابه قسمت الف داریم $r = \pm\sqrt{۲}$ و $\theta = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}$ در نتیجه خواهیم داشت

نمایش قطبی $(-\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴})$ = نمایش قطبی $(\sqrt{۲}, \frac{۵\pi}{۴})$ = نمایش دکارتی $(-۱,-۱)$

ج) داریم $r = \sqrt{(-۳)^۲ + (\sqrt{۳})^۲}$ و $\theta = \tan^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{-۳}) = \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}$ درنتیجه

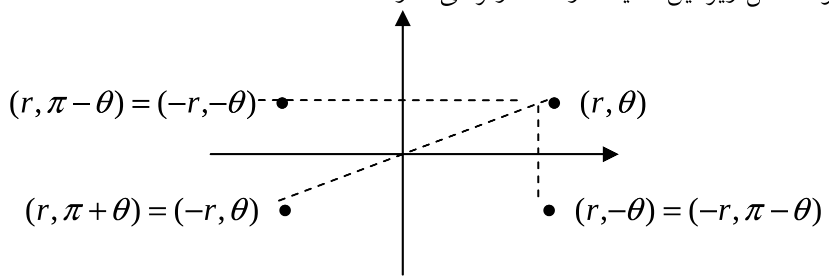
نمایش قطبی $(۲\sqrt{۳}, \frac{۲\pi}{۳})$ = نمایش دکارتی $(-۳,\sqrt{۳})$

۱-۳ تقارن در منحنی های قطبی

در این قسمت به تعریف یک منحنی قطبی و نیز شرایط تقارن در منحنی های قطبی خواهیم پرداخت.

۱-۳-۱ تعریف (منحنی قطبی): مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند (r,θ) که در رابطه $g(r,\theta)=\circ$ صدق کنند را یک منحنی قطبی می نامیم. معمولاً منحنی های قطبی را بصورت $r=f(\theta)$ نمایش می دهند مانند منحنی های قطبی $r=\cos\theta$ و $r=۲(۱+\sin\theta)$ و $r=\frac{۲}{۱-\cos\theta}$ و $r=۲$. چون در رسم یک منحنی قطبی، وجود تقارن نسبت به محور x ها،محور y ها یا مبداء می تواند ناحیهٔ رسم بصورت نقطه یابی را کاهش دهد لذا شرایط لازم جهت این تقارن ها برای یک منحنی قطبی را مورد بررسی قرار می دهیم.

الف) تقارن نسبت به محور x ها : منحنی قطبی $r=f(\theta)$ (یا $g(r,\theta)=\circ$) مفروض است منحنی فوق را متقارن نسبت به محور x ها گوییم هر گاه با تبدیل $\begin{cases}\theta\to-\theta\\ r\to r\end{cases}$ یا $\begin{cases}\theta\to\pi-\theta\\ r\to -r\end{cases}$ تغییری در معادلهٔ قطبی ایجاد نشود. شکل زیر این حقیقت را آشکارتر می سازد



شکل(۳-۱)

۱-۳-۲ مثال: تقارن نسبت به محور x ها را برای منحنی های قطبی زیر تحقیق کنید:

الف) $r=۱+\cos\theta$ ب) $r^{۲}=\sin\theta$ ج) $r=\sin\theta$

حل: (الف) با تبدیل $\theta\to-\theta$ و $r\to r$ تغییری در معادله حاصل نمی شود لذا متقارن نسبت به محور x ها است $r=۱+\cos(-\theta)=۱+\cos(\theta)$

ب) با تبدیل $\theta\to\pi-\theta$ و $r\to-r$ تغییری در معادله حاصل نمی گردد لذا متقارن نسبت به محور x ها است $r^{۲}=(r^{۲})=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

ج) با تبدیل $\theta\to\pi-\theta$ داریم $r\to-r$ زیرا $\sin n(-\theta)=-\sin(\theta)=-r$

و نیز با تبدیل $\theta\to\pi-\theta$ داریم $r\to r$ زیرا $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=r$

پس هیچکدام از شرایط را دارا نمی باشد لذا تقارن نسبت به محور x ها ندارد.

۱-۳-۳ تذکر: توجه داشته باشید که برای خاصیت تقارن نسبت به محور x ها کافی است یکی از شرایط بیان شده یعنی $\begin{cases}\theta \to -\theta \\ r \to r\end{cases}$ یا $\begin{cases}\theta \to \pi - \theta \\ r \to -r\end{cases}$ برقرار باشد و لزومی ندارد که هر دو شرایط برقرار شوند و اگر یک منحنی قطبی واجد هیچکدام از دو شرط فوق نباشد، آنگاه متقارن نسبت به محور x ها نیست.

ب) تقارن نسبت به محور y ها: منحنی قطبی منحنی قطبی $r = f(\theta)$ (یا $g(r,\theta) = ۰$) مفروض است منحنی فوق را متقارن نسبت به محور y ها گوییم هر گاه با تبدیل $\begin{cases}\theta \to \pi - \theta \\ r \to r\end{cases}$ یا $\begin{cases}\theta \to -\theta \\ r \to -r\end{cases}$ تغییری در معادلهٔ قطبی ایجاد نشود.

۱-۳-۴ مثال: تقارن هر یک از منحنی های قطبی زیر نسبت به محورهای مختصات را بررسی کنید.

الف) $r = \sin\theta$ ب) $r = \sin ۲\theta$ ج) $r^۲ = \cos\theta$

حل: الف) با تبدیل $\theta \to \pi - \theta$ و $r \to r$ تغییری در معادله حاصل نمی شود لذا متقارن نسبت به محور y ها است ولی نسبت به محور x ها تقارن ندارد.

ب) متقارن نسبت به محورهای x و y می باشد زیرا

$$\sin ۲(\pi - \theta) = \sin(۲\pi - ۲\theta) = -\sin ۲\theta = -r$$

همچنین

$$\sin ۲(-\theta) = \sin(-۲\theta) = -\sin ۲\theta = -r$$

ج) متقارن نسبت به محور x ها است زیرا $\cos(-\theta) = \cos\theta = r$ ولی نسبت به محور y ها تقارن ندارد زیرا $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -r \neq r$ و نیز $\cos(-\theta) = \cos(\theta) = r \neq -r$.

ج) تقارن نسبت به مبداء مختصات: منحنی قطبی را متقارن نسبت به مبداء مختصات گوییم هر گاه با تبدیل $\begin{cases}\theta \to \theta \\ r \to -r\end{cases}$ یا $\begin{cases}\theta \to \pi - \theta \\ r \to -r\end{cases}$ تغییری در معادلهٔ قطبی ایجاد نشود.

۱-۳-۵ مثال: نشان دهید منحنی قطبی $r = \cos ۴\theta$ نسبت به مبداء مختصات متقارن است.

حل: داریم $\cos ۴(\pi - \theta) = \cos(۴\pi - ۴\theta) = \cos ۴\theta = r$ پس دارای تقارن نسبت به مبداء مختصات می باشد.

۱-۳-۶ تمرین: اگر یک منحنی قطبی نسبت به محور x ها و محور y ها تقارن داشته باشد، آنگاه حتماً نسبت به مبداء مختصات نیز تقارن دارد ولی عکس آن برقرار نیست یعنی ممکن است منحنی قطبی تنها نسبت به مبداء مختصات تقارن داشته باشد و نسبت به محورها تقارن نداشته باشد. مثالی برای این حالت ارائه کنید.

۱-۳-۷ تذکر: گاهی ممکن است یک منحنی قطبی نسبت به زاویهٔ $\alpha = \theta_{\circ}$ تقارن داشته باشد در این حالت باید با تبدیل $\begin{cases} \theta \to ۲\alpha - \theta \\ r \to r \end{cases}$ تغییری در معادله حاصل نشود. البته ممکن است با تبدیل $\theta \to ۲\alpha - \theta$ و یکسان قرار دادن $f(\theta) = f(۲\alpha - \theta)$ بررسی کرد که آیا زاویهٔ αیی وجود دارد که در این رابطه صدق کند. در صورت وجود زاویهٔ α عملاً شرط تقارن نسبت به زاویهٔ α نیز محقق شده است. در مثالهای زیر این مطلب را بیشتر بررسی می کنیم.

۱-۳-۸ مثال: نشان دهید که منحنی قطبی $r = \sin ۲\theta$ نسبت به زاویهٔ $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ متقارن است.

حل: زاویهٔ θ را به زاویهٔ $۲\alpha - \theta = ۲(\frac{\pi}{۴}) - \theta = \frac{\pi}{۲} - \theta$ تبدیل می کنیم در اینصورت خواهیم داشت: $\sin ۲(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \sin(\pi - ۲\theta) = \sin ۲\theta$. پس نسبت به زاویهٔ $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ تقارن دارد.

۱-۳-۹ مثال: آیا زاویهٔ αای وجود دارد که منحنی های قطبی زیر نسبت به آن زاویه متقارن باشند آنرا تحقیق کنید.

الف) $r = \sin ۳\theta$ ب) $r = \cos\theta$

حل: الف) داریم $\sin ۳(۲\alpha - \theta) = \sin(۶\alpha - ۳\theta)$ لذا از تساوی $\sin ۳(۶\alpha - ۳\theta) = \sin ۳\theta$ خواهیم داشت $۶\alpha - ۳\theta = ۲k\pi + ۳\theta$ و $۶\alpha - ۳\theta = ۲k\pi + \pi - ۳\theta$. از رابطهٔ اول نتیجه می شود $\alpha = \frac{۲k\pi}{۳} + \theta$ (کافی است θ را در فاصلهٔ بین صفر و π قرار دهیم) و لذا زاویه ای حاصل نمی شود ولی از رابطهٔ دوم نتیجه می شود $\alpha = \frac{(۲k+۱)\pi}{۶} + \theta$ و لذا زاویه های $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$، $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$ حاصل می شود.

ب) اگر منحنی قطبی نسبت به زاویهٔ α تقارن داشته باشد آنگاه خواهیم داشت

$$\cos(۲\alpha - \theta) = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad ۲\alpha - \theta = ۲k\pi \pm \theta$$

درنتیجه $۲\alpha = ۲k\pi$ و یا $\alpha = k\pi$. پس زاویه های تقارن عبارتند از $\alpha = \circ$ و $\alpha = \pi$. یعنی محور x ها محور تقارن می باشد. توجه داریم که تقارن نسبت به محور x ها برای منحنی قطبی $r = \cos\theta$ قبلاً بطور مستقیم بررسی شده بود.

۱-۴ نمودار منحنی های قطبی معروف

در این قسمت به معرفی و رسم تقریبی منحنی های قطبی معروف که از درجه اهمیت بیشتری برخوردار هستند خواهیم پرداخت ولی در ابتدا لازم است برای رسم تقریبی یک منحنی قطبی مطالب زیر را یادآوری نماییم.

۱-۴-۱ رسم تقریبی منحنی های قطبی: فرض کنیم $r = f(\theta)$ یک منحنی قطبی باشد برای رسم تقریبی این منحنی قطبی بصورت زیر عمل می کنیم:

مرحله۱: بررسی تقارن ها) اطلاع از تقارن یک منحنی قطبی می تواند نقش مهمی در رسم تقریبی آن ایفا نماید و محاسبات را تا حد زیادی کاهش دهد. بطور مثال برای رسم یک منحنی قطبی که نسبت به محور x ها تقارن دارد لازم است تنها در ناحیه های اول و دوم آنرا رسم کنیم زیرا نواحی سوم و چهارم به کمک تقارن نسبت به محور x ها بدست می آید لذا تغییرات زاویهٔ θ جهت رسم را می توانیم بین صفر و π محدود نماییم. همچنین برای رسم یک منحنی قطبی که نسبت به محور x ها و محور y ها متقارن است کافی است تنها در یک ناحیه بعنوان مثال ناحیهٔ اول رسم شود و بقیهٔ نواحی به کمک تقارن ها حاصل خواهد شد.

مرحلهٔ ۲: تقاطع با مبداء مختصات) یک منحنی قطبی ممکن است مبداء مختصات را چندین بار قطع کند یعنی به ازای زاویه های مختلف θ مقدار r مساوی صفر شود لذا اطلاع از این زوایا می تواند در رسم یک منحنی قطبی موثر باشد و دقت ما را بیشتر کند. برای پیدا کردن این زوایا لازم است $r = f(\theta) = ۰$ اختیار شود و از این معادله زاویهٔ θ بدست آید.

مرحلهٔ۳: نقطه یابی) پس از اطلاع از ناحیهٔ مورد نیاز برای رسم یک منحنی قطبی که پس از بررسی تقارن مشخص می شود باید زاویه های مهم که مقادیر مثلثاتی آنها برای ما معلوم است را در منحنی قطبی به زاویهٔ θ داد و سپس مقدار r مربوطه را بدست آورد با انجام این عمل نقاطی از منحنی قطبی حاصل خواهد شد که به کمک آنها می توان به رسم تقریبی پرداخت. معمولاً زاویه های مهم در ناحیهٔ اول عبارتند از: ۰، $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ و متناظر این زوایا در بقیهٔ نواحی مورد استفاده قرار می گیرند. البته در مواقعی که در منحنی قطبی زاویه θ با ضریبی غیر از ۱ بیان می شود مثلاً بصورت ۲θ یا ۳θ می توان زوایای بیشتری را مورد نقطه یابی قرار داد بعنوان مثال اگر $r = \cos ۲\theta$ منحنی قطبی داده شده باشد آنگاه زاویه های $\frac{\pi}{۸}$، $\frac{\pi}{۱۲}$، $\frac{۳\pi}{۸}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ را می توان به زاویه های فوق اضافه نمود.

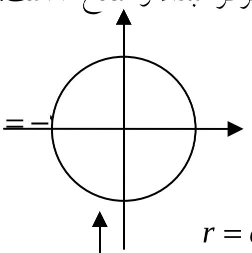
مرحلهٔ۴: رسم تقریبی) با توجه به اطلاعات بدست آمده از مراحل ۱و۲و۳ می توان نمودار منحنی قطبی را بصورت تقریبط رسم کرد. البته ذکر این نکته ضروری است که در رسم نقط بدست آمده در مرحلهٔ۳ باید توجه داشته باشیم که هنگامی مقدار r عدد منفی حاصل شود باید در ناحیهٔ مقابل آن نقطه را رسم کرد لذا اطلاع از فاصله هایی از زاویه θ که در آن فاصلهٔ r مقدار مثبت یا مقدار منفی است می تواند از احتمال اشتباه در رسم نقاط جلوگیری کند.

اکنون با توجه به مراحل فوق به معرفی و رسم منحنی های قطبی مهم می پردازیم:

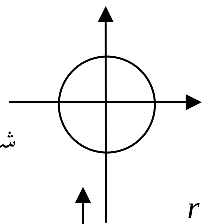
۲-۴-۱ دایرهٔ $r = a$ (a عدد ثابت): ساده ترین منحنی قطبی دایرهٔ $r = a$ می باشد که یک دایره به مرکز مبداء و شعاع $|a|$ است. توجه داریم که این منحنی قطبی همهٔ تقارنها را دارد، مبداء مختصات را قطع نمی کند و همواره فاصلهٔ آن تا مبداء مختصات مقدار ثابت a می باشد. البته با توجه به رابطهٔ بین مختصات قطبی و دکارتی می توان معادلهٔ دکارتی آن یعنی $x^2 + y^2 = a^2$ را بدست آورد.

۳-۴-۱ مثال: منحنی های قطبی $r = 2$ و $r = -3$ را رسم کنید.

حل: $r = 2$ دایره ای به مرکز مبداء و شعاع ۲ و $r = -3$ دایره ای به مرکز مبداء و شعاع ۳ است.



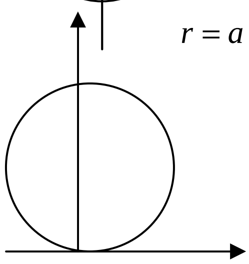
$r = -3$



$r = 2$

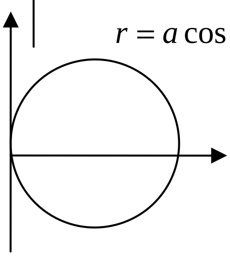
شکل (۳-۴-۱)

$r = a\sin\theta$



شکل(۵-۴-۱)

$r = a\cos\theta$



شکل (۴-۴-۱)

۴-۴-۱ دایرهٔ $r = a\cos\theta$:ابتدا فرض کنیم $a > 0$ در اینصورت می توان این اطلاعات را بدست آورد:این منحنی قطبی نسبت به محور x ها متقارن است، مبداء مختصات را در زوایای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ قطع می کند مقادیر r در نواحی اول و دوم بصورت زیر است:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	a	$۰/۸۵a$	$۰/۷۵a$	$۰/۵a$	۰	$-۰/۵a$	$-۰/۷۵a$	$-۰/۸۵a$	$-a$

همانطوریکه ملاحظه می شود در ناحیهٔ دوم مقادیر r منفی است لذا این نقاط در ناحیهٔ چهارم قرار می گیرند و نمودار این منحنی قطبی دایره ای بصورت شکل (۴-۴-۱) است.

علت دایره بودن را می توان با محاسبهٔ نقاط بیشتر و یا با تبدیل آن به مختصات دکارتی جویا شد.اگر قسمتی از محورهای مختصات که بیشتر در درون دایره قرار دارد را بعنوان جهت این دایره محسوب کنیم آنگاه نمودار فوق را یک "دایره به قطر a در جهت مثبت محور x ها" می گوییم. اگر $a<۰$ آنگاه جهت این دایره در سمت منفی محور x ها قرار خواهد گرفت و لذا یک دایره به قطر a در جهت منفی محور x ها می باشد.

۵-۴-۱ دایرهٔ $r=a\sin\theta$: فرض کنیم $a>۰$ در اینصورت این منحنی قطبی دارای این خصوصیات می باشد:نسبت به محور y ها متقارن است، مبداء مختصات را در زوایای ۰ و π قطع می کند مقادیر r در نواحی اول و چهارم بصورت زیر است:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۲}$
r	۰	$۰/۵a$	$۰/۷۵a$	$۰/۸۵a$	a	$-۰/۵a$	$-۰/۷۵a$	$-۰/۸۵a$	$-a$

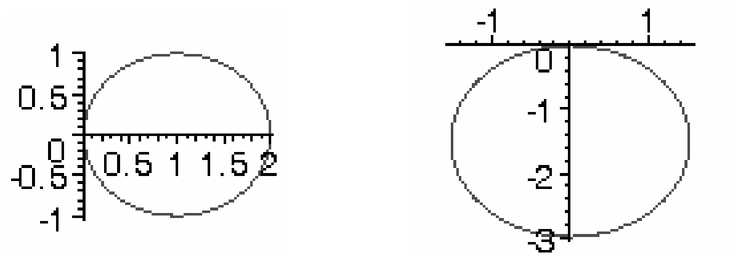
در ناحیهٔ چهارم مقادیر r منفی است لذا در ناحیهٔ دوم قرار می گیرند و نمودار بالا حاصل می شود. پس یک دایره به قطر a در جهت مثبت محور y ها است. چنانچه $a<۰$ آنگاه یک دایره به قطر a در جهت منفی محور yها بدست می آید.

۶-۴-۱ مثال: منحنی های قطبی زیر را رسم کنید:

الف) $r=-۳\sin\theta$ ب) $r=۲\cos\theta$

حل: الف) یک دایره به قطر ۲ در جهت مثبت محور x ها است.

ب) یک دایره به قطر ۳ در جهت منفی محور y ها است.

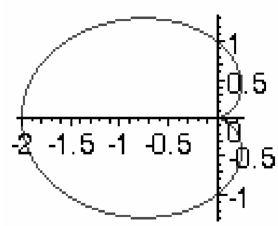


شکل(۶-۴-۱)

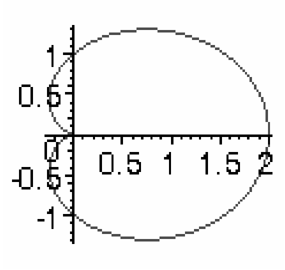
۱-۴-۷ دلنمای $r = a(۱+\cos\theta)$ فرض کنیم $a > ۰$ در اینصورت متقارن نسبت به محور x ها است، مبداء را فقط در زاویهٔ $\theta = \pi$ قطع می کند و مقادیر r در نواحی اول و دوم بصورت زیر است:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	$۲a$	$۱/۸۵a$	$۱/۷a$	$۱/۵a$	a	$۰/۵a$	$۰/۳a$	$۰/۱۵a$	۰

مقادیر r در هر دو ناحیهٔ اول و دوم مثبت است لذا نمودار این منحنی برای $a = ۱$ بصورت شکل (۴–۷–۱ الف) می باشد. این شکل را یک دلنما در جهت مثبت محور x ها گوییم. اگر $a < ۰$ آنگاه یک دلنما در جهت منفی محور x ها بدست می آید و برای $a = -۱$ بصورت شکل (۴–۷–۱ ب) می باشد.



شکل (۴–۷–۱ الف)

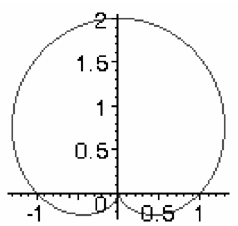


شکل(۴–۷–۱ ب)

۱-۴-۸ دلنمای $r = a(۱+\sin\theta)$ فرض کنیم $a > ۰$ در اینصورت این منحنی قطبی دارای تقارن نسبت به محور y ها است، مبداء مختصات را فقط در زاویهٔ $\theta = \frac{۳\pi}{۲}$ قطع می کند و مقادیر r در نواحی اول و چهارم بصورت زیر است:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۲}$
r	a	$۱/۵a$	$۱/۷a$	$۱/۸۵a$	$۲a$	$۰/۵a$	$۰/۳a$	$۰/۱۵a$	۰

مقادیر r در نواحی اول و چهارم مثبت است لذا نمودار این منحنی برای $a = ۱$ بصورت زیر است:



شکل(۸–۴–۱)

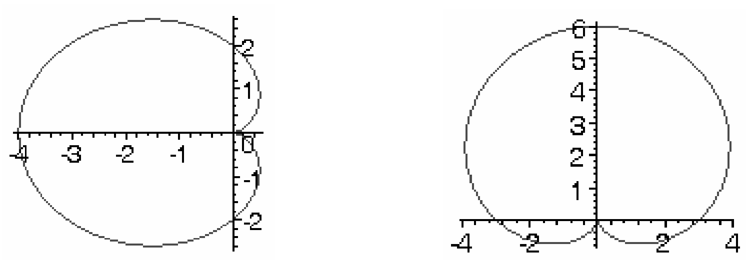
شکل فوق را یک دلنما در جهت مثبت محور y ها می گوییم. چنانچه $a < ۰$ آنگاه یک دلنما در جهت منفی محور y ها حاصل خواهد شد.

۹-۴-۱ مثال: هر یک از منحنی های قطبی زیر را رسم کنید:

الف) $r=۳(۱+\sin\theta)$ ب) $r=-۲(۱+\cos\theta)$

حل: الف) یک دلنما در جهت منفی محور x ها است.

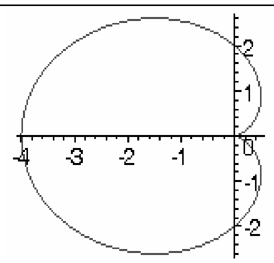
ب) یک دلنما در جهت مثبت محور y ها است.



شکل (۹-۴-۱)

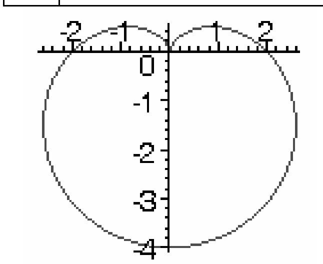
۱۰-۴-۱ دلنمای $r=a(۱-\cos\theta)$ فرض کنیم $a>۰$ در اینصورت این منحنی قطبی نسبت به محور x ها متقارن است، مبداء مختصات را در $\theta=۰$ قطع می کند و مقادیر r در ناحیه های اول و دوم بصورت زیر است:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
r	۰	$۰/۱۵a$	$۰/۳a$	$۰/۵a$	a	$۱/۵a$	$۱/۷a$	$۱/۸۵a$	$۲a$



$r=۲(۱-\cos\theta)$

شکل (۱۰-۴-۱)



$r=۲(۱-\sin\theta)$

شکل (۱۱-۴-۱)

مقادیر r در نواحی اول و دوم مثبت است لذا نمودار آن برای $a=۲$ بصورت شکل ۱۰-۴-۱ است.

این شکل یک دلنما در جهت منفی محور x ها است. توجه کنید نمودار این دلنما با دلنمای $r=a(۱+\cos\theta)$ هنگامیکه $a<۰$ یکسان است. در حالتیکه $a<۰$ نمودار منحنی قطبی $r=a(۱-\cos\theta)$ یک دلنما در جهت محور x ها خواهد بود.

۱-۴-۱۱ دلنمای $r=a(۱-\sin\theta)$ فرض کنیم $a>۰$ در اینصورت منحنی قطبی فوق دارای تقارن نسبت به محور y ها است، مبداء مختصات را در زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{۲}$ قطع می کند و مقادیر r بصورت زیر است:

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۲}$
r	a	$۰/۵a$	$۰/۳a$	$۰/۱۵a$	۰	$۱/۵a$	$۱/۷a$	$۱/۸۵a$	$۲a$

مقادیر r در نواحی اول و چهارم مثبت است لذا نمودار این منحنی قطبی بصورت شکل ۱۱-۴-۱ است.لذا یک دلنما در جهت منفی محور y ها است. چنانچه $a<۰$ آنگاه نمودار یک دلنما در جهت مثبت محور y ها حاصل می گردد.

۱-۴-۱۲ تذکر: همانگونه که در رسم منحنی های قطبی بصورت $r=a\cos\theta$، $r=a\sin\theta$، $r=a(۱\pm\cos\theta)$ و $r=a(۱\pm\sin\theta)$ ملاحظه گردید می توان این قاعده را در مورد جهت آنها بصورت زیر بیان کرد:

الف) اگر در معادلات فوق عامل $\cos\theta$ ظاهر شده باشد نمودار منحنی قطبی در جهت محور x ها است و جهت مثبت یا منفی بودن محور x ها بستگی به علامت a و علامت $\cos\theta$ دارد. در واقع

علامت a × علامت $\cos\theta$ = جهت (مثبت یا منفی) محور x ها

ب) اگر در معادلات منحنی های قطبی فوق عامل $\sin\theta$ ظاهر شده باشد آنگاه نمودار منحنی قطبی (منحنی یا دلنما) در جهت محور y ها است و در جهت مثبت این محور خواهد بود اگر حاصلضرب علامت $\sin\theta$ و علامت a مثبت باشد و در جهت منفی این محور است اگر حاصلضرب علامت $\sin\theta$ و علامت a منفی باشد.

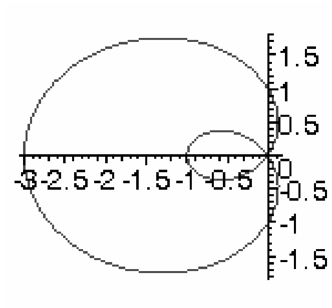
۱-۴-۱۳ مثال: نوع و جهت هر یک از منحنی های قطبی زیر را مشخص کنید:

الف) $r=-۲(۱-\sin\theta)$ ب) $r=-۴\sin\theta$ ج) $r=-۲(۱+\cos\theta)$ د) $r=-۳\cos\theta$

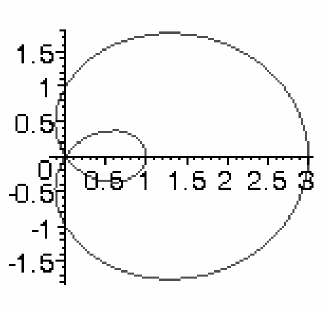
حل:الف)یک دلنما در جهت مثبت محور y ها است.ب) یک دایره به قطر ۴ در جهت منفی محور y ها است. ج) یک دلنما در جهت منفی محور x ها است. د) یک دایره به قطر ۳ در جهت منفی محور x ها است.

۱-۴-۱۴ دلنمای $r=۱-۲\cos\theta$ برای رسم دلنمای فوق با توجه به مراحل بیان شده در ۱-۴-۱ داریم: اولاً نسبت به محور x ها متقارن است، ثانیاً اگر $r=۰$ آنگاه خواهیم داشت $۱-۲\cos\theta=۰$ و یا $\cos\theta=\frac{۱}{۲}$ که جوا بهای $\theta=\frac{\pi}{۳}$ و $\theta=-\frac{\pi}{۳}$ حاصل می شود نکته قا بل تو جه در رسم این دلنما اینکه با دلنماهای بیان شده قبلی متفاوت می باشد این است که در اینجا اگر $-\frac{\pi}{۳}<\theta<\frac{\pi}{۳}$ آنگاه مقدار r منفی

است و در سایر جاها r مثبت است لذا در فاصله ای که $r<۰$ باید در ناحیهٔ مقابل آن دلنما را رسم کرد بنابراین به ازای $-\frac{\pi}{۳}<\theta<\frac{\pi}{۳}$ نمودار در فاصلهٔ $\frac{۲\pi}{۳}<\theta<\frac{۴\pi}{۳}$ رسم خواهد شد و به ازای $\frac{\pi}{۳}<\theta<\frac{۵\pi}{۳}$ که مقدار r مثبت است نمودار در همین فاصله رسم می شود بنابراین دلنمای حاصل دلنمایی است که یک حلقه در درون دلنمای اصلی ایجاد می شود(شکل ۱۴-۴-۱). توجه داریم که جهت این دلنما در جهت منفی محور x ها است.



شکل(۱۴-۴-۱)



شکل (۵-۴-۱)

۱-۴-۱۵ دلنمای $r=۱+۲\cos\theta$ نمودار این دلنما مشابه دلنمای ۱۴-۴-۱ می باشد با این تفاوت که این دلنما در جهت مثبت محور x ها است و نمودار آن بصورت شکل (۱۵-۴-۱) است.

۱-۴-۱۶ تذکر: اگر در دلنماهای ۱۴-۴-۱ و ۵-۴-۱ ضریب $\cos\theta$ از ۲ یا ۲- به ۳ یا ۳- و ۴ یا ۴- و غیره تغییر کند آنگاه حلقهٔ داخلی دلنما بزرگتر و بزرگتر می شود. همچنین اگر این ضریب از ۲ یا ۲- به $\frac{۳}{۲}$ یا $-\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۴}{۳}$ یا $-\frac{۴}{۳}$ تغییر یابد حلقهٔ داخلی دلنماها کوچک و کوچکتر خواهد شد. اکنون به بیان کلی اینگونه دلنما ها می پردازیم.

۱-۴-۱۷ دلنمای $r=a(۱\pm\cos\theta)$ برای رسم اینگونه دلنماها حالت های زیر را در نظر می گیریم:

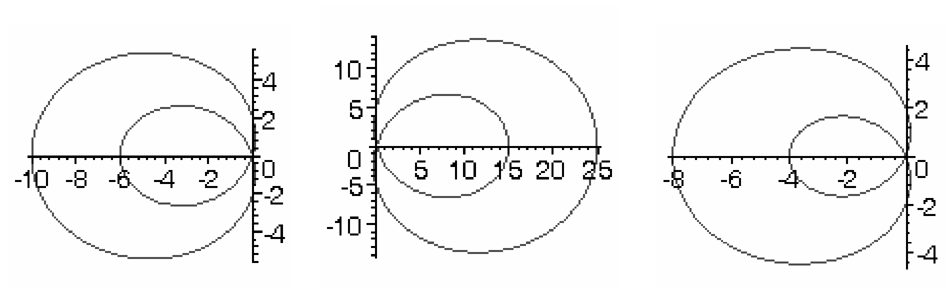
حالت اول: $k=۱$) در این حالت دلنماهای بیان شده در ۷-۴-۱ تا ۱۱-۴-۱ را ایجاد خواهد کرد که قبلاً رسم شده اند.

حالت دوم: $(k>۱)$ در این حالت همانطوریکه بیان شد یک دلنما همراه با یک حلقه داخلی در جهت محور x ها می باشد که در جهت مثبت یا منفی بودن محور x ها بستگی به علامت a و علامت ضریب $\cos\theta$ دارد.

۱-۴-۱۸ مثال: نمودار منحنی های قطبی زیر را رسم کنید:

الف) $r=-2(1+3\cos\theta)$ ب) $r=-5(1-4\cos\theta)$ ج) $r=2(1-4\cos\theta)$

حل: الف) یک دلنما با حلقهٔ داخلی در جهت منفی محور x ها است. ب) یک دلنما با حلقهٔ داخلی در جهت مثبت محور x ها می باشد. ج) یک دلنما با حلقهٔ داخلی در جهت منفی محور x ها است. نمودار منحنی های قطبی بصورت زیر است:



ج ب الف

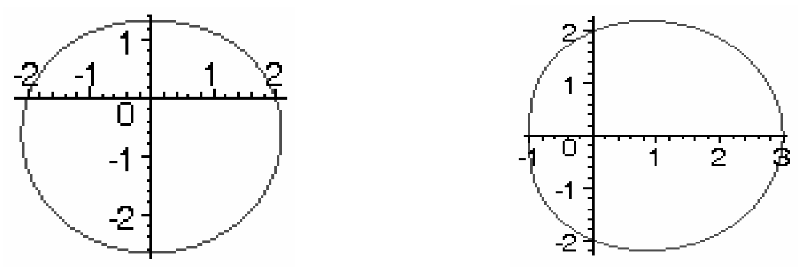
شکل (۱۸-۴-۱)

حالت سوم: $k<1$) در این حالت دلنما مبداء مختصات را قطع نمی کند و از هر طرف کمی بزرگتر شده است. بعبارت دیگر نقاط برخورد با محورهای مقداری به سمت بیرون حرکت کرده است.

۱۹-۴-۱ مثال: نمودار منحنی های قطبی زیر را رسم کنید:

الف) $r=2(1+\frac{1}{2}\cos\theta)$ ب) $r=2(1-\frac{1}{3}\sin\theta)$

حل: الف) یک دلنما در جهت مثبت محور x ها که مبداء را قطع نکرده است. ب) یک دلنما در جهت منفی محور y ها که مبداء را قطع نکرده است.



ب الف

شکل (۱۹-۴-۱)

۱-۴-۲۰ گل چهار برگ $r=a\cos 2\theta$ فرض کنیم $a>0$ در اینصورت منحنی قطبی فوق نسبت به محور x ها، محور y ها و مبداء مختصات متقارن می باشد و لذا برای رسم آن کافی است در یک ناحیه بطور

مثال ناحیهٔ اول رسم گردد. بعلاوه نسبت به خطوط دیگر نیز متقارن است که آنها را بدست می آوریم. اگر منحنیژ قطبی نسبت به زاویهٔ α متقارن باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\cos ۲(۲\alpha-\theta)=\cos ۲\theta \quad \Rightarrow \quad \cos(۴\alpha-۲\theta)=\cos ۲\theta$$

در نتیجه $۴\alpha-۲\theta=۲k\pi\pm۲\theta$ و یا $۴\alpha=۲k\pi$ و یا $\alpha=\frac{k\pi}{۲}$. پس زاویه های تقارن عبارتند از ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π و $\frac{۳\pi}{۲}$ که همان محور های مختصات می باشند. نقاط برخورد با مبداء مختصات نیز عبارتند از:

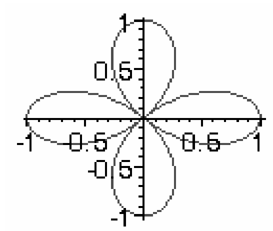
$$r=۰ \quad \Rightarrow \quad \cos ۲\theta=۰ \quad \Rightarrow \quad ۲\theta=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad \theta=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین در زاویه های $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ مبداء مختصات را قطع کرده است. اکنون مقادیر r را در ناحیه اول محاسبه می کنیم.

θ	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$
r	a	$۰/۸۵a$	$۰/۷a$	$۰/۵a$	۰	$-۰/۵a$	$-۰/۷a$	$-۰/۸۵a$	$-a$

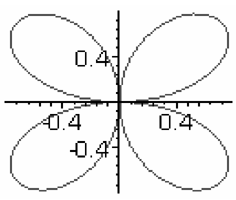
همانطوریکه ملاحظه می شود مقادیر r در فاصلهٔ $\frac{\pi}{۴}<\theta<\frac{\pi}{۲}$ منفی است. با رسم نقاط فوق و خواص تقارن نمودار منحنی قطبی برای $a=۱$ بصورت شکل ۲۰-۴-۱ بدست می آید. در حالتیکه $a<۰$ دقیقاً همین نمودار حاصل می شود.

۲۱-۴-۱ گل چهار برگ $r=a\sin ۲\theta$ مشابه آنچه که در مورد نمودار منحنی قطبی $r=a\cos ۲\theta$ بیان شد در مورد منحنی قطبی $r=a\sin ۲\theta$ نیز می توان اطلاعات زیر را بدست آورد:



$y=\cos ۲\theta$

شکل ۲۰-۴-۱



$y=\sin ۲\theta$

شکل ۲۱-۴-۱

الف) متقارن نسبت به محور x ها و محور y ها و مبداء مختصات می باشد. ب) نسبت به زاویه های $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ نیز تقارن دارد. ج) مبداء مختصات را در زاویه های ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π و $\frac{۳\pi}{۲}$ یعنی محورهای

مختصات قطع می کند. با توجه به خواص فوق و نیز محاسبه مقادیر r در ناحیهٔ اول نمودار شکل ۲۱-۴-۱ برای $a=۱$ بدست می آید.

۲۲-۴-۱ گل سه برگ $r = a\cos ۳\theta$ فرض کنیم $a > ۰$ در اینصورت خواهیم داشت:

الف) نسبت به محور x ها متقارن است. ب) نسبت به زاویه های $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ نیز متقارن است. ج) مبداء مختصات را در زاویه های $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$، $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$ قطع می کند. د) مقادیر r در ناحیهٔ اول بصورت زیر بدست آمده اند در ناحیهٔ دوم نیز می توانید بطور مشابه محاسبه نمایید.

θ	۰	$\frac{\pi}{۱۸}$	$\frac{\pi}{۹}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۲\pi}{۹}$	$\frac{۵\pi}{۱۸}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۱۸}$	$\frac{۴\pi}{۹}$	$\frac{\pi}{۲}$
r	a	$۰/۸۵a$	$۰/۵a$	۰	$-۰/۵a$	$-۰/۸۵a$	$-a$	$-۰/۸۵a$	$-۰/۵a$	۰

با توجه به اطلاعات فوق نمودار منحنی قطبی $r = a\cos ۳\theta$ وقتی $a > ۰$ بصورت زیر می باشد.

$(a<۰)$ $(a>۰)$

شکل ۲۲-۴-۱

در حالتیکه $a < ۰$ آنگاه منحنی قطبی $r = a\cos ۳\theta$ بصورت زیر حاصل می شود که دقیقاً دوران نمودار فوق به اندازهٔ زاویهٔ π می باشد.

۲۳-۴-۱ گل سه برگ $r = a\sin ۳\theta$ مشابه آنچه در مورد گل سه برگ $r = a\cos ۳\theta$ بیان شد می توان نمودار منحنی قطبی $r = a\sin ۳\theta$ را رسم کرد. هنگامیکه $a > ۰$ اندازهٔ $\frac{\pi}{۶}$ در جهت دایرهٔ مثلثاتی حاصل می گردد. جزئیات رسم آنرا بعنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

$(a<۰)$ شکل (۲۳-۴-۱) $(a>۰)$

۲۴-۴-۱ تذکر: در حالت کلی نیز می توان منحنی های قطبی $r = a\cos n\theta$ و $r = a\sin n\theta$ را نیز رسم کرد. بسادگی می توان نشان داد که منحنی های قطبی فوق هنگامیکه n یک عدد زوج باشد یک گل $۲n$ برگ و هنگامیکه n عدد فردی باشد یک گل n برگ می باشد. در مثال زیر نمودار آنها به ازای $n = ۴$ و $n = ۵$ رسم شده اند.

۲۵-۴-۱ مثال: نمودار منحنی های قطبی $r = ۲\cos ۴\theta$ و $r = -۲\sin ۵\theta$ را رسم کنید.

حل: منحنی قطبی $r = ۲\cos ۴\theta$ یک گل هشت برگ و نمودار منحنی قطبی $r = -۲\sin ۵\theta$ یک گل پنج برگ می باشد که نمودار هر یک بصورت زیر می باشد:

$r = ۲\cos ۴\theta$ $\qquad$ $r = -۲\sin ۵\theta$

شکل (۲۵-۴-۱)

۲۶-۴-۱ سهمی $r = \dfrac{a}{۱+\cos\theta}$ منحنی قطبی فوق نسبت به محور x ها متقارن است و هیچگاه مبداء مختصات را قطع نمی کند. و به جز زاویهٔ ۰ و π که همان محور x ها است نسبت به زاویه دیگری تقارن ندارد. نکتهٔ جدید در مورد این منحنی قطبی این است که $\theta = \pi$ مقدار r بینهایت می شود. و این بدان معنی است که منحنی قطبی از مبداء مختصات دورتر و دورتر می شود. مقادیر r در ناحیهٔ اول و دوم در جدول زیر محاسبه شده اند و می توان به این نکته توجه کرد که هنگامی زاویهٔ θ به زاویهٔ π نزدیک می شود مقدار r بیشتر و بیشتر می شود تا اینکه در زاویهٔ π بینهایت می شود.

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۸\pi}{۹}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۸}$	π
r	$۰/۵a$	$۰/۵۳a$	$۰/۵۸a$	$۰/۶۶a$	a	$۲a$	$۳/۳a$	$۷/۱۴a$	$۱۶/۶a$	$۶۶/۶a$	∞

با توجه به مقادیر فوق $a > ۰$ و نیز $a < ۰$ نمودارهای سهمی بصورت زیر حاصل می شوند:

شکل(۲۶-۴-۱)

۱-۴-۲۷ سهمی $r=\frac{a}{۱+\sin\theta}$ این منحنی قطبی نسبت به محور y ها متقارن است و هیچگاه مبداء مختصات را قطع نمی کند. و به جز زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ که همام محور y ها است، نسبت به زاویهٔ دیگری تفاوت ندارد. هنگامی زاویهٔ θ به زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک می شود مقدار r افزایش پیدا می کند و در زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$ بینهایت می شود مقادیر r در ناحیهٔ اول و چهارم بصورت زیر حاصل شده اند.

θ	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۶}$	۰	$-\frac{\pi}{۶}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{۷\pi}{۱۸}$	$-\frac{۴\pi}{۹}$	$-\frac{\pi}{۲}$
r	$۰/۵a$	$۰/۵۳a$	$۰/۵۸a$	$۰/۶۶a$	a	$۲a$	$۳/۳a$	$۷/۱۴a$	$۱۶/۶a$	$۶۶/۶a$	∞

با توجه به مقادیر فوق $a>۰$ و نیز $a<۰$ نمودارهای سهمی بصورت زیر حاصل می شوند:

شکل (۲۶-۴-۱)

۱-۴-۲۸ تذکر: چنانچه جهت سهمی را در جهت تحدب آن قرار داد نماییم (بر خلاف آنچه در حالت دکارتی بکار می بریم یعنی در جهت تقعر آن بعنوان جهت سهمی در نظر می گیریم) آنگاه می توان از قرار داد جهت مربوط به دلنماها برای بررسی سهمی ها نیز استفاده کرد یعنی:

جهت محور x ها = (علامت $\cos\theta$) × (علامت a) ؛ محور x ها $\quad \cos\theta \longleftrightarrow$

جهت محور y ها = (علامت $\sin\theta$) × (علامت a) ؛ محور y ها $\quad \sin\theta \longleftrightarrow$

بنابراین سهمی $r=\frac{a}{۱+\cos\theta}$ در جهت مثبت محور x ها است اگر $a>۰$ و نیز در جهت منفی محور x ها است اگر $a<۰$. بطور مشابه $r=\frac{a}{۱+\sin\theta}$ یک سهمی در جهت مثبت محور ها اگر $a>۰$ و در جهت منفی محور y ها خواهد بود چنانچه $a<۰$ در نظر گرفته شود.

۲۹-۴-۱ سهمی های $r=\frac{a}{۱-\cos\theta}$ **و** $r=\frac{a}{۱-\sin\theta}$ با توجه به تذکر ۲۸-۴-۱ براحتی می توان نمودار سهمی های فوق را رسم نمود. سهمی $r=\frac{a}{۱-\cos\theta}$ یک سهمی در جهت منفی محور x ها است چنانچه $a>۰$ و در جهت مثبت محور x ها است اگر $a<۰$. متشابهاً سهمی $r=\frac{a}{۱-\sin\theta}$ یک سهمی در جهت منفی محور y ها است چنانچه $a>۰$ و در جهت مثبت محور y ها است اگر $a<۰$ در نظر گرفته شود.

۳۰-۴-۱ مثال: نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید:

الف) $r=\frac{-۲}{۱+\cos\theta}$ ب) $r=\frac{-۲}{۱+\sin\theta}$

حل: الف) یک سهمی در جهت منفی محور x ها است.

ب) یک سهمی در جهت مثبت محور y ها است.

شکل(۳۰-۴-۱)

۳۱-۴-۱ تمرین: منحنی های قطبی $r=\frac{a}{۱\pm k\cos\theta}$ و $r=\frac{a}{۱\pm k\sin\theta}$ را در حالتیکه $k\neq ۱$ بررسی و آنها را رسم کنید. توجه کنید هنگامی $k=۱$ سهمی است که نمودار های آنها رسم شده است.

۳۲-۴-۱ پیچ حلزونی $r=a\theta$: در نمودار منحنی قطبی فوق با افزایش θ مقدار r افزایش پیدا می کند و بصورت یک مسیر مارپیچ حاصل می شود که به آن پیچ حلزونی می گوییم در زیر نمودار آن در حالت $a>۰$ و نیز $a<۰$ رسم شده اند.

شکل(۳۲-۴-۱)

۱-۵ نواحی محدود به نواحی قطبی

در قسمت قبل با رسم نمودار های مهم منحنی های قطبی آشنا شدیم اکنون می خواهیم نواحی محدود به منحنی های قطبی و نیز نقاط تقاطع آنها را مشخص نمائیم در ابتدا لازم است در مورد نقطهٔ تقاطع مبداء مختصات به تذکر زیر توجه نماییم.

۱-۵-۱ تذکر: همانطوریکه در ابتدای این فصل بیان شد نقطهٔ مبداء مختصات دارای بینهایت نمایش می باشد و هر نقطهٔ بصورت $(\circ,\theta)$ نمایش مبداء مختصات در مختصات قطبی است. لذا بر این اساس ممکن است دو منحنی قطبی یکدیگر را در مبداء مختصات قطع کرده باشند ولی این نقطه از تقاطع دو منحنی حاصل نشود زیرا هر یک از منحنی ها یقطبی در زاویهٔ خاصی مبداء را قطع کرده باشند. بطور مثال اگر $r_۱ = f(\theta)$ و $r_۲ = g(\theta)$ دو منحنی قطبی باشند بطوریکه منحنی قطبی $r_۱ = f(\theta)$ در زاویهٔ $\theta=\alpha_۱$ مبداء را قطع کرده باشد و منحنی قطبی $r_۲ = g(\theta)$ نیز در زاویهٔ $\theta=\alpha_۲$ مبداء را قطع کرده باشد و $\alpha_۱ \neq \alpha_۲$ باشد، آنگاه دو منحنی یکدیگر را در مبداء مختصات قطع نموده اند ولی با تقاطع دو منحنی قطبی این نقطه حاصل نمی شود زیرا داریم $\circ = r_۱ = f(\alpha_۱)$ و $\circ = r_۲ = g(\alpha_۲)$ ولی $\circ \neq r_۱ = f(\alpha_۲)$ و $\circ \neq r_۲ = g(\alpha_۱)$ بنابراین همواره در پیدا کردن نقاط تقاطع دو منحنی باید نقطهٔ مبداء را بطور جداگانه مورد بررسی قرار داد. در مورد بقیهٔ نقاط تقاطع می توان با یکسان قرار دادن معادلات منحنی های قطبی آنها را بدست آورد ولی لازم است به این نکته نیز توجه داشته باشیم که چون نقطهٔ (r,θ) همان نقطهٔ $(-r,\theta+\pi)$ می باشد بنابراین در یکسان قرار دادن معادلات دو منحنی قطبی باید به این نکته نیز توجه داشت. بطورکلی اگر $r_۱ = f(\theta)$ و $r_۲ = g(\theta)$ دو منحنی قطبی باشند برای بدست آوردن نقاط تقاطع باید بصورت زیر عمل کرد:

مرحلهٔ ۱: بررسی نقطهٔ مبداء مختصات یعنی بدست آوردن زاویه های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ بطوریکه داشته باشیم: $f(\theta_۱) = g(\theta_۲) = \circ$. زاویه های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ ممکن است مساوی یا متمایز از یکدیگر باشند.

مرحلهٔ ۲: پیدا کردن نقاط از یکسان قرار دادن معادلات دو منحنی قطبی. بعبارت دیگر باید جوابهای دستگاه $\begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta) \end{cases}$ یعنی $f(\theta) = g(\theta)$ را بدست آورد.

مرحلهٔ ۳: پیدا کردن نقاط تقاطع از حل دستگاه $\begin{cases} r = f(\theta) \\ -r = g(\pi+\theta) \end{cases}$ که ناشی از نمایش های یکسان نقطهٔ $(r,\theta) = (-r,\pi+\theta)$ می باشد. البته این مرحله برای آن دسته از منحنی های قطبی بررسی می شود که به

ازای برخی مقادیر θ، مقدار r منفی باشد و چنانچه برای هر دو منحنی قطبی داشته باشیم $r \geq ۰$ آنگاه بررسی این شرط لزومی ندارد.

۱-۵-۲ مثال: منحنی های قطبی $r_{۱} = ۱+\cos\theta$ و $r_{۲} = ۱-\sin\theta$ مفروضند

(i) منحنی های قطبی فوق را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(ii) نقاط تقاطع آنها را بدست آورید.

(iii) ناحیهٔ مشترک آنها را مشخص کنید.

حل: (i) با توجه به رسم منحنی های قطبی در قسمت ۴-۱ منحنی قطبی $r_{۱} = ۱+\cos\theta$ یک دلنما در جهت مثبت محور x ها و منحنی قطبی $r_{۲} = ۱-\sin\theta$ یک دلنما در جهت منفی محور y ها است و نمودار آنها بصورت زیر است:

شکل(۲-۵-۱)

(ii) در هر دو منحنی قطبی همواره $r \geq ۰$ می باشد لذا جهت یافتن نقاط تقاطع داریم

$$۱+\cos\theta = ۱-\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = -۱ \Rightarrow \theta = \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$$

همچنین $۰ = r_{۱} = ۱+\cos\pi$ و $۰ = r_{۲} = ۱-\sin\frac{\pi}{۲}$ پس مبداء مختصات نیز نقطهٔ تقاطع می باشد. بنابراین نقاط تقاطع عبارتند:

از مبداء مختصات ($(۰,\pi)$ یا $(۰,\frac{\pi}{۲})$) و نیز $A(۰/۳,\frac{۳\pi}{۴})$ و $B(۱/۷,\frac{۷\pi}{۴})$.

(iii) ناحیهٔ مشتر در شکل ۲-۵-۱ هاشور زده شده است.

۱-۵-۳ مثال: ناحیهٔ درون منحنی قطبی $r = ۴\cos\theta$ و بیرون منحنی قطبی $r = ۱+\sin\theta$ را مشخص کنید.

حل: منحنی قطبی $r = ۴\cos\theta$ یک دایره به قطر ۴ در جهت مثبت محور x ها و منحنی قطبی $r = ۱+\sin\theta$ یک دلنما در جهت مثبت محور y ها است. لذا نمودار آنها و نیز ناحیهٔ مورد نظر بصورت زیر است:

شکل(۳-۵-۱)

۴-۵-۱ مثال: ناحیهٔ درون منحنی قطبی $r=۲\cos ۲\theta$ و بیرون منحنی قطبی $r=۱$ را مشخص کنید و کلیهٔ نقاط تقاطع را بدست آورید.

حل: منحنی قطبی $r=۲\cos ۲\theta$ یک گل چهار برگ است و منحنی قطبی $r=۱$ یک دایره به مرکز مبداء و شعاع ۱ می باشد. لذا نمودار آنها و ناحیهٔ مورد نظر بصورت زیر مشخص شده اند:

شکل (۴-۵-۱)

نقاط تقاطع عبارتند از: الف) مبداء مختصات ب) نقاط $\frac{\pi}{۶}$، $-\frac{\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$ که از حل معادلهٔ $۱=۲\cos ۲\theta$ حاصل شده اند.

ج) نقاط $\frac{\pi}{۳}$ ، $-\frac{\pi}{۳}$ ، $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}$ که از حل معادلهٔ $-۱=۲\cos ۲\theta$ حاصل شده اند.

۶-۱ زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس

در این قسمت به معرفی زاویه های مهمی در منحنی های قطبی اشاره خواهیم کرد که به نام زاویه بین شعاع و خط مماس معروف می باشد و معمولاً آنرا با ψ نمایش می دهند. اهمیت این زاویه در مختصات قطبی همانند اهمیت زاویهٔ مربوط به خط مماس و جهت مثبت محور x ها است که معمولاً با φ نمایش داده می شود. اکنون به معرفی این دو زاویه و سپس ارتباط میان آنها می پردازیم.

۱-۶-۱ تعریف (زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس): منحنی قطبی $r=f(\theta)$ را مطابق شکل ۱-۶-۱ در نظر می گیریم اگر $P(r,\theta)$ نقطه ای روی منحنی قطبی، OP پاره خط واصل از مبداء به نقطهٔ P و L خط

مماس بر منحنی قطبی در نقطهٔ P باشد بطوریکه محور x ها را در نقطهٔ A قطع کرده باشد آنگاه OP را شعاع حامل منحنی قطبی در نقطهٔ P، زاویهٔ φ را زاویهٔ بین خط مماس و جهت مثبت محور x ها و زاویهٔ ψ را زاویهٔ بین شعاع حامل OP و خط مماس L می گوییم.

۲-۶-۱ ارتباط میان ψ و φ : همانطوریکه میدانیم $\tan\varphi$ در مختصات دکارتی شیب خط مماس L است و بنا به تعریف مشتق داریم $\tan\varphi=\dfrac{dy}{dx}$. حال با توجه به شکل ۱-۶-۱ در مثلث OPA زاویهٔ φ زاویهٔ خارجی این مثلث است و لذا داریم $\varphi=\psi+\theta$ بنابراین $\psi=\varphi-\theta$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$\tan\psi=\tan(\varphi-\theta)=\frac{\tan\varphi-\tan\theta}{۱+\tan\varphi\tan\theta} \qquad (۱)$$

اکنون با توجه به رابطهٔ میان مختصات قطبی و دکارتی داریم

$$x=r\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta$$

$$y=r\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta$$

درنتیجه

$$\tan\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}$$

بنابراین با جایگذاری در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\tan\psi=\frac{\dfrac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{۱+\dfrac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos^{۲}\theta-\cos\theta\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\cos\theta+\sin^{۲}\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{r\cos^{۲}\theta+r\sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta\dfrac{dr}{d\theta}+\sin^{۲}\theta\dfrac{dr}{d\theta}}=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}=\frac{r}{r'}$$

بنابراین $\tan\psi=\dfrac{r}{r'}$.

۳-۶-۱ مثال منحنی قطبی $r=۲(۱-\cos\theta)$ مفروض است در نقطهٔ $\theta=\dfrac{\pi}{۳}$ زاویهٔ بین شعاع حامل و خطوط مماس را بدست آورید و سپس به کمک آن شیب خط مماس بر این منحنی را در نقطهٔ $\theta=\dfrac{\pi}{۴}$ بدست آورید.

حل: با توجه به نمودار این منحنی قطبی که یک دلنما در جهت منفی محور x ها است و نیز با استفاده از رابطهٔ $\tan\psi=\dfrac{r}{r'}$ داریم:

شکل(۳-۶-۱)

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{۲(۱-\cos\theta)}{۲\sin\theta}=\frac{(۱-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲})}{\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}}=۰/۴$$

با توجه به شکل ملاحظه می شود که $\psi=۲۱/۸۰^{\circ}$ و در نتیجه:

$$\varphi=\psi+\theta=۲۱/۸۰^{\circ}+\frac{\pi}{۳}=۸۲/۸۰^{\circ}$$

۴-۶-۱ تذکر با توجه به اینکه زاویهٔ بین دو خط غیر عمود ممکن است هر یک از زاویه های حاده یا منفرجه در نظر گرفته شود لذا زاویهٔ بین شعاع حامل و خط مماس را می توان هر یک از دو زاویه های حاده یا منفرجه تعریف کرد ولی باید توجه داشت که ارتباط میان زاویه های θ و φ و ψ درست مورد استفاده قرار گیرد. البته میدانیم ارتباط میان دو حالت برای زاویه ψ چون مکمل یکدیگر می باشند، بسادگی قابل محاسبه از یکدیگر می باشند.

۵-۶-۱ مثال زاویهٔ بین دو منحنی قطبی $r_۱=۱+\cos\theta$ و $r_۲=۱+\sin\theta$ را دریکی از نقاط تقاطع بدست آورید.

حل: ابتدا نمودار آنها را رسم می کنیم تا به کمک شکل دقیق تر زاویه میان آنها در نقطهٔ تقاطع حاصل گردد.

اگر A نقطهٔ تقاطع دو منحنی در ناحیهٔ اول فرض شود آنگاه زاویهٔ نقطهٔ A برابر است با $\theta=\frac{\pi}{۴}$ اکنون داریم:

شکل(۵-۶-۱)

$$\varphi_۱=\psi_۱+\theta,\quad \varphi_۲=\psi_۲+\theta\Rightarrow\varphi_۱-\varphi_۲=\psi_۱-\psi_۲$$

در نتیجه کافی است زاویهٔ $\psi_۱-\psi_۲$ را بدست آوریم. داریم:

$$\tan\psi_۱=\frac{r_۱}{r'_۱}=\frac{۱+\cos\theta}{-\sin\theta}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}}=-(\sqrt{۲}+۱)$$

$$\tan\psi_۲=\frac{r_۲}{r'_۲}=\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲}+۱)$$

بنابراین

$$\tan(\psi_۱-\psi_۲)=\frac{\tan\psi_۱-\tan\psi_۲}{۱+\tan\psi_۱\tan\psi_۲}=\frac{-(\sqrt{۲}+۱)-(\sqrt{۲}+۱)}{۱+(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}+۱)}$$

$$=\frac{-۲\sqrt{۲}-۲}{۱-(۳+۲\sqrt{۲})}=\frac{-۲\sqrt{۲}-۲}{۲\sqrt{۲}-۲}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}=-۵/۸۲$$

پس $|\psi_۲-\psi_۱|=۸۰/۲۶$.

۶-۶-۱ مثال: نقاطهٔ از منحنی قطبی $r=\frac{۱}{۱-\sin\theta}$ را بیابید که خط مماس در آن نقطه افقی باشد.

حل: می دانیم منحنی قطبی فوق یک سهمی در جهت منفی محور yها است. چون خط مماس باید افقی باشد لذا زاویه $\varphi = 0$ اختیار می کنیم و لذا خواهیم داشت: $0 = \varphi = \psi + \theta \Rightarrow \psi = -\theta$ در نتیجه : $\tan\psi = -\tan\theta$ چون $\tan\psi = \frac{r}{r'}$ پس داریم:

$$\tan\theta = \tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{\frac{1}{1-\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}$ و یا $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ و یا

$\sin\theta\cos\theta = \sin\theta\cos\theta - \cos\theta$ و یا $\cos\theta = 0$

که جوابهای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ حاصل می شود و از این دو جواب مورد قبول $\theta = \frac{3\pi}{2}$ می باشد.

شکل (۶-۶-۱)

۱-۷ محاسبهٔ مساحت در مختصات قطبی

در این قسمت به محاسبهٔ مساحت یک ناحیهٔ محدود به یک منحنی قطبی خواهیم پرداخت و سپس در ادامه مساحت نواحی محدود به دو یا چند منحنی قطبی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

۱-۷-۱ مساحت ناحیهٔ محدود به یک منحنی قطبی

فرض کنیم $r = f(\theta)$ یک منحنی قطبی باشد می خواهیم A سطح محدود به این منحنی قطبی را در فاصلهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$ را محاسبه نماییم. برای این منظور افرازی در فاصلهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$ بصورت زیر در نظر می گیریم: $\theta_0 = \alpha, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta$.

فرض کنیم: $P_0(r_0, \theta_0), P(r_1, \theta_1), \ldots, P(r_n, \theta_n)$ نقاط متناظر افراز فوق روی منحنی $r = f(\theta)$ باشد. اگر A_i سطح محدود به منحنی قطبی در فاصلهٔ $\theta_{i-1} \le \theta \le \theta_i$ باشد، آنگاه داریم

$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ اکنون می خواهیم برای سطح A_i تقریبی را معرفی کنیم. اگر $P_i^*(r_i^*, \theta_i^*)$ نقطه ای بین P_{i-1} و P_i باشد، و $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ آنگاه می توان مثلث متساوی الساقین به ارتفاع OP_i^* را چنان رسم کرد که ساقهای آن روی پاره خط های OP_{i-1} و OP_i یا امتداد آنها قرار داشته باشد. مساحت این مثلث متساوی الساقین که آنرا s_i می نامیم تقریبی برای سطح A_i می باشد. مساحت مثلث متساوی الساقین $OB_{i-1}B_i$ یعنی s_i تقریباً برابر است با

$s_i = \frac{1}{2} r_i^* (r_i^* \Delta\theta_i)$، توجه کنید طول قاعده $B_{i-1}B_i$ تقریباً برابر است با $r_i^* \Delta\theta_i$ بنابراین $s_i = \frac{1}{2} {r_i^*}^2 \Delta\theta_i$ و در نتیجه $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} {r_i^*}^2 \Delta\theta_i$ تقریبی برای سطح مورد نظر یعنی i می باشد.

اکنون اگر $\Delta\theta_i \to 0$ آنگاه مقدار واقعی مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی قطبی $r = f(\theta)$ و زوایای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ یعنی A بصورت زیر بدست می آید:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} {r_i^*}^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

بنابراین

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

شکل(۱-۷-۱)

۲-۷-۱ مثال: مساحت قسمتی از منحنی قطبی $r = 2\cos\theta$ را که در ناحیه اول قرار دارد، بدست آورید.

حل: میدانیم منحنی قطبی فوق یک دایره به قطر ۲ در جهت مثبت محور x ها است لذا مساحت قسمتی از این دایره که در ناحیهٔ اول قرار دارد مساحت یک نیم دایره به شعاع ۱ می باشد که مقدار آن برابر است با $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}$. اکنون با توجه به فرمول بدست آمده برای سطح محدود به یک منحنی قطبی داریم:

$$A = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4\left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\cos ۲\theta)\, d\theta = \left[\theta + \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۲} + \circ - \circ = \frac{\pi}{۲}$$

که همان مقدار بدست آمده بطور مستقیم می باشد.

شکل (۲-۷-۱)

۳-۷-۱ مثال: مساحت کامل دلنمای $r = ۲(۱+\sin\theta)$ را بدست آورید.

حل: داریم

$$A = \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۲\pi} \left[۲(۱+\sin\theta)\right]^{۲} d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۲\pi} ۴(۱+\sin^{۲}\theta + ۲\sin\theta)\, d\theta$$

$$= ۲\int_{\circ}^{۲\pi}\left[۱+۲\sin\theta + (\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲})\right] d\theta = \int_{\circ}^{۲\pi} (۳+۴\sin\theta - \cos ۲\theta)\, d\theta$$

$$= \left[۳\theta - ۴\cos\theta - \frac{۱}{۲}\sin ۲\theta\right]_{\circ}^{۲\pi} = ۶\pi - ۴ - \circ - \circ + ۴ + \circ = ۶\pi$$

۴-۷-۱ تذکر: (i) در برخی مواقع که تقارن وجود دارد می توان از تقارن در محاسبهٔ مساحت ها استفاده کرد بدین صورت که مساحت یک قسمت را بدست آورد و سپس در ضریب مناسب ضزب کرد. بعنوان مثال در ۳-۷-۱ می توان مساحت را در فاصلهٔ $-\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ محاسبه کرد و حاصل آنرا دو برابر نمود.

(ii) ممکن است سطح محدود بین دو منحنی قطبی $r_۱ = f_۱(\theta)$ و $r_۲ = f_۲(\theta)$ در فاصلهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$ مورد نظر باشد برای تعیین این مساحت می توان بصورت زیر عمل کرد.

شکل (۴-۷-۱)

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r_2^2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r_1^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2-r_1^2)\,d\theta$$

۵-۷-۱ مثال: مساحت ناحیهٔ درون منحنی قطبی $r=2\sin 2\theta$ و بیرون دایرهٔ $r=\frac{1}{2}$ را بدست آورید.

شکل (۵-۷-۱)

حل: همانطوریکه در شکل ۵-۷-۱ مشاهده می شود برای محاسبهٔ ناحیهٔ هاشور شده به کمک خاصیت تقارن می توان مساحت ناحیهٔ A که پر رنگ تر نشان داده شده است را بدست آورد و سپس این مساحت برا هشت برابر کرد در اینصورت مساحت مورد نظر حاصل می شود. بدین منظور نقطهٔ تقاطع برگ واقع در ناحیهٔ اول را با دایره $r=\frac{1}{2}$ بدست می آوریم.

$$\sin 2\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}\,,\,2\theta=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$$

لذا زاویه های $\theta=\frac{\pi}{12}$ و $\theta=\frac{5\pi}{12}$ در ناحیهٔ اول حاصل می شوند. بنابراین داریم:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}(r_1^2-r_2^2)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}((\sin 2\theta)^2-(\tfrac{1}{2})^2)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 2\theta)-(\tfrac{1}{4})\,d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1-\cos 4\theta}{2})-(\tfrac{1}{4})\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{4}-\frac{\cos 4\theta}{2})\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\theta-\frac{\sin 4\theta}{8}\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{6}-0-\frac{\pi}{48}+\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{3}}{2})\right]=\frac{\pi}{48}+\frac{\sqrt{3}}{32}$$

بنابراین مساحت مورد نظر عبارتست از $8(\frac{\pi}{48}+\frac{\sqrt{3}}{32})=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

۶-۷-۱ مثال: مساحت بین دو حلقه در دلنمای $r=1-2\cos\theta$ را بدست آورید.

شکل (۶-۷-۱)

حل: با توجه به نمودار این دلنما در ۱۴-۴-۱ ملاحظه می شود که حلقهٔ داخلی به ازای $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ساخته می شود و نیز حلقهٔ خارجی به ازای $\frac{\pi}{3} \le \theta \le -\frac{\pi}{3}$ ایجاد می گردد بنابراین اگر A_1 مساحت حلقهٔ داخلی و A_2 مساحت حلقهٔ خارجی باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - 4\cos\theta + 4\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[1 - 4\cos\theta + 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - 4\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3 - 4\cos\theta + 2\cos 2\theta)\, d\theta = \left[3\theta - 4\sin\theta + \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

بطور مشابه نیز داریم:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \times 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2 d\theta = \left[3\theta - 4\sin\theta + \sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ محدود بین دو حلقه عبارتست از:

$$\text{مساحت بین دو حلقه} = A_2 - A_1 = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \pi + 3\sqrt{3}$$

۱-۸ محاسبهٔ طول قوس در مختصات قطبی

همانگونه که در مختصات دکارتی ملاحظه نمودایم طول قوس منحنی $y = f(x)$ از فرمول $s = \int\sqrt{dx^{۲} + dy^{۲}}$ بدست می آید اکنون به کمک این فرمول و روابط میان مختصات دکارتی و قطبی می توان فرمولی برای محاسبهٔ طول قوس در مختصات قطبی بدست آورد. فرض کنیم $r = f(\theta)$ یک منحنی قطبی باشد و بخواهیم طول قوس این منحنی قطبی را در فاصلهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$ بدست آوریم در اینصورت با توجه به روابط $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ می توان dx و dy را بر حسب dr و $d\theta$ بصورت زیر بدست آورد:

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \quad \text{و} \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

در نتیجه:

$$(dx)^{۲} + (dy)^{۲} = r^{۲}\cos^{۲}\theta\,(dr)^{۲} + r^{۲}\sin^{۲}\theta(d\theta)^{۲} - ۲r\sin\theta\cos\theta\, drd\theta$$
$$+\sin^{۲}\theta\,(dr)^{۲} + r^{۲}\cos^{۲}\theta\,(d\theta)^{۲} + ۲r\sin\theta\cos\theta\, drd\theta = (dr)^{۲} + r^{۲}\,(d\theta)^{۲}$$

بنابراین
$$\sqrt{dx^{۲} + dy^{۲}} = \sqrt{r^{۲}(dr)^{۲} + (d\theta)^{۲}} = \sqrt{r^{۲} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{۲}}\ d\theta$$

لذا فرمول طول قوس در مختصات قطبی بصورت زیر حاصل می گردد:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^{۲} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{۲}}\ d\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^{۲} + r'^{۲}}\ d\theta$$

۱-۸-۱ تذکر: فرمول طول قوس در مختصات قطبی را می توان با گرفتن افراز برای فاصلهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$ نیز بدست آورد و در این روش با در نظر گرفتن طول وتر بطور تقریبی بجای طول قوس و سپس محاسبهٔ حد مجموع این وتر ها هنگامی که $\Delta\theta \to ۰$ می توان به فرمول رسید.

۱-۸-۲ مثال: طول قوس قسمتی از منحنی قطبی $r = ۳\sin\theta$ را که در ناحیهٔ اول واقع شده است، بدست آورید.

حل: میدانیم که منحنی قطبی $r = ۳\sin\theta$ یک دایره به قطر ۳ در جهت مثبت محور yها می باشد و طول قوس این دایره واقع در ناحیهٔ اول برابر نصف محیط دایره می باشد و این مقدار عبارتست از $\frac{۱}{۲}(۲\pi(\frac{۳}{۲})) = \frac{۳\pi}{۲}$. اکنون به کمک فرمول طول قوس در مختصات قطبی نیز داریم:

$$\text{۳-۸-}\quad s=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^{2}+r'^{2}}\,d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3\sin\theta)^{2}+(3\cos\theta)^{2}}\,d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3\,d\theta=[3\theta]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}$$

۱ مثال: طول قوس قسمتی از منحنی قطبی $r=4\sin\theta$ را که در بالای منحنی قطبی $r=\frac{1}{\sin\theta}$ یک خط افقی است زیرا داریم $r\sin\theta=1$ که همان خط $y=1$ می باشد و نیز $r=4\sin\theta$ یک دایره بع قطر ۴ در جهت مثبت محور yها است. ابتدا نقاط تقاطع آنها را بدست می آوریم.

$$r=\frac{1}{\sin\theta}\quad \text{و}\quad r=4\sin\theta\Rightarrow\frac{1}{\sin\theta}=4\sin\theta\Rightarrow\sin^{2}\theta=\frac{1}{4}$$

پس $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$ که زوایای $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{5\pi}{6}$ حاصل می شوند.

شکل (۳-۸-۱)

بنابراین نتیجه می شود:

$$s=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{r^{2}+r'^{2}}\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^{2}+r'^{2}}\,d\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(4\cos\theta)^{2}+(4\cos\theta)^{2}}\,d\theta==2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\,d\theta=4[\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi}{3}$$

۴-۸-۱ مثال: طول قوس قسمتی از منحنی قطبی $r=\cos 2\theta$ را که درون دایرهٔ $r=\frac{1}{2}$ در ناحیهٔ اول قرار دارد بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه منحنی قطبی $r=\cos 2\theta$ یک گل چهار برگ می باشد و نسبت به زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{4}$ متقارن است و نیز اینکه نقطهٔ تقاطع در فاصلهٔ $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ برابر زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{6}$ می باشد لذا داریم

$$s = ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}} \sqrt{r^۲ + r'^۲}\, d\theta = ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}} \sqrt{\cos^۲ ۲\theta + (-۲\sin ۲\theta)^۲}\, d\theta$$

$$= ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}} \sqrt{\cos^۲ ۲\theta + (۴\sin^۳ ۲\theta)}\, d\theta = ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۶}} \sqrt{۱ + ۳\sin^۳ ۲\theta}\, d\theta$$

۱-۹ مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی قطبی

همانطوریکه در مختصات دکارتی ملاحظه نموده ایم اگر منحنی $y = f(x)$ را حول یک محور دوران دهیم آنگاه از دوران آن سطحی حاصل می شود که مساحت آنرا می توان به کمک فرمول های زیر بدست آورد:

$\int ۲\pi\, yds$ =سطح حاصل از دوران حول محور x ها

$\int ۲\pi\, xds$ =سطح حاصل از دوران حول محور y ها

که $s = \int \sqrt{dx^۲ + dy^۲}$ و حدود انتگرال گیری را می توان با توجه به تغییرات x یا y نوشت. اکنون اگر منحنی قطبی $r = f(\theta)$ را در نظر بگیریم و آنرا حول محور x ها و یا حول محور yها دوران دهیم با توجه به مقادیر x و y و ds در مختصات قطبی می توان فرمولهای زیر را بدست آورد.

الف) مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی $r = f(\theta)$، $\alpha \le \theta \le \beta$ حول محور x ها

$$A = ۲\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\theta \sqrt{r^۲ + r'^۲}\, d\theta$$

ب) مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی $r = f(\theta)$، $\alpha \le \theta \le \beta$ حول محور yها

$$A = ۲\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\cos\theta \sqrt{r^۲ + r'^۲}\, d\theta$$

۱-۹-۱ مثال: مساحت سطح حاصل از دوران منحنی قطبی $r = ۲$ را حول محور x ها بدست آورید.

حل: توجه داریم که سطح حاصل از دوران دایرهٔ $r = ۲$ یک کره می باشد و سطح این کره برابر است با $۴\pi r^۲ = ۴\pi(۲^۲) = ۱۶\pi$. اکنون به کمک فرمول بدست آمده در فوق محاسبه می کنیم:

$$A = ۲\pi \int_{\circ}^{\pi} r\sin\theta \sqrt{r^۲ + r'^۲}\, d\theta = ۲\pi \int_{\circ}^{\pi} ۲\sin\theta \sqrt{۴ + \circ}\, d\theta$$

$$= ۲\pi \int_{\circ}^{\pi} ۴\sin\theta\, d\theta = \left[-۸\pi\cos\theta\right]_{\circ}^{\pi} = ۸\pi - (-۸\pi) = ۱۶\pi$$

که دقیقاً برابر مقدار بدست آمدهٔ فوق می باشد.

۱-۹-۲ مثال: مساحت سطح حاصل از دوران دایرهٔ $r = ۲\cos\theta$ را حول محور y ها بدست آورید.

حل: میدانیم $r=2\cos\theta$ یک دایره به قطر ۲ در جهت مثبت محور y ها است. حال برای محاسبهٔ سطح حاصل از دوران حول محور y ها داریم:

$$A=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\cos\theta\sqrt{(2\cos\theta)^2+(-2\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta^2\sqrt{4}\,d\theta=8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=4\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

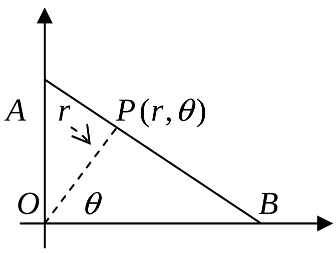
$$=4\pi\left[\frac{\pi}{2}+0-(-\frac{\pi}{2})-0\right]=4\pi^2$$

توجه داریم که سطح حاصل یک چنبره می باشد.

۱-۱۰ نمونه مسائل حل شده

۱-۱۰-۱: قطعه خطی به طول $2a$ چنان می لغزد که دو سرش بر محورهای Ox و Oy تغییر می کند، معادلهٔ مکان هندسی پای عمود وارد بر مبداء بر این قطعه خط را بیابید.

حل: با توجه به شکل می توان نوشت:



$$O\overset{\Delta}{P}B:\tan\theta=\frac{PB}{r}\Rightarrow PB=r\tan\theta \qquad (1)$$

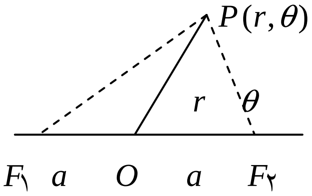
$$O\overset{\Delta}{P}A:\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{AP}{r}\Rightarrow AP=r\cot\theta \qquad (2)$$

بنابراین: $$AP+PB=2a=r(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta})$$

در نتیجه: $2a=r\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\Rightarrow r=a\sin 2\theta$ (شکل این منحنی در ۲۱-۴-۱ رسم شده است).

۱-۱۰-۲: مطلوبست معادلهٔ مکان هندسی همهٔ نقاطی مانند P که حاصلضرب فواصلشان از ۲ نقطهٔ ثابت مانند $F_1(a,\pi)$ و $F_2(a,0)$ برابر مقدار ثابتی چون a^2 باشد.

حل: با توجه به شکل داریم:

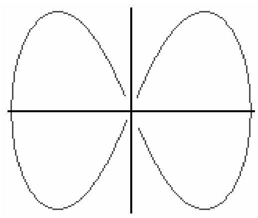


$$O\overset{\Delta}{F_2}P:(F_2P)^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta=a^2$$

$$O\overset{\Delta}{F_1}P:(F_1P)^2=r^2+a^2-2ar\cos(\pi-\theta)=a^2$$

$$a^{4}=r^{4}+a^{4}-2a^{2}r^{2}\cos 2\theta \Rightarrow r^{2}=2a^{2}\cos 2\theta$$

شکل این منحنی بصورت زیر می باشد:



۳-۱۰-۱: اولاً فرم قطبی معادلهٔ $(x^{2}+y^{2})^{2}+2ay(x^{2}+y^{2})-a^{2}x^{2}=0$ را نوشته و نمودار آن را رسم کنید. ثانیاً مساحت محدود به درون این منحنی و خارج منحنی $r=a$ را حساب کنید.

حل: اولاً $\quad (x^{2}+y^{2})^{2}+2ay(x^{2}+y^{2})+a^{2}y^{2}=a^{2}(x^{2}+y^{2})$

پس $\quad \left[(x^{2}+y^{2})+ay\right]^{2}=a^{2}(x^{2}+y^{2})$

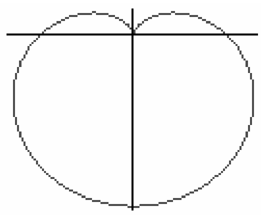
با قرار دادن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم: $\quad (r^{2}+ar\sin\theta)^{2}=a^{2}r^{2}$

در نتیجه $r^{2}+ar\sin\theta=\pm ar$ بنابراین $r=a(\mp 1-\sin\theta)$.

اما دو منحنی $r_1=a(1-\sin\theta)$ و $r_2=-a(1+\sin\theta)$ با هم مساوی هستند زیرا با تبدیل (r,θ) به $(-r,\pi+\theta)$ داریم:

$$-r=a(1-\sin(\pi+\theta))=a(1+\sin\theta)\Rightarrow r_1=-a(1+\sin\theta)=r_2$$

برای رسم منحنی $r=a(1-\sin\theta)$ مطابق ۱۱-۴-۱ شکل منحنی بصورت زیر است:



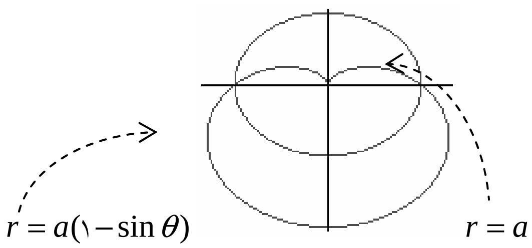
$r=a(1-\sin\theta)$

می دانیم منحنی $r=a$ یک دایره به شعاع a و به مرکز مبداء می باشد، لذا برای محاسبهٔ مساحت، با استفاده از شکل می توان نوشت:

$$A=2\times\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(a^2(1-\sin\theta)^2-a^2\right)d\theta\right]=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-2\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$$

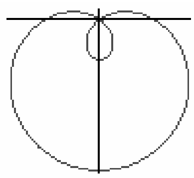
$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=a^2\left[2\cos\theta+\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

درنتیجه: $A=a^2\left(2+\frac{\pi}{4}\right)$



۴-۱۰-۱: منحنی $r=\sqrt{3}-2\sin\theta$ را رسم کنید و مساحت بین یک حلقهٔ کوچک و حلقهٔ بزرگ آنرا بدست آورید.

حل: مطابق ۱-۴-۱۷ شکل منحنی بصورت زیر بدست می آید:

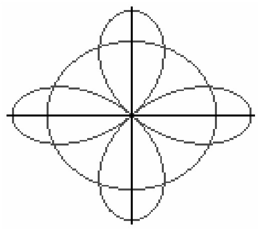


برای محاسبهٔ مساحت با توجه به تقارن شکل نسبت به مبداء مختصات داریم:

$$s=2\times\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}-2\sin\theta)^2\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{3}-2\sin\theta)\,d\theta\right]=\frac{25\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۵-۱۰-۱: منحنی $r=\sqrt{2}a\cos 2\theta$ را رسم کنید سپس مساحت خارج (داخل) این منحنی و داخل (خارج) منحنی $r=a$ را حساب کنید.

حل: مطابق ۲۰-۴-۱ شکل منحنی بصورت زیر است.



اکنون برای محاسبهٔ مساحت و با توجه به تقارن شکل داریم:

$$\sqrt{۲}a\cos ۲\theta = a \Rightarrow \cos ۲\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۸}$$

$$\sqrt{۲}a\cos ۲\theta = ۰ \Rightarrow ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین:

$$-۶\ A = ۸\times\frac{۱}{۲}\left[\int_{۰}^{\frac{\pi}{۸}}((\sqrt{۲}a\cos ۲\theta)^{۲} - a^{۲})d\theta + \int_{\frac{\pi}{۸}}^{\frac{\pi}{۴}}(a^{۲} - (\sqrt{۲}a\cos ۲\theta)^{۲})d\theta\right] = ۴a^{۲}(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴})$$

۱۰-۱: خطوط تقارن منحنی های (الف) $r = ۱-۲\sin ۲\theta$ و (ب) $r = ۱-۲\sin ۳\theta$ را بدست آورده و سپس منحنی ها را رسم کنید و مساحت یک حلقهٔ کوچک و یک حلقهٔ بزرگ از هر منحنی را بدست آورید.

حل: (الف) برای پیدا کردن خطوط تقارن منحنی از رابطهٔ $f(\theta) = f(۲\alpha-\theta)$ استفاده می کنیم و داریم:

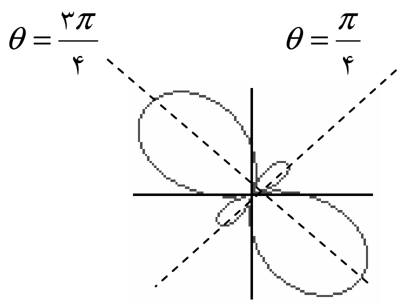
$$r = ۱-۲\sin(۲\theta) \Rightarrow f(\theta) = f(۲\alpha-\theta) \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta = ۲k\pi + \pi - ۴\alpha + ۲\theta & (۱) \\ ۲\theta = ۲k\pi + ۴\alpha - ۲\theta & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \quad k = ۰,۱,\ldots \quad \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴} \\ k = ۱ \Rightarrow \theta = \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \text{ خطوط تقارن}$$

برای رسم منحنی با نقطه یابی می توان نوشت:

θ	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۸}$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\pi}{۴}$
r	۳	۲.۷	۲	۱	۰	-۰.۷	-۱

لذا شکل منحنی بصورت زیر بدست می آید:



اکنون برای محاسبهٔ مساحت می توان نوشت:

مساحت یک حلقهٔ بزرگ : $A_1 = 2\times\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{12}} (1-2\sin 2\theta)^2\, d\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{12}} (1-4\sin 2\theta + 2 - 2\cos 4\theta)\, d\theta = \left(3\theta + 2\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta\right)_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{12}} = \pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

مساحت یک حلقهٔ کوچک : $A_2 = 2\times\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin 2\theta)^2\, d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$

(ب) ابتدا طول خطوط تقارن منحنی را بدست می آوریم:

$$r = 1 - 2\sin 3\theta \Rightarrow f(\theta) = f(2\alpha - \theta) \Rightarrow \begin{cases} 3\theta = 2k\pi + \pi - 6\alpha + 3\theta & (1) \\ 3\theta = 2k\pi + 6\alpha - 3\theta & (2) \end{cases}$$

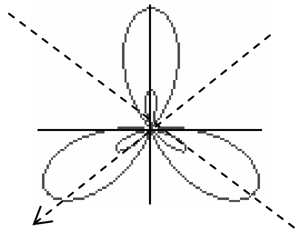
$$(1) \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$ خطوط تقارن

بعضی نقاط منحنی عبارتند از:

θ	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{18}$	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$
r	۳	۲.۷	۲	۱	۰	−۰.۷	−۱

بنابراین شکل منحنی بصورت زیر می باشد:

$$\theta=\frac{۵\pi}{۶}\qquad \theta=\frac{\pi}{۲}\qquad \theta=\frac{\pi}{۶}$$



اکنون برای محاسبهٔ مساحت داریم:

مساحت داخل یک حلقهٔ بزرگ : $A_۱=۲\times\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۶}}^{+\frac{\pi}{۱۸}}(۱-۲\sin ۳\theta)^۲ d\theta$

$$=\left(۳\theta+\frac{۴}{۳}\cos ۳\theta-\frac{۱}{۳}\sin ۶\theta\right)_{-\frac{\pi}{۶}}^{+\frac{\pi}{۱۸}}=\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مساحت یک حلقهٔ بزرگ : $A_۲=۲\times\frac{۱}{۲}\int_{\frac{\pi}{۱۸}}^{\frac{\pi}{۶}}(۱-۲\sin ۳\theta)^۲ d\theta=\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

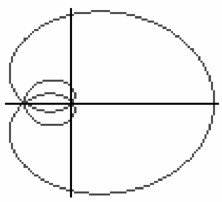
۷-۱۰-۱: منحنی $r=۱+۲\cos\frac{\theta}{۲}$ را رسم کنید و مساحت محدود به دو حلقه از منحنی را که در ناحیهٔ اول قرار دارد را حساب کنید. سپس نقاطی از منحنی را بدست آورید که مماس در آن نقاط موازی محور قائم باشد.

$$\begin{cases}\theta\to-\theta\\ r\to r\end{cases}\Rightarrow \text{محور قطبی محور تقارن است}$$

حل: برای رسم منحنی داریم:

θ	۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	۲π
r	۳	۲.۷	۲.۴	۲	۱	۰	−۰.۴	−۰.۷	−۱

بنابراین شکل منحنی به اینصورت در می آید:



مساحت بین دو منحنی در ناحیهٔ اول عبارتست از:

$$A=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+۲\cos\frac{\theta}{۲})^{۲}d\theta-\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۴\pi}{۳}}^{\frac{۳\pi}{۲}}(۱+۲\cos\frac{\theta}{۲})^{۲}d\theta=\frac{\pi}{۲}+۲+\sqrt{۳}$$

در نقاطی از منحنی که مماس موازی محور yها است، $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ می باشد لذا می توان نوشت:

$$\psi+\theta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\psi=\cot\theta$$

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{۱+\cos\frac{\theta}{۲}}{-\sin\frac{\theta}{۲}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{۲}(۲\cos\frac{\theta}{۲}+۴\cos^{۲}\frac{\theta}{۲})=$$

$$\sin\frac{\theta}{۲}\left[۶\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}+۲\cos\frac{\theta}{۲}-۱\right]=\circ\Rightarrow\sin\frac{\theta}{۲}=\circ\Rightarrow\theta=\circ,\theta=۲\pi$$

$$۶\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}+۲\cos\frac{\theta}{۲}-۱=\circ\Rightarrow\cos\frac{\theta}{۲}=\frac{-۱\mp\sqrt{۷}}{۶}$$

$$\Rightarrow\theta=۲Arc\cos\left(\frac{-۱\pm\sqrt{۷}}{۶}\right)\Rightarrow\begin{cases}۱۲۴.۴۱\times۲=۲۴۸.۸۲^{\circ}\\ ۷۴.\circ۸\times۲=۱۴۸.۱۶^{\circ}\end{cases}$$

با قرار دادن زوایای بدست آمده در معادلهٔ منحنی نقاط فوق بدست می آیند.

۸-۱۰-۱: منحنی $r^{۲}=۱+\sin\theta$ را رسم کنید و مساحت داخل حلقه بزرگ و خارج حلقهٔ کوچک آنرا در ربع اول بدست آورید سپس نقاطی از منحنی را بدست آورید که در آن نقاط مماس بر منحنی موازی محور x ها باشد.

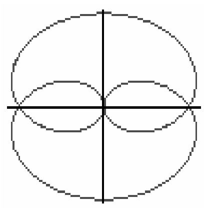
$$\begin{cases}\theta\to\pi-\theta\\ r\to r\end{cases}\Rightarrow$$ محور yها محور تقارن است

نسبت به قطب متقارن است $\Leftarrow$ منحنی تغییر نمی کند $r\to -r$

منحنی نسبت به محور yها متقارن است زیرا با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادلهٔ منحنی تغییری نمی کند. و نسبت به قطب نیز متقارن است زیرا با تبدیل r به $-r$ معادلهٔ منحنی تغییری نمی کند. برای رسم منحنی بطریق نقطه یابی داریم:

θ	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۶}$	$\circ$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$
r	$\circ$	$\pm\circ.۵$	$\pm\circ.۷$	±۱	±۱.۲	±۱.۳	±۱.۴

لذا شکل منحنی بصورت زیر در می آید:



برای محاسبهٔ مساحت خواسته شده می توان نوشت:

$$A=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\sin\theta)\,d\theta-\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\circ}(۱+\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲}[\theta-\cos\theta]_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}-\frac{۱}{۲}[\theta-\cos\theta]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\circ}=۱$$

مماس موازی محور x ها : $\theta+\psi=\pi\Rightarrow\psi=\pi-\theta\Rightarrow\tan\psi=-\tan\theta$

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{r^{۲}}{۲۲'}=\frac{۲(۱+\sin\theta)}{\cos\theta}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow\cos\theta(۲+۳\sin\theta)=\circ\Rightarrow\cos\theta=\circ\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$۲+۳\sin\theta=\circ\Rightarrow\sin\theta=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow\theta=Arc\sin(-\frac{۲}{۳})=-۴۱.۸$$

با قرار دادن مقادیر بدست آمده برای زاویهٔ θ در معادلهٔ منحنی نقاط مورد نظر بدست می آیند.

۹-۱۰-۱: ثابت کنید خط مماس در هر نقطه (r,θ) روی منحنی $r^{۲}=a^{۲}\sin ۲\theta$ با محور قطبی زاویهٔ ۳θ می سازد.

مطابق تعریف ۱-۶-۱ داریم: $\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{r^{۲}}{rr'}=\frac{a^{۲}\sin ۲\theta}{a^{۲}\cos ۲\theta}=\tan ۲\theta\Rightarrow\psi=۲\theta$

بنابراین $\varphi=\psi+\theta=۲\theta+\theta=۳\theta$.

۱۰-۱۰-۱: نشان دهید دو منحنی $r^{n}=a^{n}\sec(n\theta+\alpha)$ و $r^{n}=b^{n}\sec(n\theta+\beta)$ در زاویه ای مستقل از a و b با هم برخورد می کنند.

حل: برای منحنی $r^{n}=a^{n}\sec(n\theta+\alpha)$ داریم:

$$nr'r^{n-۱}=na^{n}\sec(n\theta+\alpha)\tan(n\theta+\alpha)\Rightarrow\frac{nr'r^{n}}{r}=nr^{n}\tan(n\theta+\alpha)$$

$$\Rightarrow \tan\psi_1 = \frac{r}{r'} = \cot(n\theta+\alpha) = \tan(\frac{\pi}{2}-(n\theta+\alpha)) \Rightarrow \psi_1 = \frac{\pi}{2}-(n\theta+\alpha) \quad (1)$$

بطور مشابه برای $r^n = b^n \sec(n\theta+\alpha)$ داریم: $\psi_2 = \frac{\pi}{2}-(n\theta+\alpha) \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow |\psi_1-\psi_2| = |\beta-\alpha|$$

۱-۱۰-۱۱: ثابت کنید دو منحنی $r^n = a^n \cos n\theta$ و $r^n = b^n \sin n\theta$، در نقاط تلاقی بر هم عمودند.

حل: باید ثابت کنیم $\tan\psi_1 \cdot \tan\psi_2 = -1$ بنابراین می توان نوشت:

$$r^n = a^n \cos n\theta \Rightarrow nr'r^{n-1} = -na^n \sin n\theta \Rightarrow nr'\frac{r^n}{r} = -na^n \sin n\theta$$

$$\Rightarrow \frac{r'}{r'} = -\tan n\theta \Rightarrow \tan\psi_1 = -\cot n\theta \qquad (1)$$

بطور مشابه برای منحنی $r^n = b^n \sin n\theta$ داریم: $\tan\psi_2 = \tan n\theta \quad (2)$

در نتیجه از (۱) و (۲) داریم: $\tan\psi_1 \tan\psi_2 = (-\cot n\theta)(\tan n\theta) = -1$

۱-۱۰-۱۲: زاویهٔ بین دو منحنی $r = 3a\cos\theta$ و $r = a(1+\cos\theta)$ را در ربع اول پیدا کنید.

$$3a\cos\theta = a + a\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan\psi_1 = \frac{3a\cos\theta}{-3a\sin\theta} = -\cot\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\psi_2 = \frac{a+a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\tan(\beta) = \tan(\psi_1-\psi_2) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$

۱-۱۰-۱۳: معادلهٔ قطبی خط مماس بر منحنی $r=\theta$ را در نقطهٔ (π,π) بدست آورید.

حل: فرض کنیم معادلهٔ خط مماس بصورت $y - y_0 = m(x-x_0)$ باشد، برای محاسبهٔ ضریب زاویهٔ خط می توان نوشت:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{r'\tan\theta + r}{r' - r\tan\theta} = \frac{\tan\theta+\theta}{1-\theta\tan\theta}\Big|_{(\pi,\pi)} = \pi$$

$$y-\pi=\pi(x-\pi) \quad \text{معادلهٔ دکارتی}$$

با قرار دادن $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، معادلهٔ قطبی خط مماس بصورت زیر در می آید:

$$r=\frac{\pi-\pi^{۲}}{\sin\theta-\pi\cos\theta}$$

۱۴-۱۰-۱: زاویهٔ بین خطوط مماس بر منحنی های $\begin{cases} r_{۱}=\dfrac{۱}{۱+\cos\theta} \\ r_{۲}=\dfrac{۱}{۳(۱-\cos\theta)} \end{cases}$ را در نقاط تقاطع بدست آورید.

حل: برای پیدا کردن نقاط تلاقی دو منحنی: ۱) مبداء را چک می کنیم ۲) حل معادلهٔ $f(\theta)=g(\theta)$ ۳) حل معادلهٔ $f(\theta)=-g(\pi+\theta)$.

۱) واضح است که دو منحنی در مبداء تلاقی نمی کنند، زیرا برای هر دو منحنی همیشه $r\neq ۰$. ۲)

$$f(\theta)=g(\theta)\Rightarrow ۱+\cos\theta=۳(۱-\cos\theta)\Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \theta=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{۳}\\ \theta=\dfrac{۵\pi}{۳}\end{cases}$$

۳)
$$\begin{aligned} & f(\theta)=-g(\pi+\theta)\Rightarrow ۱+\cos\theta=-۳(۱+\cos\theta) \\ & \Rightarrow \cos\theta=-۱\Rightarrow\theta=۲k\pi\pm\pi\Rightarrow\theta=\pi \end{aligned}$$

$$\tan\psi_{۲}=\frac{r_{۲}}{r'_{۲}}=\frac{۱-\cos\theta}{-\sin\theta} \quad \text{و} \quad \tan\psi_{۱}=\frac{r_{۱}}{r'_{۱}}=\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}$$

بنابراین زوایای بین خطوط مماس در نقطهٔ تلاقی دو منحنی عبارتند از:

$$\theta=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\tan\psi_{۱}=\sqrt{۳}\Rightarrow\psi_{۱}=\dfrac{\pi}{۳}\\ \tan\psi_{۲}=-\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\psi_{۲}=-\dfrac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow|\psi_{۱}-\psi_{۲}|=\frac{\pi}{۲}$$

$$\theta=\frac{۵\vartheta}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\tan\psi_{۱}=-\sqrt{۳}\Rightarrow\psi_{۱}=-\dfrac{\pi}{۳}\\ \tan\psi_{۲}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\psi_{۲}=\dfrac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow|\psi_{۱}-\psi_{۲}|=\frac{\pi}{۲}$$

$$\theta=\pi\Rightarrow\begin{cases}\tan\psi_{۱}=۰\Rightarrow\psi_{۱}=۰\\ \tan\psi_{۲}=\infty\Rightarrow\psi_{۲}=\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow|\psi_{۱}-\psi_{۲}|=\frac{\pi}{۲}$$

البته در حالت کلی نیز ثابت می شود که دو منحنی در هر نقطه تلاقی برهم عمودند. زیرا :

$$\tan\psi_1 \cdot \tan\psi_2 = -1$$

۱۵-۱۰-۱ : زائیه ای را بدست آورید که تحت آن زاویه سهمی های زیر در ربع اول همدیگر را قطع کنند. سپس زاویهٔ بین دو منحنی را در نقطهٔ برخورد پیدا کنید.

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{1-\cos\theta} \\ r = \dfrac{1}{1-\sin\theta} \end{cases}$$

$$1-\sin\theta = 1-\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\psi_1 = \frac{r_1}{r'_1} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \psi_1 = 16.32^\circ$$

$$\tan\psi_2 = \frac{r_2}{r'_2} = \frac{1-\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \Rightarrow \psi_2 = 163.42^\circ \Rightarrow |\psi_1 - \psi_2| = 147.35^\circ$$

۱۶-۱۰-۱: نقاطی از منحنی $r = a(1-\cos\theta)$ را بیابید که درآن نقاط مماس بر منحنی (الف) موازی محور x ها (ب) موازی محور y ها باشد.

حل: (الف) برای اینکه مماس بر منحنی موازی محور x ها باشد، باید $\varphi = \pi$. بنابراین:

$$\theta + \psi = \pi \Rightarrow \tan\psi = -\tan\theta$$

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2} = -\tan\theta \Rightarrow \theta = k\pi - \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$$

(ب) برای اینکه مماس بر منحنی موازی محور y ها باشد، باید $\varphi = \frac{\pi}{2}$. بنابراین:

$$\theta + \psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\psi = \cot\theta \Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

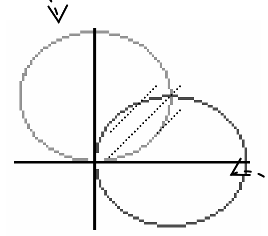
$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

۱۷-۱۰-۱ : مساحت ناحیهٔ مشترک هر جفت از منحنیهای زیر را پیدا کنید:

الف) $\begin{cases} r = 2a\cos\theta \\ r = 2a\sin\theta \end{cases}$ ب) $\begin{cases} r = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ r = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$ ج) $\begin{cases} r = a\sin 2\theta \\ r = a\cos 2\theta \end{cases}$

حل: (الف)

$r = 2a\sin\theta$



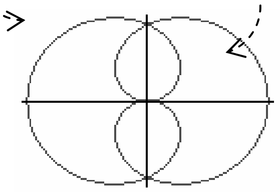
$r = 2a\cos\theta$

$$2a\sin\theta = 2a\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a\sin\theta)^2 d\theta = 2a^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

(ب)

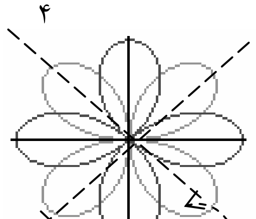
$r = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ $r = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$



$$A = 4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)^2 d\theta = \left(3\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - 4\sin\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - 4$$

(ج)

$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$



$r = a\cos 2\theta$ $r = a\sin 2\theta$

$$a\sin 2\theta = \cos 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8}$$

$$A = 8\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} a^2 \sin^2 2\theta = 2a^2\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

۱۸-۱۰-۱: طول قوس هر یک از منحنی های زیر را پیدا کنید:

الف) $r = 1+\sin\theta$ ب) $r = a\sin^3\frac{\theta}{2}$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

حل: (الف) طبق فرمول طول قوس می توان نوشت:

$$L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta = 2\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

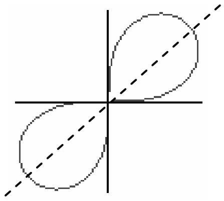
$$= 4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8$$

$$L = \int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right)+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta = a\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta$$

(ب)

$$= a\int_0^{\pi}\frac{1-\cos\frac{2\theta}{3}}{2}\,d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\theta\right]_0^{\pi} = \frac{a}{2}\left[\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

۱۹-۱۰-۱: مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $r^2 = 4a^2\sin 2\theta$ را حول محور yها بدست آورید.



$r^2 = 4a^2\sin 2\theta$

حل: با توجه به شکل منحنی و با توجه به فرمول مساحت سطح داریم:

$$s = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cos\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta \quad \text{و} \quad 2rr' = 8a^2\cos 2\theta \Rightarrow rr' = 4a^2\cos 2\theta$$

بنابراین:

$$s=۲\times۲\pi\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta\sqrt{r^{۴}+(rr')^{۲}}\,d\theta=۴\pi\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta\sqrt{۱۶a^{۴}\sin^{۲}۲\theta+۱۶a^{۴}\cos^{۲}۲\theta}\,d\theta$$

$$=۱۶\pi a^{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}\cos\theta\,d\theta=۱۶\pi a^{۲}(\sin\theta)_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}=۱۶\pi a^{۲}$$

۲۰-۱۰-۱: قسمتی از منحنی $r=e^{-\theta}$ از $\theta=\circ$ تا $\theta=\frac{\pi}{۲}$ حول محور x ها دوران داده شده است، مطلوبست محاسبهٔ مساحت سطح جسم حاصل.

حل: با توجه به فرمول مساحت سطح منحنی حول محور x ها می توان نوشت:

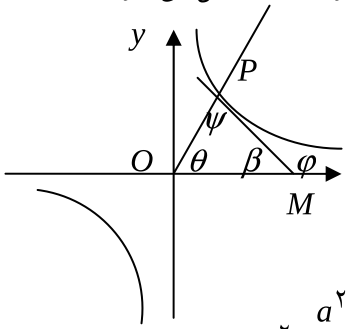
$$s=\int_{\theta_۱}^{\theta_۲}۲\pi r\sin\theta\sqrt{r^{۲}+r'^{۲}}\,d\theta$$

بنابراین:

$$s=\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}۲\pi e^{-\theta}\sin\theta\sqrt{e^{-۲\theta}+e^{-۲\theta}}\,d\theta=۲\sqrt{۲}\pi\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}e^{-۲\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{۲\sqrt{۲}\pi}{۵}(e^{-۲\theta}\cos\theta+۲e^{-۲\theta}\sin\theta)_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}\pi}{۵}(۱-۲e^{-\pi})$$

۲۱-۱۰-۱: اگر p نقطه ای از هذلولی $r^{۲}\sin۲\theta=۲a^{۲}$ باشد، نشان دهید مثلثی که از اضلاع OP و پاره خط مماس بر منحنی در نقطهٔ Pو محور x ها تشکیل می شود، متساوی الساقین است.



حل:

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}=\frac{r^{۲}}{rr'}=\frac{۲\frac{a^{۲}}{\sin۲\theta}}{-۲\frac{a^{۲}\cos۲\theta}{\sin^{۲}۲\theta}}=-\tan۲\theta$$

$$\tan\psi=\tan(\pi-۲\theta)\Rightarrow\psi=\pi-۲\theta$$

$$\phi=\psi+\theta\overset{\psi=\pi-۲\theta}{\Rightarrow}\varphi=\pi-\theta\Rightarrow\beta=\theta\Rightarrow\overset{\Delta}{OPM}$$ متساوی الساقین

۲۲-۱۰-۱: یک منحنی قطبی تمام شعاعهای ثابت θ را در زاویهٔ ثابت α قطع می کند. اگر A مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی و شعاعهای θ_1 و θ_2 که در آن $P_1(r_1,\theta_1)$ و $P_2(r_2,\theta_2)$ مختصات قطبی دو انتهای قوسی از منحنی است که به این اشعه ها می تابد، ثابت کنید مساحت A از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$A=\frac{1}{4}\tan\alpha\,(r_2^2-r_1^2)$$

و همچنین نشان دهید طول قوس بین P_1 و P_2 برابر است با: $s=\sec\alpha\,(r_2-r_1)$

حل: با توجه به صورت مساله در هر نقطه زاویهٔ بین خط مماس و شعاع حامل α می باشد و داریم: $\tan\alpha=\frac{r}{r'}$.

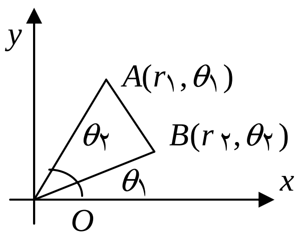
$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}rr'd\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}r\frac{dr}{d\theta}\tan\alpha d\theta$$

$$\frac{1}{2}\tan\alpha\int_{r_1}^{r_2}r\,dr=\frac{1}{2}\tan\alpha(r_2^2-r_1^2)$$

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(r'\tan\alpha)^2+r'^2}\,d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sec\alpha\frac{dr}{d\theta}d\theta=\sec\alpha\int_{r_1}^{r_2}dr=\sec\alpha\,(r_2-r_1)$$

۲۳-۱۰-۱: اگر قطب (نقطهٔ O) و $A(r_1,\theta_1)$ و $B(r_2,\theta_2)$ سه راس مثلث OAB باشند، مساحت مثلث OAB را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل داریم:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|OA\cdot OB\cdot\sin(A\hat{O}B)|=\frac{1}{2}|r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)|$$

۲۴-۱۰-۱: نقاطی بر منحنی $r=1+\cos\theta$ بیابید که از نقطهٔ $A(1,\frac{\pi}{2})$ به فاصلهٔ ۱ باشند.

نقطهٔ $M(1+\cos\theta,\theta)$ را بر منحنی اختیار می کنیم، باید داشته باشیم $AM=1$. بنابراین طبق فرمول فاصله در مختصات قطبی می توان نوشت:

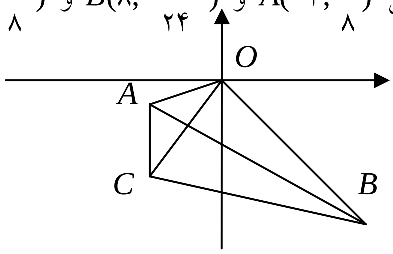
$$AM=\sqrt{۱+(۱+\cos\theta)^۲-۲(۱+\cos\theta)\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)}=۱$$

$$\Rightarrow (۱+\cos\theta)(۱+\cos\theta-۲\sin\theta)=۰\Rightarrow ۱+\cos\theta=۰\Rightarrow\theta=\pi$$

$$۱+\cos\theta-۲\sin\theta=۰\Rightarrow ۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}-۴\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}=۰\Rightarrow\cos\frac{\theta}{۲}(\cos\frac{\theta}{۲}-۲\sin\frac{\theta}{۲})$$

$$=\cos\frac{\theta}{۲}=۰\Rightarrow\theta=\pi\ ,\cos\frac{\theta}{۲}-۲\sin\frac{\theta}{۲}=۰\Rightarrow\tan\frac{\theta}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۲Arc\tan(\frac{۱}{۲})$$

۱-۱۰-۲۵: مساحت مثلث ABC به رئوس $A(-۳,\frac{\pi}{۸})$ و $B(۸,\frac{-۷\pi}{۲۴})$ و $C(۶,-\frac{۵\pi}{۸})$ را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل داریم: $S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OCB}-S_{OAB}$

با استفاده از مسئلهٔ ۲۳-۱۰-۱ داریم:

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}|(-۳)(۸)\sin(\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۲۴})|=۱۲\sin\frac{۵\pi}{۱۲}=۱۲(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴})$$

$$S_{OCB}=\frac{۱}{۲}|(-۶)(-۸)\sin(-\frac{۷\pi}{۲۴}+\frac{۵\pi}{۸})|=۲۴\sin\frac{\pi}{۳}=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{OAC}=\frac{۱}{۲}|(-۳)(۶)\sin(\frac{\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸})|=۹\sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$$

$$S_{ABC}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}+۱۲\sqrt{۳}-۳(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}+۱۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۶}$$

۱-۱۱ نمونه سوالات تستی حل شده

۱-۱۱-۱: معادلهٔ قطبی منحنی $(x^۲+y^۲)^۲=x^۲-y^۲$ در صورتیکه $y^۲\le x^۲$ باشد، برابر است با:

۱) $\cos ۲\theta\ge ۰\ , r=\sqrt{\cos ۲\theta}$ ۲) $r=\sqrt{|\cos ۲\theta|}$

۳) $\sin ۲\theta\ge ۰\ , r=\sqrt{\sin ۲\theta}$ ۴) $r=\sqrt{|\sin ۲\theta|}$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

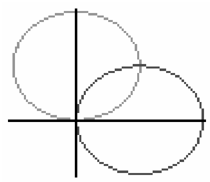
$(r^2)^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta \Rightarrow r^2 = \cos 2\theta \Rightarrow r = \sqrt{\cos 2\theta}, \cos 2\theta \geq 0$ ز

زیرا: $y^2 \leq x^2 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \geq 0 \Rightarrow \cos 2\theta \geq 0$

۲-۱۱-۱: سطح محصور مابین دو منحنی به معادلات $\begin{cases} r = 2a\cos\theta \\ r = 2a\sin\theta \end{cases}$ کدام است؟

۱) $(\frac{\pi}{2} - 1)a^2$ ۲) $(\pi - 1)a^2$ ۳) $(\frac{\pi}{2} + 1)a^2$ ۴) $(\pi + 2)a^2$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.

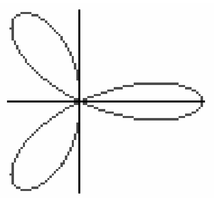


$$A = 2 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a\sin\theta)^2 d\theta = 2a^2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2(\frac{\pi}{2} - 1)$$

۳-۱۱-۱: مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع قطبی $r = \cos 3\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینهٔ ۱ صحیح است.



$$\cos 3\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$A = 6 \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

۴-۱۱-۱: منحنی e با معادلهٔ قطبی $r = 1 + \sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ مفروض است، ضریب زاویهٔ خط مماس بر c بازاء هر θ برابر است با:

۱) $\frac{\cos\theta - \sin 2\theta}{\sin\theta - \cos 2\theta}$ ۲) $\frac{\sin\theta + \cos 2\theta}{-\cos\theta + \sin 2\theta}$ ۳) $\frac{\cos\theta + \sin 2\theta}{-\sin\theta + \cos 2\theta}$ ۴) $\frac{\sin\theta - \cos 2\theta}{\cos 2\theta - \sin 2\theta}$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$m=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta+(۱+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta-(۱+\sin\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta+\sin ۲\theta}{-\sin\theta+\cos ۲\theta}$$

۱-۱۱-۵: فاصلهٔ دو نقطه $A(۳,\frac{\pi}{۶})$ و $B(۴,\frac{۲\pi}{۳})$ برابر است با:

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$AB=\sqrt{۱۶+۹-۲\times۳\times۴\cos(\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶})}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۱-۱۱-۶: طول قوس منحنی $r=a\theta^۲$ در فاصلهٔ $۰\le\theta\le\pi$ برابر است با:

۱) $\frac{a}{۳}\left[(\pi^۲+۴)^{\frac{۱}{۲}}-۸\right]$ ۲) $\frac{a}{۳}\left[(\pi^۲+۴)^{\frac{۳}{۲}}-۸\right]$

۳) $\frac{a}{۲}\left[(\pi^۲+۴)^{\frac{۱}{۲}}-۴\right]$ ۴) $\frac{a}{۲}\left[(\pi^۲+۴)^{\frac{۳}{۲}}-۴\right]$

حل: گزینهٔ ۲ صحیح است.

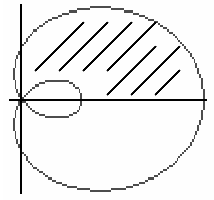
$$L=\int_۰^{\pi}\sqrt{r^۲+r'^۲}\,d\theta=\int_۰^{\pi}(a^۲\theta^۴+۴a^۲\theta^۲)^{\frac{۱}{۲}}d\theta$$

$$=a\int_۰^{\pi}\theta\sqrt{\theta^۲+۴}\,d\theta=\frac{a}{۳}\left[(\theta^۲+۴)^{\frac{۳}{۲}}\right]_۰^{\pi}=\frac{a}{۳}\left[(\pi^۲+۴)^{\frac{۳}{۲}}-۸\right]$$

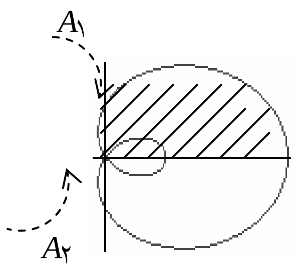
۱-۱۱-۷: نمودار تابع قطبی به معادلهٔ $r=۱+۲\cos\theta$ در زیر رسم شده است، مساحت قسمت هاشور خورده برابر است با:

۱) $\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\frac{۴\pi}{۳}}\frac{۱}{۲}r^۲d\theta$ ۲) $\int_۰^{\pi}\frac{۱}{۲}r^۲d\theta$

۳) $\int_{0}^{\frac{۲\pi}{۳}} \frac{۱}{۲} r^{۲} d\theta - \int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi} \frac{۱}{۲} r^{۲} d\theta$ ۴) $\int_{0}^{\pi} \frac{۱}{۲} r^{۲} d\theta - \int_{\pi}^{\frac{۳\pi}{۲}} \frac{۱}{۲} r^{۲} d\theta$



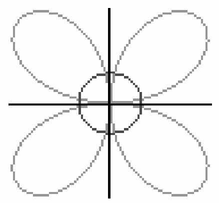
حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.



$$\begin{cases} A_۱ = \frac{۱}{۲} \int_{0}^{\frac{۲\pi}{۳}} r^{۲} d\theta \\ A_۲ = \frac{۱}{۲} \int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi} r^{۲} d\theta \end{cases} \Rightarrow A = A_۱ - A_۲$$

۸-۱۱-۱: منحنی $r = ۴\sin ۲\theta$ و $r = ۱$ چند نقطهٔ تلاقی دارند؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸



حل: گزینهٔ ۴ صحیح است.

۹-۱۱-۱: معادلهٔ قطبی خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,\frac{\pi}{۲})$ و $B(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $r = \frac{۱}{\sin\theta - \cos\theta}$ ۲) $r = \frac{۱}{\sin\theta + \cos\theta}$

۳) $r = \frac{۲}{\sin\theta + \cos\theta}$ ۴) $r = \frac{۲}{\cos\theta - \sin\theta}$

حل: گزینهٔ ۳ صحیح است.

$$r\sin\theta - r_۱\sin\theta_۱ = \frac{r_۲\sin\theta_۲ - r_۱\sin\theta_۱}{r_۲\cos\theta_۲ - r_۱\cos\theta_۱}(r\cos\theta - r_۱\cos\theta_۱)$$

$$r\sin\theta-۲(۱)=\frac{(\sqrt{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-۲(۱)}{(\sqrt{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-۲(۰)}(r\cos\theta-۲(۰))\Rightarrow r=\frac{۲}{\sin\theta+\cos\theta}$$

۱-۱۱-۱۰: زاویهٔ بین دو منحنی $r=-۶\cos\theta$ و $r=۲(۱-\cos\theta)$ در نقطهٔ $(۳,\frac{۲\pi}{۳})$ چند درجه است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

حل: گزینهٔ دو صحیح است.

$$\theta=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow \begin{array}{l}\tan\psi_۱=\frac{r_۱}{r'_۱}=\frac{-۶\cos\theta}{۶\sin\theta}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\psi_۱=\frac{\pi}{۶}\\ \tan\psi_۲=\frac{r_۲}{r'_۲}=\frac{۲(۱-\cos\theta)}{۲\sin\theta}=\sqrt{۳}\Rightarrow\psi_۲=\frac{\pi}{۳}\end{array}$$

۱-۱۲ نمونه سولات تشریحی

۱-۱۲-۱: معادلات قطبی هر یک از منحنیهای زیر را پیدا کرده و سپس آنها را رسم کنید.

الف) $(x^۲+y^۲)^۲=x^۲-y^۲$ ب) $(x^۲+y^۲)^۳=۴x^۲y^۲$

ج) $(x^۲+y^۲)^۲+۲ax(x^۲+y^۲)-a^۲y^۲=۰$ د) $y^۲=۴ax+۴a^۲$

۱-۱۲-۲: معدلات دکارتی هر یک از منحنیهای قطبی زیر را مشخص کرده و سپس آنها را رسم کنید.

الف) $r=۴\cos\theta$ ب) $r=\frac{۴}{۲\cos\theta-\sin\theta}$

ج) $r\cos(\theta-\frac{\pi}{۳})=۳$ د) $r^۲\cos۲\theta=a^۲$

ه) $r^۲=۴\cos۲\theta$ و) $r=\frac{۴}{۳-۲\cos\theta}$

۱-۱۲-۳: محورهای تقارن هر یک از منحنیهای قطبی زیر را پیدا کرده و سپس آنها را رسم کنید.

الف) $r=۱+۳\cos\theta$ ب) $r=۹\sin^۲\frac{\theta}{۲}$ ج) $r=۱+۲\cos۲\theta$

د) $r=۱+۲\sin۲\theta$ ه) $r=۱+\sin\frac{\theta}{۲}$ و) $r=۱-\tan^۲\theta$

ز) $r=۱+۲\sin ۳\theta$ ح) $r^{۲}=۱+\cos\theta$ ط) $r=e^{\theta}$

ی) $r=a\cos ۴\theta$ ک) $r^{۲}=۲a^{۲}\sin ۲\theta$ ل) $r=\sqrt{|\cos\theta|}$

م) $r=\sin\theta\cos ۲\theta$ ن) $r=۴\sin^{۲}\theta-۱$ ص) $r=۳+۲\cos ۴\theta$

ع) $r=\sin\frac{\theta}{۲}$

۱-۱۲-۴: نقاط تلاقی هر جفت از منحنیهای قطبی زیر را بدست آورید.

الف) $\begin{cases} r=a \\ r=a(۱-\sin\theta) \end{cases}$ ب) $\begin{cases} r=a(۱+\cos ۲\theta) \\ r=a\cos ۲\theta \end{cases}$

ج) $\begin{cases} r=\sqrt{۲}\,a\,coa۲\theta \\ r=a \end{cases}$ د) $\begin{cases} r^{۲}=۴\cos ۲\theta \\ r^{۲}=\sec ۲\theta \end{cases}$

۱-۱۲-۵: مساحت کل محصور به هر یک ار منحنیهای زیر را بدست آورید.

الف) $r=a\,(۱+۲\cos ۲\theta)$ ب) $r=a\,(۲-\sin\theta)$

ج) $r=۲a\sin ۳\theta$ د) $r=\sin\frac{\theta}{۲}$

ه) $r=a\cos^{۳}\frac{\theta}{۳}$ و) $r^{۲}=۲a^{۲}\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}$

ز) $r^{۲}=۲a^{۲}\sin ۳\theta$ ح) $r^{۲}=a^{۲}\cos ۲\theta$

۱-۱۲-۶: مساحت سطح داخل منحنی $r^{۲}=۴a^{۲}\cos ۲\theta$ و خارج منحنی $r=a\cos ۲\theta$ را بدست آورید.

۱-۱۲-۷: مساحت سطح محصور بین منحنیهای زیر را در ربع اول بدست آورید.

الف) $\begin{cases} r=\sin ۲\theta \\ r=۱+\cos\theta \end{cases}$ ب) $\begin{cases} r=a(۱+\cos\theta) \\ r=۳a\cos\theta \end{cases}$

۱-۱۲-۸: مساحت ناحیهٔ مشترک هر جفت از منحنیهای زیر را بیابید.

الف) $\begin{cases} r=۲(۱+\cos\theta) \\ r^{۲}=۲\cos\theta \end{cases}$ ب) $\begin{cases} r=۳\sin ۲\theta \\ r=۳\cos ۲\theta \end{cases}$

۱-۱۲-۹: شیب خط مماس بر منحنی قطبی زیر را در نقاط داده شده بدست آورید.

الف) $p(\frac{۲}{۳},\frac{\pi}{۳}),\ r=\frac{۱}{۱+\cos\theta}$ ب) $p(۱,\frac{۵\pi}{۳}),\ r=۶\cos\theta-۲$

۱-۱۲-۱۰: معادلهٔ قطبی خط مماس بر منحنی $r=-۶\sin\theta$ را در نقطهٔ $(۶,\frac{۳\pi}{۲})$ بدست آورید.

۱-۱۲-۱۱: معادلهٔ قطبی خطی را بیابید که بر نقاط $(a,۰)$ و $(b,\frac{\pi}{۲})$ می گذرد.

۱-۱۲-۱۲: منحنی $r^۲=۲\csc ۲\theta$ مفروض است، الف) منحنی را رسم کنید.ب) معادلهٔ منحنی را در مختصات دکارتی بنویسید. ج) زاویهٔ بین این منحنی و خط $\theta=\frac{\pi}{۴}$ را بیابید.

۱-۱۲-۱۳: برای حلزونی هذلولوی $r\theta=a$ نشان دهید وقتی $\theta=۱$، $\psi=۱۳۵^\circ$ و وقتی حلزونی حول مبداء حلقه می زند، $\psi\to ۹۰^\circ$. زاویهٔ ψ را برای $\theta=۱$ بیابید.

۱-۱۲-۱۴: زاویهٔ بین خطوط مماس بر هر یک از منحنیهای زیر را در نقاط تقاطع بدست آورید.

الف) $\begin{cases} r=-۶\cos\theta \\ r=۲(۱-\cos\theta) \end{cases}$ ب) $\begin{cases} r=۱+۲\sin\frac{\theta}{۲} \\ r=۱+۲\cos\frac{\theta}{۲} \end{cases}$

۱-۱۲-۱۵: نشان دهید که سهمیهای زیر در نقاط برخوردشان بر هم عمودند.

الف) $\begin{cases} r=\dfrac{a}{۱+\cos\theta} \\ r=\dfrac{b}{۱-\cos\theta} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} r=\dfrac{b}{۱-\sin\theta} \\ r=\dfrac{a}{۱+\sin\theta} \end{cases}$

۱-۱۲-۱۶: معادلهٔ هر خط مماس در قطب بر معادلات زیر را بیابید.

الف) $r=۴\cos ۲\theta$ ب) $r=۳(۱-\cos\theta)$

۱-۱۲-۱۷: نقاطی از هر یک از منحنیهای زیر را بیابید که در آن نقاط مماس موازی الف) محور x ها ب) محور yها ج) محور نیمساز ربع اول و سوم باشد.

الف) $r=۱+۳\cos\theta$ ب) $r=۲\sec\theta-۱$

ج) $r=۲\sin\theta-۱$ د) $r^۲=۱+\cos\theta$

۱-۱۲-۱۸: طول قوس هر یک از منحنی های زیر را بدست آورید.

الف) $r=a\cos^۲\frac{\theta}{۲}$ $(۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲})$ ب) $r=a\cos^۳\frac{\theta}{۳}$ $(۰\le\theta\le\pi)$

ج) $r=a\theta^۲$ $(۰\le\theta\le\pi)$ د) $r=\dfrac{۲}{۳+\sin\theta}$ $(۰\le\theta\le ۲\pi)$

۱۹-۱۲-۱: مساحت سطح حادث از دوران منحنی های زیر را الف) حول محور x ها، ب) حول محور y ها بدست آورید.

الف) $r = a(1-\sin\theta)$ ب) $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$

۲۰-۱۲-۱: مرکز ثقل دلنمای $r = a(1+\cos\theta)$ را بدست آورید.

۱۳-۱ نمونه سوالات تستی

۱-۱۳-۱: دو نقطهٔ $A(4,-\frac{\pi}{6})$ و $B(4,\frac{\pi}{3})$ مفروضند، اگر M وسط AB باشد مختصات M کدام است؟

۱) $(2,\frac{\pi}{12})$ ۲) $(3,\frac{\pi}{12})$ ۳) $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{12})$ ۴) $(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{12})$

۲-۱۳-۱: سه نقطهٔ $A(2,\frac{\pi}{6})$ و $B(-2,-\frac{5\pi}{6})$ و $C(-2,\frac{7\pi}{6})$ مفروضند، کدام گزاره درست است؟

۱) سه نقطه بر یک خط راست واقعند ۲) قطب وسط AB است

۳) سه نقطه بر هم منطبقند ۴) سه نقطه غیر واقع به یک خط راستند

۳-۱۳-۱: $A(3,\frac{\pi}{8})$ و $B(4,-\frac{3\pi}{8})$ و $O(0,0)$ سه راس یک مثلثند، مساحت این مثلث برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۴-۱۳-۱: معادلهٔ قرینهٔ نمودار به معادلهٔ $r = \cos\theta - \sin\theta$ نسبت به محور قطبی کدام است؟

۱) $r = \sin\theta - \cos\theta$ ۲) $r = \cos\theta + \sin\theta$

۳) $r = -\cos\theta - \sin\theta$ ۴) $r = \cos\theta - \sin\theta$

۵-۱۳-۱: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(6,\frac{\pi}{5})$ و $B(8,\frac{8\pi}{15})$ برابر است با:

۱) $2\sqrt{34}$ ۲) $2\sqrt{17}$ ۳) $2\sqrt{14}$ ۴) $2\sqrt{13}$

۶-۱۳-۱: معادلهٔ قطبی $r^2 = 2(1+\cos 2\theta)$ مفروض است، معادلهٔ دکارتی آن کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 = 4x$ ۲) $(x^2+y^2)^2 = 4x$

۳) $(x^2+y^2)^2 = 4x^2$ ۴) $(x^2+y^2)^2 = 4y^2$

۷-۱۳-۱: معادلهٔ دکارتی $x^4 + y^4 + x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$ مفروض است، معادلهٔ قطبی آن کدام است؟

۱) $۴r^۲ = \sin^۲ ۲\theta$ ۲) $۴r^۲ = \cos^۲ ۲\theta$ ۳) $۴r^۲ = \sin^۲ \theta$ ۴) $۴r^۲ = \cos^۲ \theta$

۱-۱۳-۸: دو نمودار قطبی $r = ۲\cos\theta$ و $r = ۲(۱+\cos\theta)$ چند نقطهٔ تلاقی دارند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) تلاقی ندارند

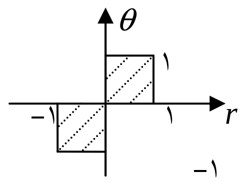
۱-۱۳-۹: مساحت ناحیظ محدود به نمودار تابع قطبی به معادلهٔ $r = ۲(۱+\cos\theta)$ کدام است؟

۱) ۴π ۲) ۵π ۳) ۶π ۴) ۷π

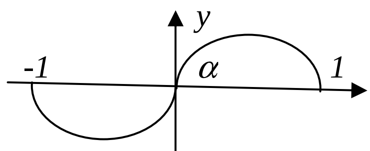
۱-۱۳-۱۰: طول قوس قسمتی از خم $r = ۱+\cos\theta$ بین $\theta = ۰$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

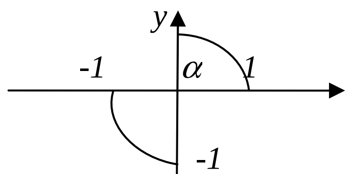
۱-۱۳-۱۱: تحت نگاشت قطبی $(r,\theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ، ناحیهٔ زیر به کدام ناحیه تصویر می شود؟



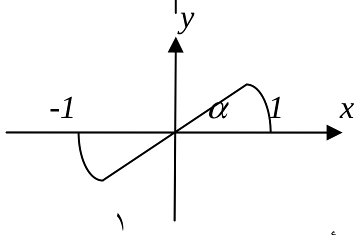
۱)



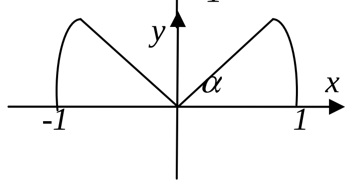
۲)



۳)



۴)



۱-۱۳-۱۲: زاویهٔ بین دو منحنی $r = \frac{۱}{۱-\sin\theta}$ و $r = \frac{۱}{۱+\sin\theta}$ چند درجه است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۱-۱۳-۱۳: شیب خط مماس بر منحنی $r = \frac{۱}{۲}+\sin\theta$ در نقطهٔ $(۱,\frac{\pi}{۶})$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱-۱۳-۱۴: مساحت بین دو منحنی $r = ۲+\sin\theta$ و $r = ۳+\sin\theta$ برابر است با:

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۱-۱۳-۱۵: کدام نقطه، مماس بر منحنی $r = 2\sec\theta - 1$ موازی محور yها است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱-۱۳-۱۶: معادلهٔ خط مماس در قطب بر منحنی $r = 3(1-\cos\theta)$ کدام است؟

۱) $\theta = \frac{\pi}{3}$ ۲) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ۳) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ۴) $\theta = \frac{\pi}{6}$

۱-۱۳-۱۷: مساحت سطح حادث از دوران منحنی $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ حول محور yها کدام است؟

۱) $8\pi a^2$ ۲) $4\sqrt{2}\pi a^2$ ۳) $2\pi a^2$ ۴) $16\sqrt{2}\pi a^2$

۱-۱۳-۱۸: معادلهٔ دکارتی خط مماس بر منحنی $r = -6\sin\theta$ در نقطهٔ $(6, \frac{3\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $x = \frac{3\pi}{2}$ ۲) $y = \frac{3\pi}{2}$ ۳) $x = \frac{\pi}{2}$ ۴) $y = \frac{\pi}{2}$

۱-۱۳-۱۹: معادلهٔ دکارتی خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(1,0)$ و $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $x - y = 1$ ۲) $x + y = 2$ ۳) $x + y = 1$ ۴) $x + y = \frac{1}{2}$

۱-۱۳-۲۰: مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع قطبی به معادلهٔ $r^2 = 5\cos 2\theta$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

فصل دوم

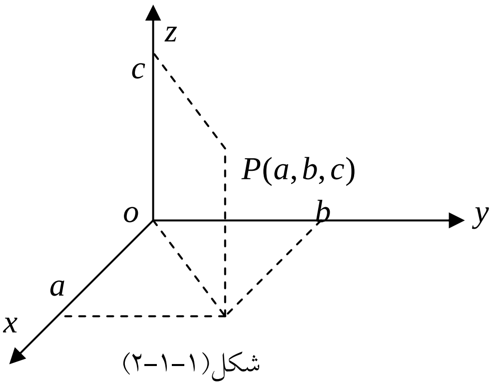
رویه های درجه دوم

در فصل گذشته با دستگاه مختصات دو بعدی در صفحه و نمایش منحنی های قطبی در آن آشنا شدیم. در این فصل به معرفی دستگاه مختصات سه بعدی در فضا و نمایش رویه ها در آن خواهیم پرداخت و سپس در ادامه به تعریف دو دستگاه مختصات سه بعدی مهم یعنی مختصات استوانه ای و مختصات کروی می پردازیم. در ابتدا لازم است معرفی مختصری ار دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی در فضا داشته باشیم.

۱-۲ دستگاه مختصات سه بعدی

دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی تشکیل شده است از سه محور دو به دو عمود بر هم که معمولاً نقطهٔ تقاطع آنها را o یعنی مبداء مختصات می گوییم. و سه محور را به ترتیب ox، oy و oz می نامیم. نحوهٔ قرار گرفتن این سه محور تحت قانون دست راست که آنرا بیان خواهیم کرد، صورت گرفته است و چنین دستگاه مختصاتی را دستگاه مختصات راستگرد می نامیم. اگر سه انگشت دست راست (انگشت شست، انگشت نشان و انگشت سوم) را بصورت دو به دو عمود بر هم قرار دهیم بطوریکه کف دست بصورت افقی و به سمت بالا باشد و انگشتان شست و نشان نیز بصورت افقی و عمود بر هم قرار داشته باشد و انگشت سوم نیز عمود بر هر دو انگشت شست و نشان بطرف بالا قرار گیرد، آنگاه با نامگذاری انگشت شست بعنوان محور ox، انگشت نشان بعنوان محور oy و انگشت سوم بعنوان محور oz یک دستگاه مختصات سه بعدی حاصل می شود که آنرا دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی می نامیم. مهمترین کاربرد این نوع دستگاه مختصات نمایش اجسام سه بعدی در آن می باشد.

۱-۱-۲ تعریف: نمایش یک نقطه در مختصات دکارتی سه بعدی بصورت $P(a,b,c)$ می باشد که در آن مقادیر b،a و c بترتیب تصویر نقطهٔ P روی محور x، محور y و محور z می باشد. که در شکل زیر نمایش داده شده است:

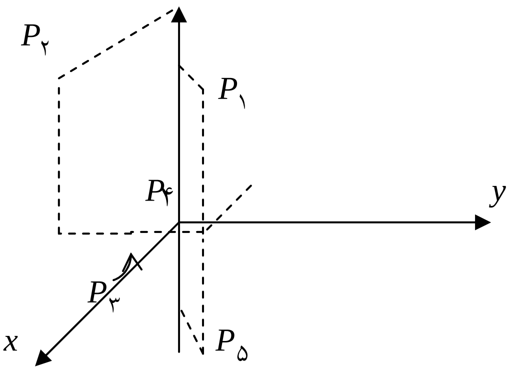


شکل(۱-۱-۲)

توجه داریم که هر سه تایی مرتب (a,b,c) از اعداد حقیقی یک نقطه را در این دستگاه مختصات مشخص می کند و نیز برای هر نقطه از این دستگاه سه مقدار حقیقی aو b و c بدست می آید که (a,b,c) نمایش آن نقطه می باشد. بنابراین تناظر یک به یک میان نقاط دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی و نقاط فضای $\mathbb{R}^{۳}$ وجود دارد. لذا با توجه به این تناظر می توان به این نکته اشاره کرد که نمایش هر نقطه در دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی منحصر بفرد می باشد و هر نقطه فقط و فقط دارای یک نمایش می باشد.

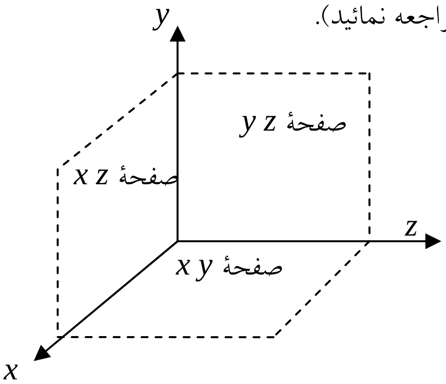
۲-۱-۲ مثال: هر کدام از نقاط $P_۱\,(۱,۱,۲)$، $P_۲\,(۱,-۱,۳)$، $P_۳\,(۱,۰,۰)$، $P_۴\,(۰,۰,۰)$ و $P_۵\,(۱,۱,-۲)$ را در دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی رسم کنید.

حل: هر کدام از نقاط در شکل مقابل رسم شده اند:



شکل (۲-۱-۲)

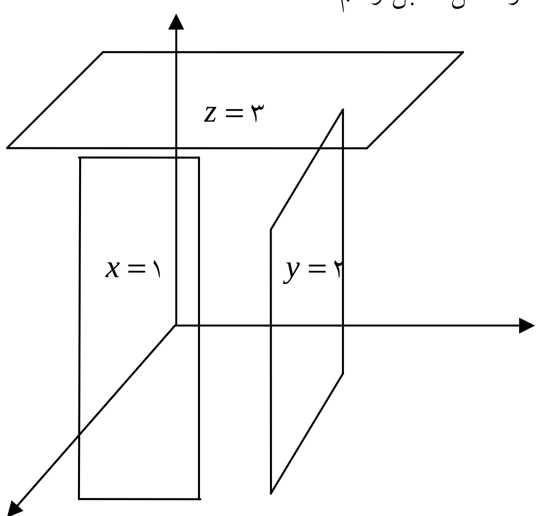
۳-۱-۲ تعریف: معمولاً دستگاه مختصات قطبی سه بعدی را بطور مختصر بصورت دستگاه $x\,y\,z$ بیان می کنند و توجه داریم که در این دستگاه سه صفحهٔ عمود بر هم وجود دارد که عبارتند از: صفحهٔ $x\,y$ صفحهٔ $x\,z$ و صفحهٔ $y\,z$. صفحهٔ $x\,y$ صفحه ایست که شامل محورهای ox و oy می باشد، صفحهٔ $x\,z$ صفحه ایست که شامل محورهای ox و oz می باشد و نیز صفحهٔ $y\,z$ شامل محور های oz و oy می باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است. توجه داریم معادلات صفحات $x\,y$، $y\,z$ و $x\,z$ را می توان بترتیب بصورت $z=\circ$، $x=\circ$ و $y=\circ$ بیان نمود (جهت اطلاعات بیشتر از معادلات کلی خط و صفحه به فصل سوم مراجعه نمائید).



شکل (۳-۱-۲)

۴-۱-۲ مثال: هر کدام از صفحات $x=۱$، $y=۲$ و $z=۳$ را در دستگاه مختصات $x\,y\,z$ رسم کنید.

حل: هر یک از صفحات در شکل مقابل رسم شده اند:

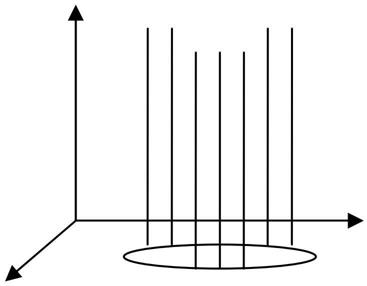


شکل(۴-۱-۲)

۲-۲ رویه های استوانه ای

در این قسمت به تعریف یک رویهٔ استوانه ای می پردازیم و مهمترین آنها را معرفی می کنیم.

۲-۲-۱ تعریف: فرض کنیم $f(x,y)=0$ معادلهٔ یک منحنی (در صفحهٔ xy) باشد، چنانچه خطهٔ به موازات محور z روی این منحنی حرکت دهیم، از این حرکت رویه ای پدید می آید که آنرا در حالت کلی رویهٔ استوانه ای می نامیم (مطابق شکل ۲-۲-۱).

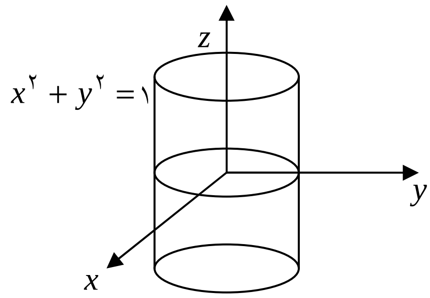


۲-۲-۲ تذکر: برای رویهٔ استوانه ای فوق یعنی رویهٔ $f(x,y)=0$ می‌توان جهت خطوط به موازات محور z ها را بعنوان جهت این رویه در نظر گرفت لذا رویه استوانه ای $f(x,y)=0$ در جهت محور z ها است.

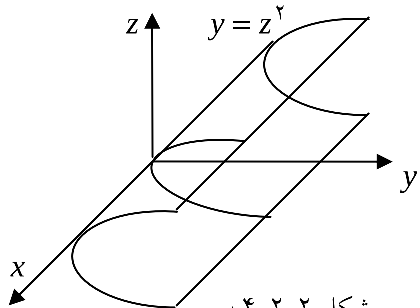
۲-۲-۳ تذکر: می‌توان یک رویهٔ استوانه ای را بوسیلهٔ منحنی $g(x,z)=0$ در صفحهٔ xz و حرکت خطی به موازات محور y بوجود آورده لذا بنا به تذکر ۲-۲-۲، جهت این رویه استوانه ای در جهت محور y ها است بطور مشابه رویهٔ استوانه ای $h(y,z)=0$ در جهت محور z ها می‌باشد.

۲-۲-۴ مثال: رویه های استوانه ای (الف) $x^2+y^2=1$ و (ب) $y=z^2$ را رسم کنید.

حل: الف) رویهٔ استوانه ای از حرکت خطی به موازات محور z ها روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ حاصل شده است لذا رسم این رویه بصورت شکل زیر می‌باشد:



شکل ۲-۲-۴ الف



شکل ۲-۲-۴ ب

ب) رویهٔ استوانه ای $y=z^{۲}$ از حرکت خطی به موازات محور x ها روط سهمی $y=z^{۲}$ در صفحهٔ yz حاصل شده است پس رسم این رویهٔ استوانه ای بصورت بالا است. توجه داریم که رویهٔ استوانه ای $x^{۲}+y^{۲}=۱$ در جهت محور z ها و رویهٔ استوانه ای $y=z^{۲}$ در جهت محور x ها می‌باشد.

۲-۲-۵ تعریف: فرض کنیم C یک منحنی در صفحه و L خطی عمود بر این صفحه باشد. همانگونه که در فوق بیان شد، از حرکت خطهٔ به موازات L روی منحنی C یک رویهٔ استوانه ای حاصل می‌شود. در این رویهٔ استوانه ای منحنی C را منحنی هادی استوانه و خط L را مولد استوانه (یا جهت استوانه) می‌گوییم.

۲-۲-۶ رویه های استوانه ای معروف: بر اساس اینکه منحنی هادی یک رویهٔ استوانه ای یکی از منحنی های معروف دایره، بیضی، سهمی و هذلولی باشد، رویهٔ استوانه ای حاصل را بترتیب یک استوانهٔ دوار، استوانهٔ بیضوی، استوانهٔ سهموی و استوانهٔ هذلولوی می‌گوئیم.

توجه داریم که این استوانه ها یک تعداد محدودی از استوانه های بیشماری است که بر اساس منحنی های هادی آنها حاصل گردیده اند.

۲-۲-۷ مثال: رویه های استوانه ای زیر همگی رویه های استوانه ای دوار می‌باشند. آنها را رسم کنید.

الف) $(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$ ب) $x^{۲}+z^{۲}=۴$

ج) $(y-۲)^{۲}+z^{۲}=۱$ د) $x^{۲}+۲x+z^{۲}-۲z=۲$

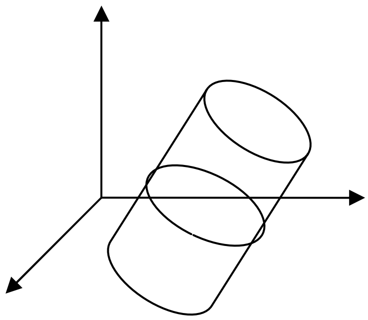
حل: الف) یک استوانه دوار با منحنی هادی دایره ای به مرکز $(۲,۰)$ و شعاع ۱ در صفحهٔ yz می باشد و در جهت محور x ها است (شکل ۷-۲-۲الف)

ب) یک استوانهٔ دوار با منحنی هادی دایره ای به مرکز مبداء و شعاع ۲ در صفحهٔ xz می باشد و در جهت محور y ها است (شکل ۷-۲-۲ب)

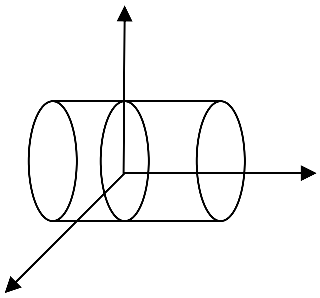
ج) یک استوانهٔ دوار با منحنی هادی دایره ای به مرکز $(۱,۱)$ و شعاع ۱ در صفحهٔ xy می‌باشد و در جهت محور z ها است (شکل ۷-۲-۲ ج)

د) داریم $$x^{۲}+۲x+z^{۲}-۲z=(x+۱)^{۲}-۱+(z-۱)^{۲}-۱=۲$$

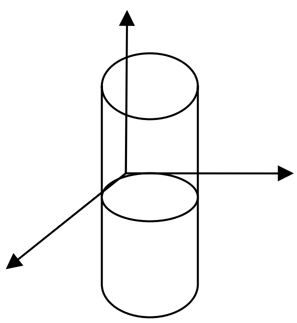
درنتیجه $(x+۱)^{۲}+(z-۱)^{۲}=۴$. پس یک استوانهٔ دوار با منحنی هادی دایره ای به مرکز $(-۱,۱)$ و شعاع ۲ می‌باشد و جهت آن محور y ها است (شکل ۷-۲-۲ د)



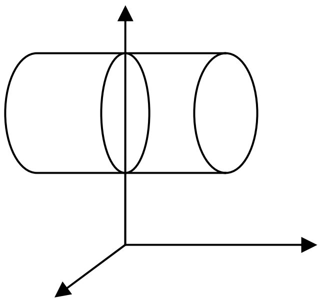
شکل (۷–۲–۲ الف)



شکل (۷–۲–۲ ب)



شکل (۷–۲–۲ ج)



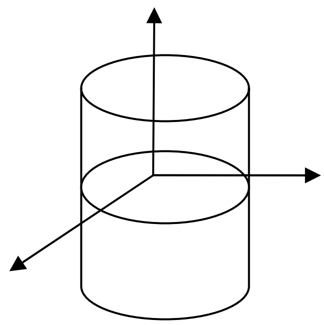
شکل (۷–۲–۲ د)

۲–۲–۸ مثال: هر یک از رویه های استوانه ای بیضوی زطر را رسم کنید:

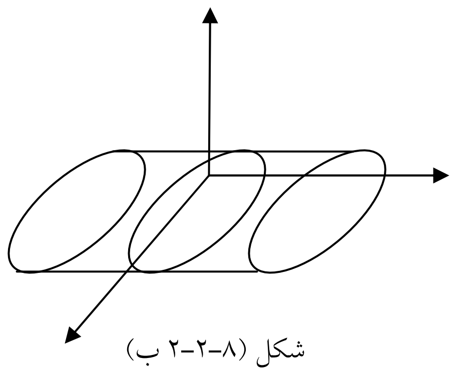
الف) $\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{9}=1$ ب) $(x-1)^{2}+2z^{2}=4$

حل: الف) یک استوانهٔ بیضوی با منحنی هادی بیضی به مرکز $(0,0)$ و اقطار ۲ و ۳ در صفحهٔ xy می باشد و جهت آن محور z ها است (شکل ۸–۲–۲ الف)

ب) یک استوانهٔ بیضوی با منحنی هادی بیضی به معادلهٔ $\frac{(x-1)^{2}}{4}+\frac{z^{2}}{2}=1$ می‌باشد که یک بیضی به مرکز $(1,0)$ و اقطار ۲ و $\sqrt{2}$ در صفحهٔ xz می‌باشد و جهت آن محور y ها است (شکل ۸–۲–۲ ب)



شکل (۸-۲-۲ الف)



شکل (۸-۲-۲ ب)

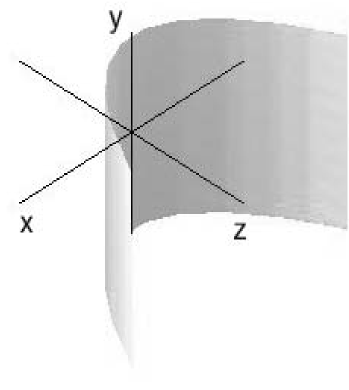
۹-۲-۲ مثال: هر یک از رویه های استوانه ای سهموی زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^{۲}$ ب) $z - ۱ = (y - ۱)^{۲}$ ج) $x = -z^{۲}$

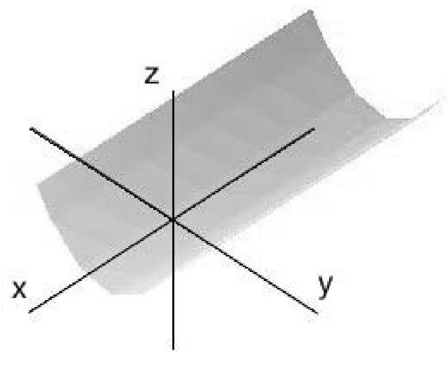
حل: الف) یک استوانهٔ سهموی با منحنی هادی سهمی $y = x^{۲}$ در صفحهٔ xy می باشد و جهت آن محور z ها است (شکل ۹-۲-۲ الف).

ب) یک استوانهٔ سهموی با منحنی هادی سهمی $z - ۱ = (y - ۱)^{۲}$ در صفحهٔ yz (سهمی به راس $(۱,۱)$ و جهت تقعر به طرف مثبت محور z ها) می‌باشد و جهت استوانه در جهت محور x ها است (شکل ۹-۲-۲ ب).

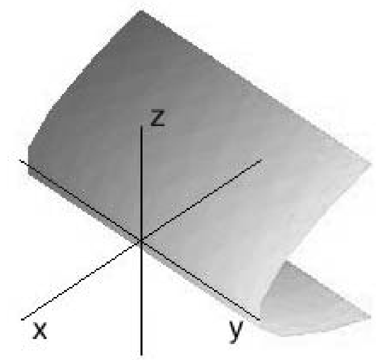
ج) یک استوانهٔ سهموی با منحنی هادی سهمی $x = -z^{۲}$ می‌باشد و جهت استوانه محور yها است (شکل ۹-۲-۲ ج).



شکل (۹-۲-۲ الف)



شکل (۹-۲-۲ ب)



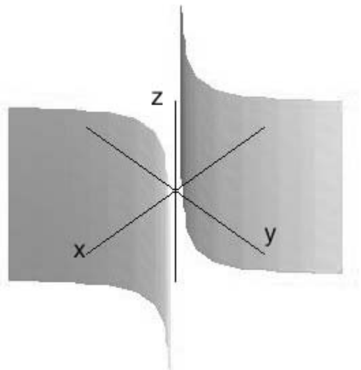
شکل (۹-۲-۲ ج)

۱۰-۲-۲ مثال: رویه های استوانه ای هذلولوی زیر را رسم کنید.

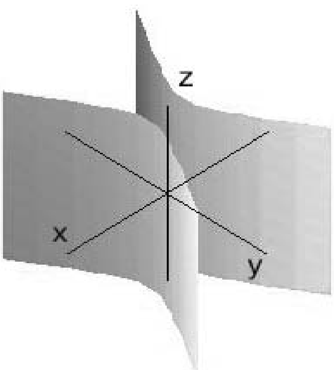
الف) $x^۲ - y^۲ = ۱$ ب) $\frac{y^۲}{۴} - \frac{z^۲}{۹} = ۱$

حل: الف) یک استوانهٔ هذلولوی با منحنی هادی هذلولوی $x^۲ - y^۲ = ۱$ در صفحهٔ xy می‌باشد و جهت آن محور z ها است (شکل ۱۰-۲-۲ الف).

ب) یک استوانهٔ هذلولوی با منحنی هادی هذلولوی $\frac{y^۲}{۴} - \frac{z^۲}{۹} = ۱$ (یک هذلولی با جهت تقعر به طرف محور y ها) در صفحهٔ yz می‌باشد و جهت استوانه در جهت محور x ها است (شکل ۱۰-۲-۲ ب)



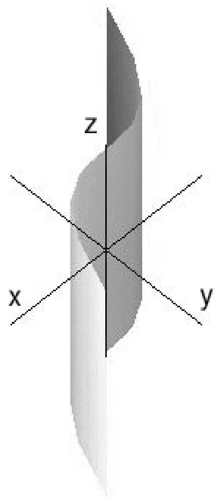
شکل (۱۰-۲-۲ ب)



شکل (۱۰-۲-۲ الف)

۱۱-۲-۲ مثال: رویهٔ استوانه ای $y = x^۳$ را رسم کنید.

حل: اگر منحنی $y = x^3$ را در صفحهٔ$0020y$ رسم کنیم و سپس خطی به موازات محور z ها را روی آن حرکت دهیم رویهٔ استوانه ای حاصل می‌شود. توجه داریم که جهت این استوانه به طرف محور z ها است.



شکل (۱۱-۲-۲)

۲-۳ رویه های درجه دوم

همانطوریکه در قسمت قبل ملاحظه نمودیم در یک رویهٔ استوانه ای تنها دو متغیر حضور دارد و همیشه یکی از متغیرهای x یا y یا z در معادله حضور ندارد که همین متغیر ظاهر نشده به عنوان جهت استوانه در نظر گرفته می‌شود. اکنون می‌خواهیم به رویه های دیگر اشاره نمائیم که در معادلهٔ آن هر سه متغیر های x و y و z حضور دارند. توجه داریم معادلهٔ یک رویه در حالت کلی بصورت $F(x, y, z) = 0$ می‌باشد که چنانچه یکی از متغیرها در این رویه ظاهر نشود یک رویهٔ استوانه ای است. ساده ترین رویه ای که در آن سه متغیر x و y و z ظاهر شده باشد، معادلهٔ یک صفحه است. مانند صفحهٔ $2x + y + 4z + 5 = 0$ که یک صفحهٔ غیر افقی و غیر قائم می‌باشد. رویه های بسیاری می توان نشان داد که در آنها سه متغیر x و y و z حضور دارند. از این میان می‌خواهیم به دستهٔ خاصی از این رویه ها تحت عنوان رویه های درجه دوم اشاره نمائیم.

۱-۳-۲ تعریف: فرض کنیم $F(x,y,z)=0$ معادلهٔ یک رویه باشد، که در آن هر سه متغیر های x و y و z حضور دارند. اگر درجهٔ حداقل یکی از این متغیرها برابر ۲ باشد، آنگاه رویهٔ درجه دوم نامیده می‌شود که مهمترین آنها دارای فرم کلی بصورت زیر می‌باشند.

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

که در آن A، B، C، D، E، F و G مقادیر ثابت هستند و حداقل یکی از مقادیر A و B و C غیر صفر می‌باشند.

در این قسمت به معرفی معروفترین رویه های درجه دوم خواهیم پرداخت و جهت رسم هر یک سعی خواهیم کرد که با بدت آوردن سطح مقطعهای افقی و نیز عمودی بتوانیم آنها را بطور تقریبی توصیف نمائیم.

۲-۳-۲ رویهٔ کره: معادلهٔ یک کره در حالت کلی بصورت

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

می‌باشد که (x_0,y_0,z_0) مرکز کره و a شعاع آن می‌باشد. در حالت خاص که مبداء مختصات مرکز آن باشد، معادله بصورت $x^2+y^2+z^2=a^2$ حاصل می‌شود.

چنانچه سطح مقطعهای افقی را درنظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=a^2$ (یک دایرهٔ افقی به شعاع a)

$z=\pm\frac{a}{2} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{3a^2}{4}$ (یک دایرهٔ افقی به شعاع $\frac{a\sqrt{3}}{2}$)

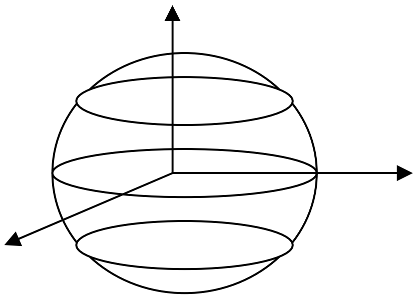
$z=\pm a \Rightarrow x^2+y^2=0$ (نقاط $(0,0,a)$ و $(0,0,-a)$)

$z=k\,, k>a \Rightarrow x^2+y^2=a^2-k^2<0$ (جواب ندارد)

$x=0 \Rightarrow y^2+z^2=a^2$ (یک دایرهٔ عمودی به شعاع a)

$y=0 \Rightarrow x^2+z^2=a^2$ (یک دایرهٔ عمودی به شعاع a)

از سطح مقطعهای فوق می‌توان رویهٔ کره را بصورت دقیق تر توصیف نمود که در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل (۲-۳-۲)

جهت سهولت در رسم رویه های درجه دوم همواره مرکز رویه را مبداء مختصات فرض می‌کنیم و اگر $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بعنوان مرکز باشد، کافی است تبدیل x و y و z را به $x-x_\circ$، $y-y_\circ$ و $z-z_\circ$ در معادلهٔ رویه انجام دهیم و شکل آن نیز بوسیلهٔ انتقال دستگاه مختصات حاصل گردد.

۲-۳-۳ رویهٔ بیضیگون $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$: برای رسم این رویه ابتدا سطح مقطعهای افقی و نیز سطح مقطعهای عمودی را در نظر می‌گیریم لذا داریم:

$$z=\circ \Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$ (بیضی افقی به اقطار a و b)

$$z=\pm\frac{c}{۲} \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۳a^۲}{۴}}+\frac{y^۲}{\frac{۳b^۲}{۴}}=۱$$ (بیضی افقی به اقطار $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{b\sqrt{۳}}{۲}$)

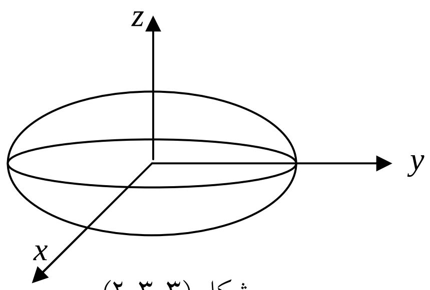
$$z=\pm k \Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\circ$$ (نقاط $(\circ,\circ,c)$ و $(\circ,\circ,-c)$)

$$z=k>c \Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}<\circ$$ (جواب ندارد)

$$x=\circ \Rightarrow \frac{z^۲}{c^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$ (بیضی عمودی به اقطار b و c)

$$y=\circ \Rightarrow \frac{z^۲}{c^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$ (بیضی عمودی به اقطار a و c)

با توجه به سطح مقطع های فوق می توان رویهٔ بیضیگون را بصورت زیر رسم کرد.



شکل (۳-۳-۲)

توجه داریم که اگر $a=b=c$، آنگاه رویهٔ بیضیگون تبدیل به یک کره می‌شود و چنانچه $a=b$ یا $a=c$ یا $b=c$ آنگاه برخی از سطح مقطعها از حالت بیضی بصورت داوه تبدیل می‌شوند.

۴-۳-۲ مثال: رویه های زیر را رسم کنید:

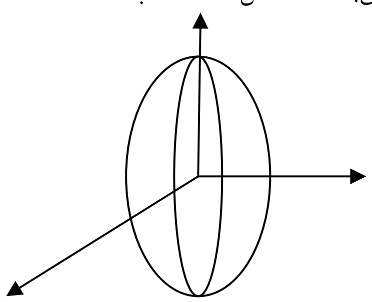
الف) $x^2+y^2+2z^2=4$ ب) $z^2-2z+y^2+2x^2=0$

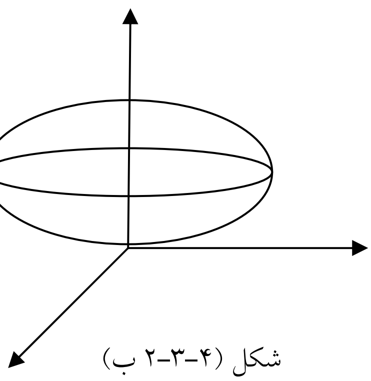
حل: الف) داریم $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ که یک بیضیگون می‌باشد و سطح مقطعهای افقی همگی بصورت دایره می‌باشند (شکل ۴-۳-۲ الف).

ب) داریم $0=z^2-2z+y^2+2x^2=(z-1)^2-1+y^2+2x^2$ و یا

$$\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{1}+\frac{(z-1)^2}{1}=1$$

که یک بیضیگون به مرکز $(0,0,1)$ می‌باشد و سطح مقطعهای عمودی به موازات صفحهٔ yz همگی دایره می‌باشند (شکل ۴-۳-۲ ب) .


شکل (۴-۳-۲ الف)


شکل (۴-۳-۲ ب)

۵-۳-۲ رویهٔ سهمیگون $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=\frac{z}{c}$: ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $c>0$ لذا سطح مقطعهای افقی و عمودی آنرا مشخص می‌کنیم.

$$z=0\Rightarrow \frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=0\Rightarrow x=y=0$$ (نقطهٔ مبداء $(0,0,0)$)

$$z=c\Rightarrow \frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$ (بیضی افقی به اقطار a و b)

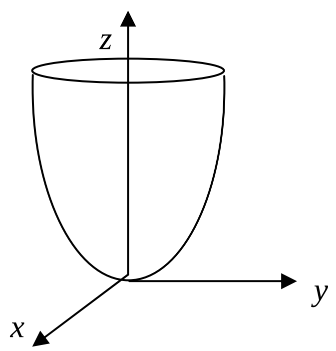
$$z=2c\Rightarrow \frac{x^{2}}{2a^{2}}+\frac{y^{2}}{2b^{2}}=1$$ (بیضی افقی به اقطار $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{2}$)

$$z=4c\Rightarrow \frac{x^{2}}{4a^{2}}+\frac{y^{2}}{4b^{2}}=1$$ (بیضی افقی به اقطار $2a$ و $2b$)

$$x=0\Rightarrow z=\frac{c}{b^{2}}y^{2}$$ (سهمی به راس مبداء و جهت تفعر بطرف مثبت محور z ها)

$$y=0\Rightarrow z=\frac{c}{a^{2}}x^{2}$$ (سهمی به راس مبداء و جهت تفعر بطرف مثبت محور z ها)

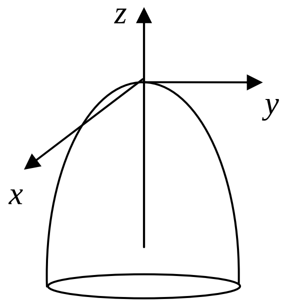
با توجه به اطلاعات بدست آمده فوق می‌توان رویهٔ سهمیگون را بصورت زیر رسم کرد(شکل ۵-۳-۲)



شکل (۵-۳-۲)

۶-۳-۲ تذکر: همانگونه که در مورد یک سهمی در صفحه می‌توان جهت تقعر آنرا بعنوان جهت سهمی در نظر گرفت، مانند $y=x^{2}$ که یک سهمی در جهت محور y ها است در مورد یک سهمیگون نیز می‌توان جهت تقعر را بعنوان جهت آن تعریف نمود لذا سهمیگون فوق در جهت مثبت

محور z ها است. چنانچه در سهمیگون فوق مقدار $c<0$ در نظر گرفته شود، آنگاه جهت آن به طرف پایین یعنی منفی محور z ها خواهد بود (شکل ۶-۳-۲).



شکل (۶-۳-۲)

۲-۳-۷ تعریف: اگر در سهمیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ حالت خاصی را در نظر بگیریم که در آن $a=b$ آنگاه سطح مقطعهای افقی بجای بیضی بصورت دایره خواهند شد در چنین حالتی سهمیگون حاصل را یک سهمیگون دوار می‌گوییم چنانچه $a\neq b$ آنگاه سهمیگون را یک سهمیگون بیضوی می گوییم.

۲-۳-۸ تذکر: (الف) مشابه آنچه در مورد رسم سهمیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ بیان شد، می‌توان هر کدام از سهمیگون های $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{a}$ و $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y}{b}$ را نیز رسم کرد. طبیعی است جهت این سهمیگون ها بترتیب در جهت محور yها و محور x ها (مثبت یا منفی) خواهند بود.

(ب) ممکن است راس سهمیگون نقطهٔ مبداء مختصات نباشد لذا چنانچه نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) راس آن باشد، در معادلهٔ سهمیگون مربوطه تنها تغییر x به $x-x_0$، y به $y-y_0$ و z به $z-z_0$ صورت خواهد گرفت.

۲-۳-۹ مثال: هر کدام از سهمیگون های زیر را رسم کنید:

الف) $x^2+y^2=z$ ب) $x^2+z^2=-y$

ج) $x^2-2x+4y^2=z-1$ د) $z=4-x^2-y^2$

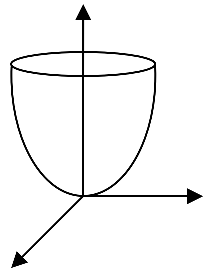
حل: الف) یک سهمیگون دوار در جهت مثبت محور z ها است

ب) یک سهمیگون دوار در جهت منفی محور y ها است

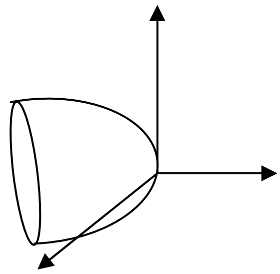
ج) داریم $(x-1)^2 - 1 + 4y^2 = z - 1$ و یا $(x-1)^2 + 4y^2 = z$ و یا

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{1}$$

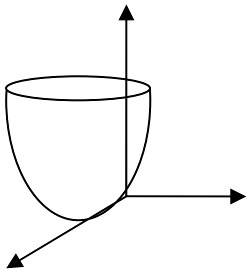
که یک سهمیگون بیضوی با راس $(1,0,0)$ و در جهت مثبت محور z ها است.



شکل (۹-۳-۲ الف)

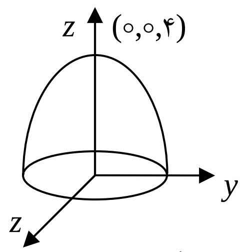


شکل (۹-۳-۲ ب)



شکل (۹-۳-۲ ج)

د) داریم $\frac{y^2}{1} + \frac{x^2}{1} = \frac{z-4}{-1}$ که یک سهمیگون دوار با راس $(0,0,4)$ و در جهت منفی محور z ها است.



شکل (۹-۳-۲ د)

۱۰-۳-۲ مخروط $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$: سطح مقطعهای افقی و عمودی را برای این رویه مشخص می‌کنیم.

(نقطهٔ مبداء مختصات) $z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

(بیضی افقی به اقطار a و b) $z = \pm c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

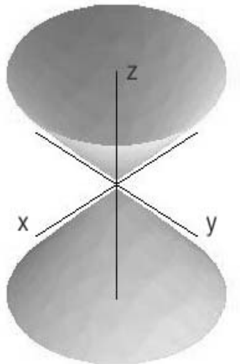
(بیضی افقی به اقطار $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{2}$) $z = \pm 2c \Rightarrow \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$

(بیضی افقی به اقطار $2a$ و $2b$) $z=\pm ۴c \Rightarrow \frac{x^۲}{۴a^۲}+\frac{y^۲}{۴b^۲}=۱$

(دو خط متقاطع) $x=\circ \Rightarrow \frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z^۲}{c^۲} \Rightarrow y=\pm\frac{b}{c}z$

(دو خط متقاطع) $y=\circ \Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲}=\frac{z^۲}{c^۲} \Rightarrow x=\pm\frac{a}{c}z$

با اطلاعات فوق رسم رویه بصورت زیر می‌باشد:



شکل (۱۰-۳-۲)

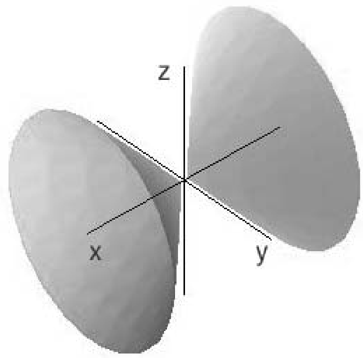
جهت مخروط در جهت محور z ها (هم مثبت و هم منفی) می‌باشد.

۱۱-۳-۲ تذکر: کلیهٔ نکات بیان شده در مورد رویه سهمیگون در رابطه با راس و جهت را می‌توان برای رویهٔ مخروط نیز بیان کرد . همچنین مشابه سهمیگون در حالت $a=b$ رویهٔ حاصل را یک مخروط دوار در حالت $a\neq b$ یک مخروط بیضوی می‌گوییم.

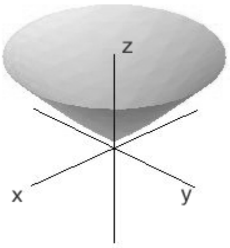
۱۲-۳-۲ مثال: رویه های زیر را رسم کنید.

الف) $y^۲+z^۲=x^۲$ ب) $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ ج) $x^۲-۲x+۲z^۲-۴z=y^۳-۳$

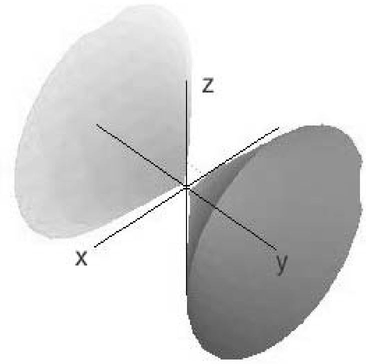
حل: الف) یک مخروط دوار در جهت محور x ها است. ب) یک مخروط دوار در جهت مثبت محور z ها است. توجه داریم که چون $z\geq \circ$، لذا نیمهٔ پائینی مخروط غیر قابل قبول است.



شکل (۱۲-۳-۲ الف)



شکل (۱۲-۳-۲ ب)



شکل (۱۲-۳-۲ ج)

ج) داریم $x^2-2x+2(z^2-2z)=y^2-3$ و یا $(x-1)^2-1+2[(z-1)^2-1]=y^2-3$ و یا $(x-1)^2+2(z-1)^2=y^2$ و یا $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{1}=\frac{y^2}{1}$. که یک مخروط بیضوی با راس $(1,0,1)$ و در جهت محور yها است.

۱۳-۳-۲ رویهٔ هذلولیگون یکپارچه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: سطح مقطعهای افقی و عمودی عبارت است از:

(بیضی افقی به اقطار a و b) $\qquad z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

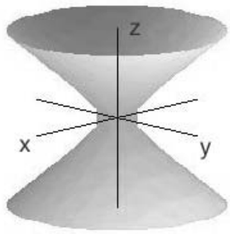
(بیضی افقی به اقطار $a\sqrt{2}$ و $b\sqrt{2}$) $z=\pm c \Rightarrow \frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{2b^2}=1$

(بیضی افقی به اقطار $2a$ و $2b$) $z=\pm 3c \Rightarrow \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$

(هذلولی در جهت محور x ها) $x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(هذلولی در جهت محور y ها) $y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow x=\pm\frac{a}{c}z$

بنابراین رسم رویه بصورت زیر است:



شکل (۱۳-۳-۲)

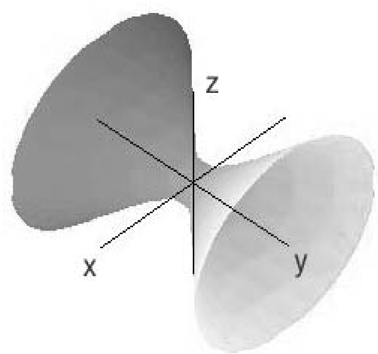
جهت این هذلولیگون یکپارچه محور z ها می‌باشد. اگر $a=b$ هذلولیگون را یک هذلولیگون یکپارچه دوار و چنانچه $a \neq b$ هذلولیگون یکپارچه بیضوی می‌گوییم.

۱۴-۳-۲ مثال: هر یک از رویه های زیر را رسم کنید.

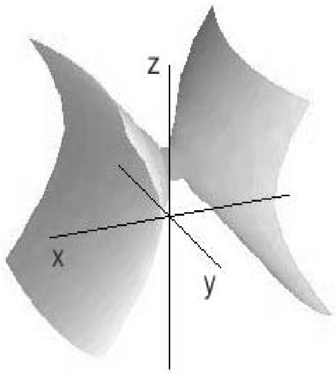
الف) $x^2+z^2-y^2=1$ ب) $\frac{1}{4}y^2+z^2-2z-x^2=0$

حل: الف) یک هذلولیگون یکپارچهٔ دوار در جهت محور y ها است.

ب) داریم: $\frac{1}{4}y^2+(z-1)^2-1-x^2=0$ و یا $\frac{y^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{1}-\frac{x^2}{1}=1$ که یک هذلولیگون یکپارچهٔ بیضوی به مرکز $(0,0,1)$ و در جهت محور x ها است.



شکل (۱۴-۳-۲ الف)



شکل (۱۳-۳-۲ ب)

۱۵-۳-۲ رویهٔ هذلولیگون دو پارچه $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: ابتدا سطح مقطع های افقی و عمودی را مشخص می‌کنیم.

(جواب ندارد) $z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

(جواب ندارد) $z=\pm k \quad 0<k<c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}<0$

(نقاط $(0,0,c)$ و $(0,0,-c)$) $z=\pm c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

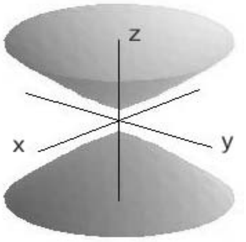
(بیضی افقی به اقطار $a\sqrt{3}$ و $b\sqrt{3}$) $z=\pm 2c \Rightarrow \frac{x^2}{3a^2}+\frac{y^2}{3b^2}=1$

(بیضی افقی به اقطار $2a\sqrt{2}$ و $2b\sqrt{2}$) $z=\pm 3c \Rightarrow \frac{x^2}{8a^2}+\frac{y^2}{8b^2}=1$

(هذلولی در حهت محور z ها) $x=0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(هذلولی در جهت محور z ها) $y=0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

پس با توجه به اطلاعات فوق می‌توان رویهٔ هذلولیگون دو پارچه را بصورت زیر رسم نمود.



شکل (۱۵-۳-۲)

واضح است که جهت هذلولیگون دوپارچه در جهت محور z ها است توجه داریم دوپارچه بودن هذلولیگون بخاطر دو قسمت بودن شکل این رویه می باشد. اگر $a=b$ هذلولیگون را دو پارچهٔ دوار می‌گوییم و چنانچه $a \neq b$ هذلولیگون را دو پارچهٔ بیضوی می‌گوییم.

۱۶-۳-۲ مثال: رویه های زیر را رسم کنید.

الف) $y^{۲} - x^{۲} - z^{۲} = ۱$ ب) $x^{۲} - ۴x - y^{۲} + ۲y - ۲z^{۲} + ۴z = ۰$

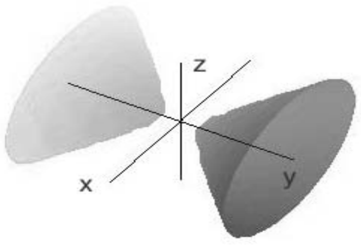
حل: الف) هذلولیگون دو پارچهٔ دوار در جهت محور yها است. ب) داریم

$$(x-۲)^{۲} - ۴ - [(y-۱)^{۲} - ۱] - ۲[(z-۱)^{۲} - ۱] = ۰$$

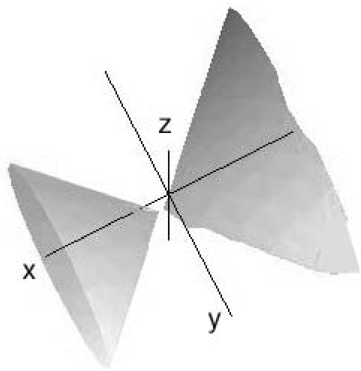
و یا

$$\frac{(x-۱)^{۲}}{۲} - \frac{(y-۱)^{۲}}{۲} - \frac{(z-۱)^{۲}}{۱} = ۱$$

که یک هذلولیگون دو پارچه بیضوی به مرکز $(۱,۱,۱)$ و در جهت محور x ها است.



شکل(۱۶-۳-۲ الف)



شکل (۱۶-۳-۲ ب)

۱۷-۳-۲ رویهٔ سهمیگون هذلولوی (زین اسبی) $\frac{z}{c} = \frac{y^{۲}}{b^{۲}} - \frac{x^{۲}}{a^{۲}}$: ابتدا سطح مقطعهای افقی و سپس عمودی را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $c > ۰$ در اینصورت داریم:

(دو خط متقاطع)
$$z=\circ \Rightarrow \frac{y^{۲}}{b^{۲}}-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}=\circ \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$$

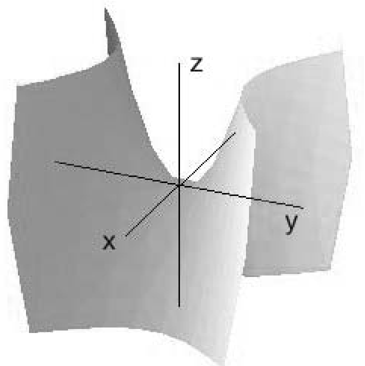
(هذلولی در جهت محور yها با اقطار a و b)
$$z=c \Rightarrow \frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{x^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

(هذلولی در جهت محور yها با اقطار $\sqrt{۲}\,a$ و $\sqrt{۲}\,b$)
$$z=۲c \Rightarrow \frac{y^{۲}}{۲b^{۲}}-\frac{x^{۲}}{۲a^{۲}}=۱$$

(سهمی با جهت تقعر بطرف مثبت محور z ها)
$$x=\circ \Rightarrow \frac{z}{c}=\frac{y^{۲}}{b^{۲}} \Rightarrow z=\frac{c}{b^{۲}}y^{۲}$$

(سهمی با جهت تقعر بطرف منفی z ها)
$$y=\circ \Rightarrow \frac{z}{c}=-\frac{x^{۲}}{a^{۲}} \Rightarrow z=-\frac{c}{a^{۲}}x^{۲}$$

با مشخصات بدست آمده فوق می‌توان رویهٔ فوق را رسم کرد که چون شباهت زیادی یا زین اسبی دارد بنام رویهٔ زرین اسبی نیز معروف می‌باشد. اهمیت این رویه بیشتر به جهت نقاطی است که به نام نقاط زین اسبی یا نقاط زینی معروف شده است و در مبحث ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع دو متغیره در فصل پنجم توصیف خواهند شد.



شکل (۱۷-۳-۲)

۱۸-۳-۲ تذکر: جهت این رویه را می‌توان جهت مثبت محور z ها یعنی جهت قرار گرفتن زین اسب در نظر داشت. اگر $c<\circ$ آنگاه جهت رویه به سمت منفی محور z ها است.

۴-۲ مختصات استوانه ای

در ابتدای این فصل با مختصات دکارتی سه بعدی آشنا شدیم در این قسمت مختصات سه بعدی دیگری را مورد بررسی قرار می‌دهیم که مختصات استوانه ای نامیده می‌شود. این دستگاه مختصات را می‌توان تعمیم مختصات قطبی از دو بعدی به سه بعدی نیز تصور کرد که به توصیف آن می‌پردازیم.

۱-۴-۲ توصیف: نمایش یک نقطه در مختصات استوانه ای بصورت (r,θ,z) می‌باشد که در آن r و θ همان مفاهیم توصیف شده در فصل اول یعنی مبحث مختصات قطبی است. اگر $P(r,\theta,z)$ یک نقطه در مختصات استوانه ای باشد، آنگاه برای رسم آن ابتدا با توجه به مقادیر r و θ آنرا در صفحهٔ xy مشخص می‌کنیم و سپس به اندازهٔ z به موازات محور z ها حرکت می‌کنیم و نقطهٔ P حاصل می‌شود (شکل ۱-۴-۲).

۲-۴-۲ مثال: هر یک از نقاط $P_۱\,(۱,\frac{\pi}{۴},۲)$ و $P_۲\,(-۱,\frac{\pi}{۲},-۱)$ و $P_۳\,(۰,\frac{\pi}{۳},۰)$ و $P_۴\,(۰,\pi,۰)$ را در دستگاه مختصات استوانه ای رسم کنید.

حل: داریم

۳-۴-۲ تذکر: همانطوریکه در مختصات قطبی بیان شد، نقطهٔ مبداء مختصات دارای نمایشهای بسیاری می‌باشد لذا در مختصات استوانه ای نیز مبداء مختصات نمایش منحصر بفردی ندارد و هر نقطه بصورت $(۰,\theta,۰)$ به ازای هر زاویهٔ دلخواه θ مبداء مختصات را مشخص می‌سازد.

۴-۴-۲ روابط میان مختصات دکارتی و استوانه ای

الف) تبدیل مختصات استوانه ای به دکارتی: فرض کنیم (r,θ,z) نمایش یک نقطه در مختصات استوانه ای باشد، با توجه به روابط
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
می‌توان نمایش دکارتی برای این نقطه بدست آورد. توجه داریم دو رابیهٔ اول قبلاً در تبدیژل مختصات قطبی به دکارتی نی زبیان شده بودند.

ب) تبدیل مختصات دکارتی به استوانه ای: فرض کنیم (x,y,z) نمایش یک نقطه در مختصات دکارتی باشد، برای بدست آوردن نمایش استوانه ای آن از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} r = \pm\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \\ \theta = \tan^{-۱}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

توجه داریم که انتخاب مناسب r (مثبت یا منفی) و نیز زاویهٔ θ (θ یا $\theta + \pi$) بستگی به ناحیه ای که x و y را می‌سازند دارد.

۵-۴-۲ مثال: نمایش دکارتی هر کدام از نقاط زیر که در مختصات استوانه ای داده شده اند را بدست آورید.

الف) $(۱,\dfrac{\pi}{۴},۴)$ ب) $(-۲,-\dfrac{\pi}{۴},-۱)$

حل: الف) داریم $r = ۱$ و $\theta = \dfrac{\pi}{۳}$ و $z = ۴$ پس نتیجه می‌شود $y = r\sin\theta = ۱\sin\dfrac{\pi}{۳} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $x = r\cos\theta = ۱\cos\dfrac{\pi}{۳} = \dfrac{۱}{۲}$ پس نمایش دکارتی این نقطه عبارتست از $(\dfrac{۱}{۲},\dfrac{\sqrt{۳}}{۲},۴)$.

ب) داریم $r = -۲$ و $\theta = -\dfrac{\pi}{۴}$ و $z = -۱$ پس خواهیم داشت $y = -۲\sin(-\dfrac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}$ و $x = -۲\cos(-\dfrac{\pi}{۴}) = -\sqrt{۲}$ بنابراین نمایش دکارتی عبارتست از $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲},-۱)$.

۶-۴-۲ مثال: نمیاش استوانه ای هر کدان از نقاط زیر که در مختصات دکارتی داده شده اند را بدست آورید:

الف) $(۱,۱,۳)$ ب) $(-۱,\sqrt{۳},-۲)$

حل: الف) داریم $x = ۱$ و $y = ۱$ و $z = ۳$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$z = ۳ \text{ و } r = \pm\sqrt{۲} \text{ و } \theta = \tan^{-۱}(۱) = \frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}.$$

چون $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ پس انتخاب مناسب r و θ بصورتهای زیر است:

$$(r,\theta,z) = (\sqrt{۲},\frac{\pi}{۴},۳) \text{ یا } (-\sqrt{۲},\frac{۵\pi}{۴},۳)$$

ب) مشابه قسمت الف داریم $x = -۱$، $y = \sqrt{۳}$ و $z = -۲$. پس

$$r = \pm۲ \text{ و } \theta = \tan^{-۱}(-\sqrt{۳}) = -\frac{\pi}{۳} \text{ یا } \frac{۲\pi}{۳}$$

لذا داریم

$$(r,\theta,z)=(۲,\frac{۲\pi}{۳},-۲) \text{ یا } (-۲,-\frac{\pi}{۳},-۲)$$

۲-۴-۷ تذکر: گاهی ممکن است معادلات رویه های درجه دوم در مختصات استوانه ای بیان شوند در اینصورت با توجه به روابط میان مختصات استوانه ای و دکارتی می‌توان نوع رویه را مشخص نمود.

۲-۴-۸ مثال: هریک از رویه های زیر را توصیف کنید.

الف) $z=r^۲$ ب) $r^۲+z^۲=۱$ ج) $z=r$

حل: الف) داریم $z=r^۲=x^۲+y^۲$ که یک سهمیگون دوار در جهت مثبت محور z ها است.

ب) داریم $z^۲+r^۲=x^۲+y^۲+z^۲=۱$ که معادلهٔ یک کره به شعاع ۱ می‌باشد.

ج) داریم $z=\pm\sqrt{x^۲+y^۲}$ لذا چنانچه $r>۰$ آنگاه معادلهٔ یک مخروط دوار در جهت مثبت محور z ها است و چنانچه $r<۰$ آنگاه یک مخروط دوار در جهت منفی محور z ها خواهیم داشت.

۲-۵ مختصات کروی

یکی دیگر از مختصات سه بعدی برای نمایش نقاط و رویه ها در فضا مختصات کروی است اهمیت این مختصات بیشتر در ساده تر توصیف کردن برخی رویه ها و نیز معادلات آنها می‌باشد که در فصل ششم و هفتم به آنها اشاره خواهیم کرد. اکنون به توصیف این مختصات می‌پردازیم.

۲-۵-۱ تعریف: نمایش یک نقطه مانند P در مختصات کروی بصورت سه تایی مرتب (ρ,φ,θ) می‌باشد که در آن:

ρ: فاصلهٔ نقطهٔ P تا مبداء مختصات یعنی OP می‌باشد که O مبداء مختصات است. توجه داریم که همواره $\rho\geq ۰$.

φ: زاویه ای است که پاره خط اصل از مبداء مختصات به نقطهٔ P با جهت مثبت محور z ها می‌سازد، لذا همواره $۰\leq\varphi\leq\pi$.

θ: اگر نقطهٔ P را در صفحهٔ xy تصویر نماییم و پای تصویر را نقطهٔ Q بنامیم آنگاه زاویهٔ θ زاویه ای است که پارهخط و اصل از مبداء مختصات به نقطهٔ Q یعنی OQ با جهت مثبت محور x ها می سازد. توجه داریم که همواره $۰\leq\theta\leq ۲\pi$ (شکل ۲-۵-۱).

۲-۵-۲ مثال: نقطهٔ $P\,(۲,\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳})$ را در مختصات کروی رسم کنید.

حل: برای رسم نقطهٔ P بصورت مراحل زیر عمل می‌کنیم:

(۱): ابتدا زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{۳}$ را در صفحهٔ xy رسم کرده و سپس صفحه ای روی آن بنا می‌کنیم. دراینصورت یک نیم صفحهٔ عمودی حاصل می‌شود که بوسیلهٔ محور z ها محدود شده است (شکل ۲-۵-۲ (۱)).

(۲) : در روی نیم صفحهٔ $\theta=\frac{\pi}{۳}$ نیم خط مربوط به زاویهٔ $\varphi=\frac{\pi}{۶}$ را رسم می‌کنیم. توجه داریم این نیم خط از نقطهٔ مبداء مختصات محدود شده است و در صفحهٔ $\theta=\frac{\pi}{۳}$ واقع شده است. این نیم خط را OW می‌نامیم.

(۳): روی نیم خط OW مقدار ۲ واحد جدا می‌کنیم. نقطهٔ حاصل شده همان نقطهٔ مورد نظر یعنی نقطهٔ $P\,(۲,\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳})$ می‌باشد.

۳-۵-۲ نتیجه: برای رسم نقطهٔ $P\,(\rho,\varphi,\theta)$ ابتدا از مولفهٔ سوم یعنی زاویهٔ θ شروع می‌کنیم که مکان مربوط به یک نیم صفحهٔ عمودی را ایجاد می‌کند سپس از مولفهٔ دوم زاویهٔ φ را روی این نیم صفحه جدا می کنیم که مکان یک نیم خط را مشخص می‌سازد و در خاتمه به کمک مولفهٔ اول مقدار ρ را روی این نیم خط جدا می‌کنیم که مکان حاصل یک نقطه می‌باشد که همان نقطهٔ $P\,(\rho,\varphi,\theta)$ است.

۴-۵-۲ مثال: هر کدام از نقاط زیر را در دستگاه مختصات کروی رسم کنید.

$$P_۱\,(۱,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})\,,\,P_۲\,(۱,\frac{۳\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})\,,\,P_۳\,(۲,۰,\frac{\pi}{۲})\,,\,P_۴\,(۲,۰,\frac{\pi}{۶})$$
$$,\,P_۵\,(۱,\pi,\frac{\pi}{۴})\,,\,P_۶\,(۱,\pi,\frac{۳\pi}{۲})\,,\,P_۷\,(۰,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})\,,\,P_۸\,(۰,\frac{\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۴})$$

حل: داریم

۵-۵-۲ تذکر: در مثال قبل ملاحظه می‌شود که نقاط $P_۳$ و $P_۴$ بر هم منطبق هستند همچنین نقاط $P_۵$ و $P_۶$ نیز بر یکدیگر منطبق می‌باشند و نقاط $P_۷$ و $P_۸$ هر دو نمایش مبداء مختصات می‌باشند لذا این نکته آشکار می‌شود که نقاطی در مختصات کروی وجود دارند که دارای نمایش منحصر بفردی نمی‌باشند. به سادگی می‌توان این نقاط را تعیین کرد. اگر کمی دقت نمائید آنگاه خواهید یافت که این نقاط همگی روی محور z ها واقع شده اند. بنابراین نقاط واقع بر محور z ها (جهت مثبت و منفی و مبداء مختصات) دارای نمایش منحصر بفردی در مبداء مختصات کروی نمی‌باشد و بنابراین تمام نقاط بصورت $(\circ,\varphi,\theta)$ به ازای هر مقدار زاویهٔ φ و θ مبداء مختصات را مشخص می‌سازند.همچنین نقاط $(\rho,\circ,\theta)$ به ازای هر زاویهٔ θ با تغییرات ρ جهت مثبت محور z ها را معین می‌کنند و نیز جهت منفی محور z ها دارای نمایشهایی بصورت (ρ,φ,θ) است که در آن θ زاویه ای دلخواه است و تغییرات ρ، نقاط مختلف در جهت منفی محور z ها را بوجود می‌آورد.

۶-۵-۲ روابط میان مختصات دکارتی و کروی: الف) تبدیل مختصات کروی به دکارتی با توجه به تعریف ۱-۵-۲، اگر نمایش های دکارتی و کروی را برای نقطهٔ P در دستگاه مختصات سه بعدی (شکل ۶-۵-۲) در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$\varphi=\angle COP=\angle OPQ$، $\rho=\overline{OP}$، $z=\overline{OC}$، $y=\overline{OB}$، $x=\overline{OA}$ و $\theta=\angle AOQ$. حال اگر مثلث OPQ را در نظر بگیریم، آنگاه ملاحظه خواهیم نمود که این مثلث قائم الزاویه است و زاویهٔ قائمه آن $\angle OPQ$ است. همچنین $\varphi=\angle OPQ$ زاویهٔ حاده، $\rho=\overline{OP}$ وتر آن، $\overline{OQ}=r$ ضلع زاویهٔ قائمهٔ مقابل به زاویهٔ حاده $\angle OPQ$ و $\overline{PQ}=\overline{OC}$ ضلع دیگر زاویهٔ قائمه می‌باشد. لذا داریم:

$$\sin\phi=\sin(\angle OPQ)=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{r}{\rho}\Rightarrow r=\rho\sin\varphi \qquad (۱)$$

$$\cos\phi=\cos(\angle OPQ)=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\frac{z}{\rho}\Rightarrow z=\rho\cos\varphi \qquad (۲)$$

اکنون با توجه به روابط میان مختصات دکارتی و قطبی در دو بعدی داریم:

(۳) $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ در نتیجه روابط زیر میان مختصات کروی‌و دکارتی حاصل می‌شوند:

بنا به (۱) و (۲) و (۳)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

بنابراین تبدیل مختصات دکارتی و کروی بوسیلهٔ معادلات زیر صورت می‌گیرد:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

ب) تبدیل مختصات دکارتی به کروی: با توجه به شکل ۶–۵–۲، در مثلث قائم الزاویهٔ OPQ داریم:

$$\tan\varphi = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{z} \Rightarrow \varphi = \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{z}\right)$$

همچنین میدانیم: $\rho = \overline{OP} = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$.

بعلاوه بنا به روابط میان مختصات دکارتی و قطبی داریم $\tan\theta = \frac{y}{x}$ و یا $\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)$

بنابراین تبدیل مختصات دکارتی به کروی بوسیلهٔ روابط زیر صورت می‌پذیرد:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \\ \varphi = \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{z}\right) \\ \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} \end{cases}$$

۷–۵–۲ مثال: نمایش دکارتی هر یک از نقاط زیر که در مختصات کروی داده شده اند را بدست آورید.

الف) $(۲, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$ ب) $(۵, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳})$

حل: الف) داریم $\rho = ۲$ و $\varphi = \frac{\pi}{۴}$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta = ۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta = ۲\sin\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۲} = ۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$z=\rho\cos\varphi=۲\cos\frac{\pi}{۴}=۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

بنابراین $(۲,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ کروی = $(۰,\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ دکارتی

ب) داریم $\rho=۵$ و $\varphi=\frac{۳\pi}{۴}$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$ درنتیجه:

$$x=۵\sin\frac{۳\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۳}=۵\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$$

$$y=۵\sin\frac{۳\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۳}=۵\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\frac{۵\sqrt{۶}}{۴}$$

$$z=۵\cos\frac{۳\pi}{۴}=۵\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $(۵,\frac{۳\pi}{۴},\frac{\pi}{۳})$ کروی = $(\frac{۵\sqrt{۲}}{۴},\frac{۵\sqrt{۶}}{۴},-\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})$ دکارتی

۸-۵-۲ مثال: نمایش کروی هر یک از نقاط زیر را که در مختصات دکارتی داده شده اند، بدست آورید.

الف) $(۱,۱,\sqrt{۲})$ ب) $(-۱,۱,۰)$

حل: الف) داریم $x=۱$ و $y=۱$ و $z=۲$ درنتیجه

$$\rho=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۱+۱+۲}=\sqrt{۴}=۲$$

$$\varphi=\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\right)=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\theta=\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{۱}\right)=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

با توجه به اینکه $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ پس زاویهٔ $\theta=\frac{۳\pi}{۴}$ باید اختیار شود و چون $۰\leq\varphi\leq\pi$ لذا زاویهٔ $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ اختیار می شود. بنابراین داریم : $(\sqrt{۲},\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۴})$ کروی = $(-۱,۱,۰)$ دکارتی

۹-۵-۲ تذکر: با توجه به روابط میان مختصات دکارتی و استوانه ای و نیز روابط میان مختصات دکارتی و کروی می توان روابط میان مختصات استوانه ای و کروی را نیز بطور مستقیم بدست آورد. برای این منظور به کمک روابط (۱) و (۲) در ۶-۵-۲ داریم:

$$r = \rho \sin \varphi \quad , z = \rho \cos \varphi$$

پس روابط میان مختصات استوانه ای و کروی عبارتست از:

$$\begin{cases} r = \rho \sin \varphi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{r^۲ + z^۲} \\ \varphi = \tan^{-۱}\left(\dfrac{r}{z}\right) \\ \theta = \theta \end{cases}$$

۱۰-۵-۲ مثال: نمایش کروی نقطهٔ $\left(۱, \frac{\pi}{۲}, \sqrt{۳}\right)$ که در مختصات استوانه ای داده شده است، را بدست آورید.

حل: داریم $r = ۱$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ و $z = \sqrt{۳}$ بنابراین به کمک روابط فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r^۲ + z^۲} = \sqrt{۱ + ۳} = ۲ \\ \varphi = \tan^{-۱}\left(\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = \dfrac{\pi}{۶} \\ \theta = \dfrac{\pi}{۲} \end{cases}$$

بنابراین $\left(۱, \frac{\pi}{۲}, \sqrt{۳}\right)$ استوانه ای $=$ کروی $\left(۲, \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}\right)$

۱۱-۵-۲ مثال: رویه های $\rho = ۴$ و $\varphi = \frac{\pi}{۴}$ را در مختصات کروی توصیف کنید و معادلات متناظر آنها را در مختصات دکارتی بدست آورید.

حل: طبق تعریف ρ در مختصات کروی فاصلهٔ نقطه تا مبداء مختصات است. لذا مکان هندسی نقاطی در فضا که فاصلهٔ آنها تا مبداء مختصات مقدار ثابت ۴ می‌باشد، عبارتست از یک کره به شعاع ۴ معادلهٔ آن برابر است با $۴ = \rho = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \Rightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱۶$.

اکنون مکان هندسی نقاطی در فضا که دارای مقدار ثابت $\varphi=\frac{\pi}{۴}$ می‌باشند، عبارتند از نقاط روی یک سطح مخروط که زاویهٔ بین یال ها و محور تقارن برابر زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ می‌باشد. برای بدست آوردن معادلهٔ این مخروط در مختصات دکارتی داریم $\tan\varphi=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}\Rightarrow ۱=\tan\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}$ و یا $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ که معادلهٔ مخروط دواری است که در جهت مثبت محور z ها می‌باشد.

۱۲-۵-۲ نتیجه: در خاتمهٔ این فصل به جهت تکمیل اطلاعات مربوط به مختصات کروی مکان هندسی حاصل از تغییرات ρ و φ و θ در حالتیکه حداقل یکی از آنها مقدار ثابت و بقیه متغیر باشند را بررسی می‌کنیم. اگر کلیهٔ این حالات را در نظر بگیریم تعداد ۸ حالت می‌باشد که در جدول زیر آورده شده است و خواننده محترم می‌تواند آنها را در ذهن خود تجسم و نتجه را با مکان هندسی مشخص شده در جدول مقایسه نماید.

حالت	ρ	φ	θ	مکان هندسی حاصل
۱	ثابت	متغیر	متغیر	یک کره
۲	متغیر	ثابت	متغیر	یک مخروط
۳	متغیر	متغیر	ثابت	یک نیم صفحهٔ عمودی
۴	ثابت	ثابت	متغیر	یک دایرهٔ افقی که روی یک مخروط قرار دارد
۵	ثابت	متغیر	ثابت	یک نیم دایرهٔ عمودی که روی یک نیم صفحه قرار دارد
۶	متغیر	ثابت	ثابت	یک نیم خط محدود شده به مبداء مختصات
۷	ثابت	ثابت	ثابت	یک نقطهٔ ثابت
۸	متغیر	متغیر	متغیر	تمام فضای سه بعدی

۶-۲ نمونه سوالات حل شده

۱-۶-۲: رویه های استوانه ای زیر را رسم کنید و نوع آنها را نیز مشخص کنید.

الف) $۳x^۲-۲y^۲+۴x-۳y+۲=۰$

ب) $۴z-۲=x^۲+۴x$

حل: الف) داریم $\circ=۳x^۲-۲y^۲+۴x-۳y+۲=۳(x^۲+\frac{۴}{۳}x)-۲(y^۲+\frac{۳}{۲}y)+۲$

$$=۳\left[(x+\frac{۲}{۳})^۲-\frac{۴}{۹}\right]-۲\left[(y+\frac{۳}{۴})^۲-\frac{۹}{۱۶}\right]+۲$$

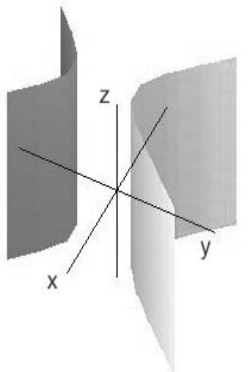
$$=۳(x+\frac{۲}{۳})^۲-\frac{۴}{۳}-۲(y+\frac{۳}{۴})^۲+\frac{۹}{۸}+۲$$

$$=۳(x+\frac{۲}{۳})^۲-۲(y+\frac{۳}{۴})^۲+\frac{۴۳}{۲۴}$$

پس
$$۲(y+\frac{۳}{۴})^۲-۳(x+\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴۳}{۲۴}$$

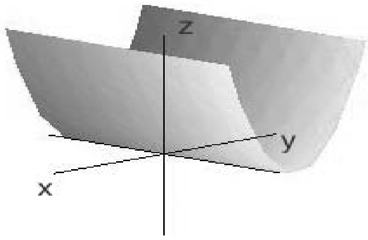
و یا
$$\frac{(y+\frac{۳}{۴})^۲}{\frac{۴۳}{۴۸}}-\frac{(x+\frac{۲}{۳})^۲}{\frac{۴۳}{۷۲}}=۱$$

که یک استوانه هذلولوی به مرکز $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۳}{۴})$ و در جهت محور z ها است.



شکل (۲-۶-۱ الف)

ب) داریم $۴z-۲=(x+۲)^۲-۴$ و یا $۴z+۲=(x+۲)^۲$ و یا $z+\frac{۱}{۲}=\frac{(x+۲)^۲}{۴}$ که یک استوانهٔ سهموی با راس $(-۲,-\frac{۱}{۲})$ و در جهت محور y ها است.



شکل(۱-۶-۲ ب)

۲-۶-۲: رویهٔ استوانه ای $۲x^۲ + ۲xy + ۲y^۲ = ۱$ مفروض است، آنرا در دستگاه مختصات سه بعدی رسم کرده و نوع استوانه را تعیین کنید.

حل: چون در معادله منحنی هادی عامل xy وجود دارد، لذا ابتدا باید با استفاده از دوران محورهای x و y، دستگاه مختصات جدیدی با محورهای x' و y' بیابیم که در تبدطل معادلهٔ منحنی هادی به دستگاه جدید عامل $x'y'$ در ان ظاهر نشود. توجه داریم که اگر

$$f(x,y) = Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰$$

آنگاه با توجه به ماتریس دوران در رابطهٔ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

می‌توان زاویهٔ دوران مناسب θ را بدست آورد. لذا با توجه به رابطهٔ فوق داریم:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad \text{و} \quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

با جایگذاری در $f(x,y)$ و صفر قرار دادن ضریب $x'y'$ زاویهٔ θ از رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد:

$$\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C}$$

اکنون در منحنی هادی فوق داریم: $F = -۱$، $D = E = ۰$، $C = ۲$، $B = ۲$ و $A = ۲$

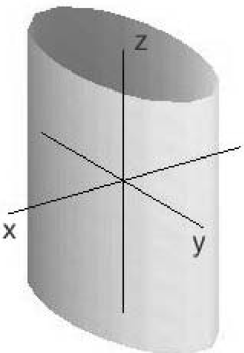
پس $\tan ۲\theta = \frac{۲}{۲-۲} = \infty$ پس $۲\theta = \frac{\pi}{۲}$ یعنی $\theta = \frac{\pi}{۴}$ بنابراین داریم

$$x = x'\frac{\sqrt{۲}}{۲} - y'\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad y = x'\frac{\sqrt{۲}}{۲} + y'\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

با جایگذاری در معادلهٔ منحنی هادی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
۱ &= ۲x^{۲}+۲xy+۲y^{۲}\\
&= ۲[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')]^{۲}+۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y'))(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y'))+۲[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')]^{۲}\\
&= ۲(\frac{۱}{۲}(x'^{۲}+y'^{۲}-۲x'y')+۲(\frac{۱}{۲}(x'^{۲}-y'^{۲}))+۲(\frac{۱}{۲}(x'^{۲}+y'^{۲}+۲x'y'))\\
&= x'^{۲}+y'^{۲}-۲x'y'+x'^{۲}-y'^{۲}+x'^{۲}+y'^{۲}+۲x'y'=۴x'^{۲}+y'^{۲}
\end{aligned}$$

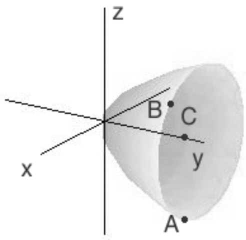
پس منحنی هادی در دستگاه مختصات جدید که از دوران محورهای x و y به اندازهٔ $\theta=\frac{\pi}{۴}$ حاصل شده است، عبارت از بیضی $\frac{x'^{۲}}{\frac{۱}{۴}}+\frac{y'^{۲}}{۱}=۱$ می‌باشد. و درنتیجه رویهٔ استوانه ای حاصل به شکل یک استوانهٔ بیضوی است.



شکل (۲-۶-۲)

۳-۶-۲: منحنی $y=x^{۲}$ را حول محور y ها دوران داده ایم مشخص کنید رویهٔ حاصل از دوران چیست و معادلهٔ آنرا بدست آورید.

حل: در دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی منحنی $y=x^{۲}$ را در صفحهٔ xy مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم.



شکل (۲-۶-۳)

فرض کنیم A نقطه ای روی این منحنی باشد از دوران این نقطه حول محور y ها یک دایره حاصل می‌شود. اگر $B(x,y,z)$ را نقطه ای دلخواه روی این دایره در خارج صفحهٔ xy در فضا در نظر بگیریم، و از این نقطه صفحه ای عمود بر محور y ها رسم کنیم که محور ها را در نقطهٔ C قطع کند، آنگاه ملاحظه می‌شود که نقطهٔ C مرکز دایره است و CA و CB شعاعهای این دایره می‌باشند.

همچنین مختصات نقاط A و B و C عبارتند از: $A(x',y',0)$ و $B(x,y,z)$ و $C(0,y,0)$

بعلاوه $y'=y$ ، $y'=x'^2$. چون A روی منحنی است، بنابراین

$$\overline{AC}=\sqrt{(x'-0)^2+(y'-y)^2+0^2}=\sqrt{x'^2}=|x'|$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2+z^2}=\sqrt{x^2+z^2}$$

چون $\overline{AC}=\overline{BC}$ پس خواهیم داشت:

$$|x'|=\sqrt{x^2+z^2} \text{ و یا } x'^2=x^2+z^2 \text{ و یا } y=x^2+z^2$$

که معادلهٔ یک رویه سهمیگون دوار در جهت مثبت محور y ها می‌باشد و دقیقاً رویهٔ رسم شده در شکل فوق می‌باشد.

۴-۶-۲: فرض کنید $f(x,y)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ معادلهٔ یک رویهٔ درجه دوم باشد، چنانچه $A>0$، $B>0$ و $C>0$ دراینصورت در مورد نوع رویهٔ درجه دوم بحث کنید.

حل: داریم

$$f(x,y)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

و یا
$$A(x^2+\frac{D}{A}x)+B(y^2+\frac{E}{B}y)+C(z^2+\frac{F}{C}z)+G=0$$

و یا

$$A\left[(x+\frac{D}{2A})^2-\frac{D^2}{4A^2}\right]+B\left[(y+\frac{E}{B})^2-\frac{E^2}{4B^2}\right]+C\left[(z+\frac{F}{C})^2-\frac{F^2}{4C^4}\right]+G=0$$

و یا

$$(x+\frac{D}{2A})^2+(y+\frac{E}{2B})^2+(z+\frac{F}{C})^2=A\frac{D^2}{4A^2}+B\frac{E^2}{4B^2}+C\frac{F^2}{4C^4}-G \qquad (1)$$

چون سمت چپ رابطهٔ فوق مثبت است، لذا

$$T=A\frac{D^2}{4A^2}+B\frac{E^2}{4B^2}+C\frac{F^2}{4C^4}-G\geq 0$$

اگر $T=0$ آنگاه رابطهٔ (۱) معرف یک نقطه می‌باشد و آن نقطه عبارتست ار

$$(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2B},-\frac{F}{2C})$$

اگر $T>0$ آنگاه رابطهٔ (۱) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A(x+\frac{D}{2A})^2+B(y+\frac{E}{2B})^2+C(z+\frac{F}{C})^2=T$$

و یا

$$\frac{(x+\frac{D}{2A})^2}{TBC}+\frac{(y+\frac{E}{2B})^2}{TAC}+\frac{(z+\frac{F}{C})^2}{TAB}=1$$

چون A، B، C و T همگی مثبت هستند، لذا با قرار دادن

$$TBC=a^2 \qquad TAC=b^2 \qquad TAB=c^2$$

خواهیم داشت:

$$\frac{(x+\frac{D}{2A})^2}{a^2}+\frac{(y+\frac{E}{2B})^2}{b^2}+\frac{(z+\frac{F}{C})^2}{c^2}=1$$

که معادلهٔ یک بیْضیگون به مرکز $(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2B},-\frac{F}{2C})$ می‌باشد. در حالت خاص $A=B=C$ رویه تبدیل به یک کره به مرکز $(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2B},-\frac{F}{2C})$ و شعاع $A\sqrt{TA}$ می‌شود.

۵-۶-۲: ناحیهٔ مشترک محدود به رویه های $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $x^2+y^2+z^2=4$ را مشخص کنید و منحنی فصل مشترک آنها را بدست آورید.

حل: رویهٔ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ یک مخروط دوار در جهت مثبت محور z ها و رویهٔ

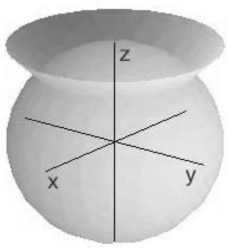
$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ یک کره به شعاع ۲ می‌باشد. برای بدست آوردن منحنی فصل مشترک آنها را در یک دستگاه قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴ \end{cases}$$

با قرار دادن z از رابطهٔ اول در رابطهٔ دوم نتیجه می‌شود

$$x^{۲}+y^{۲}+(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}})^{۲}=۴ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+x^{۲}+y^{۲}=۴$$

پس $x^{۲}+y^{۲}=۲$ که یک دایره به شعاع $\sqrt{۲}$ می‌باشد که در صفحهٔ افقی $z=\sqrt{۲}$ قرار گرفته است.



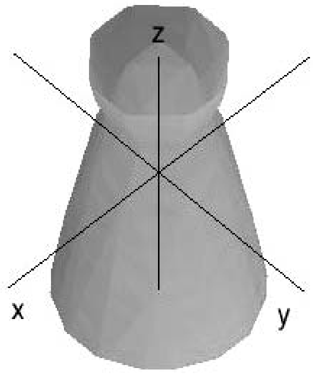
شکل (۵-۶-۲)

۶-۶-۲: ناحیهٔ مشترک محدود به رویه های $z=۸-x^{۲}-y^{۲}$ و $z=x^{۲}+y^{۲}$ را مشخص نموده و منحنی فصل مشترک آنها را بدست آورید.

حل: رویهٔ $z=x^{۲}+y^{۲}$ یک سهمیگون دوار با راس $(۰,۰,۸)$ و در جهت منفی محور z ها است. برای بدست آوردن فصل مشترک این رویه ها داریم:

$$\begin{cases} z=x^{۲}+y^{۲} \\ z=۸-x^{۲}-y^{۲} \end{cases} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۸-x^{۲}-y^{۲} \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۴$$

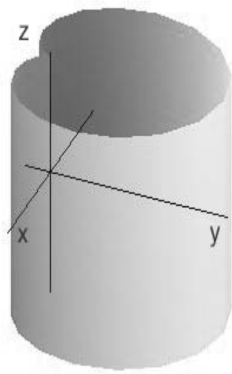
پس فصل مشترک دایره ای به شعاع ۲ می‌باشد که در صفحهٔ $z=۴$ قرار دارد.



شکل (۶-۶-۲)

۷-۶-۲: رویهٔ استوانه ای $r = ۲(۱ + \sin\theta)$ را در دستگاه مختصات استوانه ای رسم کنید.

حل: می‌دانیم منحنی هادی $r = ۲(۱ + \sin\theta)$ در دستگاه مختصات قطبی یک دلنما در جهت مثبت محور yها است لذا استوانهٔ حاصل بصورت زیر است:



شکل (۷-۶-۲)

۸-۶-۲: رویهٔ $\rho = ۴\cos\varphi$ در مختصات کروی داده شده است، آنرا به مختصات دکارتی تبدیل کرده و نوع آنرا مشخص کنید.

حل: میدانیم $z = \rho\cos\varphi$ لذا با ضرب ρ در طرفین رویهٔ فوق خواهیم داشت $\rho^۲ = ۴\rho\cos\varphi$

و یا $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴z$ و یا $x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۴z = ۰$

و یا $x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲ - ۴ = ۰$ و یا $x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲ = ۴$

که یک کره به مرکز $(0,0,2)$ و شعاع ۲ است.

۹-۶-۲: رویهٔ $\rho = 4\rho\sin^2\varphi + 6\cos\varphi$ در مختصات کروی داده شده است، آنرا به مختصات دکارتی تبدیل کرده و نوع رویه را مشخص کنید.

حل: می‌دانیم $z=\rho\cos\varphi$ و $r=\rho\sin\varphi$ پس داریم

$$\rho^2 = 4\rho^2\sin^2\varphi + 6\rho\cos\varphi = 4r^2 + 6z$$

و یا
$$x^2+y^2+z^2 = 4(x^2+y^2)+6z$$

$$\text{و یا}\quad 3x^2+3y^2 = z^2-6z \quad \text{و یا}\quad 3x^2+3y^2=(z-3)^2-9$$

و یا $(z-3)^2-3x^2-3y^2=9$ و یا $\dfrac{(z-3)^2}{9}-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3}=1$ که یک هذلولیگون دو پارچه به مرکز $(0,0,3)$ و درجهت محور z ها می‌باشد.

۱۰-۶-۲: هر کدام از ناحیه های زیر را در مختصات سه بعدی توصیف نمائید:

الف) $\rho=\cos\varphi\ ,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

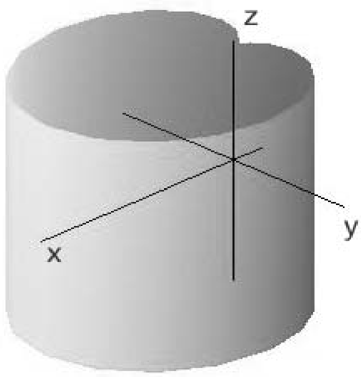
ب) $\rho=1\ ,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}$

ج) $\rho=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\varphi}\ ,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

حل: الف) داریم $\rho^2=\rho\cos\varphi$ و یا $x^2+y^2+z^2=z$ و یا $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ که یک کره به مرکز $(0,0,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$ می‌باشد. چون $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$، لذا ناحیهٔ قابل قبول قسمتی از کره است که در ناحیهٔ $x\ge0$ و $y\ge0$ قرار دارد یعنی $\frac{1}{4}$ کره.

ب) چون $\rho=1$ لذا کره ای به شعاع ۱ بدست می‌آید چون $\varphi=\frac{\pi}{4}$ لذا تقاطع کره با مخروط حاصل می‌شود که یک دایرهٔ افقی است و چون $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ناحیهٔ مورد قبول یک ربع دایرهٔ افقی بدست آمده است.

ج) داریم $\rho\sin\varphi=۱+\cos\theta$ و یا $r=۱+\cos\theta$ که یک رویهٔ استوانه ای با منحنی هادی دلنمای $r=۱+\cos\theta$ می‌باشد، چون $\circ\le\varphi\le\frac{\pi}{۲}$. لذا قسمت بالایی این استوانه ناحیهٔ مورد نظر است (شکل ۱۰-۶-۲)



شکل (۱۰-۶-۲ ج)

۷-۲ مسائل

۱-۷-۲: هر یک از رویه های زیر را کاملاً توصیف و رسم کنید.

۱) $x^۲+y^۲+z^۲+۴x-۶y=\circ$

۲) $x^۲+۴y^۲+z^۲=۴$

۳) $x^۲-y^۲+z^۲+۴x-۶y=۹$

۴) $z^۲=x^۲+۴y^۲-۲x+۸y+۴z$

۵) $(z-۱)^۲=-x^۲-y^۲$

۶) $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$

۷) $z=x^۲+y$

۸) $y=x^۲+z$

۹) $z=y^۲-x^۲$

۱۰) $z^۲=۴xy$

۱۱) $z=۵x^۲-۶xy+۵y^۲$

۱۲) $z=۲x^۲-۶xy+۵y^۲+۱۲x+۳۶y$

۱۳) $z=۳x^۲+۱\circ xy+۳y^۲-۲x-۱۴y-۱۳$

۱۴) $z=۹x^۲-۲۴xy+۱۶y^۲-۲\circ x+۱۱\circ y$

۱۵) $x=۴-۴y^۲-x^۲$

۱۶) $z=۴x^۲-۹y^۲-۴x-۲۴y-۳$

۱۷) $z^۲=x^۲+۴y^۲-۲x+۸y+۴z+۱$

۱۸) $y^۲-۲y-x^۲+۲x-z=۱$

۱۹) $z=\cos y$ ۲۰) $z=e^{y}$

۲-۷-۲: هر یک از حجمهای زیر را در دستگاه مختصات سه بعدی مشخص نمائید.

الف) حجم ناحیهٔ مشترک بین دو استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$

ب) ناحیهٔ محدود از بالا به رویهٔ $z=4-x^2-\frac{y^2}{4}$ و از پایین به رویهٔ $z=3x^2+\frac{y^2}{4}$

ج) ناحیهٔ محدود بین رویهٔ $z=2x^2+y^2+1$ و صفحهٔ $x+y=1$ و صفحات مختصات

د) ناحیهٔ محدود بین رویهٔ $z=x^2-y^2$ و صفحه های $y=0$، $z=0$ و $x=1$

ه) ناحیهٔ محدود بین رویه های $z=x^2+y^2$ و $y=x^2$ و صفحات $y=1$ و $z=0$

و) حجم بین صفحه های $x+y+z=a$ و $3x+y=a$ و $\frac{3}{2}x+y=a$ و $y=0$ و $z=0$

ز) حجم محدود بین رویه های $xy=1$ و $xy=2$ و صفحه های $z=x+y$، $y=x$، $y=2x$ و $z=0$ ($x,y>0$).

ح) حجم محدود بین صفحهٔ $z=0$ و رویه های $x^2+y^2=2ax$ و $z^2=x^2+y^2$.

۳-۷-۲: نمایش دکارتی نقاط زیر را بدست آورید.

الف) $(2,\frac{\pi}{4},1)$ ب) $(1,\frac{\pi}{6},2)$ ج) $(3,-\frac{\pi}{4},2)$

د) $(7,\frac{2\pi}{3},-4)$ ه) $(1,0,0)$ و) $(\sqrt{3},\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2})$

ز) $(8,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ ح) $(\sqrt{3},\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2})$ ط) $(3,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$

۴-۷-۲: نمایش استوانه ای نقاط زیر را بدست آورید.

الف) $(\sqrt{2},\pi,\frac{3\pi}{2})$ ب) $(7,\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ ج) $(-1,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$

د) $(0,0,1)$ ه) $(0,0,0)$ و) $(2\sqrt{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

ز) $(2,-2,2)$ ح) $(\sqrt{3},-1,2)$ ط) $(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$

۵-۷-۲: نمایش کروی نقاط زیر را بدست آورید.

الف) $(0,0,1)$ ب) $(1,\frac{5\pi}{6},-2)$ ج) $(-2,-2,2)$

د) $(\circ,\circ,\circ)$ ه) $(-۱,\sqrt{۳},۲)$ و) $(۲,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳})$

ز) $(۲,\frac{\pi}{۳},۱)$ ح) $(۳,\frac{\pi}{۲},۲)$ ط) $(۷,\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$

۲-۷-۶: سطحی به معادلهٔ دکارتی $z^۲=۳(x^۲+y^۲)$ مفروض است معادلات سطح را در مختصات استوانه ای و کروی بدست آورده و سپس سطح را رسم نمائید.

۲-۷-۷: هر یک از مکانهای هندسی زیر را توصیف و رسم کنید (همهٔ معادلات در فضای سه بعدی توصیف می‌شوند).

الف) $z=r\cos\theta$ ب) $\varphi=\frac{\pi}{۴}, \rho=۵$

ج) $z=r\sin\theta$ د) $\rho=۱+\sin\varphi$

ه) $z=\sin\theta \quad \circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ و) $\rho=۱-\cos\varphi$

ز) $\theta=\frac{\pi}{۶}, z=r$ ح) $r=\circ \quad \varphi\ge\frac{\pi}{۴}$

ط) $z=۳, r=۲$ ی) $\rho=a\sin\varphi \quad (a>\circ)$

ک) $\theta=\frac{\pi}{۶}, \rho=۵$ ل) $r=\theta$

۲-۷-۸: هر یک از معادلات زیر را در دستگاه مختصات داده شده به دو دستگاه دیگر تبدیل کنید.

الف) $z^۲=r^۲$ ب) $x=y$ ج) $\rho\cos\varphi=۳$

د) $x^۲+y^۲=۴z-z^۲$ ه) $\rho=۶\cos\varphi$ و) $\rho\sin\varphi\cos\theta=۲$

فصل سوم

بردارها و هندسهٔ تحلیلی

۱-۳ بردارها

در فیزیک کمیتهایی وجود دارند که با اندازه و جهت و یا هر دو مشخص می شوند. مانند سرعت، نیرو و شتاب. برای معرفی این کمیتها مفهوم بردار را به عنوان پاره خط جهتدار $\vec{AB}$ معرفی می کنیم که از نقطهٔ A شروع و به نقطهٔ B ختم می شود بردارها را با حروف پررنگ یا با حروفی که علامت پیکان روی آن است نشان می دهند.

۳-۱-۱ تعریف: یک بردار دو بعدی زوج مرتبی مانند $A=<a_1,a_2>$ از اعداد حقیقی است و یک بردار سه بعدی سه تایی مرتبی مانند $A=<a_1,a_2,a_3>$ از اعداد حقیقی است. اعداد حقیقی a_1، a_2 و a_3 را مولفه های بردار a می نامیم.

بازاء نقاط مفروض $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ بردار a با نمایش $\vec{AB}$ عبارتست از :

$$\vec{AB}=<x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1>$$

۳-۱-۲ اندازه یا طول یک بردار: اندازهٔ یک بردار مانند v را با $|v|$ نمایش می دهند و برای یک بردار دو بعدی مانند $A=<a_1,a_2>$ برابر است با $|A|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

و برای بردار سه بعدی $A=<a_1,a_2,a_3>$ برابر است با $|A|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

۳-۱-۳ تعریف جمع بردارها : اگر $A=<a_1,a_2>$ و $B=<b_1,b_2>$ دو بردار باشند آنگاه $A+B$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

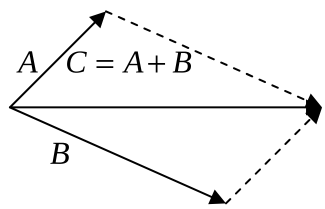
$$A+B=<a_1+b_1,a_2+b_2>$$

و بطور مشابه برای بردارهای سه بعدی $A=<a_1,a_2,a_3>$ و $B=<b_1,b_2,b_3>$ داریم:

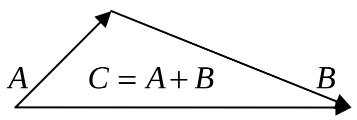
$$A+B=<a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3>$$

۳-۱-۴ تعبیر هندسی جمع بردارها: مجموع یا برآیند دو بردار A و B برداری است مانند C که از نقطهٔ ابتدایی بردار A شروع و به نقطهٔ انتهایی بردار B ختم می گردد. این تعریف را گاهی قانون متوازی الاضلاع یا قانون مثلث نامگذاری می کنند که در شکل زیر نمایش داده شده است.

قانون متوازی الاضلاع



قانون مثلث



۳-۱-۵ تعریف ضرب یک عدد در یک بردار: اگر m یک اسکالر و $A =< a_{۱}, a_{۲} >$، بردار CA بصورت زیر تعریف می شود:

$$CA =< Ca_{۱}, Ca_{۲} >$$

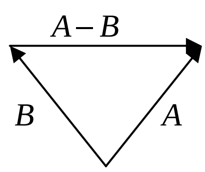
و در حالت سه بعدی داریم:

$$C < a_{۱}, a_{۲}, a_{۳} > =< Ca_{۱}, Ca_{۲}, Ca_{۳} >$$

۳-۱-۶ تعریف: تفاضل دو بردار A و B که با $A\text{-}B$ نمایش می دهند برداری است مانند C که وقتی با B جمع گردد برابر A شود. بطور هم ارز تفاضل دو بردار A و B عبارتست از $C = A - B = A + (-B)$.
بنابراین اگر $A =< a_{۱}, a_{۲}, a_{۳} >$ و $B =< b_{۱}, b_{۲}, b_{۳} >$ در اینصورت:

$$A - B = A + (-B) =< a_{۱}, a_{۲}, a_{۳} > + < -b_{۱}, -b_{۲}, -b_{۳} >$$
$$=< a_{۱} - b_{۱}, a_{۲} - b_{۲}, a_{۳} - b_{۳} >$$

چون $(A - B) + B = A$، $A\text{-}B$ برداری است که وقتی B را به آن بیفزاییم بردار A حاصل می شود این مطلب توسط قانون مثلث بصورت زیر نشان داده شده است:



۳-۱-۷ خواص بردارها: اگر A و B و C بردار و m و n اسکالر باشند آنگاه:

الف) $A + B = B + A$

ب) $A + (B + C) = (A + B) + C$

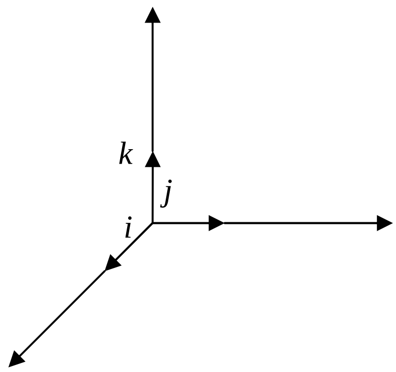
ج) $m(nA)=(mn)A=n(mA)$

د) $m(A+B)=mA+mB$

۳-۱-۸ تعریف: بردارهای یکه بردارهایی هستند که اندازهٔ آنها برابر واحد باشد اگر A بردار دلخواهی با اندازهٔ $|A|$ باشد آنگاه $\frac{A}{|A|}$ یک بردار یکه است.

۳-۱-۹ تعریف: بردارهای یکه متعامد i، j و k بردارهای یکه ای هستند که به ترتیب با محورهای x و y و z دستگاه مختصات دکارتی هم جهت باشند این سه بردار را بصورت زیر نمایش می دهیم:

$$i=<1,0,0> \qquad j=<0,1,0> \qquad k=<0,0,1>$$



اگر $A=<a_1,a_2,a_3>$ آنگاه می توان نوشت:

$$A=<a_1,a_2,a_3>=<a_1,0,0>+<0,a_2,0>+<0,0,a_3>$$
$$=a_1<1,0,0>+a_2<0,1,0>+a_3<0,0,1>$$

در نتیجه داریم:

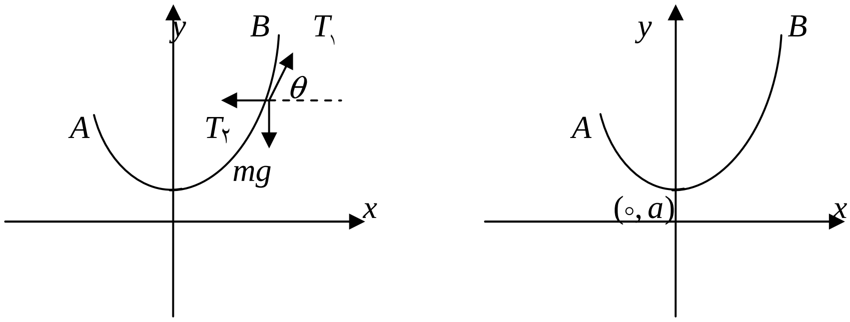
$$A=<a_1,a_2,a_3>=a_1 i+a_2 j+a_3 k$$

بنابراین هر بردار با سه مولفه یا کمتر را را می توان برحسب بردارهای پایه استاندارد i و j و k نوشت.

۳-۱-۱۰ مثال: دو سر یک زنجیر را مطابق شکل به نقاط A و B متصل کرده ایم اگر جرم واحد طول مقدار ثابتی باشد و نقطهٔ $(0,a)$ پایینترین نقطهٔ زنجیر باشد معادلهٔ منحنی را بدست آورید.

حل: یک نقطه از زنجیر را انتخاب می کنیم و نیروی کششی در آن نقطه را T_1 و T_2 و mg نامگذاری می کنیم اگر T_1 و T_2 را بر حسب مولفه های افقی و قائم حساب کنیم طبق قانون دوم نیوتن داریم:

$$|T_1|\cos\theta - |T_2| = 0 \Rightarrow |T_2| = |T_1|\cos\theta$$
$$|T_1|\sin\theta - mg = 0 \Rightarrow mg = |T_1|\sin\theta$$



با تقسیم دو رابطهٔ فوق بر هم داریم: $\tan\theta = \dfrac{mg}{|T_2|}$. از طرفی اگر معادلهٔ منحنی بصورت $y = f(x)$ و s طول قوس منحنی و w جرم واحد طول منحنی باشد داریم:

$$\tan\theta = y' = \frac{mg}{|T_2|} = \frac{g}{|T_2|}ws \qquad \text{زیرا } m = ws$$
$$= \frac{gw}{|T_2|}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

حال اگر فرض کنیم $\dfrac{gw}{|T_2|} = \dfrac{1}{a}$ داریم:

$$y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx \Rightarrow y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx \Rightarrow \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \sinh^{-1} y' = \frac{1}{a}x + C_1$$

از طرفی می دانیم که $y'(0) = 0$ بنابراین $C_1 = 0$. اکنون داریم :

$$\sinh^{-1} y' = \frac{1}{a}x \Rightarrow y' = \sinh\frac{x}{a} \Rightarrow y = a\cosh\frac{x}{a} + C_2$$

از طرفی $y(0) = a$ بنابراین $C_2 = 0$ و معادلهٔ منحنی بصورت $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ بدست می آید.

۱۱=۱=۳ تعریف: ضرب نقطه ای یا ضرب اسکالر دو بردار A و B که با $A\cdot B$ نشان می دهند برابر حاصلضرب اندازه های A و B در کسینوس زاویهٔ بین آنها است و می نویسیم :

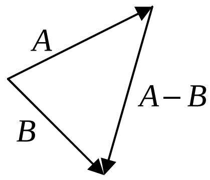
$$A\cdot B = |A||B|\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi$$

توجه کنید که $A\cdot B$ یک اسکالر است نه یک بردار.

۱۲-۱-۳ قضیه: اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ در اینصورت:

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

برهان: اگر قانون کسینوسها را در مورد مثلث زیر که توسط بردارهای A و B و A-B ساخته می شود بکار بگیریم داریم:



$$|(A-B)|^2=|A|^2+|B|^2-2|A||B|\cos\theta$$

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2A\cdot B$$

پس از خلاصه کردن داریم:

$$-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=-2A\cdot B$$

و در نتیجه:

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

۱۳-۱-۲ نتیجه: اگر θ زاویهٔ بین بردارهای غیر صفر A و B باشد آنگاه:

$$\cos\theta=\frac{A\cdot B}{|A||B|}$$

۱۴-۱-۳ خواص حاصلضرب نقطه ای: اگر A و B و C سه بردار و m اسکالر و i و j و k بردارهای متعامد یکه باشند داریم:

الف) $A\cdot B=B\cdot A$

ب) $A\cdot A=|A|^2$

ج) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

د) $m(A\cdot B)=(mA)\cdot B=A\cdot(mB)=(A\cdot B)m$

ه) $i\cdot j=j\cdot k=k\cdot i=0$ و $i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$

۱۵-۱-۳ مثال: نشان دهید بردار $V=B-\frac{A\cdot B}{|A|^2}A$ بر بردار A عمود است.

حل: برای این منظور ثابت می کنیم حاصلضرب نقطه ای دو بردار V و A برابر صفر است. در اینصورت:

$$V\cdot A=(B-\frac{A\cdot B}{|A|^2}A)\cdot A=B\cdot A-\frac{A\cdot B}{|A|^2}A\cdot A$$ (بنا بر قسمت ج از ۱۴-۱-۲)

$$=B\cdot A-\frac{A\cdot B}{|A|^2}|A|^2=B\cdot A-B\cdot A=0$$ (بنابر قسمتهای الف و ب از ۱۴-۱-۲)

در نتیجه دو بردار A و V بر هم عمود هستند.

۱۶-۱-۳ مثال: نشان دهید تصویر بردار A بر بردار B، $proj_B^A$ برابر است با:

$$proj_B^A = \frac{A \cdot B}{|B|}$$

حل: دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را مطابق شکل در نظر بگیرید و فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار θ باشد در اینصورت دیده می شود که تصویر بردار A روی بردار B برابر است با

$$|A|\cos\theta \qquad (۱)$$

از طرفی

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta = |B|(|A|\cos\theta)$$

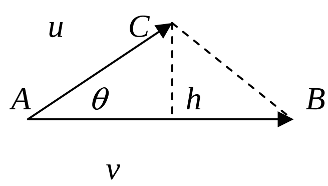
$$\Rightarrow |A|\cos\theta = \frac{A \cdot B}{|B|} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$proj_B^A = \frac{A \cdot B}{|B|}$$

۱۷-۱-۳ مثال: مثلث ABC با رئوس $A(۱,-۱,۲)$ و $B(۰,۱,-۱)$ و $C(۲,۱,۰)$ مفروض است اولاً $\cos C\hat{A}B$ را بدست آورید. ثانیاً مساحت مثلث را حساب کنید:

حل: فرض کنیم $u = AB$ و $v = AC$ داریم:



$$u = -i + ۲j - ۳k \quad \text{و} \quad v = i + ۲j - ۲k$$

$$\cos C\hat{A}B = \cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{-۱+۴+۶}{\sqrt{۱۴}\cdot\sqrt{۹}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$$

فرض کنیم h ارتفاع مثلث ABC از نقطهٔ C وارد بر ضلع AB باشد در اینصورت مساحت مثلث ABC برابر است با

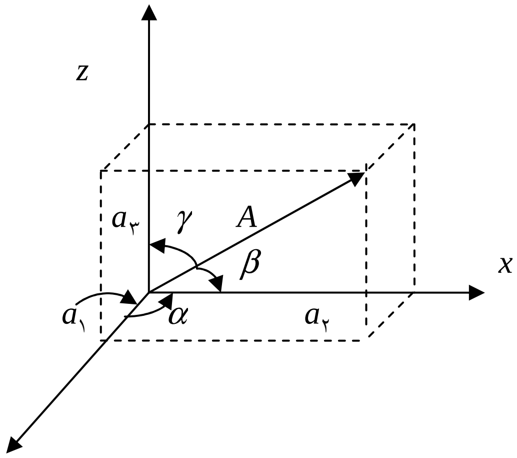
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}|AB|\cdot h = \frac{۱}{۲}|AB||AC|\sin\theta = \frac{۱}{۲}|u||v|\sin\theta$$

$$= \frac{۱}{۲}\cdot\sqrt{۱۴}\cdot ۳ \cdot \sqrt{۱ - \frac{۹}{۱۴}} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۵}$$

۱۸-۱-۳ تعریف: زوایای هادی یک بردار غیر صفر A زوایای α، β و γ در بازهٔ $[۰,\pi]$ هستند. که بردار A با سوی مثبت محورهای x، y و z میسازد. کسینوسهای این زوایا یعنی $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ را اصطلاحاً کسینوسهای هادی بردار A می نامند.

اگر در نتیجهٔ ۱۳-۱-۲ جای β را با i و j و k عوض کنیم و فرض کنیم $A=a_{۱}i+a_{۲}j+a_{۳}k$ داریم:

$$\cos\alpha=\frac{A\cdot i}{|A||i|}=\frac{a_{۱}}{|A|} \quad \text{و} \quad \cos\beta=\frac{A\cdot j}{|A||j|}=\frac{a_{۲}}{|A|} \quad \text{و} \quad \cos\gamma=\frac{A\cdot k}{|A||k|}=\frac{a_{۳}}{|A|}$$



۱۹-۱-۳ مثال: کسینوسهای هادی بردار $A=i+۲j+۳k$ را حساب کنید.

حل: چون $|A|=\sqrt{۱+۲^{۲}+۳^{۲}}=\sqrt{۱۴}$ از معادلات قسمت قبل بدست می آوریم:

$$\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \quad \text{و} \quad \cos\beta=\frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \quad \text{و} \quad \cos\gamma=\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$$

در نتیجه:

$$\alpha=\cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۱۴}})\approx ۳۷^{\circ} \quad \text{و} \quad \beta=\cos^{-۱}(\frac{۲}{\sqrt{۱۴}})\approx ۵۸^{\circ} \quad \text{و} \quad \gamma=\cos^{-۱}(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}})\approx ۷۴^{\circ}$$

۲۰-۱-۳ مثال: اگر $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ کسینوسهای هادی بردار $A=a_{۱}i+a_{۲}j+a_{۳}k$ باشند، ثابت کنید:

$$\cos^{۲}\alpha+\cos^{۲}\beta+\cos^{۲}\gamma=۱$$

حل: می دانیم $\cos\alpha=\frac{a_{۱}}{|A|}$، $\cos\beta=\frac{a_{۲}}{|A|}$ و $\cos\gamma=\frac{a_{۳}}{|A|}$ بنابراین:

$$\cos^{۲}\alpha+\cos^{۲}\beta+\cos^{۲}\gamma=\frac{۱}{|A|^{۲}}(a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲})=\frac{|A|^{۲}}{|A|^{۲}}=۱$$

۲۱-۱-۳ مثال: عبارت زیر را ثابت کنید:

الف) $|A+B|\leq|A|+|B|$

ب) $|A+B|^۲+|A-B|^۲=۲(|A|^۲+|B|)$

حل: الف)

$$|A+B|^۲=(A+B)\cdot(A+B)=A\cdot A+B\cdot B+۲A\cdot B$$
$$=|A|^۲+|B|^۲+۲|A||B|\cos\theta$$
$$\le|A|^۲+|B|^۲+۲|A||B|=(|A|+|B|)^۲$$

در نتیجه داریم:

$$|A+B|\le|A|+|B|$$

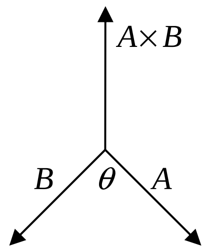
ب)

$$|A+B|^۲+|A-B|^۲=(A+B)\cdot(A+B)+(A-B)\cdot(A-B)$$
$$=A\cdot A+B\cdot B+۲A\cdot B+A\cdot A+B\cdot B-۲A\cdot B$$
$$=۲(|A|^۲+|B|)$$

۳-۱-۲۲ تعریف: ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار A و B که با $A\times B$ نشان می دهند، برابر است با حاصلضرب اندازه های A و B در سینوس زاویهٔ بین آنها و می نویسیم:

$$A\times B=|A||B|\sin\theta u \quad ۰\le\theta\le\pi$$

که در آن u بردار یکه ای است که جهت $A\times B$ را نشان می دهد. اگر A و B بصورت پاره خطهای جهت دار با نقطهٔ شروع یکسان معرفی شده باشند حاصلضرب خارجی دو بردار در سوی عمود بر صفحهٔ مار بر A و B است و سوی آن توسط قاعدهٔ دست راست بدست می آید اگر انگشتان دست راستتان از A به طرف B (به اندازهٔ زاویهٔ کمتر از ۱۸۰°) چرخش کند آنگاه انگشت شست شما در سوی $A\times B$ قرار خواهد گرفت.



۳-۱-۲۳ مثال: فرض کنید $A=a_۱i+a_۲j+a_۳k$ و $B=b_۱i+b_۲j+b_۳k$ نشان دهید

$$A\times B=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)i+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)j+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)k$$

حل: طبق تعریف ضرب خارجی داریم:

$$A\times B=|A||B|\sin\theta u$$
$$|A\times B|^۲=|A|^۲|B|^۲\sin^۲\theta=|A|^۲|B|^۲(۱-\cos^۲\theta)$$
$$=|A|^۲|B|^۲-|A|^۲|B|^۲\cos^۲\theta$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2$$
$$-a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2-a_3^2b_3^2-2a_1a_2b_1b_2-2a_1a_3b_1b_3-2a_2a_3b_2b_3$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

بنابراین ثابت کردیم:

$$|A\times B|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

در نتیجه داریم:

$$A\times B=(a_2b_3-a_3b_2)+(a_3b_1-a_1b_3)+(a_1b_2-a_2b_1)$$

۳-۱-۲۴ مثال: فرض کنید $A=a_1i+a_2j+a_3k$ و $B=b_1i+b_2j+b_3k$ نشان دهید:

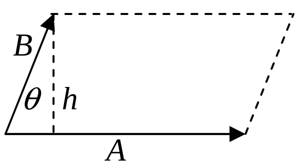
$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

حل:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$
$$=A\times B \qquad \text{بنا به مسئلهٔ ۲۴-۱-۲}$$

۳-۱-۲۵ مثال: نشان دهید $|A\times B|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که روی این دو بردار ساخته می شود.

حل: مطابق شکل فرض کنید ارتفاع متوازی الاضلاع برابر h باشد

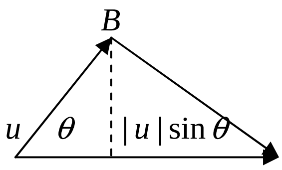


بوضوح داریم $h=|B|\sin\theta$ در نتیجه:

$S=$ ارتفاع $\times$ قاعده $=|A||B|\sin\theta=|A\times B|$

۳-۱-۲۶ مثال: مثلث ABC با رئوس $A(1,1,1)$ و $B(3,2,5)$ و $C(1,-2,1)$ مفروض است اولاً بردار عمود بر صفحهٔ مثلث را بدست آورید.

ثانیاً مساحت مثلث را حساب کنید.



حل: اولاً $u=AB=2i+j+4k$ و $v=AC=-3j$

لذا بردار عمود بر صفحهٔ مثلث عبارتست از: A v C

$$N = u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = ۱۲i - ۶k$$

ثانیاً مساحت مثلث برابر است با

$$S = \frac{۱}{۲}|v||u|\sin\theta = \frac{۱}{۲}|u\times v| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۴۴+۳۶} = \frac{۶\sqrt{۵}}{۲} = ۳\sqrt{۵}$$

۲۷-۱-۳ خواص ضرب خارجی: اگر A و B و C سه بردار و m اسکالر و i و j و k بردار های متعامد یکه باشند، داریم:

الف) $A\times B = -B\times A$

ب) $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$

ج) $m(A\times B) = (mA)\times B = A\times(mB) = (A\times B)m$

د) $i\times j = k$ و $j\times k = i$ و $k\times i = j$ و $i\times i = j\times j = k\times k = ۰$

۲۸-۱-۳ تعریف: ضرب عددی سه گانه A و B و C را بصورت $A\cdot(B\times C)$ تعریف می کنیم. و در اینصورت با فرض $A = a_۱i + a_۲j + a_۳k$ و $B = b_۱i + b_۲j + b_۳k$ و $C = c_۱i + c_۲j + c_۳k$ خواهیم داشت:

$$B\times C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix} k$$

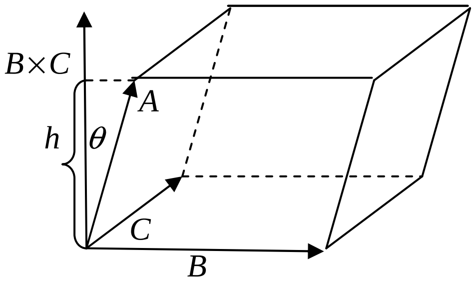
بنابراین

$$A\cdot(B\times C) = a_۱\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ c_۲ & c_۳ \end{vmatrix} i - a_۲\begin{vmatrix} b_۱ & b_۳ \\ c_۱ & c_۳ \end{vmatrix} j + a_۳\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ c_۱ & c_۲ \end{vmatrix} k$$

درنتیجه داریم:

$$A\cdot(B\times C) = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

از نظر هندسی حاصلضرب عددی سه گانهٔ سه بردار A و B و C برابر حجم متوازی السطوحی است که بر سه بردار فوق ساخته می شود زیرا:



مساحت متوازی الاضلاع که قاعدهٔ جسم است برابر است با $S=|B\times C|$ اگر A زاویهٔ بین دو بردار A و $B\times C$ باشد آنگاه ارتفاع متوازی السطوح عبارتست از $h=|A||\cos\theta|$ پس حجم متوازی السطوح برابر است با

$$V=S\,h=|B\times C||A|\cos\theta|=|A\cdot(B\times C)|$$

۲۹-۱-۳ مثال: حجم متوازی السطوحی با اضلاع $A=۳i-j$ و $B=i+۲k$ و $C=i+۵j+۴k$ را حساب کنید.

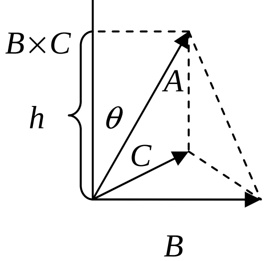
حل: بنابر ۲۸-۱-۵ داریم:

$$V=|A\cdot(B\times C)|=\left|\begin{vmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ & ۴ \end{vmatrix}\right|=|-۲۰|=۲۰$$

۳۰-۱-۳ مثال: ثابت کنید حجم یک چهار وجهی که بر سه بردار A و B و C ساخته می شود برابر است با

$$V=\frac{۱}{۶}|A\cdot(B\times C)|$$

حل: مطابق شکل مساحت مثلث که قاعدهٔ جسم است برابر است با $S=\frac{۱}{۲}|B\times C|$



اگر θ زاویهٔ بین دو بردار A و $B\times C$ باشد ارتفاع چهار وجهی برابر است با $h=|A||\cos\theta|$ بنابراین حجم چهار وجهی برابر است با

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲}|B\times C||A||\cos\theta|=\frac{۱}{۶}|A\cdot(B\times C)|$$

۳-۱-۳۱ خاصیت مهم ضرب عددی سه گانه: اگر A و B و C سه بردار باشند داریم:

$$A\cdot(B\times C)=B\cdot(C\times A)=C\cdot(A\times B)$$

۳-۱-۳۲ تعریف: ضرب برداری سه گانه A و B و C را بصورت $A\times(B\times C)$ تعریف می کنیم.

در اینصورت داریم: $A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C$

زیرا اگر دستگاه مختصات را چنان اختیار کنیم که بردار A در امتداد محور x ها و بردار B در صفحهٔ xy واقع شود در اینصورت داریم: $A=a_۱ i$ و $B=b_۱ i+b_۲ j$ و $C=c_۱ i+c_۲ j+c_۳ k$ بنابراین

$$B\times C=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_۱ & b_۲ & ۰ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}=b_۲c_۳ i-b_۱c_۳ j+(b_۱c_۲-c_۱b_۲)k$$

در نتیجه:

$$A\times(B\times C)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & ۰ & ۰ \\ b_۲c_۳ & -b_۱c_۳ & b_۱c_۲-c_۱b_۲ \end{vmatrix}=-(a_۱b_۱c_۲-a_۱b_۲c_۱)j-a_۱b_۱c_۳k \qquad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}(A\cdot C)B-(A\cdot B)C&=(a_۱c_۱)(b_۱ i+b_۲ j)-(a_۱b_۱)(c_۱ i+c_۲ j+c_۳ k)\\ &=a_۱b_۱c_۱ i+a_۱b_۲c_۱ j-a_۱b_۱c_۱ i-a_۱b_۱c_۲ j-a_۱b_۱c_۳ k\\ &=-(a_۱b_۱c_۲-a_۱c_۱b_۲)j-a_۱b_۱c_۳ k \qquad (۲)\end{aligned}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: $A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C$

۳-۱-۳۳ تذکر: برای سه بردار A و B و C داریم: $(A\times B)\times C=(A\cdot C)B-(B\cdot C)A$

۳-۱-۳۴ مثال: اگر $A=i+j$ و $B=۲i-۳j+k$ و $C=۴j-۳k$ مطلوبست تعیین

الف) $(A\times B)\times C$ ب) $A\times(B\times C)$

حل: الف)

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۱ \end{vmatrix}=i-j-۵k$$

$$(A\times B)\times C=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & -۵ \\ ۰ & ۴ & -۳ \end{vmatrix}=۲۳i+۳j+۴k$$

ب)

$$B\times C=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۳ \end{vmatrix}=۵i+۶j+۸k$$

$$A\times(B\times C)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۸ \end{vmatrix}=۸i-۸j+k$$

بنابراین در حالت کلی می توان نتیجه گرفت که: $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$

۲-۳ معادلات خط و صفحه

در این قسمت به معرفی معادلات خط و صفحه می‌پردازیم. توجه داریم یک خط راست ممکن است در یک صفحه قرار گرفته باشد مانند خطی که روی یک صفحهٔ کاغذ یا روی تخته سیاه کشیده می‌شود و نیز ممکن است در فضا باشد مانند خط شامل محور z ها که در صفحهٔ xy قرار ندارد یا هر خط دیگری که یک صفحه را در حداکثر یک نقطه قطع کند. با توجه به تفاوتی که میان معادلات خط در یک صفحه و یا خارج از آن (در فضا) وجود دارد ابتدا به تعریف یک صفحه می‌پردازیم.

۱-۲-۳ تعریف: یک صفحه معمولاً با داشتن دو عامل زیر مشخص می‌شود :

الف) یک نقطه از آن صفحه ب) بردار عمود بر آن صفحه

اکنون فرض کنیم $P_۰(x_۰,y_۰,z_۰)$ یک نقطهٔ ثابت و بردار $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ یک بردار داده شده باشد، اگر صفحهٔ وابسته به نقطهٔ $P_۰$ و بردار $\vec{N}$ را صفحهٔ A بنامیم و یک نقطهٔ دلخواه $P(x,y,z)$ را در آن درنظر بگیریم آنگاه ملاحظه می‌کنیم که:

$$P(x,y,z)\in A\ \text{صفحهٔ}\ \Leftrightarrow \overrightarrow{P_۰P}\perp\vec{N}\Leftrightarrow\overrightarrow{P_۰P}\cdot\vec{N}=۰$$

بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{P_۰P}=(x-x_۰)\vec{i}+(y-y_۰)\vec{j}+(z-z_۰)\vec{k}$$

پس

$$۰=\overrightarrow{P_۰P}\cdot\vec{N}=a(x_۰-x)+b(y_۰-y)+c(z_۰-z)$$

لذا معادلهٔ صفحهٔ A وابسته به نقطهٔ $P_۰$ روی آن و بردار $\vec{N}$ عمود بر آن عبارتست از

$$a(x_\circ - x) + b(y_\circ - y) + c(z_\circ - z) = \circ$$

۳-۲-۲ تذکر: گاهی ممکن است معادلهٔ یک صفحه بصورت زیر نمایش داده شود:

$$ax + by + cz + d = \circ$$

در این حالت توجه داریم که $d = -ax_\circ - by_\circ - cz_\circ$

در هر صورت از معادلهٔ یک صفحهٔ هموار می‌توان بردار عمود بر آن صفحه را از روی ضرایب متغیرهای x و y و z بدست آورد. بردار عمود بر صفحه را بردار نرمال صفحه نیز می‌نامند.

۳-۲-۳ مثال: معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که از نقطهٔ $P_\circ(۱,۱,۱)$ گذشته و بردار $\vec{N} = ۳\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ بر آن عمود باشد.

حل: با توجه به معادلهٔ صفحه در تعریف ۳-۲-۱ داریم:

$$x_\circ = y_\circ = z_\circ = ۱ \qquad a = ۳ \qquad b = -۱ \qquad c = ۱$$

در نتیجه داریم

$$a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = ۳(x-۱) - (y-۱) + (z-۱) = \circ$$

و یا

$$۳x - y + z - ۳ = \circ$$

۳-۲-۴ مثال: معادلهٔ صفحهٔ xy از دستگاه مختصات سه بعدی را بنویسید.

حل: میدانیم برای بدست آوردن معادلهٔ یک صفحه همواره یک نقطه از آن صفحه و بردار عمود بر آن صفحه لازم است. اکنون برای نوشتن صفحهٔ xy توجه داریم که نقطهٔ مبداء مختصات روی آن واقع است پس $P_\circ(\circ,\circ,\circ)$ و بردار $\vec{N} = \vec{k}$ نیز بر آن عمود است لذا داریم:

$$\circ = a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = \circ(x-\circ) + \circ(y-\circ) + (z-\circ) = z$$

پس معادلهٔ صفحهٔ xy برابر است با $z = \circ$.

حال بحث را به مفهوم دیگر در این قسمت یعنی خط و معادلات آن در صفحه و فضا معطوف می‌داریم.

۳-۲-۵ تعریف (معادلهٔ خط در صفحه)

معمولاً یک خط در صفحه با داشتن دو عامل شیب و عرض از مبداء مشخص می‌شود. اگر m شیب خط و h عرض از مبداء آن باشد، آنگاه معادلهٔ این خط عبارت است از $y = mx + h$. اکنون می‌خواهیم تعبیر دیگری برای ارائهٔ معادلهٔ یک خط در صفحه ارائه دهیم که این تعبیر توصیف بهتر و دقیقتر از معادلهٔ خط در صفحه دارد.

فرض کنیم $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ نقطه ای از خط و $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ بردار عمود بر خط باشد، دراینصورت اگر d خط مفروض باشد و $P(x, y)$ نقطه ای دلخواه از خط d باشد آنگاه خواهیم داشت

$$P(x, y) \in d \text{ خط } \Leftrightarrow \overrightarrow{P_{\circ}P} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_{\circ}P} \cdot \vec{N} = \circ$$

بنابراین داریم:

$$\circ = \overrightarrow{P_{\circ}P} \cdot \vec{N} = ((x - x_{\circ})\vec{i} + (y - y_{\circ})\vec{j}) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j})$$
$$= a(x - x_{\circ}) + b(y - y_{\circ})$$

پس
$$\circ = a(x - x_{\circ}) + b(y - y_{\circ})$$

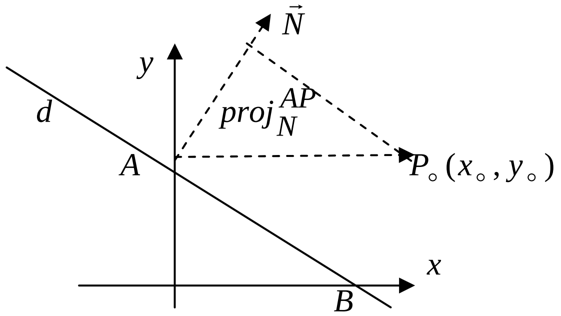
و یا
$$ax + by - ax_{\circ} - by_{\circ} = \circ$$

با فرض $c = -ax_{\circ} - by_{\circ}$ خواهیم داشت $ax + by + c = \circ$ که نمایش معادلهٔ یک خط در صفحه است.

۳-۲-۶ تذکر: توجه داریم که نمایش معادلهٔ خط در صفحه بصورت $ax + by + c = \circ$ را می توان به سادگی به نمایش $y = mx + h$ تبدیل کرد و در اینصورت مقادیر m (شیب) و h (عرض از مبداء) عبارتند از $h = -\frac{c}{a}$ و $m = -\frac{a}{b}$. برتری نمایش معادلهٔ خط در صفحه بصورت $ax + by + c = \circ$ در این است که می‌توان از این معادله بردار عمود بر خط را از روی ضرایب متغیرهای x و y نوشت. حال به کاربردی از این نمایش در بدست آوردن فاصلهٔ یک نقطه خارج یک خط تا آن خط در یک صفحه می‌پردازیم.

۳-۲-۷ (فاصلهٔ یک نقطه از خط در صفحه)

فرض کنید یک خط در صفحه به معادلهٔ $ax + by + c = \circ$ باشد و $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ نقطه ای خارج خط d باشد دراینصورت فاصلهٔ نقطهٔ P تا خط d را می‌توان بصورت مراحل زیر بدست آورد.



مرحلهٔ (۱): محل برخورد خط d با محورهای مختصات یعنی محور x و محور y را بدست می‌آوریم. برای پیدا کردن تقاطع خط با محور x ها کافی است در معادلهٔ خط $y=\circ$ قرار دهیم و نیز برای بدست آوردن نقطهٔ قاطع خط با محور y ها در معادلهٔ خط $x=\circ$ قرار می‌دهیم بنابراین داریم

محل برخورد با محور y ها $\qquad x=\circ \Rightarrow A(\circ,-\frac{c}{d})$

محل برخورد با محور x ها $\qquad y=\circ \Rightarrow B(-\frac{c}{a},\circ)$

مرحلهٔ (۲): از معادلهٔ خط می توان بردار عمود بر خط را بصورت زیر نوشت:

$$\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}$$

همچنین داریم $\qquad \overrightarrow{AP}=(x_\circ-\circ)\vec{i}+(y_\circ-(-\frac{c}{b}))\vec{j}=x_\circ\vec{i}+(y_\circ+\frac{c}{b})\vec{j}$

مرحلهٔ (۳): تصویر بردار $\overrightarrow{AP}$ روی $\vec{N}$ یعنی $Proj_{\vec{N}}\overrightarrow{AP}$ را محاسبه می‌کنیم. بنا به مثال ۱۶-۱-۳ داریم

$$Proj_{\vec{N}}\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{a x_\circ+by_\circ+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

و ملاحظه می شود که فاصلهٔ نقطهٔ P تا خط d دقیقاً همین مقدار تصویر می‌باشد.

چون ممکن است حاصل $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{N}$ مقدار منفی شود لذا با قرار دادن قدر مطلق خواهیم داشت

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } P \text{ تا خط } d=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۸-۲-۳ مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $P(۱,۲)$ را از خط $۲x-y+۴=\circ$ بدست آورید.

حل: با استفاده از فرمول بدست آمدهٔ فوق داریم

$$\text{فاصلهٔ نقطه از خط}=\frac{|(۲\times۱)+(-۱\times۲)+۴|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$$

۹-۲-۳ تذکر: چنانچه در محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط در صفحه به حالتی برخورد کنیم که نقطه روی خط قرار داشته باشد، آنگاه واضح است که فاصله برابر صفر است و این نتیجه را به کمک فرمول فوق نیز می‌توان بدست آورد زیرا در این فرمول $|a x_\circ+by_\circ+c|=\circ$ خواهد بود.

۱۰-۲-۳ تعریف (معادلهٔ خط در فضا)

یک خط در فضا بوسیلهٔ دو عامل زیر بصورت منحصر بفرد مشخص می‌شود.

الف) یک نقطه از خط $\qquad$ ب) بردار موازی خط که آنرا بردار هادی خط گوییم

اکنون اگر d یک خط دلخواه در فضا باشد که نقطهٔ $P_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ یکی از نقاط آن خط و بردار $\vec{V}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ بردار موازی (هادی) خط باشد آنگاه نقطهٔ $P(x,y,z)$ روی این خط قرار دارد چنانچه داشته باشیم

$$P(x,y,z)\in d \text{ خط } \Leftrightarrow \overrightarrow{P_\circ P} \parallel \vec{V}$$

و این هنگامی برقرار است که بردارهای $\overrightarrow{P_\circ P}$ و $\vec{V}$ در یک راستا قرار داشته باشند یعنی یا هر دو هم جهت باشد و یا در خلاف جهت یکدیگر قرار داشته باشند لذا باید داشته باشیم $\overrightarrow{P_\circ P}=t\vec{V}$ که t مقدار حقیقی است و ممکن است مثبت یا منفی باشد. مثبت بودن t بدین معنی است که بردارهای $\vec{V}$ و $\overrightarrow{P_\circ P}$ در یک جهت هستند و منفی بودن آن به معنی خلاف جهت همدیگر می باشد. بنابراین داریم

$$\overrightarrow{P_\circ P}=(x-x_\circ)\vec{i}+(y-y_\circ)\vec{j}+(z-z_\circ)\vec{k}$$
$$t\vec{V}=t(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})=ta\vec{i}+tb\vec{j}+tc\vec{k}$$

در نتیجه باید داشته باشیم $z-z_\circ=tc$ و $y-y_\circ=tb$ و $x-x_\circ=ta$ و یا

$$\begin{cases} x=at+x_\circ \\ y=bt+y_\circ \\ z=ct+z_\circ \end{cases}$$

این دستگاه معادلات پارامتری را معادلات پارامتری خط d می‌گوییم.

۱۱-۲-۳ تذکر: همانطوریکه از معادلات پارامتری خط ملاحظه می‌گردد وابستگی خط در فضا به دو عامل نقطه روی خط و بردار موازی (هادی) خط را کاملاً مشهود می‌سازد. ضرایب پارامتر t بردار هادی را مشخص می‌سازد و مقادیر $x_\circ$، $y_\circ$ و $z_\circ$ نقطهٔ روی خط را معین می‌کند. بطور کلی به ازای هر مقدار t یک نقطه از خط حاصل می‌شود و نقطهٔ $P_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ به ازای $t=\circ$ بدست می‌آید. اکنون چنانچه بردار هادی خط یعنی $\vec{V}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ چنان باشد که a و b و c مقادیر غیر صفر باشند، آنگاه معادلات پارامتری خط به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{cases} x-x_\circ=at \\ y-y_\circ=bt \\ z-z_\circ=ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_\circ}{a}=t \\ \dfrac{y-y_\circ}{b}=t \\ \dfrac{z-z_\circ}{c}=t \end{cases}$$

و درنتیجه معادلهٔ زیر بدست می‌آید که آنرا معادلات کانونیک یا استاندارد خط در فضا می‌گوییم.

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}$$

۱۲-۲-۳ مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(\circ,۱,۲)$ بگذرد و موازی بردار $\vec{V}=\vec{i}-۴\vec{j}+۳\vec{k}$ باشد.

حل: معادلهٔ خط عبارتست از:
$$\frac{x-\circ}{۱}=\frac{y-۱}{-۴}=\frac{z-۲}{۳}$$

۱۳-۲-۳ مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $P(۱,-۱,۲)$ و $Q(۳,۴,-۵)$ بگذرد.

حل: برای نوشتن معادلهٔ خط نیاز به یک نقطه از آن داریم که هرکدام از نقاط P یا Q می‌تواند باشد. همچنین به بردار هادی آن نیاز داریم که بردار $\overrightarrow{PQ}$ می‌تواند بعنوان بردار هادی خط اختیار شود لذا داریم

$$\vec{V}=\overrightarrow{PQ}=(۳-۱)\vec{i}+(۴-(-۱))\vec{j}+(-۵-۲)\vec{k}=۲\vec{i}+۵\vec{j}-۷\vec{k}$$ بردار هادی (موازی) خط

بنابراین معادلهٔ خط عبارتست از
$$\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{۵}=\frac{z-۲}{-۷}$$

۱۳-۲-۳ مثال: معادلهٔ خط عمود بر صفحهٔ $۳x+۴y-۲z+۶=\circ$ را در نقطهٔ $(\circ,\circ,۳)$ از آن بدست آورید.

حل: بردار هادی خط را می‌توان دقیقاً بردار نرمال (عمود بر) صفحه در نظر گرفت لذا با توجه به معادلهٔ صفحه داریم:

$$V=۳\vec{i}+۴\vec{j}-۲\vec{k}$$ بردار هادی خط عمود بر صفحه

$$\frac{x-\circ}{۳}=\frac{y-\circ}{۴}=\frac{z-۳}{-۲}$$ معادلهٔ خط عمود بر صفحه

۳-۳ اوضاع نسبی خطوط و صفحات

با توجه به اطلاعاتی که در مورد معادلات خط و صفحه بدست آوردیم اکنون می‌توانیم در مورد وضعیتهای ممکن دو صفحه، دو خط و یا یک خط و صفحه و نیز نحوهٔ پیدا کردن فصل مشترک آنها در صورت تقاطع را بیان نمائیم. در این قسمت به اوضاع نسبی خطوط و صفحات بصورت زیر خواهیم پرداخت.

الف) اوضاع نسبی دو صفحه

ب) اوضاع نسبی یک خط و صفحه

ج) اوضاع نسبی دو خط

اکنون به بررسی هر کدام از اوضاع نسبی فوق می‌پردازیم

الف) اوضاع نسبی دو صفحه

فرض کنیم $P_۱ : a_۱x + b_۱y + c_۱z + d_۱ = ۰$ و $P_۲ : a_۲x + b_۲y + c_۲z + d_۲ = ۰$ معادلات دو صفحهٔ مفروض باشند، این دو صفحه نسبت به هم دو حالت دارند:

حالت اول: دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ موازی هستند.

حالت دوم: دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ متقاطع هستند.

در حالتی که صفحات $P_۱$ و $P_۲$ با یکدیگر موازی باشند، بردارهای نرمال این صفحات با یکدیگر موازی می باشند لذا اگر $\vec{N}_۱ = a_۱\vec{i} + b_۱\vec{j} + c_۱\vec{k}$ بردار نرمال صفحهٔ $P_۱$ و $\vec{N}_۲ = a_۲\vec{i} + b_۲\vec{j} + c_۲\vec{k}$ بردار نرمال صفحهٔ $P_۲$ باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} = \frac{c_۱}{c_۲} \Leftrightarrow \vec{N}_۱ \parallel \vec{N}_۲ \Leftrightarrow$$ صفحهٔ $P_۱$ موازی صفحهٔ $P_۲$ است

بنابراین شرط توازی دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ اینست که داشته باشیم $\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{b_۱}{b_۲} = \frac{c_۱}{c_۲}$ در غیر اینصورت دو صفحه متقاطع خواهند بود و تقاطع دو صفحه را که یک خط می‌باشد، خط فصل مشترک می‌گوییم. در حالت خاص صفحات $P_۱$ و $P_۲$ بر یکدیگر عمود هستند. چنانچه داشته باشیم

$$\vec{N}_۱ \perp \vec{N}_۲ \quad \text{یا} \quad a_۱a_۲ + b_۱b_۲ + c_۱c_۲ = ۰$$

۱-۳-۳ مثال: صفحات $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ بصورت زیر داده شده اند، اوضاع نسبی آنها را بررسی نمائید.

$P_۱ : ۲x + ۵y - ۳z + ۹ = ۰$

$P_۲ : -۲x - ۵y + ۵z - ۲ = ۰$

$P_۳ : ۶x + ۱۵y - ۹z + ۱ = ۰$

حل: صفحات $P_۱$ و $P_۲$ متقاطعند زیرا $\frac{۲}{-۲} = \frac{۵}{-۵} \neq \frac{-۳}{۵}$. همچنین صفحات $P_۲$ و $P_۳$ متقاطعند چون $\frac{-۲}{۶} = \frac{-۵}{۱۵} \neq \frac{۵}{-۹}$ ولی صفحات $P_۱$ و $P_۳$ موازیند زیرا $\frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{-۳}{-۹}$.

۲-۳-۳ مثال: خط فصل مشترک صفحات $P_۱ : x + y + z - ۲ = ۰$ و $P_۲ : ۳x + y - ۴z + ۵ = ۰$ را بدست آورید.

حل: ابتدا توجه داریم که صفحات P_1 و P_2 متقاطعند زیرا $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{1} \neq -\frac{1}{4}$. اکنون برای پیدا کردن معادلهٔ فصل مشترک بصورت مراحل زیر عمل می‌کنیم.

مرحلهٔ (۱): معادلات بردار نرمال هر کدام از صفحات را از روی معادلات صفحه مشخص می‌کنیم

$$\vec{N}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \text{بردار نرمال صفحهٔ } P_1$$

$$\vec{N}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \quad \text{بردار نرمال صفحهٔ } P_2$$

مرحلهٔ (۲): حاصل ضرب خارجی بردارهای $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ را محاسبه می‌کنیم

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$$

بردار $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ برداری است که در جهت راستای خط فصل مشترک می‌باشد لذا بردار هادی خط فصل مشترک را می‌توان همین بردار $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ اختیار کرد. بنابراین $\vec{V} = -5\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$ بردار هادی خط فصل مشترک است.

مرحلهٔ (۳): نقطه ای روی فصل مشترک صفحات P_1 و P_2 اختیار می‌کنیم برای این منظور باید جوابی از دستگاه $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x + y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$ را بدست آوریم. چون این دستگاه شامل دو معادله و سه مجهول می‌باشد پس دارای بینهایت جواب است یکی از این جوابها را می‌توان با قرار دادن $z = 0$ بدست آورد لذا دستگاه $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}$ حاصل می‌شود که جواب آن عبارتست از $x = -\frac{7}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$ پس نقطهٔ بدست آمده روی فصل مشترک نقطهٔ $(-\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, 0)$ می‌باشد. بنابراین معادلهٔ خط فصل مشترک برابر است با

$$\frac{x + \frac{7}{2}}{-5} = \frac{y - \frac{11}{2}}{7} = \frac{z - 0}{-2}$$

۳-۳-۳ مثال: زاویهٔ بین صفحات $P_1 : x - y + z - 1 = 0$ و $P_2 : x + y - z + 2 = 0$ را بدست آورید.

حل: زاویهٔ بین دو صفحهٔ P_1 و P_2 دقیقاً برابر است با زاویهٔ بین بردارهای نرمال آنها. لذا داریم $\vec{N}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{N}_2 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ بنابراین زاویهٔ بین دو بردار $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ برابر است با

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{1 - 1 - 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

درنتیجه زاویهٔ بین دو صفحه عبارتست از $\theta = \cos^{-۱}(-\frac{۱}{۳})$.

۴-۳-۳ تذکر: همانطوریکه ملاحظه شد فصل مشترک دو صفحهٔ متقاطع یک خط می‌باشد. بنابراین معادلهٔ یک خط علاوه بر نمایش پارامتری و نمایش کانونیک (استاندارد) می‌تواند نمایشی بصورت دو صفحه نیز داشته باشد. هر کدام از این نمایش ها قابل تبدیل به یکدیگر نیز می‌باشند.

۵-۳-۳ مثال: معادلهٔ یک خط بصورت فصل مشترک صفحات $\begin{cases} x - y + ۲z - ۱ = ۰ \\ x + y + z + ۲ = ۰ \end{cases}$ داده شده است هر کدام از نمایشهای پارامتری و کانونیک آنرا بدست آورید.

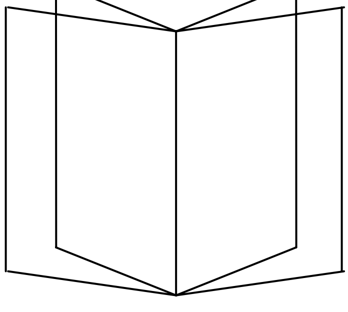
حل: ابتدا نمایش پارامتری را بدست می‌آوریم فرض کنیم $z = t$ اختیار نمائیم دراینصورت دستگاه $\begin{cases} x - y + ۲t - ۱ = ۰ \\ x + y + t + ۲ = ۰ \end{cases}$ حاصل می‌شود و با حل این دستگاه بر حسب پارامتر t خواهیم داشت:

$۲x + ۳t + ۱ = ۰$ و یا $۲x = -۳t - ۱$ و یا $x = -\frac{۳}{۲}t - \frac{۱}{۲}$ درنتیجه $y = \frac{۱}{۲}t - \frac{۳}{۲}$. پس معادلات پارامتری خط برابر است با

$$\begin{cases} x = -\frac{۳}{۲}t - \frac{۱}{۲} \\ y = \frac{۱}{۲}t - \frac{۳}{۲} \\ z = t \end{cases}$$

و نیز معادلات کانونیک آن عبارتند از $\dfrac{x + \frac{۱}{۲}}{-\frac{۳}{۲}} = \dfrac{y + \frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \dfrac{z}{۱}$

۵-۳-۳ تذکر: ممکن است معادلهٔ یک خط بصورت فصل مشترک بیش از دو صفحه نیز قرار گیرد و این در حالتی است که همهٔ صفحات در حول یک محور قرار داشته باشند مانند شکل زیر:



شکل (۵-۳-۳)

ب) اوضاع نسبی یک خط و صفحه

فرض کنیم $P: ax+by+cz+d=0$ یک صفحه و $D: \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{b_1}=\frac{z-z_0}{c_1}$ یک خط در فضا باشد دراینصورت صفحهٔ P و خط D نسبت به هم دو حالت دارند

حالت اول: خط D صفحهٔ P را قطع نمی‌کند یعنی خط D موازی صفحهٔ P است

حالت دوم: خط D صفحهٔ P را قطع می‌کند

در حالتی که خط D موازی صفحهٔ P باشد، بردار هادی خط D بر بردار نرمال صفحهٔ P عمود خواهد بود یعنی

$$\vec{V}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k} \quad \text{بردار هادی خط } D$$

$$\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k} \quad \text{بردار نرمال صفحهٔ } P$$

$$0=\vec{V}\cdot\vec{N}=aa_1+bb_1+cc_1$$

بنابراین شرط توازی خط D و صفحهٔ P عبارتست از $aa_1+bb_1+cc_1=0$ درغیر اینصورت خط D و صفحهٔ P یکدیگر را در یک نقطه قطع خواهند کرد که آنرا نقطهٔ فصل مشترک خط و صفحه می‌گوییم.

۶-۳-۳ مثال: نقطهٔ فصل مشترک صفحهٔ $P: x+y+4z-2=0$ و خط $D: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ را بدست آورید.

حل: برای بدست آوردن نقطهٔ فصل مشترک صفحهٔ P و خط D بصورت مراحل زیر عمل می کنیم.

مرحلهٔ (۱): معادلهٔ پارامتری خط D را بدست می‌آوریم.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t \\ z=-t-1 \end{cases}$$

مرحلهٔ (۲) معادلات پارامتری خط D را در معادلهٔ صفحهٔ P قرار می‌دهیم.

$$0=x+y+4z-2=(2t+1)+t+4(-t-1)=-t-3 \Rightarrow t=-3$$

مرحلهٔ (۳): مقدار بدست آمدهٔ t را در معادلات پارامتری خط D قرار می‌دهیم و نقطهٔ فصل مشترک بدست می‌آید.

$$t=-۳\Rightarrow\begin{cases}x=۲(-۳)+۱=-۵\\ y=-۳\\ z=-(-۳)-۱=۲\end{cases}$$

ج) اوضاع نسبی دو خط

فرض کنیم D و D' دو خط در فضا باشند دراینصورت حالت زیر اتفاق می‌افتد.

حالت اول: خطوط D و D' موازیند.

حالت دوم: خطوط D و D' متقاطع هستند.

حالت سوم: خطوط D و D' متنافر می‌باشند.

توجه داریم در حالت های اول و دوم دو خط کاملاً در یک صفحه واقع هستند و در حالت سوم دو خط در یک صفحه قرار نمی‌گیرند. لذا می‌توان تقسیم بندی فوق را بدین صورت نیز بیان کرد که دو خط یا در یک صفحه قرار نمی‌گیرند که در اینصورت متنافر و یا در یک صفحه قرار می‌گیرند که غیر متنافر و ممکن است موازی یا متقاطع باشند. بنابراین لازم است در ابتدا شرط متنافر و یا غیر متنافر بودن را مورد بررسی قرار دهیم.

۳-۳-۷ (شرط متنافر بودن دو خط)

فرض کنیم D و D' دو خط در فضا با معادلات داده شدهٔ زیر باشند:

$$D:\frac{x-a_۱}{b_۱}=\frac{y-a_۲}{b_۲}=\frac{z-a_۳}{b_۳}\qquad D':\frac{x-c_۱}{A_۱}=\frac{y-c_۲}{A_۲}=\frac{z-c_۳}{A_۳}$$

از معادلات فوق می‌توان اطلاعات زیر را استخراج نمود:

$P(a_۱,a_۲,a_۳)$ نقطهٔ روی خط D

$Q(c_۱,c_۲,c_۳)$ نقطهٔ روی خط D'

$\vec{V}_۱=b_۱\vec{i}+b_۲\vec{j}+b_۳\vec{k}$ بردار هادی خط D

$\vec{V}_۲=d_۱\vec{i}+d_۲\vec{j}+d_۳\vec{k}$ بردار هادی خط D'

اکنون طی مراحل زیر شطر متنافر بودن دو خط D و D' را بدست می‌آوریم.

مرحلهٔ (۱): از P روی خط D به نقطهٔ Q روی خط D' وصل می‌کنیم. دراینصورت بردار $\overrightarrow{PQ}$ برابر است با $\overrightarrow{PQ}=(c_۱-a_۱)\vec{i}+(c_۲-a_۲)\vec{j}+(c_۳-a_۳)\vec{k}$ خطی که نقطهٔ P را به نقطهٔ Q متصل می‌کند، D'' می‌نامیم.

مرحلهٔ (۲): خطوط D و D'' یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند و می‌توان صفحهٔ گذرنده بر دو خط D و D'' را بدست آورد. واضح است بردار نرمال این دو صفحه برابر است با $\vec{N}=\vec{V}_1 \times \overrightarrow{PQ}$.

مرحلهٔ(۳): حاصلضرب نقطه ای بردارهای $\vec{N}$ و $\vec{V}_2$ را در نظر می‌گیریم. اگر خطوط D و D' در یک صفحه قرار داشته باشند آنگاه باید داشته باشیم $\vec{V}_2 \perp \vec{N}$. در غیر اینصورت خطوط D و D' در یک صفحه قرار ندارند یعنی متنافر می‌باشند.

بنابراین شرط متنافر بودن دو خط D و D' این است که $\vec{V}_2 \cdot \vec{N} \neq 0$.

اکنون بردار $\vec{N}$ و سپس حاصلضرب نقطه ای $\vec{V}_2 \cdot \vec{N}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\vec{N}=\vec{V}_1 \times \overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=[b_2(c_3-a_3)-b_3(c_2-a_2)]\vec{i}$$

$$=[b_1(c_3-a_3)-b_3(c_1-a_1)]\vec{j}+[b_1(c_2-a_2)-b_2(c_1-a_1)]\vec{k}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}&\vec{V}_2 \cdot \vec{N}=d_1[b_2(c_3-a_3)-b_3(c_2-a_2)]-d_2[b_1(c_3-a_3)-b_3(c_1-a_1)]\\&+d_3[b_1(c_2-a_2)-b_2(c_1-a_1)]=(d_1b_2-d_2b_1)(c_3-a_3)+\\&(d_3b_1-d_1b_3)(c_2-a_2)+(d_2b_3-d_3b_2)(c_1-a_1)\end{aligned}$$

با یک محاسبهٔ ساده می‌توان نشان داد که حاصلضرب نقطه ای فوق دقیقاً برابر با حاصل دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} a_1-c_1 & b_1 & d_1 \\ a_2-c_2 & b_2 & d_2 \\ a_3-c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

بنابراین شرط متنافر بودن دو خط D و D' را می‌توان بصورت زیر بیان کرد

$$\text{متنافر } D' \text{ و } D \text{ خطوط} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1-c_1 & b_1 & d_1 \\ a_2-c_2 & b_2 & d_2 \\ a_3-c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

چنانچه دترمینان فوق صفر باشد دو خط غیر متنافر هستند یعنی دو خط موازیند یا دو خط متقاطع می‌باشند.

۸-۳-۳ مثال: خطوط D و D' با معادلات زیر داده شده اند شرط متنافر بودن آنها را بررسی نمائید.

$$D:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{1} \qquad D':\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z+3}{-1}$$

حل: داریم

$$\begin{vmatrix} a_1-c_1 & b_1 & d_1 \\ a_2-c_2 & b_2 & d_2 \\ a_3-c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

پس دو خط D و D' متنافر می‌باشند.

۹-۳-۳ (شرایط توازی و تقاطع دو خط)

فرض کنیم D و D' دو خط با معادلات داده شده در ۷-۳-۳ باشند، دراینصورت این دو خط موازیند چنانچه

اولاً) متنافر نباشند ثانیاً) بردارهای هادی آنها موازی باشند

بعبارت دیگر دو خط D و D' موازیند چنانچه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{vmatrix} a_1-c_1 & b_1 & d_1 \\ a_2-c_2 & b_2 & d_2 \\ a_3-c_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{b_1}{d_1}=\frac{b_2}{d_2}=\frac{b_3}{d_3}$$

بطور مشابه دو خط D و D' متقاطع هستند چنانچه متنافر و موازی نباشند یعنی حاصل دترمینان فوق صفر باشد ولی شرط $\frac{b_1}{d_1}=\frac{b_2}{d_2}=\frac{b_3}{d_3}$ برقرار نباشد.

۴-۳ نمونه سوالات تستی حل شده

۱-۴-۳: اگر $|\vec{v}|=|\vec{u}|$ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ کدام است؟

الف) صفر ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{4}$

- گزینهٔ (ب) صحیح است.

$$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{v}+\vec{v})=\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})-\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=0$$

۲-۴-۳: زاویهٔ بین دو بردار $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ عبارتست از:

الف) صفر ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{4}$

- گزینهٔ (الف) صحیح است زیرا بردار $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ مضربی از بردار $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ است.

۳-۴-۳: اگر $\vec{u}=\vec{i}+۲\vec{j}+۲\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ تصویر بردار $\vec{u}$ در امتداد $\vec{v}$ کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۳}\vec{i}+\frac{۱}{۳}\vec{j}+\frac{۲}{۳}\vec{k}$ ب) $\frac{۱}{۳}\vec{i}+\frac{۲}{۳}\vec{j}+\frac{۲}{۳}\vec{k}$

ج) $\frac{۱}{۳}\vec{i}-\frac{۱}{۳}\vec{j}+\frac{۱}{۳}\vec{k}$ د) $\frac{۱}{۳}\vec{i}-\frac{۱}{۳}\vec{j}+\frac{۲}{۳}\vec{k}$

- گزینهٔ (ب) صحیح است

$$\Pr oj_{\vec{V}}\vec{u}=\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^{۲}}\right)\vec{v}=\frac{۱-۲+۲}{۳}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=\frac{۱}{۳}\vec{i}-\frac{۱}{۳}\vec{j}+\frac{۱}{۳}\vec{k}$$

۳-۴-۴: حاصل $\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})))$ برابر است با:

الف) $a^{۳}b$ ب) $-a^{۳}b$ ج) $a^{۴}b$ د) $-a^{۴}b$

- گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{b}=-a^{۲}b$$

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})))=\vec{a}\times(\vec{a}\times(-a^{۲}\vec{b}))=\vec{a}\cdot(-a^{۲}\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})(-a^{۲}\vec{b})=a^{۴}b$$

۳-۴-۵: اگر $۳x-۴y+۲z=۱۷$ حداقل عبارت $x^{۲}+۴y^{۲}+z^{۲}$ برابر است با

الف) ۳۴ ب) ۱۷ ج) ۵۱ د) هیچکدام

- گزینهٔ (ب) صحیح است.

$$\vec{a}=(۳,۲,۲) \quad و \quad \vec{b}=(x,۲y,z)$$

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow(۹+۴+۴)(x^{۲}+۴y^{۲}+z^{۲})\ge(۳x-۴y+z)^{۲}=۱۷^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۴y^{۲}+z^{۲}\ge۱۷$$

۳-۴-۶: حجم یک چهار وجهی به رئوس $A(۱,۱,۱)$ و $B(-۲,۱,۲)$ و $C(۳,-۳,۳)$ و $D(۰,۰,۸)$ کدام است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۸ د) ۱۲

-گزینهٔ (د) صحیح است.

$$\overrightarrow{AB}=(-۳,۰,۱) \quad و \quad \overrightarrow{AC}=(۲,-۴,۲) \quad و \quad \overrightarrow{AD}=(-۱,-۱,۷)$$

$$\vec{V}=\frac{۱}{۶}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\frac{۱}{۶}\times۷۲=۱۲$$

۳-۴-۷: معادلهٔ صفحه ای که از فصل مشترک دو صفحهٔ $x+y+z=۶$ و $۲x+۳y+۴z+۵=۰$ و نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ می‌گذرد :

الف) $۲۰x-۲۳y+۲۶z-۶۹=۰$ ب) $۲۰x+۲۳y-۲۶z+۶۹=۰$

ج) $۲۰x+۲۳y+۲۶z+۶۹=۰$ د) $۲۰x+۲۳y+۲۶z-۶۹=۰$

- گزینهٔ (د) صحیح است

$$\alpha(x+y+z-۶)+\beta(۲x+۳y+۴z+۵)=۰\Rightarrow -۳\alpha+۱۴\beta=۰\Rightarrow \alpha=\frac{۱۴}{۳}\beta$$

$$\frac{۱۴}{۳}\beta(x+y+z-۶)+\beta(۲x+۳y+۴z+۵)=۰\Rightarrow ۲۰x+۲۳y+۲۶z-۶۹=۰$$

۳-۴-۸: قرینهٔ صفحهٔ $x+۲y+z=۵$ نسبت به صفحهٔ xoz کدام است؟

الف) $x-۲y-z=۵$ ب) $x+۲y-z=۵$ ج) $x-۲y+z=۵$ د) $-x+۲y-z=۵$

- گزینهٔ (ج) صحیح است.

۳-۴-۹: معادلهٔ صفحهٔ شامل نیمساز زوایای xoy و yoz کدام است؟

الف) $x-y+z=۰$ ب) $x+y-z=۰$ ج) $-x+y+z=۰$ د) $x-y-z=۰$

- گزینهٔ (الف) صحیح است.

نقطهٔ $O(۰,۰,۰)$ روی هر دو نیمساز است، نقطهٔ $A(۱,۱,۰)$ روی نیمساز xoy و نقطهٔ $B(۰,۱,۱)$ روی نیمساز yoz واقع است صفحهٔ مطلوب صفحه ایست که از این سه نقطه می‌گذرد.

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(۱,-۱,۱) \quad \text{و} \quad O(۰,۰,۰)\Rightarrow x-y+z=۰$$

۳-۴-۱۰: فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,۳,-۱)$ از خط $\begin{cases} x-۲z=۷ \\ y=۱ \end{cases}$ کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۵}\sqrt{۳۵}$ ب) $\frac{۳}{۵}\sqrt{۳۵}$ ج) $\frac{۳}{۵}\sqrt{۷۰}$ د) $\frac{۲}{۵}\sqrt{۷۰}$

- گزینهٔ (د) صحیح است.

$$D:\begin{cases} x=۲t+۷ \\ y=۱ \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{l}:(۲,۰,۱),\ P_۰(-۱,۳,-۱),\ P_۱(۷,۱,۰)$$

$$\vec{l}\times\overrightarrow{P_۰P_۱}=(۲,۰,۱)\times(۸,-۲,۱)=(۲,۶,-۴)$$

$$D=\frac{|\vec{l}\times P_\circ P_\text{۱}|}{|\vec{l}|}=\frac{\sqrt{\text{۴}+\text{۳۶}+\text{۱۶}}}{\sqrt{\text{۴}+\text{۱}}}=\frac{\sqrt{\text{۵۶}}}{\sqrt{\text{۵}}}=\frac{\text{۲}}{\text{۵}}\sqrt{\text{۷}\circ}$$

۱۱-۴-۳: معادلهٔ صفحه ای که از سه نقطهٔ $P_\text{۱}(\text{۱},-\text{۲},\text{۳})$ و $P_\text{۲}(\text{۴},\text{۱},-\text{۲})$ و $P_\text{۳}(-\text{۲},-\text{۳},\circ)$ عبور می‌کند عبارتست از:

الف) $\text{۷}x-\text{۱۲}y-\text{۳}z=\text{۲۲}$
ب) $\text{۷}x+\text{۱۲}y+\text{۳}z=\text{۲۲}$
ج) $\text{۷}x-\text{۱۲}y+\text{۳}z=\text{۲۲}$
د) $\text{۷}x+\text{۱۲}y-\text{۳}z=\text{۲۲}$

- گزینهٔ (الف) صحیح است.

$$\overrightarrow{P_\text{۱}P_\text{۲}}=(-\text{۳},-\text{۳},\text{۵})\qquad \overrightarrow{P_\text{۲}P_\text{۳}}=(-\text{۶},-\text{۴},\text{۲})$$

$$\overrightarrow{P_\text{۱}P_\text{۲}}\times\overrightarrow{P_\text{۲}P_\text{۳}}=\text{۱۴}\vec{i}-\text{۲۴}\vec{j}-\text{۶}\vec{k}$$

$$\text{۱۴}(x-\text{۴})-\text{۲۴}(y-\text{۱})-\text{۶}(z+\text{۲})=\circ\Rightarrow \text{۷}x-\text{۱۲}y-\text{۳}z=\text{۲۲}\quad \text{معادلهٔ صفحه}$$

۱۲-۴-۳: معادلهٔ صفحهٔ شامل دو خط $\frac{x-\text{۴}}{\text{۲}}=\frac{y-\text{۷}}{\text{۳}}=z-\text{۳}$ و $\frac{x}{\text{۳}}=\frac{y-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{z-\text{۱}}{\text{۴}}$ کدام است؟

الف) $\text{۲}x+y+z-\text{۲}=\circ$
ب) $-\text{۲}x+y+z-\text{۴}=\circ$
ج) $-\text{۲}x-y+z+\text{۴}=\circ$
د) $\text{۲}x-y-z+\text{۲}=\circ$

- گزینهٔ (د) صحیح است.

$$\vec{N}=\vec{L}_\text{۱}\times\vec{L}_\text{۲}=(\text{۲},\text{۳},\text{۱})\times(\text{۳},\text{۲},\text{۴})=(\text{۱}\circ,-\text{۵},-\text{۵})$$

$$P_\circ=(\circ,\text{۱},\text{۱})\qquad \text{معادلهٔ صفحه}\quad P:\text{۱}\circ(x-\circ)-\text{۵}(y-\text{۱})-\text{۵}(z-\text{۱})=\circ$$

$$\Rightarrow \text{۲}x-y-z-\text{۲}=\circ$$

۱۳-۴-۳: معادلهٔ قرینهٔ خط $\frac{x-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{y-\text{۲}}{\text{۳}}=\frac{z-\text{۱}}{-\text{۳}}$ نسبت به محور x ها کدام است؟

الف) $\frac{x-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{y+\text{۳}}{\text{۳}}=\frac{z+\text{۱}}{\text{۳}}$
ب) $\frac{x-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{y-\text{۲}}{-\text{۳}}=\frac{z+\text{۱}}{\text{۳}}$
ج) $\frac{x-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{y+\text{۲}}{-\text{۳}}=\frac{z+\text{۱}}{\text{۳}}$
د) $\frac{x-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{y+\text{۲}}{-\text{۳}}=\frac{z+\text{۱}}{-\text{۳}}$

- گزینهٔ (ج) صحیح است. y را به $-y$ و z را به $-z$ تبدیل می‌کنیم.

۱۴-۴-۳: فاصلهٔ دو خط $D_\text{۱}:\frac{x-\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{y+\text{۲}}{\text{۲}}=z-\text{۱}$ و $D_\text{۲}:\frac{x+\text{۱}}{\text{۳}}=\frac{y+\text{۳}}{\text{۵}}=\frac{z}{\text{۲}}$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۶}}$
ب) $\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۳}}$
ج) $\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۵}}$
د) $\sqrt{\text{۲}}$

- گزینهٔ (الف) صحیح است.

$$\vec{N}=\vec{N}_۱\times\vec{N}_۲=(۳,۵,۲)\times(۲,۲,۱)=(۱,۱,-۴)$$

$$D_۱ \text{ روی } P_\circ(۱,-۲,۱) \text{ و } D_۲ \text{ روی } P_۱(-۱,-۳,\circ)\Rightarrow \overrightarrow{P_\circ P_۱}(-۲,-۱,-۱)$$

$$d=\frac{|\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_\circ P_۱}|}{|\vec{N}|}=\frac{|-۲-۱+۴|}{\sqrt{۱۶+۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۸}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

۳-۴-۱۵: صفحهٔ نیمساز دو صفحهٔ $۳x-y+۴=\circ$ و $x+۳z+۲=\circ$ کدام است؟

الف) $۲x-y+۳z+۲=\circ$ ب) $۴x-y-۳z-۶=\circ$

ج) $۲x-y-۳z+۲=\circ$ د) $۴x+y+۳z+۶=\circ$

- گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$\frac{|x+۳y+۲|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{|۳x-y+۴|}{\sqrt{۹+۱}}\Rightarrow x+۳y+۲=\pm(۳x-y+۴)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P_۱: ۲x-y-۳z+۲=\circ\\ P_۲: ۴x-y+۳z+۶=\circ\end{cases} \qquad \text{معادلات صفحات نیمساز}$$

۳-5 مسائل

۳-۵-۱: اگر $|\vec{a}|=۴$ و $|\vec{b}|=۵$ و $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=۲۰$ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورید.

۳-۵-۲: ثابت کنید: $\operatorname{Proj}_{\vec{C}}(\vec{A}+\vec{B})=\operatorname{Proj}_{\vec{C}}\vec{A}+\operatorname{Proj}_{\vec{C}}\vec{B}$

۳-۵-۳: اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$، ۴ بردار باشند، ثابت کنید:

۱) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

۲) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

۳) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

۴) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

۵) $|\vec{a}\times\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ (نامساوی کشی شوارتز)

۶) $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$ (نامساوی مثلثی)

۷) $|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲\le۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲$ (قانون متوازی الاضلاع)

۸) $|\vec{a}\times\vec{b}|^۲\le|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲-(\vec{a}\cdot\vec{b})^۲$ (اتحاد لاگر آنژ)

۳-۵-۴: فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر هم صفحه باشند دراینصورت ثابت کنید حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ و $\vec{a}\times\vec{c}$ برابر است با: $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|^{۲}$

۳-۵-۵: اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند نشان دهید: $\max\{|\vec{u}|,|\vec{v}|\}\le\max\{|\vec{u}-\vec{v}|,|\vec{u}+\vec{v}|\}$

۳-۵-۶: اگر $\vec{u}\neq\vec{v}$ و $۰<r<۱$ ثابت کنید: $|r\vec{u}+(۱-r)\vec{v}|\le\max\{|\vec{u}|,|\vec{v}|\}$

۳-۵-۷: بردارهای $\vec{a}\,(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}\,(۲,۱,۱)$ و $\vec{c}\,(۳,۰,-۴)$ مفروضند اولاً اندازهٔ جبری تصویر بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{c}$ را بدست آورید. ثانیاً حجم متوازی السطوحی را بدست آورید که سه یال هر راس آن بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ باشند.

۳-۵-۸: فرض کنید $P\,(۱,۲,-۱)$ و $Q(۳,-۱,۴)$ و $R\,(۲,۶,۲)$ سه راس متوازی الاضلاع $PQRS$ باشند. الف: مختصات S را بدست آورید. ب: مساحت $PQRS$ را بدست آورید. ج: مساحت تصویر $PQRS$ را بر هر یک از صفحات xoy و yoz و xoz بدست آورید.

۳-۵-۹: ثابت کنید هر بردار $\vec{V}$ در اتحاد زیر صدق می‌کند.

$$\vec{V}=\frac{۱}{۲}[\vec{i}\times(\vec{V}\times\vec{i})+\vec{j}\times(\vec{V}\times\vec{j})+\vec{k}\times(\vec{V}\times\vec{k})]$$

۳-۵-۱۰: نشان دهید که برای سه بردار $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ حاصلضرب $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ حجم متوازی السطوحی است که برروی سه بردار ساخته می شود.

۳-۵-۱۱: دو بردار $\vec{a}\,(۱,۲,۰)$ و $\vec{b}\,(۱,۰,-۲)$ مفروضند اولاً زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدست آورید. ثانیاً کسینوسهای هادی برداری $\vec{a}\times\vec{b}$ را بدست آورید.

۳-۵-۱۲: اگر $۲x-۶y-۸z=۱۱$، مینیمم عبارت $A=۴x^{۲}+۹y^{۲}+۱۶z^{۲}$ را بدست آورید.

۱۳) بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مفروضند نشان دهید اگر C روی خط AB قرار داشته باشد، آنگاه $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+t\,(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$، بازاء چه مقدار t، C وسط AB است.

۳-۵-۱۴: فرض کنید $\vec{u}=(\cos\theta)\vec{i}+(\sin\theta)\vec{j}$ و $\vec{v}=(\cos\varphi)\vec{i}+(\sin\varphi)\vec{j}$ فرمول بسط کمیت مثلثاتی $\cos(\theta-\varphi)$ را با استفاده از ضرب داخلی دو بردار فوق بدست آورید.

۳-۵-۱۵: تحقیق کنید آیا سه نقطهٔ $A\,(۱,۲,-۳)$ و $B\,(۳,۱,۰)$ و $C(-۳,۴,-۹)$ بر یک استقامت هستند یا خیر؟

۳-۵-۱۶: معادلهٔ پارامتری فصل مشترک دو صفحهٔ $۲x-y+۲z=۴$ و $x-۲y+z=۳$ را بنویسید و سپس فاصلهٔ نقطهٔ $M\,(۲,-۱,۳)$ را از خط فصل مشترک بدست آورید.

٣-۵-١٧: صفحهٔ P به معادلهٔ $۳x + ۴y + z = ۲$ و خط D به معادلهٔ $\frac{x-۱}{۳} = \frac{y}{۳} = \frac{z+۱}{-۱}$ مفروضند. اولاً زاویهٔ خط D را با صفحهٔ P بدست آورید ثانیاً معادلهٔ خطی را بیابید که در نقطهٔ تلاقی صفحه P با خط D بر خط D عمود باشد.

٣-۵-١٨: سه نقطهٔ $A(۰,۸,۵)$ و $B(۱,۱,۱)$ و $C(۳,۳,۱)$ مفروضند: الف) حجم متوازی‌السطوحی که سه یال آن OA و OB و OC است را حساب کنید. ب) معادلهٔ صفحهٔ OAB را بدست آورید. ج) فاصلهٔ نقطهٔ C را از صفحهٔ OAB تعیین و معادلهٔ خط عمود از C برآنرا بنویسید(O مبداء مختصات است).

٣-۵-١٩: نشان دهید خطوط $D:\begin{cases} ۲x - y + ۲z = ۴ \\ x - y + ۲z = ۳ \end{cases}$ و $D':\frac{x-۱}{-۱} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z}{-۲}$ متقاطعند زاویهٔ بین دو خط را بدست آورید و معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که از این دو خط می گذرد.

٣-۵-٢٠: دو صفحهٔ $۳x + y - ۲z = ۶$ و $۴x - y + ۳z = ۰$ مفروضند کسینوسهای هادی فصل مشترک دو صفحه را بدست آورید و از $P(۱,۰,-۱)$ صفحه ای بر فصل مشترک عمود کنید سپس مختصات نقطهٔ برخورد صفحهٔ مذکور را با فصل مشترک بدست آورید.

٣-۵-٢١: نشان دهید خطوط $D:\begin{cases} ۲x - y + ۲z = ۴ \\ x - y + ۲z = ۳ \end{cases}$ و $D':\begin{cases} ۳x + y - z = ۱ \\ ۲x - z = ۲ \end{cases}$ متقاطع و متعامدند.

٣-۵-٢٢: فصل مشترک صفحات $x - z = ۳$ و $y - z = ۲$ را بنویسید سپس معادلهٔ تمام صفحاتی را بنویسید که از فصل مشترک ایندو صفحه می‌گذرد و با استفاده از آن صفحهٔ نیمساز فرجه ای که توسط این دو صفحه تشکیل می‌شود را بنویسید.

٣-۵-٢٣: دو خط $D:\begin{cases} x = ۲ - t \\ y = -۱ + ۳t \\ z = t \end{cases}$ و $D':\begin{cases} x = -۱ + ۷s \\ y = ۸ - ۳s \\ z = ۳ + ۲s \end{cases}$ مفروضند، کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط را بدست آورید.

٣-۵-٢۴: خط l از دو نقطهٔ $A(۱,۲,۴)$ و $B(۲,۱,-۱)$ می‌گذرد این خط صفحهٔ $x + ۲y + ۵z = ۰$ را در چه نقطه ای قطع می‌کند؟ اگر در A صفحه ای بر l عمود کنیم، معادلهٔ این صفحه را بدست آورید و معادلهٔ فصل مشترک آن را با صفحهٔ بالا بدست آورید. این دو صفحه چه زاویه ای با یکدیگر می‌سازند؟

٣-۵-٢۵: معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ $A(۲,۰,-۴)$ گذشته و خط D به معادلات $\begin{cases} x = ۱ \\ y - ۲z = ۳ \end{cases}$ را به زاویهٔ قائمه قطع کند و با استفاده از این مطلب فاصلهٔ A را تا خط D حساب کنید.

۳-۵-۲۶: دونقطهٔ $H(-۳,۱,-۲)$ و $K(۱,-۲,۲)$ و صفحهٔ P به معادلهٔ $۲x+y-z+۶=۰$ مفروضند اولاً معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که از H بگذرد و با صفحهٔ P موازی باشد ثانیاً معادلهٔ صفحهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ K و H و عمود بر صفحهٔ P را بیابید.

۳-۵-۲۷: نشان دهید فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی

$$P_۱: a_۱x+b_۱y+c_۱z+d_۱=۰ \quad \text{و} \quad P_۱: a_۱x+b_۱y+c_۱z+d_۲=۰$$

از رابطهٔ $D=\dfrac{|d_۲-d_۱|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ بدست می‌آید.

۳-۵-۲۸: دو صفحهٔ $x+y+z+۲=۰$ و $۲x-۲y+۲z=۵$ دو وجه یک مکعبند، حجم مکعب را بدست آورید.

۳-۵-۲۹: معادلات صفحات نیمساز دو صفحهٔ $۳x-y+۴=۰$ و $۲x-۵y+z-۱=۰$ را بدست آورید.

۳-۵-۳۰: معادلهٔ عمود مشترک دو خط متنافر زیر را بدست آورید.

$$D: \frac{x+۱}{۱}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z}{۲} \quad , D': \frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=-\frac{z}{۱}$$

۳-۵-۳۱: معادلهٔ خطی را بدست آورید که دو خط

$$D_۱: \frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z}{۵} \quad \text{و} \quad D_۱: \frac{x+۲}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z}{۳}$$

را قطع می‌کند و در صفحهٔ $x+۲y-۳z=۵$ واقع است.

۳-۵-۳۲: معادلهٔ صفحه ای را بنویسید که شامل دو صفحهٔ $x-۲y+z-۳=۰$ و $۲x+y-z-۴=۰$ بوده و از مبداء بفاصلهٔ ۲ باشد.

۳-۵-۳۳: خط $D: \dfrac{x-۱}{۲}=y=۱-z$ و دو صفحهٔ

$$P_۱: ۲x+y+z+۳=۰ \quad \text{و} \quad P_۲: x+y+z-۲=۰$$

مفورضند معادلات پارامتری خط را بیابید که از نقطهٔ $A(۲,۳,۵)$ و وسط قطعه خطی که بوسیلهٔ دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ بر خط D جدا می‌شود می‌گذرد.

۳-۵-۳۴: مساحت متوازی الاضلاعی را بدست آورید که اقطار آن بردارهای $۲\vec{a}-\vec{b}$ و $۴\vec{a}-۵\vec{b}$ می‌باشد بطوریکه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار یکانی با زاویهٔ ۴۵° می‌باشند.

۳-۵-۳۵: هر گاه a و b و c غیر صفر بوده و بترتیب طول از مبداء، عرض از مبداء و ارتفاع از مبداء یک صفحه باشند، ثابت کنید معادلهٔ صفحه عبارتست از: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$.

۳-۵-۳۶: منحنی c با معادلهٔ $y=\sqrt{x-x^{۲}}+\sin^{-۱}\sqrt{x}$ مفروض است اگر s طول قوس قسمتی از منحنی باشد که از نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ اندازه گیری شده است، معادلهٔ پارامتری منحنی را بر حسب s بنویسید سپس طول قوس منحنی را بدست آورید.

۳-۵-۳۷: معادلات پارامتری منحنی $\vec{R}(t)=(a+b\cos t)\,\vec{i}+(b\sin t+c)\,\vec{j}+\vec{k}$ را طوری بنویسید که طول قوس s پارامتر آن باشد، s نقطه ایست که از $t=۰$ اندازه گیری شده است.

۳-۵-۳۸: ثابت کنید اگر $x'(a)$ و $y'(a)$ هر دو صفر نباشند آنگاه $x=x(a)+x'(a)t$ و همچنین $y=y(a)+y'(a)t$ معادلات پارامتری خط مماس بر منحنی $\lambda(t)=(x(t),y(t))$ در $t=a$ خواهند بود.

۳-۵-۳۹: منحنی c با معادلات پارامتری $y=a\sin^{۴}t$ و $x=a\cos^{۴}t$ مفروض است، اولاً معادلهٔ دکارتی آنرا بنویسید اگر s طول قوس قسمتی از منحنی در $[۰,t]$ باشد، معادلهٔ پارامتری منحنی را بر حسب s بنویسید ثانیاً اگر خط مماس برمنحنی در نقطهٔ $P(x,y)$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، نشان دهید $OA+ON=a$.

۳-۵-۴۰: دایره ای به شعاع a بدون آنکه بلغزد می‌گردد اگر $A(a,۰)$ موضع اولیهٔ نقطهٔ ترسیم کنندهٔ P باشد اولاً نشان دهید مکان هندسی نقطهٔ P روی دایرهٔ کوچکتر عبارتست از:

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\theta+b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\theta\right) \\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin\left(\dfrac{a-b}{b}\theta\right) \end{cases}$$

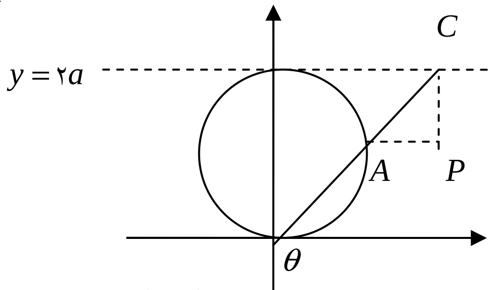
ثانیاً اگر $b=\frac{a}{۴}$ نشان دهید معادلات پارامتری بصورت $x=a\cos^{۳}\theta$ و $y=a\sin^{۳}\theta$ درمی‌آیند. معادلهٔ دکارتی این منحنی را نوشته و آنرا رسم کنید.

۳-۵-۴۱: OA شعاع دایره ای به شعاع a است. AN بر دایره در نقطهٔ A مماس است، خطی که بر نقطهٔ O می‌گذرد و با قطر OA زاویهٔ θ می‌سازد دایره را در M و خط مماس را در N قطع می‌کند بر ON نقطه ای

مانند P واقع شده است بطوریکه $OP = MN$. نقطهٔ O را بعنوان مبداء اختیار کرده، OA را بر امتداد محور yها و θ را به عنوان پارامتر فرض کنید و معادلات پارامتری مکان هندسی نقطهٔ P را بدست آورید.

۳-۵-۴۲: منحنی که بر کلیهٔ نقاط P تعیین شده مطابق است جادوگر ماریا آنیه زی نامیده می‌شود.

نشان دهید معادلات پارامتری خم عبارتست از:
$$\begin{cases} x = ۲a\cos\theta \\ y = ۲a\sin^{۲}\theta \end{cases}$$



۳-۵-۴۳: معادلات پارامتری منحنی پیموده شده بوسیلهٔ نقطهٔ $P(x,y)$ را در صورتی بیابید که:

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{۱-x^{۲}}$ و $\frac{dy}{dt} = x^{۲}$ و وقتی $t=۰$، $x=۰$ و $y=۱$ باشد.

۳-۵-۴۴: چرخی به شعاع $۴cm$ بر روی محور xها با سرعت زاویه ای ۲ رادیان در ثانیه می‌غلتد مکان رسم شده توسط نقطه ای واقع بر پرهٔ چرخ و به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر از مرکز چرخ را در صورتیکه در لحظهٔ $t=۰$ چرخ از نقطهٔ $(۰,۲)$ شروع به حرکت کرده باشد، بدست آورید.

۳-۵-۴۵: دایره ای بشعاع a و مرکز $(۰,a)$ مفروض است از O خطی با زاویهٔ θ رسم می‌کنیم تا دایره را در B و خط $y=۲a$ را در A قطع کند. از A و B دو خط موازی محورهای Ox و Oy رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند مکان هندسی P را وقتی θ تغییر می‌کند بدست آورید و معادلهٔ مکان را بنویسید.

۳-۶ نمونه سوالات تستی

۳-۶-۱: حاصل عبارت $\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{A}) + \vec{j}\times(\vec{j}\times\vec{A}) + \vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{A})$ کدام است؟

الف) $\vec{A}$ ب) $-\vec{A}$ ج) $-۲\vec{A}$ د) $۲\vec{A}$

۳-۶-۲: فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیر هم صفحه باشند، دراینصورت حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار $\vec{a}\times\vec{c}$، $\vec{b}\times\vec{c}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۶}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ ب) $|(\vec{a}\times\vec{b})|^{۲}+|\vec{c}|$ ج) $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ د) هیچکدام

۳-۶-۳: زاویهٔ بین دو بردار $|\vec{a}|\vec{b}+\vec{b}|\vec{a}|$ و $\vec{a}|\vec{b}|-\vec{b}|\vec{a}|$ چند درجه است؟

الف) صفر　　ب) $\frac{\pi}{۲}$　　ج) $\frac{\pi}{۴}$　　د) $\frac{\pi}{۳}$

۳-۶-۴: مختصات رئوس یک متوازی الاضلاع به صورت $A(۰,۰,۲)$، $B(۲,-۱,۱)$، $C(۱,۳,۲)$ و $D(۳,۲,۱)$ می‌باشد. مساحت تصویر متوازی الاضلاع بر صفحهٔ xoy کدام است؟

الف) ۷　　ب) ۶　　ج) ۸　　د) ۹

۳-۶-۵: مساحت مثلث به رئوس $A(۱,۱,۱)$، $B(۳,۲,۵)$ و $C(۱,-۲,۱)$ عبارتست از:

الف) $۵\sqrt{۵}$　　ب) $۴\sqrt{۵}$　　ج) $۳\sqrt{۵}$　　د) $۶\sqrt{۵}$

۳-۶-۶: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ غیر موازی و $a\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ کدام گزاره درست است؟

الف) یک بردار عمود بر صفحهٔ دو بردار دیگر است

ب) $\vec{a}=۰$ یا $\vec{b}=۰$ یا $\vec{c}=۰$

ج) صفحهٔ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر صفحهٔ $\vec{b}$ و $\vec{c}$ عمود است

د) یک بردار موازی صفحهٔ دو بردار دیگر است

۳-۶-۷: اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، $\frac{\pi}{۲}$ باشد بردار $\vec{u}=\vec{a}|\vec{b}|+\vec{b}|\vec{a}|$ با بردار $\vec{a}$ چه زاویه ای می‌سازد؟

الف) $\frac{\pi}{۴}$　　ب) صفر　　ج) $\frac{\pi}{۳}$　　د) π

۳-۶-۸: اگر $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}+۳\vec{k}$ اندازهٔ جبری تصویر $۲\vec{a}-۳\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ کدام است؟

الف) $\frac{۳۱}{۳\sqrt{۱۴}}$　　ب) $\frac{۳۱}{۲\sqrt{۱۴}}$　　ج) $\frac{۳۱}{\sqrt{۱۴}}$　　د) $۳۱\sqrt{۱۴}$

۳-۶-۹: حاصل $\vec{a}\cdot\vec{b}\times(۲\vec{a}+۳\vec{b}+\vec{c})$ برابر است با:

الف) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$　　ب) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$　　ج) $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$　　د) $(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$

۳-۶-۱۰: اگر چهار نقطهٔ A و B و C و D در یک صفحه واقع باشند کدام رابطه درست است؟

الف) $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AD}$　　ب) $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})\times\overrightarrow{CD}$

ج) $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$　　د) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AD}$

۳-۶-۱۱: اگر $۳x+۲y+۹z=۲۲$ باشد، حداقل مقدار عبارت $۹x^۲+۴y^۲+۹z^۲$ کدام است؟

الف) ۱۱ ب) ۳۳ ج) ۴۴ د) ۵۵

۳-۶-۱۲: اگر سه نقطهٔ $A(۱,۱,۱)$ و $B(۲,۲,-۱)$ و $C(۳,۳,m)$ بر یک خط راست واقع باشند، مقدار m برابر است با:

الف) ۳- ب) ۴- ج) ۴ د) ۳

۳-۶-۱۳: فرض کنیم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار یکهٔ ناهمراستا باشند، اگر $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{۳}$ حاصل عبارت $(۲\vec{a}+\vec{b})\cdot(۳\vec{a}-\vec{b})$ کدام است؟

الف) ۱۱ ب) $\frac{۱۱}{۲}$ ج) $-\frac{۱۱}{۲}$ د) -۱۱

۳-۶-۱۴: صفحهٔ $۳x+۲y+۴z=۱۲$ سه محور مختصات را در نقاط A و B و C قطع می‌کند حجم چهار وجهی $OABC$ برابر است با

الف) ۱۲ ب) ۲۴ ج) ۱۶ د) ۱۸

۳-۶-۱۵: معادلهٔ صفحه ایکه از دو صفحهٔ $۲x-y+z-۱=۰$ و $۲x-y+z-\frac{۳}{۲}=۰$ به یک فاصله باشد کدام است؟

الف) $۴x+۲y-۲z-\frac{۵}{۲}=۰$ ب) $۴x-۲y-۲z-\frac{۵}{۲}=۰$

ج) $۴x-۲y+۲z-\frac{۵}{۲}=۰$ د) $۴x-۲y+۲z+\frac{۵}{۲}=۰$

۳-۶-۱۶: خطی به معادلات $\frac{۲x-۱}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{۳z+۱}{۲}$ نسبت به صفحه ای به معادلهٔ $۴x+۴y-۲۱z=۱$ چه وضعیتی دارد؟

الف) در صفحه ب) عمود بر صفحه ج) موازی با صفحه د) زاویهٔ آن با صفحه $\frac{\pi}{۳}$

۳-۶-۱۷: معادلهٔ خط گذرنده بر نقطهٔ $(۰,۱,۲)$ و عمود بر خط $x+۱=y=z$ کدام است؟

الف) $z-x=۲$، $y=۱$ ب) $x+z=۲$، $y=۱$

ج) $z-y=۱$، $x=۰$ د) $y+z=۳$، $x=۰$

۳-۶-۱۸: اگر نقطهٔ $(۱,۰,-۱)$ مرکز یک مکعب و صفحهٔ $x-۲y+۲z=۳$ یکی از وجوه آن باشد حجم مکعب برابر کدام است؟

الف) $\frac{۸}{۲۷}$ ب) $\frac{۶۴}{۲۷}$ ج) $\frac{۵۱۲}{۲۷}$ د) $\frac{۲۷}{۸}$

۱۹-۶-۳: معادلهٔ صفحه ای که شامل خط $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z+۲}{۳}$ بوده و با خط $\frac{x-۳}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=\frac{z-۴}{۵}$ موازی است، عبارتست از:

الف) $۳x-۲y-۱=۰$ ب) $۲x-۳y+۶z+۱=۰$

ج) $۳x-۲y+۵=۰$ د) $۲x-۳y+۶z-۵=۰$

۲۰-۶-۳: نقطهٔ فصل مشترک صفحات $x-y-z=-۲$ و $-x+۲y-z=۳$ و $x+y-z=۲$ کدام است؟

الف) $(\frac{۳}{۲},۱,-\frac{۵}{۲})$ ب) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۲)$ ج) $(\frac{۱}{۲},۲,\frac{۱}{۲})$ د) $(\frac{۷}{۴},-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴})$

۲۱-۶-۳: حجم چهار به رئوس $(۱,۳,۰)$، $(۲,-۱,۳)$، $(-۱,۲,-۲)$ و $(-۱,۱,۲)$ کدام است؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د)۴

۲۲-۶-۳: تصویر نقطهٔ $A(۱,۰,۰)$ روی صفحهٔ P نقطهٔ $B(۲,۱,۱)$ است معادلهٔ صفحه کدام است؟

الف) $x+y+z=۴$ ب) $x-y+z=۲$ ج) $x+y-z=۲$ د) $۲x+y-z=۴$

۲۳-۶-۳: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,-۲,۲)$ از خط D به معادلهٔ $x=y=-z$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ب) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ ج) $\sqrt{۶}$ د) $\frac{۴\sqrt{۶}}{۳}$

۲۴-۶-۳: طول عمود مشترک دو خط $x=y=z$ و $x=-y=z-۱$ کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ د) ۲

۲۵-۶-۳: فاصلهٔ دو خط موازی $x-۱=y-۱=z+۱$ و $x=y=z$ کدام است؟

الف) $\sqrt{۳}$ ب) $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ ج) $\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ د) $\sqrt{۲}$

۲۶-۶-۳: مختصات قرینهٔ نقطهٔ $(۱,۰,-۱)$ نسبت به صفحهٔ $x+۲y-۲z+۶=۰$ کدام است؟

الف) $(۱,۴,۳)$ ب) $(۴,-۱,-۳)$ ج) $(-۱,-۴,۳)$ د) $(۳,-۴,۱)$

۲۷-۶-۳: معادلهٔ عمود مشترک دو خط متنافر $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y+۳}{۵}=\frac{z}{۲}$ و $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۲}=z-۱$ کدام است؟

الف) $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z+۳}{۴}$ ب) $x=y+۳=\frac{z+۱۱}{۴}$

ج) $\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y-۴}{۲}=z-۱$ د) $x-۱=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z+۷}{۴}$

۲۸-۶-۳: تصویر نقطهٔ $A(۴,۱,۱۴)$ بر روی خط D به معادلات $\frac{x}{۳}=\frac{y+۷}{۵}=\frac{z-۲}{۲}$ کدام نقطهٔ زیر است؟

الف) $(۲,۲,-۸)$ ب) $(۳,-۲,۴)$ ج) $(۶,۳,۶)$ د) $(-۳,-۱۲,۰)$

۲۹-۶-۳: معادلهٔ تصویر خط $D: x=y=۲z$ برصفحهٔ $P: x-y-z+۱=۰$ کدام است؟

الف) $y=۵z-۱=\frac{۱}{۷}(۳x-۴)$ ب) $\frac{۱}{۷}(۳x+۴)=y=\frac{۱}{۲}(۵z-۱)$

ج) $\frac{۱}{۷}(۳x-۴)=y=\frac{۱}{۲}(۵z+۱)$ د) $\frac{۱}{۷}(۳x-۴)=y=\frac{۱}{۲}(۵z-۱)$

۳۰-۶-۳: معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحهٔ $x-y-z=۲$ و $۲x-y+z=۴$ عبارتست از:

الف) $\begin{cases} x=۲t \\ y=۳t+۲ \\ z=-t \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x=۲+۲t \\ y=۳t \\ z=-t \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x=-۲t+۲ \\ y=-۳t \\ z=-t \end{cases}$ د) $\begin{cases} x=۲t-۲ \\ y=۳t \\ z=t+۲ \end{cases}$

فصل چهارم

توابع برداری

۱-۴ تابع برداری

توابعی که تا کنون مورد بحث قرار گرفته بودند توابع حقیقی و یا مختلط بودند در این فصل توابعی را مورد بحث قرار می دهیم که مقادیرشان بردار هستند. چنین توابعی را برای توصیف منحنی های فضایی و حرکت ذرات در فضا و صفحه نیاز داریم.

۴-۱-۱ تعریف: یک تابع برداری تابعی است که دامنه اش مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ای از بردارها است. یک تابع برداری در $\mathbb{R}^3$ را بصورت

$$\vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k = < x(t), y(t), z(t) >$$

نمایش می دهیم که در آن $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ توابع حقیقی هستند و توابع مولفه ای $R(t)$ نام دارند.

۴-۱-۲ تعریف: اگر $R(t) = < x(t), y(t), z(t) >$ یک تابع برداری باشد آنگاه

$$\lim_{t\to a} R(t) = < \lim_{t\to a} x(t), \lim_{t\to a} y(t), \lim_{t\to a} z(t) >$$

مشروط بر اینکه حدهای توابع مولفه ای $R(t)$ موجود باشند.

۴-۱-۳ مثال: فرض کنید $\vec{R}(t) = \frac{\sin t}{t}\vec{i} + t\left[\frac{1}{\sin t}\right]\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$ مطلوبست محاسبهٔ $\lim_{t\to 0} R(t)$.

حل: بنا به تعریف ۲-۱-۴ داریم

$$\lim_{t\to 0} \vec{R}(t) = \left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right]i + t\left[\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sin t}\right]\right]j + \left[\lim_{t\to 0}\cos t\right]k = i + j + k$$

۴-۱-۴ تعریف: اگر $R(t) = < x(t), y(t), z(t) >$ یک تابع برداری باشد آنگاه گوییم $R(t)$ در $t = a$ پیوسته است اگر $\lim_{t\to a} R(t) = R(a) = < x(a), y(a), z(a) >$.

۴-۱-۵ مثال: در پیوستگی تابع برداری $R(t) = (t^3 + 1)\, i + \ln(1 + t^3)\, j - \sin^2 t\, k$ در $t = 0$ بحث کنید.

حل: در اینجا $x(t)=(t^3+1)$ و چون $\lim_{t\to 0^+}(t^3+1)=1$ و $\lim_{t\to 0^-}(t^3+1)=0$ و عبارت (t^3+1) بازاء $t=0$ برابر ۱ است که با $\lim_{t\to 0^-}x(t)$ برابر نیست لذا بنا به تعریف ۴-۱-۴ تابع برداری بالا در $t=0$ پیوسته نیست.

۴-۱-۶ منحنی های فضایی: تابع برداری $R(t)=<x(t),y(t),z(t)>$ را در نظر بگیرید در اینصورت $R(t)$ بردار مکان یک نقطهٔ $P(x(t),y(t),z(t))$ روی یک منحنی مانند c است بنابراین هر تابع برداری پیوسته مانند r یک منحنی تعریف می کند که مسیر آن توسط نوک بردار متحرک $R(t)$ مانند شکل زیر رسم می شود:

۴-۱-۷ مثال: منحنی را که معادله برداری آن بصورت $R(t)=(2\cos t)\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+\vec{k}$ می باشد رسم کنید.

حل: چون $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ منحنی روی استوانهٔ بیضوی $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ قرار دارد و چون $z=t$ با افزایش مقدار t منحنی بطرف بالا دور استوانه می پیچد. این منحنی را مارپیچ استوانه ای می گویند.

۴-۱-۸ مثال: منحنی که معادلهٔ آن بصورت $R(t)=(e^t\sin 2t)\,i+(e^t\cos 2t)\,j+2e^t k$ می باشد را رسم کنید.

حل: در اینجا داریم $x^۲+y^۲=e^{۲k}(\sin^۲ ۲t+\cos^۲ ۲t)=e^{۲t}=\frac{z^۲}{۴}$ یعنی منحنی روی مخروط دوار $x^۲+y^۲=\frac{z^۲}{۴}$ قرار دارد و چون $z=۲e^{۲t}$ با افزایش مقدار t منحنی به طرف بالا دور مخروط می پیچد به این منحنی مارپیچ مخروطی می گویند.

۴-۱-۹ تعریف: فرض کنید $R(t)$ یک تابع برداری باشد مشتق $R(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{dR}{dt}=\lim_{h\to ۰}\frac{R(t+h)-R(t)}{h}$$

۴-۱-۱۰ قضیه: اگر $R(t)=x(t)\,i+y(t)\,j+z(t)k$ یک تابع برداری باشد و $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ توابعی مشتق پذیر باشند، در اینصورت $R'(t)=x'(t)\,i+y'(t)\,j+z'(t)k$.

۴-۱-۱۱ مثال: مشتق تابع برداری $R(t)=\ln(\frac{۱+t}{۱-t})\,i+(\cos t)\,j+(t^۳+t)k$ را پیدا کنید و مقدار آنرا در $t=۰$ بدست آورید.

حل:

$$R'(t)=\frac{۲}{۱-t^۲}\,i-\sin tj+(۳t^۲+۱)k \Rightarrow R'(۰)=۲i+k$$

۴-۱-۱۲ قضیه: فرض کنید u و v توابع برداری مشتقپذیر و c یک اسکالر وf تابعی حقیقی باشد، در اینصورت:

$a)\quad \frac{d}{dt}[u(t)+v(t)]=u'(t)+v'(t)$

$b)\quad \frac{d}{dt}[c\,u(t)]=c\,u'(t)$

$c)\quad \frac{d}{dt}[f(t)\,g(t)]=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$

$d)\quad \frac{d}{dt}[u(t)\cdot v(t)]=u'(t)\cdot v(t)+u(t)\cdot v'(t)$

$e)\quad \frac{d}{dt}[u(t)\times v(t)]=u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

$f)\quad \frac{d}{dt}\left[u\left(f(t)\right)\right]=f'(t)u'(f(t))$ (قاعدهٔ زنجیره ای)

۴-۱-۱۳ مثال: فرض کنید $u(t)=<\cos t,\sin t,t>$ و $v(t)=<t,t,t>$ و $f(t)=\sqrt{۱+t^۲}$ درستی روابط c و f را در ۴-۱-۱۲ تحقیق کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم: $\frac{d}{dt}\left[u(t)\times v(t)\right]=u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

$$u(t)\times v(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & t \\ t & t & t \end{vmatrix}=<t(\sin t-t),t(t-\cos t),t(\cos t-\sin t)>$$

طبق قضیهٔ ۴-۱-۱۰ داریم:

(۱)

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)\times v(t)\right]=<\sin t+t(\cos t-۲),-\cos t+t(\sin t+۲),(۱-t)\cos t-(۱+t)\sin t>$$

از طرفی داریم: $u'(t)=<-\sin t,\cos t,۱>$ و $v'(t)=<۱,۱,۱>$.

$$u'(t)\times v(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & ۱ \\ t & t & t \end{vmatrix}=<t(\cos t-۱),t(\sin t-۱),-t(\sin t+\cos t)>$$

$$u(t)\times v'(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & t \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=<\sin t-t,t-\cos t,\cos t-\sin t>$$

$$u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)=\left[\sin t+t(\cos t-۲)\right]i+\left[-\cos t+t(\sin t+۲)\right]j+\left[(۱-t)\cos t-(۱+t)\sin t\right]k \quad (۲)$$

بنابراین طبق (۱) و (۲) داریم: $\frac{d}{dt}\left[u(t)\times v(t)\right]=u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

حال ثابت می کنیم: $\frac{d}{dt}\left[f(t)u(t)\right]=f'(t)u(t)+f(t)u'(t)$

$$f(t)u(t)=\sqrt{۱+t^۲}(\cos t\, i+\sin t\ j+tk)=(\sqrt{۱+t^۲}\ \cos t)i+(\sqrt{۱+t^۲}\ \sin t)j+(t\sqrt{۱+t^۲})k$$

$$\frac{d}{dt}(f(t)u(t)) = <\frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}\cos t-\sqrt{۱+t^۲}\,\sin t, \frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}\sin t-\sqrt{۱+t^۲}\,\cos t \\ , \frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}-\sqrt{۱+t^۲}> \quad (۳)$$

(۴)

$$f'(t)u(t)+f(t)u'(t)=\frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}(\cos t\, i+\sin t\; j+tk)+\sqrt{۱+t^۲}\,(-\sin t\, i+\cos tj+k)$$

$$=(\frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}\cos t-\sqrt{۱+t^۲}\,\sin t)i+(\frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}\sin t+\sqrt{۱+t^۲}\,\cos t)\,j+(\frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}+\sqrt{۱+t^۲})k$$

از (۳) و (۴) نتیجه می گیریم: $\frac{d}{dt}[f(t)\,u(t)]=f'(t)u(t)+f(t)u'(t)$

۱۴-۱-۴ تعریف: انتگرال معین یک تابع برداری پیوسته *R(t)* را می توان مانند انتگرال معین توابع حقیقی تعریف کرد با این تفاوت که در اینجا انتگرال یک بردار است در اینصورت می توانیم انتگرال را برحسب مولفه هایش بیان کنیم. اگر $R(t)=<x(t)+y(t)+z(t)>$ داریم:

$$\int_a^b R(t)\,dt=\left[\int_a^b x(t)\,dt\right]i+\left[\int_a^b y(t)\,dt\right]j+\left[\int_a^b z(t)\,dt\right]k$$

۱۵-۱-۴ قضیهٔ اساسی حسابان برای توابع برداری: فرض کنیم *R(t)* یک تابع برداری پیوسته باشد دراینصورت:

$$\int_a^b R(t)\,dt=r(b)-r(a)$$

۱۶-۱-۴ مثال: اگر $R(t)=(\ln t)\,i+(t^۲-۱)\,j+(\frac{۱}{t\ln t})k$ مطلوبست محاسبهٔ: $\int_۲^۴ R(t)\,dt$

حل:

$$\int_a^b R(t)\,dt=(\int \ln t dt)\,i+(\int (t^۲-۱)dt)\,j+(\int \frac{۱}{t\ln t}\,dt)k$$

$$=(t\ln t-t)i+(\frac{t^۳}{۳}-t)\,j+(\ln(\ln t))\,k+c$$

که در اینجا c یک بردار ثابت انتگرال گیری است بنابراین

$$\int_۲^۴ R(t)\,dt=\left[(t\ln t-t)\,i+(\frac{t^۳}{۳}-t)\,j+(\ln(\ln t))\,k+c\right]_۲^۴=(۶\ln ۲-۱)\,i+\frac{۳۸}{۸}\,j+(\ln ۲)\,k$$

۴-۲ بردارهای موضعی، سرعت و شتاب

۴-۲-۱ تعریف: فرض کنیم $x = x(t)$ و $y = y(t)$ معادلات پارامتری یک مسیر (منحنی) در صفحه باشد. اگر (x, y) نقطهٔ دلخواهی روی مسیر فوق باشد آنگاه بردار واصل از مبداء مختصات به نقطهٔ (x, y) را بردار موضعی نظیر نقطهٔ (x, y) از مسیر فوق می نامیم.

۴-۲-۲ تعریف: فرض کنید $v(t)$ بیانگر سرعت یک متحرک در لحظهٔ t باشد و $R(t) =< x(t), y(t) >$ بردار مکان متحرک باشد دراینصورت داریم: $v(t) = x'(t)\, i + y'(t)\, j$ یا بعبارت دیگر $v(t) = \dfrac{dR}{dt}$.

۴-۲-۳ تعریف: فرض کنید $x = x(t)$ و $y = y(t)$ معادلات پارامتری یک مسیر باشدو $R(t) = x(t)\, i + y(t)\, j$ بردار موضعی نظیر نقطهٔ $P(x, y)$ از مسیر فوق باشد در اینصورت بردار یکانی مماس بر مسیر فوق در نقطهٔ $P(x, y)$ را که با $\vec{T}$ نمایش می دهیم چنین تعریف می شود: $\vec{T} = \dfrac{\frac{dR}{dt}}{\left|\frac{dR}{dt}\right|} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. توجه دارید که بردار $\vec{T}$ اولاً یکانی است زیرا $|\vec{T}| = \dfrac{|v|}{|v|} = ۱$. ثانیاً بردار $\vec{T}$ بر مسیر در نقطهٔ $P(x, y)$ مماس است زیرا بنا به شکل زیر داریم:

$$P(x, y) \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } \tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

بنابراین $\dfrac{dx}{dt} i + \dfrac{dy}{dt} j$ برداری است که روی خط مماس واقع شده است از طرفی این بردار دقیقاً $\dfrac{dR}{dt}$ می باشد یعنی بردار $\dfrac{dR}{dt}$، مماس بر مسیر است پس بردار $\vec{T}$ بردار مماس بر مسیر می باشد.

۴-۲-۴ مثال: اگر s طول قوس منحنی پارامتری $c\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ باشد و $R(t)$ بردار موضع منحنی باشد نشان دهید:

$$\vec{T} = \frac{dR}{ds}$$

حل: (۱) $ds=\sqrt{(dx)^{2}+(dy)^{2}} \Rightarrow \frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d}\right)^{2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^{2}}$

از طرفی (۲) $\frac{dR}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j$ بنابراین از (۱) و (۲) داریم $\frac{ds}{dt}=\frac{(dR/dt)}{(ds/dt)}=\frac{(dR/dt)}{|(dR/dt)|}$ طبق تعریف بردار یکانی مماس بر منحنی $T=\frac{(dR/dt)}{|dR/dt|}=\frac{dR}{ds}$.

۴-۲-۵ مثال: اگر ϕ زاویهٔ بین خط مماس بر منحنی $c\begin{cases}x(t)\\y(t)\end{cases}$ با جهت مثبت محور x ها باشد ثابت کنید

$$\vec{T}=(\cos\phi)\,i+(\sin\phi)\,j$$

حل: چون $|T|=1$ است بنابراین در ضلع مجاور مثلث قائم الزاویهٔ در شکل ۳-۲-۴ با اندازه های $\cos\phi$ و $\sin\phi$ می باشند لذا $\vec{T}=(\cos\phi)\,i+(\sin\phi)\,j$

۴-۲-۶ تعریف: فرض کنید $a(t)$ بیانگر شتاب یک متحرک در لحظهٔ t باشد و $R(t)=<x(t),y(t)>$ بردار مکان متحرک باشد در اینصورت داریم: $a(t)=x''(t)\,i+y''(t)\,j$ یا بعبارت دیگر $a(t)=\frac{d^{2}R}{dt^{2}}$.

۴-۲-۷ تعریف: فرض کنید $x=x(t)$ و $y=y(t)$ معادلات پارامتری یک مسیر باشد و $\vec{T}$ بردار مماس بر مسیر و ϕ زاویهٔ بین بردار T با جهت مثبت محور x ها باشد دراینصورت بردار یکانی قائم اصلی بر منحنی بصورت زیر تعریف می شود: $N=\frac{dT}{d\phi}=(-\sin\phi)\,i+(\cos\phi)\,j$.

توجه داریم که $|\vec{N}|=\left|\frac{dT}{d\phi}\right|=\sin^{2}\phi+\cos^{2}\phi=1$ و نیز

$$\vec{T}\cdot\vec{N}=T\cdot\frac{dT}{d\phi}=-\sin\phi\cos\phi+\sin\phi\cos\phi=0$$

یعنی بردار N بر T عمود است.

همچنین با توجه به تعریف داریم:

$$\vec{N}=\frac{dT}{d\phi}=(-\sin\phi)\,i+(\cos\phi)\,j=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)i+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)j$$

یعنی بردار N برداری است که از دوران بردار $\vec{T}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی حاصل می شود.

۴-۲-۸ مثال: اگر T بردار یکانی مماس بر منحنی c و s طول قوس منحنی باشد نشان دهید:

$$a)\quad \vec{N}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}\qquad\qquad b)\quad \vec{N}=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}$$

حل: چون T بردار یکانی است پس $T\cdot T=۱$ از طرفین این رابطه یکبار نسبت به t و یکبار نسبت به s مشتق می گیریم: $T\cdot T=۱\Rightarrow\frac{dT}{dt}\cdot t+T\frac{dT}{dt}=\circ\Rightarrow ۲T\cdot\frac{dT}{dt}=\circ$. یعنی دو بردار T و $\frac{dT}{dt}$ بر هم عمودند سوی $\frac{dT}{dt}$ همان سوی N بردار قائم اصلی است لذا داریم: $\vec{N}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}$

بطور مشابه اگر از طرفین رابطهٔ $T\cdot T=۱$ نسبت به s مشتق بگیریم داریم $۲T\cdot\frac{dT}{ds}=\circ$ مشابه حالت قبل بدست می آوریم: $\vec{N}=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}$.

۴-۲-۹ مثال: معادلهٔ حرکت یک نقطهٔ عادی عبارتست از $R(t)=(a\cos t^{۲})i+(a\sin t^{۲})j\quad a>\circ,t\geq\circ$. بردارهای یکانی مماس و قائم اصلی بر مسیر این نقطهٔ عادی را بدست آورید.

حل: داریم: $v=\frac{dR}{dt}=(-۲a\,t\sin t^{۲})\,i+(۲at\cos t^{۲})\,j$ و $|\vec{v}|=\sqrt{۴a^{۲}t^{۲}(\sin^{۲}t^{۲}+\cos^{۲}t^{۲}}\,۲at$

طبق فرمول بردار یکانی مماس داریم: $T=\frac{v}{|\vec{v}|}=(-\sin t^{۲})\,i+(\cos t^{۲})\,j$

$$T=\cos(\frac{\pi}{۲}+t^{۲})\,i+\sin(\frac{\pi}{۲}+t^{۲})\,j$$

بنابراین زاویهٔ T با جهت مثبت محور x ها عبارتست از: $\phi=\frac{\pi}{۲}+^{۲}$.لذا $\frac{d\phi}{dt}=۲t$ در نتیجه

$$N=\frac{dT}{d\phi}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}=-\sin(\frac{\pi}{۲}+t^{۲})\,i+\cos(\frac{\pi}{۲}+t^{۲})\,j=(-\cos t^{۲})i-\sin t^{۲}\,j$$

۴-۳ انحناء یک مسیر

۴-۳-۱ تعریف: اگر ϕ زاویهٔ بین خط مماس بر منحنی با جهت مثبت محور x ها باشد در اینصورت تغییرات زاویهٔ ϕ نسبت به طول قوس در یک نقطه از منحنی را انحناء می گوییم انحناء را با حرف k نشان می دهیم و داریم

$$k=\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

۴-۳-۲ مثال: فرض کنید $R(t)$ معادلهٔ برداری منحنی c و T بردار یکانی مماس بر منحنی باشد نشان دهید:

$$a)\ k=\left|\frac{dT}{ds}\right|\qquad b)\ k=\left|\frac{T'(t)}{R'(t)}\right|\qquad c)\ k=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^{۳}}$$

حل: قسمت (a) :

$$\frac{dT}{ds}=\frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}\Rightarrow\left|\frac{dT}{ds}\right|=\left|\frac{dT}{d\phi}\right|\left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

از طرفی داریم $\left|\frac{d\phi}{ds}\right|=k$ و $\left|\frac{dT}{d\phi}\right|=|\vec{N}|=۱$ لذا $k=\left|\frac{dT}{ds}\right|$.

قسمت (b) : با توجه به قسمت (a) داریم $k=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\left|\frac{dT/dt}{ds/dt}\right|$ از طرفی داریم $\frac{ds}{dt}=|R'(t)|$ بنابراین

$$k=\frac{|T'(t)|}{|R'(t)|}$$

قسمت (c): از آنجا که $T=\frac{R'}{|R'|}$ و $|R'|=\frac{ds}{dt}$ داریم $R'=|R'|T=\frac{ds}{dt}T$ از طرفین رابطهٔ مذکور نسبت به t مشتق می گیریم. طبق ۱۲-۱-۴ قسمت (b) داریم: $R''=\frac{d^{۲}s}{dt^{۲}}T+\frac{ds}{dt}T'$. با استفاده از ضرب

خارجی $R'\times R''$ و اینکه $T\times T=0$ داریم: $R'\times R''=(\frac{ds}{dt})^{2}(T\times T')$. حال چون $|T|=1$ و به موجب مثال ۴-۲-۸، T و T' بر هم عمو دند، بنابراین

$$|R'\times R''|=(\frac{ds}{dt})^{2}|T\times T'|=(\frac{ds}{dt})^{2}|T||T'|=(\frac{ds}{dt})^{2}|T'|$$

بنابراین $|T'|=\frac{|R'\times R''|}{|R'|^{2}}$ و بنا به قسمت (b) داریم $k=\frac{|T'|}{|R'|}$ لذا $R=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^{3}}$.

۴-۳-۳ مثال: انحناء منحنی $R(t)=<t,t^{2},t^{3}>$ را در یک نقطهٔ دلخواه و در نقطهٔ $(0,0,0)$ بدست آورید.

حل: $|R'(t)|=\sqrt{1+4t^{2}+9t^{4}}$ و $R''(t)=<0,2,6t>$ و $R'(t)=<1,2,3t^{2}>$

$$R'(t)\times R''(t)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2t & 3t^{2}\\ 0 & 2 & 6t\end{vmatrix}=6t^{2}i-6tj+2k \quad \text{و} \quad |R'(t)\times R''(t)|=2\sqrt{9t^{4}+9t^{2}+1}$$

بنابر این به موجب رابطهٔ c مثال ۴-۳-۲ داریم: $k(t)=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{1+9t^{2}+9t^{4}}}{(1+4t^{2}+9t^{4})^{\frac{3}{2}}}$

انحناء در مبداء مختصات عبارتست از: $k(0)=2$

۴-۳-۴ مثال: فرض کنید $y=f(x)$ معادلهٔ یک منحنی در صفحه باشد ثابت کنید انحناء این منحنی در هر نقطهٔ آن عبارتست از $k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^{2})^{\frac{3}{2}}}$.

حل: می توانیم x را بعنوان پارامتر انتخاب کرده و بنویسیم $R(x)=x\,i+f(x)\,j$. دراینصورت

$$R'(x)=i+f'(x)\,j \quad \text{و} \quad R''(x)=f''(x)\,j \quad \text{و} \quad |R'(x)|=\sqrt{1+f'^{2}(x)}$$

$$R'(x)\times R''(x)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & f'(x) & 0\\ 0 & f''(x) & 0\end{vmatrix}=f''(x)k$$

لذا به موجب رابطهٔ c مثال ۴-۳-۲ داریم $k(x)=\frac{|f''(x)|}{(1+f'^{2}(x))^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y''|}{(1+y'^{2})^{\frac{3}{2}}}$.

۴-۳-۵ مثال: انحناء منحنی $x^{2}+x\,y+y^{2}=3$ را در نقطهٔ $(1,1)$ بدست آورید.

حل: برای محاسبهٔ y' ار طرفین رابطهٔ $x^{۲}+xy+y^{۲}=۳$ نسبت به x مشتق می گیریم $۲x+y+xy'=\circ$

$$y'=-\frac{۲x+y}{x+۲y}\Rightarrow y'\Big|_{(۱,۱)}=-۱$$

برای محاسبهٔ y'' داریم: $۲+y'+y'+xy''+۲y'^{۲}+۲yy'=\circ$

$y''=-\dfrac{۲+۲y'+۲y'^{۲}}{x+۲y}=-\dfrac{۲}{۳}$ درنتیجه $k(x)=\dfrac{|y''|}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\dfrac{۲/۳}{۲^{\frac{۳}{۲}}}=\dfrac{۱}{۳\sqrt{۲}}$.

۶-۳-۴ تذکر: اگر معادلهٔ منحنی در صفحه بصورت $x=g(y)$ باشد، انحناء از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$k(y)=\frac{|x''|}{(۱+x'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

۷-۳-۴ مثال: فرض کنید $x=x(t)$ و $y=y(t)$ معادلات پارامتری یک منحنی در صفحه باشد ثابت کنید انحناء از رابطهٔ زیر بدست می آید: $k(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{(x'^{۲}+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

حل: فرض کنید $R(t)=x(t)\,i+y(t)\,j$ معادلهٔ برداری منحنی فوق باشد در اینصورت:

$$R'(t)=x'(t)\,i+y'(t)\,j \text{ و } R''(t)=x''(t)\,i+y''(t)\,j \text{ و } |R'(t)|=\sqrt{x'^{۲}(t)+y'^{۲}(t)}$$

$$R'(t)+R''(t)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x'(t) & y'(t) & \circ \\ x''(t) & y''(t) & \circ \end{vmatrix}=\left[x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)\right]k$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ c مثال ۲-۳-۴ داریم: $k(t)=\dfrac{|R'\times R''|}{|R'|^{\frac{۳}{۲}}}=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{(x'^{۲}+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۸-۳-۴ مثال: مقدار انحناء را برای نقاط برخورد بیضی $\dfrac{x^{۲}}{۴}+\dfrac{y^{۲}}{۹}=۱$ با محورهای مختصات بدست آورید.

حل: معادلات پارامتری بیضی عبارتند از $x=۲\cos t$ و $y=۳\sin t$ لذا

$x'=-۲\sin t$ و $x''=-۲\cos t$ و $y'=۳\cos t$ و $y''=-۳\sin t$. به موجب مثال ۴-۳-۷ داریم:

$$k=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6}{(1+5\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

در محل برخورد با محور x ها داریم $t=0$ و $t=\pi$ که در هر دو صورت $k=\frac{6}{6^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. ئ در محل برخورد با محور yها داریم $t=\frac{\pi}{2}$ و $t=\frac{2\pi}{3}$ که در هر صورت $k=6$.

۴-۳-۹ تذکر: فرض کنید $r=f(\theta)$ معادلهٔ یک منحنی در مختصات قطبی باشد در اینصورت انحناء در هر نقطهٔ آن به اینصورت است:

$$k=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اگر در رابطهٔ ۴-۳-۷ قرار دهید $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ با مشتقگیری نسبت به θ رابطهٔ بالا بسادگی بدست می آید. روش دیگری برای اثبات رابطهٔ بالا نیز در تمرین ۷ مسائل نمونه حل شده بیان شده است.

۴-۴ حرکت در فضا، دایرهٔ بوسان و کرهٔ بوسان

۴-۴-۱ تعریف: فرض کنید ذره ای در فضا طوری حرکت می کند که بردار مکان آن در زمان t، $R(t)$ باشد در اینصورت سرعت لحظه ای t عبارتست از: $v(t)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{R(t+h)-R(t)}{h}=R'(t)$. همچنین شتاب لحظه ای t عبارتست از: $a(t)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=v'(t)=R''(t)$.

۴-۴-۲ مثال: سرعت و شتاب و مقدار سرعت ذره ای با بردار مکان $R(t)=<t^2,e^t,te^t>$ را بیابید.

$$a(t)=v'(t)=<2,e^t,(2+t)e^t> \text{ و } v(t)=r'(t)=<2t,e^t,(1+t)e^t>$$

و مقدار سرعت برابر است با $|v(t)|=\sqrt{4t^2+e^{2t}+(1+t)^2e^{2t}}$.

۴-۴-۳ مثال: ذره ای متحرک از نقطهٔ اولیهٔ $R(0)=<1,0,0>$ با بردار اولیهٔ سرعت $v(0)=i-j+k$ شروع به حرکت می کند. شتابش در هر لحظه بصورت $a(t)=4t\,i+6t\,j+k$ می باشد سرعت و بردار مکان آنرا در زمان t پیدا کنید.

حل: چون $a(t)=v'(t)$ داریم: $v(t)=\int a(t)\,dt=\int(4t\,i+6tj+k)\,dt=2t^2i+3t^2j+tk+c$.
برای تعیین بردار ثابت c از اینکه $v(0)=i-j+k$ و از رابطهٔ بالا $v(0)=c$ داریم $c=i-j+k$ بنابراین

$$v(t)=(2t^{2}+1)\,i+(3t^{2}-1)\,j+(t+1)k$$

چون $v(t)=R'(t)$ داریم:

$$R(t)=\int v(t)dt=\int[(2t^{2}+1)\,i+(3t^{2}-1)\,j+(3t+1)k]\,dt$$

$$=(\frac{2t^{3}}{3}+t)i+(t^{3}-1)\,j+(\frac{t^{2}}{2}+t)k+D$$

با قرار دادن $t=0$ درمی یابیم که $D=R(0)=i$ بنابراین:

$$R(t)=(\frac{2t^{3}}{3}+t+1)\,i+(t^{3}-t)\,j+(\frac{t^{2}}{2}+t)k$$

۴-۴-۴ تذکر: در حالت کلی بوسیلهٔ انتگرالهای برداری می توان بردار سرعت را وقتیکه بردار شتاب مفروض باشد و بردار مکان را وقتی بردار سرعت مفروض باشد از روابط زیر بدست آورد:

$$v(t)=v(t_{0})+\int_{t_0}^{t}a(u)\,du \quad \text{و} \quad R(t)=R(t_{0})+\int_{t_0}^{t}v(u)\,du$$

۵-۴-۴ تعریف: فرض کنیم T بردار یکانی مماس بر منحنی c با معادله برداری $R(t)$ باشد در اینصورت داریم:

$$T=\frac{R'}{|R'|}=\frac{v}{|v|} \quad \text{و} \quad |v|=|R'|=\frac{ds}{dt}$$

بنابراین $|v|=\frac{ds}{dt}T$ اگر از طرفین رابطهٔ مذکور نسبت به t مشتق بگیریم داریم:

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^{2}s}{dt^{2}}T+\frac{ds}{dt}T'$ اما از طرفی داریم $N=\frac{T'}{|T'|}$ لذا $T'=|T'|N$ و

درنتیجه $T'=\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}=k\,\frac{ds}{dt}$

$$a=\frac{d^{2}s}{dt^{2}}T+k(\frac{ds}{dt})^{2}\,N$$

اگر از نماد a_T و a_N برای مولفه های مماس و قائم شتاب استفاده کنیم داریم: $a=a_T T+a_N N$ که در آن $a_T=\frac{d^{2}s}{dt^{2}}$ و $a_N=k(\frac{ds}{dt})^{2}$. چون $|a|=\sqrt{a_T^{2}+a_N^{2}}$ لذا می توان برای محاسبهٔ a_T و a_N یکی از آنها را بدست آورد و دیگری را به کمک $|a|$ محاسبه نمود. $a_T=\sqrt{|a|^{2}-a_N^{2}}$ و $a_N=\sqrt{|a|^{2}-a_T^{2}}$.

۴-۴-۶ مثال: فرض کنید a_T و a_N مولفه های مماس و قائم شتاب یک ذره با معادلهٔ برداری $R(t)$ باشد، نشان دهید:

$$a_T = \frac{R'\cdot R''}{|R'|} \quad \text{و} \quad a_N = \frac{|R'\times R''|}{|R'|}$$

حل: داریم $T = \frac{v}{|v|}$ بنابراین $v = T|v| = T\,\frac{ds}{dt}$. حاصلضرب نقطه ای $v\cdot a$ را بدست می آوریم

$$v\cdot a = T\,\frac{ds}{dt}\cdot(\frac{d^۲s}{dt^۲}T + k(\frac{ds}{dt})^۲ N) = (\frac{ds}{dt})(\frac{d^۲s}{dt^۲})T\cdot T + k(\frac{ds}{dt})^۳ T\cdot N = (\frac{ds}{dt})(\frac{d^۲s}{dt^۲})$$

زیرا $T\cdot T = ۱$ و $T\cdot N = ۰$. بنابراین $a_T = (\frac{d^۲s}{dt^۲}) = \frac{v\cdot a}{\frac{ds}{dt}} = \frac{R'\times R''}{|R'|}$ همچنین

$$a_N = k\,(\frac{ds}{dt})^۲ = \frac{|R'\times R''|}{|R'|^۳}|R'|^۲ = \frac{|R'\times R''|}{|R'|}$$

۴-۴-۷ مثال: ذره ای با تابع مکان $R(T) = \ln(\cos t)\,i + \ln(\sin t)\,j + t^۲k$ حرکت می کند مولفه های مماس و قائم بردار شتاب را در $t = \frac{\pi}{۴}$ بدست آورید.

حل:

$$R'(t) = <-\tan t, \cot t, ۲t> \quad \text{و} \quad R'(\frac{\pi}{۴}) = <-۱, ۱, \frac{\pi}{۲}>$$

$$R''(t) = <-\sec^۲ t, -\cos ec^۲ t, ۲> \quad \text{و} \quad R''(\frac{\pi}{۴}) = <-۲, -۲, ۲>$$

$$R'\times R'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۱ & \frac{\pi}{۲} \\ -۲ & -۲ & ۲ \end{vmatrix} = <\pi+۲, \pi-۲, ۴>$$

$$R'\times R'' = \pi \quad \text{و} \quad |R'\times R''| = \sqrt{(\pi+۲)^۲ + (\pi-۲)^۲ + ۱۶} = \sqrt{۲(\pi^۲+۱۲)} \quad \text{و} \quad |R'| = \frac{\sqrt{۸+\pi^۲}}{۲}$$

بنابراین مولفه های مماسی شتاب برابر است با: $a_T = \frac{R'\cdot R''}{|R'|} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۸+\pi^۲}}$

و مولف قائم بردار شتاب برابر است با: $a_N = \frac{|R'\times R''|}{|R'|} = ۲\sqrt{\frac{۲(\pi^۲+۱۲)}{\pi^۲+۸}}$

۴-۴-۸ تعریف: فرض کنید T بردار مماس و N بردار قائم اصلی بر منحنی c با معادلهٔ برداری $R(t)$ باشد دراینصورت حاصلضرب خارجی $T\times N$ در هر نقطه از منحنی را با B نمایش داده و آنرا بردار قائم دوم بر منحنی می گوییم $B=T\times N$. دستگاه حاصل از بردارهای یکانی T و N و B را که متعامد و راستگرد هستند یک کنج فرنه می نامیم.

۴-۴-۹ تعریف: صفحهٔ مار بر T و N را صفحهٔ بوسان، صفحهٔ مار بر N و B را صفحهٔ قائم و صفحهٔ مار بر B و T را صفحهٔ مماس می گویند.

۴-۴-۱۰ تذکر: فرض کنید $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$ نقطه ای از منحنی c با معادلهٔ برداری

$$R(t)=<x(t), y(t), z(t)>$$

باشد در $P_{\circ}$ صفحه ای عمود بر $R'\times R''$ رسم می کنیم این صفحه صفحهٔ بوسان است اگر $P(x,y,z)$ نقطه ای از این صفحه باشد داریم $(R'\times R'')\cdot \overrightarrow{P_{\circ}P}=\circ$.

بنابراین طبق خواص ضرب سه گانه داریم:

$$\begin{vmatrix} x-x_{\circ} & y-y_{\circ} & z-z_{\circ} \\ x'(t_{\circ}) & y'(t_{\circ}) & z'(t_{\circ}) \\ x''(t_{\circ}) & y''(t_{\circ}) & z''(t_{\circ}) \end{vmatrix}=\circ$$

۴-۴-۱۱ مثال: معادلهٔ صفحهٔ بوسان بر منحنی c با معادلهٔ پارامتری $\begin{cases} x=t^{۲}+۱ \\ y=۲t \\ z=t^{۲}-۱ \end{cases}$ را در نقطهٔ نظیر $t=۱$ بنویسید.

حل: $x'=۲t, y'=۲, z'=۲t$ و $x''=۲, y''=\circ, z''=۲$ و $t=۱\Rightarrow P_{\circ}(۲,۲,\circ)$

طبق رابطهٔ ۱۰-۴-۴ در $t=۱$ داریم:

معادلهٔ صفحهٔ بوسان $$\begin{vmatrix} x-۲ & y-۲ & z \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & \circ & ۲ \end{vmatrix}=\circ\Rightarrow x-z-۲=\circ$$

۴-۴-۱۲ مثال: معادلات صفحهٔ مماس و صفحهٔ قائم و صفحهٔ بوسان بر منحنی c با معادلهٔ برداری $R(t)=<t\cos t, t\sin t, t>$ را در نقطهٔ متناظر با $t=0$ بدست آورید.

حل: کافیست بردارهای R' و R'' و $R'\times R''$ را بدست آوریم

$$R'(t)=<\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1> \quad \text{و} \quad R''(t)=<-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 0>$$

$$R'(0)=<1,0,1> \quad \text{و} \quad R''(0)=<0,2,0>$$

$$R'(0)\times R''(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=<-2,0,2>$$

نقطهٔ متناظر با $t=0$ عبارتست از $P_0(0,0,0)$.

برای بدست آوردن صفحهٔ مماس چون سوی بردار R'' با بردار نرمال صفحهٔ مماس یکی است داریم

معادلهٔ صفحهٔ مماس $\qquad 0(x-0)+2(y-0)+0(z-0)=0 \Rightarrow y=0$

در صفحهٔ قائم نیز سوی بردار R' با بردار نرمال صفحهٔ قائم یکی است لذا

معادلهٔ صفحهٔ قائم $\qquad 1(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0 \Rightarrow x+z=0$

همچنین سوی بردار $R'\times R''$ با بردار نرمال ضفححهٔ بوسان یکی است بنابراین داریم:

معادلهٔ صفحهٔ بوسان: $\qquad -2(x-0)+0(y-0)+2(z-0)=0 \Rightarrow z-x=0$

۴-۴-۱۳ تعریف: منحنی c با معادلهٔ برداری $R(t)$ مفروض است شعاع انحناء منحنی را در نقطهٔ مفروض P، عکس انحناء تعریف می کنیم و با ρ نشان می دهیم بنابراین داریم: $\rho=\dfrac{1}{k}$

۴-۴-۱۴ تعریف: منحنی c مفروض است اگر B بردار قائم دوم آن در نقطهٔ دلخواه P باشد آنگاه تاب (چرخش) منحنی c را در P بصورت زیر تعریف می کنیم: $\tau=\left|\dfrac{dB}{ds}\right|$. می توان نشان داد تاب یک منحنی با معادلهٔ برداری $R(t)$ برابر است با $\tau=\dfrac{(R'\times R'')\cdot R''}{|R'\times R''|^2}$.

۴-۴-۱۵ مثال: برای منحنی فضایی $R(t)=<t,\dfrac{t^2}{2},\dfrac{t^3}{3}>$ شعاع انحناء و تاب منحنی را در نقطهٔ نظیر $t=1$ حساب کنید.

حل:

$$R'=<1,t,t^2> \quad \text{و} \quad R''=<0,1,2t> \quad \text{و} \quad R'''=<0,0,2>$$

$$R'=<1,1,1> \quad \text{و} \quad R''=<0,1,2> \quad \text{و} \quad R'''(1)=<0,0,2>$$

$$\left(R'\times R''\right)\cdot R'''=<۱,-۲,۱>\cdot<۰,۰,۲>=۲ \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=<۱,-۲,۱>$$

طبق فرمول انحناء داریم: $k=\dfrac{\left|R'\times R''\right|}{\left|R'\right|^{۳}}=\dfrac{\sqrt{۶}}{۳^{\frac{۳}{۲}}}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۳}$ در نتیجه شعاع انحناء برابر است با: $\rho=\dfrac{۱}{k}=\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲}$.

طبق فرمول تاب داریم $\tau=\dfrac{(R'\times R'')\cdot R'''}{\left|R'\times R''\right|^{۳}}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳}$.

۱۶-۴-۴ تعریف: اگر روی بردار قائم بر منحنی (c) در نقطهٔ P، C را چنان تعیین کنیم بطوریکه فاصلهٔ نقطهٔ C تا P ($\overline{CP}$) برابر شعاع انحناء منحنی در نقطهٔ P باشد و دایره ای بمرکز C و شعاع ρ رسم کنیم این دایره را دایرهٔ انحناء بوسان منحنی c در نقطهٔ P می نامیم. در واقع دایرهٔ بوسان بر منحنی c در نقطهٔ P نزدیکترین منحنی درجهٔ دوم به منحنی c می باشد زیرا: اولاً هر دو از نقطه P می گذرند، ثانیاً مشتق اول و دوم معادله منحنی c و دایرهٔ بوسان در نقطهٔ P با هم برابرند.

۱۷-۴-۴ محاسبهٔ دایرهٔ انحناء (روش اول)

اگر $C(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و R شعاع آن باشد آنگاه $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$ معادلهٔ انحناء است. برای تعیین α و β و R از تعریف دایرهٔ انحناء استفاده می کنیم و قرار می دهیم:

$$f(t)=(x(t)-\alpha)^{۲}+(y(t)-\beta)^{۲}-R^{۲}$$

در نقطهٔ نظیر $t=t_{۰}$ مشتقات اول و دوم دایره و منحنی با هم برابرند لذا کافی است معادلات $f(t_{۰})=f'(t_{۰})=f''(t_{۰})=۰$ را حل کرده و α و β و R را محاسبه کنیم.

۱۸-۴-۴ مثال: معادلهٔ دایرهٔ انحنای منحنی $y=\cos\dfrac{x}{\sqrt{۲}}$ را در نقطهٔ $(۰,۱)$ بدست آورید.

حل: فرض کنیم $x=t$ و $y=\cos\dfrac{x}{\sqrt{۲}}$ معادلات پارامتری منحنی فوق باشند معادلهٔ دایرهٔ انحنای منحنی فوق و معادلات $f(t_{۰})=f'(t_{۰})=f''(t_{۰})=۰$ را حل می کنیم تا (α,β) مرکز انحناء و R شعاع انحناء را بدست آوریم.

$$f(۰)=\alpha^{۲}+(۱-\beta)^{۲}-R^{۲}=۰ \qquad (۱)$$

$$f'(t)=2(t-\alpha)-\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}-\beta)$$ و

$$f''(t)=2-\cos\frac{t}{\sqrt{2}}(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}-\beta)+\sin^2\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$f''(0)=2-(1-\beta)=0\Rightarrow\beta=-1 \quad \text{و} \quad f'(0)=-2\alpha\Rightarrow\alpha=0 \qquad (2)$$

با استفاده از معادلات (۱) و (۲) داریم $\alpha=0$ و $\beta=-1$ و $R^2=4$ لذا معادله دایرهٔ انحناء عبارتست از:

$$x^2+(y+1)^2=4$$

۱۹-۴-۴ محاسبهٔ دایرهٔ انحناء(روش دوم)

فرض کنیم $C(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز دایرهٔ بوسان باشد چون در نقطهٔ $P(x_P,y_P)$ از منحنی C بردار یکانی قائم اصلی $\vec{N}$ در امتداد شعاع دایرهٔ بوسان است بنابراین $\overrightarrow{PC}$ و $\vec{N}$ هم جهت می باشند از طرفی $|\overrightarrow{PC}|=\rho$ و $|\rho\vec{N}|=\rho$ لذا $\overrightarrow{PC}=\rho\vec{N}$ چون $\overrightarrow{PC}=(\alpha-x_P)i+(\beta-y_P)j$ می توان با یکسان قرار دادن ضرایب i و j در طرفین رابطهٔ $\overrightarrow{PC}=\rho\vec{N}$ مقادیر α و β را بدست آورد.

بردار یکانی مماس بر منحنی c با معادلهٔ برداری $R(t)$ برابر است با $T=\frac{dR}{ds}=\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j$ و بردار قائم یکانی عبارتست از $N=\frac{dy}{ds}i-\frac{dx}{ds}j$ یا $N=-\frac{dy}{ds}i+\frac{dx}{ds}j$ از دو بردار N آنرا که در جهت تقعر منحنی است انتخاب می کنیم بنابراین از رابطهٔ $\overrightarrow{PC}=\rho\vec{N}$ داریم:

$$(\alpha-x_P)i+(\beta-y_P)j=\rho(\pm\frac{dy}{dx}i\mp\frac{dx}{ds}j)\Rightarrow\alpha=x_P\pm\rho\frac{dy}{ds},\beta=y_P\mp\rho\frac{dx}{ds}$$

۲۰-۴-۴ مثال: معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر منحنی c با معادلهٔ برداری $R(t)=t\,i+\cosh t\,j$ را در نقطهٔ P نظیر $t=0$ بدست آورید.

حل: ابتدا بردار قائم یکانی و انحناء را در $t=0$ بدست می آوریم.

$$T=\frac{R'}{|R'|}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}<i+\sinh t\ j>=(\operatorname{sec}h\,t)\,i+(\tanh t)\,j$$

$$N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|} \quad \text{و} \quad \frac{dT}{ds}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \text{و} \quad \frac{ds}{dt}=|R'|=\cosh t$$

$$\frac{dT}{dt}=-\operatorname{sec}h\,t\ \tanh t\ i+\operatorname{sec}h^2 t\ j \quad \text{و} \quad \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0}=j \quad \text{و} \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=1$$

بنابراین $k|_{t=0}=\left|\frac{dT}{ds}\right|=1$ و $\vec{N}|_{t=0}=j$ و $\rho=1$ حال اگر فرض کنیم (α,β) مختصات مرکز دایرهٔ بوسان باشد ار برابری رابطهٔ $\overrightarrow{PC}=\rho\,\vec{N}$ و اینکه نقطهٔ نظیر $t=0$، $P(0,0)$ می باشد داریم:

$$(\alpha-0)\,i+(\beta-0)\,j=1(j)\Rightarrow \alpha=0,\beta=1$$

در نتیجه معادلهٔ دایرهٔ بوسان برابر است با $x^2+(y-1)^2=1$.

۴-۴-۲۱ محاسبهٔ کرهٔ انحناء (کرهٔ بوسان) برای منحنیهای فضایی

فرض کنیم $C(\alpha,\beta,\gamma)$ مرکز کرهٔ بوسیءان باشد چون در نقطهٔ $P(x_P,y_P,z_P)$ از منحنی c بردار یکانی قائم اصلی $\vec{N}$ در امتداد شعاع کرهٔ بوسان است بنابراین $\overrightarrow{PC}$ و $\vec{N}$ هم جهت می باشند از طرفی $|\overrightarrow{PC}|=\rho$ و و $|\rho\,\vec{N}|=\rho$ لذا $\overrightarrow{PC}=\rho\,\vec{N}$ چون $\overrightarrow{PC}=(\alpha-x_P)\,i+(\beta-y_P)\,j+(\gamma-z_P)k$ می توان با یکسان قرار دادن ضرایب i و j و k در طرفین رابطهٔ $\overrightarrow{PC}=\rho\,\vec{N}$ مقادیر α و β و γ را بدست آورد.

۴-۴-۲۲ مثال: منحنی c با معادلات پارامتری $x=e^t\sin 2t$ و $y=e^t\cos 2t$ و $z=2e^t$ مفروض است اگر P نقطهٔ متناظر با $t=0$ در منحنی باشد، معادلی کرهٔ بوسان را در P بدست آورید.

حل: ابتدا بردار $\vec{N}$ و ρ شعاع انحناء را در $t=0$ محاسبه می کنیم.

$$\frac{dR}{dt}=< e^t(\sin 2t+2\cos 2t), e^t(\cos 2t-2\sin 2t), 2e^t > \quad \text{و} \quad T=\frac{dR}{ds}=\frac{\frac{dR}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \text{و}$$

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dR}{dt}\right|=\sqrt{9e^{2t}}=3e^t$$

بنابراین بردار T برابر است با: $T=\frac{1}{3}< \sin 2t+2\cos 2t, \cos 2t-2\sin 2t, 2 >$.

برای محاسبهٔ بردار $\vec{N}$ داریم:

$$\frac{dT}{ds}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \text{و} \quad N=\frac{\frac{dT}{ds}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|}$$

$$\frac{ds}{dt}=3e^t \quad \text{و} \quad \frac{dT}{dt}=\frac{1}{3}< 2\cos 2t-4\sin 2t, -2\sin 2t-4\cos 2t, 0 >$$

بنابراین
$$\frac{dT}{ds}=\frac{1}{9e^t}< 2\cos 2t-4\sin 2t, -2\sin 2t-4\cos 2t, 0 >$$

$$R=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{9} \quad \text{و} \quad \left.\frac{dT}{ds}\right|_{t=0}=\frac{1}{9}< 2,-4,0 >$$

بنابراین بردار $\vec{N}$ در $t=0$ عبارتست از: $\left.\vec{N}\right|_{t=0}=\frac{\frac{dT}{ds}}{k}=\frac{1}{\sqrt{5}}< 1,-2,0 >$

و شعاع انحناء عبارتست از: $\rho=\frac{1}{k}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$. حال از برابری روابط $\overrightarrow{PC}=\rho\vec{N}$ در $P(0,1,2)$ داریم:

$(\alpha-0)i+(\beta-1)j+(\gamma-2)k=\frac{9}{10}i-\frac{9}{5}j-0k$ در نتیجه $\gamma-2=0$ و $\beta-1=-\frac{9}{5}$ و $\alpha=\frac{9}{10}$.

لذا مختصات مرکز کرهٔ بوسان برابر است با: $\alpha=\frac{9}{10}$ و $\beta=-\frac{4}{5}$ و $\gamma=2$. درنتیجه معادلهٔ کرهٔ بوسان عبارتست از:
$$(x-\frac{9}{10})^2+(y+\frac{4}{5})^2+(z-2)^2=\frac{81}{20}$$

۵-۴ بردارهای موضعی سرعت و شتاب در مختصات قطبی و استوانه ای

۱-۵-۴ بردارهای موضعی سرعت و شتاب در مختصات قطبی: فرض کنیم مختصات نقطهٔ متحرک P با معادلهٔ برداری $R(t)$ در مختصات قطبی بصورت $P(r,\theta)$ داده شده باشد و فرض کنیم این متحرک روی منحنی c به معادلهٔ $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$ حرکت می کند در اینصورت اگر u_r را بعنوان بردار واحد در امتداد شعاع حامل $\overrightarrow{OP}$ و در جهت افزایش r و به مبداء P در نظر بگیریم این بردار را بر حسب i و j می توان بصورت زیر نوشت:

$u_r = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$. همچنین u_θ را بعنوان بردار واحد عمود بر u_r و در جهت افزایش θ در نظر می گیریم در اینصورت بردار u_θ را می توان با دوران بردار u_r به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ بدست آورد بنابراین:

$$u_\theta = \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)\, i + \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)\, j = (-\sin\theta)\, i + (\cos\theta)\, j$$

بسادگی دیده می شود $\frac{d\, u_r}{d\theta} = u_\theta$ و $\frac{d\, u_\theta}{d\theta} = -u_r$. حال بردار موضع $R(t)$ را بصورت زیر می نویسیم:

$$\overrightarrow{R}(t) = \overrightarrow{OP} = r\, \overrightarrow{u}_r$$

برای محاسبهٔ بردار سرعت داریم:

$$v(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{d(r\, u_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\, u_r}{dt} = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\, u_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$ بنابراین :

$v(t) = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta$. با مشتق گیری مجدد بردار سرعت نسبت به t بردار شتاب در مختصات قطبی بصورت زیر بدست می آید:

$$a(t) = \left[\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}} - r(\frac{d\theta}{dt})^{۲}\right]u_r + \left[r\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} + ۲\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]u_\theta$$

۴-۵-۲ مثال: منحنی c با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = 1 + \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ مفروض است اولاً معادلهٔ منحنی را در مختصات قطبی بنویسید. ثانیاً بردارهای سرعت و شتاب آنرا در مختصات قطبی برحسب u_r و u_θ بدست آورید و انحناء منحنی را در $t = 0$ حساب کنید.

حل: $$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{\sin 2t}{1+\cos 2t} = \tan^{-1}\frac{2\sin t\cos 2}{2\cos^2 t} = \tan^{-1}(\tan t)$$

بنابراین $\theta = t$. از طرفی $x^2 + y^2 = (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t + \sin^2 2t) = 2(1+\cos 2t)$

معادلهٔ منحنی در مختصات قطبی $x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r = 2\cos\theta$

برای محاسبهٔ بردارهای سرعت و شتاب داریم: $R(t) = ru_r = (2\cos\theta)u_r = (2\cos t)\,u_r$

$$v = \frac{dR}{dt} = (-2\sin t)\,u_r + (2\cos t)\,u_\theta = 2(-\sin\theta\, u_r + \cos\theta\, u_\theta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2(-\cos t\, u_r - 2\sin t\, u_\theta - \sin t\, u_r) - 4(\cos\theta\, u_r + \sin\theta\, u_\theta)$$

برای محاسبهٔ انحناء داریم: $k = \dfrac{|R' \times R''|}{|R'|^3} = \dfrac{|v \times a|}{|v|^3}$. $a(0) = -4u_r$ و $v(0) = -2u_\theta$ در نتیجه:

$$k = \frac{|2u_\theta \times (-4u_r)|}{|2u_\theta|^3} = \frac{8|u_r \times u_\theta|}{8|u_\theta|^3} = 1$$

۴-۵-۳ بردارهای موضعی سرعت و شتاب در مختصات استوانه ای: فرض کنید $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ معادلهٔ مسیر متحرکی در فضا با معادلهٔ برداری $R(t)$ در دستگاه مختصات استوانه ای می باشد. مطابق شکل و مانند حالت ۴-۵-۲ بردار موضع $R(t)$ را می توان به این صورت نوشت: $R(T) = r(t)\,u_r + z(t)k$

و بردارهای سرعت و شتاب عبارتند از:

$$v(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,u_r + zk) = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta + \frac{dz}{dt}k$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]u_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]u_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}k$$

۴-۵-۴ مثال: منحنی c با معادلات پارامتری $x=t\cos t$ و $y=t\sin t$ و $z=t$ مفروض است اولاً معادلهٔ منحنی را در مختصات استوانه ای بنویسید و ثانیاً بردارهای سرعت و شتاب را بر حسب بردارهای یکانی u_r و u_θ و k بدست آورید.

حل: $\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=\tan^{-1}(\tan t)=t$

$$x^2+y^2=t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)=t^2 \Rightarrow r^2=t^2 \Rightarrow r=\pm t$$

بنابراین معادلهٔ منحنی در مختصات استوانه ای بصورت $\begin{cases} r=\pm t \\ \theta=t \\ z=t \end{cases}$ می باشد.

برای محاسبهٔ بردارهای سرعت و شتاب با فرض $r=t$ داریم:

$$v(t)=\frac{dr}{dt}u_r+r\frac{d\theta}{dt}u_\theta+\frac{dz}{dt}k=u_r+t\,u_\theta+k$$

بنابراین بردار سرعت برابر است با: $v=u_r+\theta u_\theta+k$

$$a(t)=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]u_r+\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]u_\theta+\frac{d^2z}{dt^2}k=-t\,u_r+2u_\theta$$

در نتیجه بردار شتاب برابر است با: $a=-t\,u_r+2u_\theta$.

۴-۶ نمونه مسائل حل شده

۴-۶-۱: منحنی γ به معادلات $\begin{cases} x=e^t(\sin t+\cos t) \\ y=e^t(\sin t-\cos t) \\ z=e^t \end{cases}$ مفروض است. اولاً این منحنی روی چه رویه ای قرار دارد؟ ثانیاً بردارهای یکانی $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ را در نقطهٔ نظیر $t=0$ بدست آورید و معادلهٔ صفحه بوسان را در همین نقطه بنویسید.

حل: اولاً

$$x^2+y^2=e^{2t}(\sin^2 t+\cos^2 t+2\sin t\cos t+\sin^2 t+\cos^2 t-2\sin t\cos t)=2e^{2t}=2z^2$$

منحنی روی رویهٔ $x^2+y^2=2z^2$ قرار دارد که یک مخروط بیضوی در جهت محور x ها است.

ثانیاً برای محاسبهٔ $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ می توان نوشت:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = e^t (۲\cos t\,\vec{i} + ۲\sin t\,\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{۲\cos t\,\vec{i} + ۲\sin t\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{۵}} \quad \text{و} \quad \vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{-۲\sin t\,\vec{i} + ۲\cos t\,\vec{j}}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \vec{N} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

$$t = ۰ \Rightarrow \vec{T} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}\vec{i} + \frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{N} = \vec{j}$$

$$B = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{۳}{\sqrt{۵}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -\frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{i} + \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\vec{k}$$

$$t = ۰ \Rightarrow (x_۰ = ۱, y_۰ = -۱, z_۰ = ۱)$$

و معادلهٔ صفحهٔ بوسان بصورت زیر بدست می آید:

$$-\frac{\sqrt{۵}}{۵}(x-۱) + ۰(y+۱) + \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}(z-۱) = ۰ \Rightarrow x - ۲z + ۱ = ۰$$

۲-۶-۴: معادلهٔ متحرکی بصورت $\vec{R} = \cosh t\,\vec{i} + \sinh t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ داده شده است الف: مسیر فوق روی چه رویه ای قرار دارد؟ ب: بردارهای یکا نی $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ را در نقطهٔ نظیر $t = ۰$ بدست آورید. ج) معادلهٔ کرهٔ بوسان را در $t = ۰$ حساب کنید.

حل: الف: مسیر فوق روی استوانهٔ هذلولوی $x^۲ - y^۲ = ۱$ قرار دارد زیرا:

$$x^۲ - y^۲ = \cosh^۲ - \sinh^۲ = ۱$$

ب:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \sinh t\,\vec{i} + \cosh t\,\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\sinh t\,\vec{i} + \cosh t\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\sinh^۲ t + \cosh^۲ t + ۱}}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\,\frac{\sinh t\,\vec{i} + \cosh t\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{۱ + \sinh^۲ t}} \Rightarrow \vec{T}\big|_{t=۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{N}=\frac{\dfrac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{2}(1+\sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}}[(2\cosh t(1+\sinh^2 t)-\sinh t\sinh 2t)\vec{i}$$

$$+(2\sinh t(1+\sinh^2 t)-\cosh t\sinh 2t)\,\vec{j}-\sinh 2t\, i]$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}\Rightarrow \vec{N}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\vec{i} \qquad B=T\times N=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

ج: برای محاسبهٔ کرهٔ بوسان داریم:

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\sinh t\,\vec{i}+\cosh t\,\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{a}&=\cosh t\,\vec{i}+\sinh t\,\vec{j}\end{aligned}\Rightarrow \begin{aligned}\vec{v}&=\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{a}&=\vec{i}\end{aligned}\Rightarrow k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\frac{1}{2}$$

$$k=\frac{1}{2}\Rightarrow \rho=\frac{1}{k}=2,\ t=0\Rightarrow(x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=0)$$

با فرض اینکه (a,b,c) مختصات مرکز کره باشد، خواهیم داشت:

$$(a-x_0)\vec{i}+(b-y_0)\vec{j}+(c-z_0)\vec{k}=\rho\vec{N}$$

$$\Rightarrow(a-1)\vec{i}+(b-0)\vec{j}+(c-0)\vec{k}=2\vec{i}\Rightarrow a=3, b=0, c=0$$

معادلهٔ کرهٔ بوسان : $(x-3)^2+y^2+z^2=4$

د:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{2}(1+\sinh^2 t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sinh 2t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}}\qquad t=0\Rightarrow\begin{cases}a_T=\dfrac{d^2s}{dt^2}=0\\ a_N=\sqrt{|a|^2-a_T^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}a_T&=0\\ a_N&=1\end{aligned}$$

۳-۴-۶: اگر بردار شتاب بصورت $\vec{a}(t)=t^{۲}\vec{i}-\frac{۱}{t^{۲}}\vec{j}$ داده شده باشد و $v(۱)=\vec{j}$ و $\vec{R}(i)=-\frac{۱}{۴}\vec{i}+\frac{۱}{۲}\vec{j}$ بردار موضع $\vec{R}(t)$ را بدست آورید.

$$\vec{a}(t)=\frac{d\,\vec{v}(t)}{dt}\Rightarrow d\,\vec{v}(t)=\vec{a}(t)dt\Rightarrow \int_{\vec{v}(t_{\circ})}^{\vec{v}(t)}\vec{v}(t)dt=\int_{t_{\circ}}^{t}\vec{a}(t)\,dt$$

$$t_{\circ}=۱\Rightarrow \vec{v}(t)-\vec{v}(۱)=\int_{۱}^{t}(t^{۲}\vec{i}-\frac{۱}{t^{۲}}\vec{j})\,dt=(\frac{t^{۳}}{۳}-\frac{۱}{۳})\vec{i}+(\frac{۱}{t}-۱)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t)=(\frac{t^{۳}}{۳}-\frac{۱}{۳})\vec{i}+(\frac{۱}{t})\vec{j}$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\Rightarrow \vec{v}(t)\,dt\Rightarrow \int_{R(t_{\circ})}^{R(t)}d\vec{R}(t)=\int_{t_{\circ}}^{t}\vec{v}(t)dt$$

$$t_{\circ}=۱\Rightarrow \vec{R}(t)-\vec{R}(۱)=\int_{۱}^{t}((\frac{t^{۳}}{۳}-\frac{۱}{۳})\vec{i}+\frac{۱}{t}\vec{j})dt$$

$$=\int_{۱}^{t}((\frac{t^{۳}}{۳}-\frac{۱}{۳})dt)\vec{i}+\int_{۱}^{t}\frac{dt}{t}\vec{j}\Rightarrow$$

$$\vec{R}(t)=-\frac{\vec{i}}{۴}+\frac{\vec{i}}{۲}+(\frac{t^{۴}}{۱۲}-\frac{۱}{۳}t-\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۳})\vec{i}+(\ln t-\circ)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{R}(t)=(\frac{۱}{۱۲}t^{۴}-\frac{۱}{۳}t)\vec{i}+(\ln t+\frac{۱}{۲})\,\vec{j}$$

۴-۶-۴: معادلهٔ دایرهٔ بوسان را برای منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ در نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})$ بیابید.

$$y=(۱-\sqrt{x})^{۲}=۱+x-۲\sqrt{x}$$

$$k=\frac{|y''|}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}|}{(۱+۱+\frac{۱}{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}})^{\frac{۳}{۲}}}\qquad x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow k=\sqrt{۲}\Rightarrow \rho=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای بدست آوردن $\vec{N}$ بصورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases}x=t\\ y=(۱-\sqrt{t})^{۲}\end{cases}\qquad \vec{R}=t\,\vec{i}+(۱-\sqrt{t})^{۲}\,\vec{j}\Rightarrow \vec{v}=\vec{i}+(۱-\frac{۱}{\sqrt{t}})\,\vec{j}$$

$$\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\vec{i}+(1-\frac{1}{\sqrt{t}})\vec{j}}{\sqrt{2+\frac{1}{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}}}\Rightarrow \vec{N}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\frac{d\vec{T}}{dt}|}$$

$$\left.\frac{d\vec{T}}{dt}\right|_{t=\frac{1}{4}}=12(\vec{i}+\vec{j})\Rightarrow \vec{N}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$$

با فرض اینکه (a,b) مرکز دایرهٔ بوسان باشد داریم: $(a-x_0)\vec{i}+(b-y_0)\vec{j}=\rho\vec{N}$

$$\Rightarrow (a-\frac{1}{4})\vec{i}+(b-\frac{1}{4})\vec{j}=\frac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j})\Rightarrow\begin{cases}a-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{4}\\ b-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{4}\end{cases}$$

معادلهٔ کره : $(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2\Rightarrow (x-\frac{3}{4})^2+(y-\frac{3}{4})^2=\frac{1}{4}$

۴-۶-۵: ثابت کنید مختصات مرکز انحنای یک منحنی در $P(x,y)$ عبارتست از:

$$x_c=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\quad \text{و}\quad y_c=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

فرض کنیم دایرهٔ مورد نظر بصورت $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=\rho^2$ و معادلهٔ منحنی بصورت $y=y(x)$ باشد اگر (x,y) نقطه ای از منحنی $y=y(x)$ باشد که دایرهٔ بوسان متعلق به آن نقطه است باید مشتق اول و دوم دو منحنی $y=y(x)$ و دایرهٔ بوسان در آن نقطه برابر باشند لذا داریم:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=\rho^2$$

$$\Rightarrow (x-x_c)+2y'(y-c)=0\Rightarrow 2+2y''(y-c)+2y'=0$$

$$\begin{cases}x-x_c+y'(y-y_c)=0\\ 1+y''(y-y_c)+y'^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'(y-y_c)=-(x-x_c)\quad (1)\\ y-y_c=-\frac{1+y'^2}{y''}\qquad (2)\Rightarrow y_c=y+\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow y'=\frac{x-x_c}{\frac{1+y'^2}{y''}}\Rightarrow x-x_c=\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\Rightarrow x_c=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

۴-۶-۶ : معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر منحنی $x^3+y^3+3xy+3=0$ را در نقطهٔ $(1,-1)$ بنویسید.

حل: برای محاسبهٔ انحناء، y' و y'' را با مشتق گیری ضمنی بدست می آوریم بنابراین داریم:

$$۳x^{۲}+۳y'y^{۲}+۳y+۳xy'=\circ \Rightarrow y'\Big|_{(۱,-۱)}=\circ$$

$$۶x+۳y''y^{۲}+۶y'^{۲}y+۳y'+۳xy''=\circ \Rightarrow y''\Big|_{(۱,-۱)}=-۱$$

$$k=\frac{|y''|}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=۱ \Rightarrow \rho=۱$$

$$x_c=x-\frac{y'(۱+y'^{۲})}{y''}=۱-\circ=۱ \quad \text{و} \quad y_c=y+\frac{۱+y'^{۲}}{y''}=-۱+\frac{۱+\circ}{-۱}=-۲$$

لذا معادلهٔ دایرهٔ بوسان عبارتست از: $(x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۱$

۷-۶-۴: اولاً معادلات پارامتری منحنی زنجیری $y=a\cosh\frac{x}{a}$ را بر حسب طول قوس بنویسید. در صورتیکه s از نقطهٔ $(\circ,a)$ تا (x,y) اندازه گیری شود و سپس بردارهای یکانی مماس و قائم بر منحنی را در آن نقطه بنویسید.

حل: طبق فرمول طول قوس می توان نوشت:

$$d_s=\sqrt{۱+y'^{۲}}\,dx=\sqrt{۱+\sinh^{۲}\frac{x}{a}}\,dx=\cosh\frac{x}{a}\,dx$$

$$s=\int_{\circ}^{x}\cosh\frac{x}{a}\,dx=a\sinh\frac{x}{a}\Big|_{\circ}^{x}=a\sinh\frac{x}{a}\Rightarrow x=a\sinh^{-۱}(\frac{s}{a})$$

$$y=a\cosh\frac{x}{a}=a\cosh(\sinh^{-۱}(\frac{s}{a}))=a\sqrt{۱+(\frac{s}{a})^{۲}}=\sqrt{a^{۲}+s^{۲}}$$

برای محاسبهٔ T و N از معادلهٔ پارامتری منحنی برحسب طول قوس استفاده می کنیم در اینصورت خواهیم داشت:

$$\vec{R}(s)=a\sinh^{-۱}(\frac{s}{a})\vec{i}+\sqrt{a^{۲}+s^{۲}}\,\vec{j}$$

$$\vec{T}=\frac{\vec{R}'(s)}{|\vec{R}'(s)|}\Rightarrow \vec{R}'(s)=\frac{\vec{i}}{\sqrt{۱+(\frac{s}{a})^{۲}}}+\frac{s}{\sqrt{a^{۲}+s^{۲}}}\,\vec{j}=|\vec{R}'(s)|=۱$$

$$\vec{T}=\frac{a\,\vec{i}+s\,\vec{j}}{\sqrt{a^{۲}+s^{۲}}} \quad \text{و} \quad \vec{N}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\frac{d\vec{T}}{dt}|}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{-as}{(a^{۲}+s^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\vec{i}+\frac{a^{۲}}{(a^{۲}+s^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\vec{j}\Rightarrow\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|=\frac{a}{a^{۲}+s^{۲}}\Rightarrow\vec{N}=-\frac{s\vec{i}+a\vec{j}}{\sqrt{a^{۲}+s^{۲}}}$$

$$k=\frac{|y''|}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\left|\frac{۱}{a}\cosh\frac{x}{a}\right|}{\sinh^{۳}\frac{x}{a}}=\left|\frac{۱}{a}\right|\frac{۱}{\cosh^{۲}\frac{x}{a}}$$

$$\frac{dk}{dx}=\frac{۱}{|a|}\frac{-\frac{۲}{a}\sinh\frac{x}{a}}{\cosh^{۳}\frac{x}{a}}=۰\Rightarrow\sinh\frac{x}{a}=۰\Rightarrow x=۰$$

$$\frac{d^{۲}k}{dx^{۲}}=-\frac{۲}{a|a|}\left[\frac{۱}{a}\cosh^{-۲}\frac{x}{a}-\frac{۳}{a}\sinh\frac{x}{a}\cosh^{-۴}\frac{x}{a}\right]_{x=۰}=\frac{-۲}{a^{۲}|a|}<۰$$

نقطهٔ ماکزیمم انحناء نقطهٔ $(۰,a)$ است.

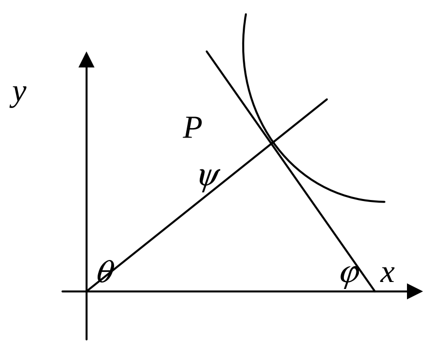
$$x_c=x-\frac{y'(۱+y'^{۲})}{y''}=۰-\frac{۰}{\frac{۱}{a}}=۰ \quad \text{و} \quad y_c=y+\frac{۱+y'^{۲}}{y''}=a+\frac{۱+۰}{\frac{۱}{a}}=۲a$$

$$k=\frac{۱}{a}\Rightarrow\rho=a$$

در نتیجه معادلهٔ دایرهٔ بوسان عبارتست از:

$$x^{۲}+(y-۲a)^{۲}=a^{۲}$$

۸-۶-۴: اگر $r=f(\theta)$ یک منحنی قطبی باشد نشان دهید که انحناء توسط فرمول زیر بدست می آید:



$$k=\frac{|r^{۲}+۲r'^{۲}-rr''|}{(r^{۲}+r'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \qquad k=\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{و} \quad \varphi=\psi+\theta$$

$$k=\frac{d\psi}{ds}+\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{ds}(\frac{d\psi}{d\theta}+۱)$$

از طرفی می دانیم $\tan\psi=\frac{r}{r'}$ با مشتقگیری از طرفین این رابطه نسبت به θ داریم:

$$\sec^{۲}\psi\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{r'^{۲}-r\,r''}{r'^{۲}}\Rightarrow\frac{d\psi}{d\theta}=\frac{r'^{۲}-r\,r''}{r'^{۲}(۱+\tan^{۲}\psi)}=\frac{r'^{۲}-r\,r''}{r'^{۲}(۱+\frac{r^{۲}}{r'^{۲}})}=\frac{r'^{۲}-r\,r''}{r'^{۲}+r^{۲}}$$

حال می توان نوشت:

$$\sin\psi=r\frac{d\theta}{ds}\Rightarrow\frac{d\theta}{ds}=\frac{\sin\psi}{r}=\frac{۱}{r}\frac{r}{\sqrt{r^{۲}+r'^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{r^{۲}+r'^{۲}}}$$

بنابراین فرمول انحناء بصورت زیر بدست می آید:

$$k=\frac{۱}{\sqrt{r^{۲}+r'^{۲}}}\left[۱+\frac{r'^{۲}-r\,r''}{r^{۳}+r'^{۲}}\right]=\frac{r^{۲}+۲r'^{۲}-r\,r''}{(r^{۲}+r'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

۹-۶-۴: انحناء منحنی قطبی $r=۲(۱-\cos\theta)$ را در نقطهٔ نظیر $\theta=\frac{\pi}{۳}$ بنویسید.

حل:

$$r=۲(۱-\cos\theta)\Rightarrow\frac{dr}{d\theta}=۲\sin\theta\Rightarrow\frac{d^{۲}r}{d\theta^{۲}}=۲\cos\theta$$

$$t=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow r=۱,r'=\sqrt{۳},r''=-۱$$

طبق رابطهٔ بدست آمده در مثال ۷ داریم:

$$k=\frac{|r^{۲}+۲r'-r\,r''|}{(r^{۲}+r'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|۱+۶+۱|}{(۱+۳)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۸}{۸}=۱$$

۱۰-۶-۴: منحنی پارامتری به معادلات $R\,(x=e^{t}\sin۲t,y=e^{t}\cos۲t,z=۲e^{t})$ مفروض است اگر $P_{\circ}$ نقطهٔ نظیر $t=\circ$ در منحنی باشد الف: منحنی فوق روی چه رویه ای قرار دارد ب: منحنی را در فاصلهٔ $[\circ,t]$ بر حسب طول قوس پارامتری کنید ج: بردارهای یکانی $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ را در نقطهٔ $P_{\circ}$ بدست آورید

د: کسینوسهای هادی مماس را در $P_\circ$ حساب کنید و: معادلهٔ صفحهٔ بوسان و قائم را در $P_\circ$ بنویسی ه: مقدار انحناء و تاب و مولفه های مماس و قائم بردار سرعت و شتاب را در $P_\circ$ بدست آورید.

حل: الف:
$$x^۲+y^۲=e^{۲t}(\sin^۲ ۲t+\cos^۲ ۲t)=e^{۲t}=\frac{z^۲}{۴}$$

منحنی روی مخروط دوار $x^۲+y^۲=\frac{z^۲}{۴}$ قرار دارد.

ب:
$$d\,s=\left[e^{۲t}(\sin ۲t+۲\cos ۲t)^۲+e^{۲t}(\cos ۲t-۲\sin ۲t)^۲+۴e^{۲t}\right]^{\frac{۱}{۲}}dt$$

$$\Rightarrow ds=۳e^t\,dt\Rightarrow s=\int_\circ^t ۳e^t\,dt=۳(e^t-۱)\Rightarrow t=\ln(\frac{۵}{۳}+۱)$$

لذا معادلات پارامتری منحنی بر حسب طول قوس عبارتست از:

$$x=(\frac{۵}{۳}+۱)\sin(۲\ln(\frac{۵}{۳}+۱)),\quad y=(\frac{۵}{۳}+۱)\cos(۲\ln(\frac{۵}{۳}+۱)),\quad z=۲(\frac{۵}{۳}+۱)$$

ج:
$$\vec{T}=\frac{d\vec{R}}{ds}=\frac{\frac{d\vec{R}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\qquad \frac{d\vec{R}}{dt}=e^t(\sin ۲t+۲\cos ۲t)\,\vec{i}+e^t(\cos ۲t-۲\sin ۲t)\,\vec{j}+۲e^t k$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt}\Big|_{t=\circ}=۲\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k},\quad \frac{ds}{dt}\Big|_{t=\circ}=۳\Rightarrow\vec{T}=\frac{۲}{۳}\vec{i}+\frac{۱}{۳}\vec{j}+\frac{۲}{۳}\vec{k}$$

$$\vec{N}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\frac{d\vec{T}}{dt}|}\qquad \vec{T}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{d\,s}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{۱}{۳}(۲\cos ۲t-۴\sin ۲t)\,\vec{i}+\frac{۱}{۳}(-۲\sin ۲t-۴\cos ۲t)\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}\Big|_{t=\circ}=\frac{۲}{۳}\vec{i}-\frac{۴}{۳}\vec{j}\qquad \frac{d\vec{T}}{d\,s}\Big|_{t=\circ}=\frac{۲}{۹}\vec{i}-\frac{۴}{۹}\vec{j}$$

$$\Rightarrow|\frac{dT}{ds}|=\sqrt{\frac{۴}{۸۱}+\frac{۱۶}{۸۱}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۹}\Rightarrow\vec{N}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\vec{i}-\frac{۲}{\sqrt{۵}}\vec{j}$$

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & -\frac{۲}{\sqrt{۵}} & ۰ \end{vmatrix}=\frac{۴}{۳\sqrt{۵}}\vec{i}+\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}\vec{j}-\frac{۵}{۳\sqrt{۵}}\vec{k}$$

د: کسینوسهای هادی مماس در $P_۰$ مولفه های بردار $\vec{T}$ هستند: $(\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

بردار نرمال صفحهٔ بوسان : $\vec{B}=\frac{۴}{۳\sqrt{۵}}\vec{i}+\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}\vec{j}-\frac{۵}{۳\sqrt{۵}}\vec{k}$

معادلهٔ صفحهٔ بوسان : $۴(x-۰)+۲(y-۱)-۵(z-۲)=۰\Rightarrow ۴x+۲y-۵z+۸=۰$

بردار نرمال صفحهٔ قائم : $\vec{T}=\frac{۲}{۳}\vec{i}+\frac{۱}{۳}\vec{j}+\frac{۲}{۳}\vec{k}$

معادلهٔ صفحهٔ قائم : $۲(x-۰)+(y-۱)+۲(z-۲)=۰\Rightarrow ۲x+y+۲z-۵=۰$

ه: از قسمت ج:

$$\text{تاب}\quad \tau=\left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right|=\left|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| \quad \text{و} \quad k=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\frac{۲\sqrt{۵}}{۹}$$

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sin ۲t+۲\cos ۲t}{۳} & \frac{\cos ۲t-۲\sin ۲t}{۳} & \frac{۲}{۳} \\ \frac{\cos ۲t-۲\sin ۲t}{\sqrt{۵}} & \frac{-\sin ۲t-۲\cos ۲t}{\sqrt{۵}} & ۰ \end{vmatrix}$$

$$=\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}(\sin ۲t+۲\cos ۲t)\,\vec{i}+\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}(\cos ۲t-۲\sin ۲t)\,\vec{j}-\frac{۵}{۳\sqrt{۵}}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt}=\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}(۲\cos ۲t-۴\sin ۲t)\,\vec{i}+\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}(-۲\sin ۲t-۴\cos ۲t)\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt}\Big|_{t=۰}=\frac{۴}{۳\sqrt{۵}}\vec{i}-\frac{۸}{۳\sqrt{۵}}\vec{j}\Rightarrow \tau=\frac{\left|\frac{dB}{dt}\right|}{\left|\frac{ds}{dt}\right|}=\frac{\frac{۴}{۳}}{۳}=\frac{۴}{۹}$$

$$\vec{v}=\vec{T}(\frac{ds}{dt})\Rightarrow\vec{v}=۲\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k}$$

$$\vec{a}=\vec{T}\frac{d^۲s}{dt^۲}+\vec{N}\cdot k(\frac{ds}{dt})^۲$$

$$a_T=\frac{d^۲s}{dt^۲}=۳e^t\Rightarrow a_T\big|_{t=۰}=۳,\quad a_N=k\cdot(\frac{ds}{dt})^۲=\frac{۲\sqrt{۵}}{۹}\cdot۹=۲\sqrt{۵}$$

۱۱-۶-۴: منحنی $y=a(\sin t-t\cos t)$ و $x=a(\cos t+t\sin t)$ مفروض است بردار یکانی مماس بر این منحنی را در یک نقطه از آن بدست آورید سپس نقطه ای از منحنی را تعیین کنید که دارای انحناء ماکزیمم باشد شعاع انحناء در این نقطه چقدر است؟ $(\frac{\pi}{۲}\le t\le\frac{۳\pi}{۲})$

$$\frac{dx}{dt}=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$$

$$\frac{dy}{dt}=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$$

$$\Rightarrow ds=\sqrt{a^۲t^۲}\,dt=at\,dt$$

$$\vec{T}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}=\left[(at\cos t)\vec{i}+(at\sin t)\vec{j}\right]\frac{۱}{at}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds}=(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j})\frac{۱}{at}\Rightarrow k=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|=\frac{۱}{at}$$

لذا ماکزیمم انحناء به ازای $t=\frac{\pi}{۲}$ بدست می آید.

$$k=\left(\frac{۱}{at}\right)_{t=\frac{\pi}{۲}}=\frac{۲}{\pi a}\Rightarrow\rho=\frac{\pi a}{۲}$$

۱۲-۶-۴: فرض کنید s طول قوس قسمتی از منحنی c به معادلهٔ $x=\sin^۲ t$ و $y=t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t$ در $[۰,t]$ باشد اولاً معادلهٔ پارامتری منحنی را برحسب s بنویسید ثانیاً معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر منحنی را در $t=۰$ بنویسید.

حل:

$$x'^{۲}+y'^{۲}=۴\sin^{۲}t\cos^{۲}t+(۱+\cos ۲t)^{۲}=\sin^{۲}۲t+\cos^{۲}۲t+۲\cos ۲t+۱$$

$$\Rightarrow\left(\frac{ds}{dt}\right)^{۲}=۲(۱+\cos t)=۴\cos^{۲}t\Rightarrow ds=\int_{\circ}^{t}۲\cos t\,dt=۲\sin t\Rightarrow \sin t=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{۵}{۲}\\[2mm] y=\sin^{-۱}\dfrac{۵}{۲}+\dfrac{۵}{۲}\sqrt{۱-\dfrac{۵^{۲}}{۴}}\end{cases}$$

فرض کنیم $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$ معادلهٔ دایرهٔ بوسان باشد با فرض اینکه

$$f(t)=(\sin^{۲}t-\alpha)^{۲}+(t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t-\beta)^{۲}-R^{۲}$$

معادلات $f(\circ)=f'(\circ)=f''(\circ)=\circ$ را حل کرده و α و β و R را بدست می آوریم. داریم:

$$f'(t)=۴\sin t\cos t(\sin^{۲}t-\alpha)+۲(۱+\cos ۲t)(t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t-\beta)$$

$$f''(t)=۴\cos t(\sin^{۲}t-\alpha)+۱۶\sin^{۲}t\cos^{۲}t-۴\sin ۲t(t+\frac{۱}{۲}\sin ۲t-\beta)+۲(۱+\cos ۲t)$$

$$f(\circ)=\circ\Rightarrow\alpha^{۲}+\beta^{۲}-R^{۲}=\circ$$

$$f'(\circ)=\circ\Rightarrow -۴\beta=\circ\Rightarrow\beta=\circ$$

$$f''(\circ)=\circ\Rightarrow ۴(-\alpha)+۸=\circ\Rightarrow\alpha=۲,\quad R^{۲}=۴\Rightarrow R=۲$$

معادلهٔ دایرهٔ بوسان: $(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۴$

۱۳-۶-۴: نشان دهید شعاع انحناء هر نقطه از کاردیوئید $r=a(۱+\cos\theta)$ برابر $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲a_r}$ است و نشان دهید $\frac{\rho^{۲}}{r}$ مقداری ثابت است.

$$r=a(۱+\cos\theta)\Rightarrow r'=-a\sin\theta,\quad r''=-a\cos\theta$$

$$\rho=\frac{(r^{۲}+r'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{r^{۲}-rr''+۲r'^{۲}}=\frac{(a^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}+a^{۲}\sin^{۲}\theta)^{\frac{۳}{۲}}}{a^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}-a(۱+\cos\theta)(-a\cos\theta)+۲a^{۲}\sin^{۲}\theta}$$

$$=\frac{a^{۳}\left[(۱+\cos\theta)^{۲}+(۱-\cos^{۲}\theta)\right]^{\frac{۳}{۲}}}{a^{۲}[(۱+\cos\theta)^{۲}+\cos\theta(۱+\cos\theta)+۲(۱-\cos^{۲}\theta)]}$$

$$=\frac{a\left[(۱+\cos\theta)(۱+\cos\theta+۱-\cos\theta)\right]^{\frac{۳}{۲}}}{(۱+\cos\theta)(۱+\cos\theta+\cos\theta+۲-۲\cos\theta)}=\frac{a(۱+\cos\theta)^{\frac{۳}{۲}}\cdot ۲^{\frac{۳}{۲}}}{۳(۱+\cos\theta)}=\frac{a(۱+\cos\theta)^{\frac{۱}{۲}}}{۳}۲\sqrt{۲}$$

$$=\frac{a}{۳}\sqrt{\frac{r}{۲}}\cdot ۲\sqrt{۲}=\frac{۲}{۳}\sqrt{۲ar}\Rightarrow \rho^{۲}=\frac{۸ar}{۳}\Rightarrow\frac{\rho^{۲}}{r}=\frac{۸a}{۳}$$

۴-۶-۱۴: منحنی قطبی $r=e^{a\theta}$ مفروض است انحناء منحنی را حساب کنید و ثابت کنید:

$$\lim_{\theta\to\infty}k=\lim_{a\to\infty}k=۰$$

$$k=\frac{|r^{۲}+۲r'^{۲}-rr''|}{(r^{۲}+r'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|e^{۲a\theta}+۲(ae^{a\theta})^{۲}-(e^{a\theta})(a^{۲}e^{a\theta})|}{(e^{۲a\theta}+a^{۲}e^{۲a\theta})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$=\frac{۲a^{۲}e^{۲a\theta}-a^{۲}e^{۲a\theta}+e^{۲a\theta}}{[e^{۲a\theta}(۱+a^{۲})]^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{e^{۲a\theta}(۱+a^{۲})}{e^{۲a\theta}(۱+a^{۲})(e^{۲a\theta}(۱+a^{۲}))^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{e^{a\theta}(۱+a^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\lim_{a\to۰}k=\lim_{a\to\infty}\frac{۱}{e^{a\theta}(۱+a^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}=۰=\lim_{\theta\to\infty}k$$

۴-۶-۱۵: فرض کنید $x=\int_{۰}^{\theta}\cos(\frac{۱}{۲}\pi t^{۲})\,dt$ و $y=\int_{۰}^{\theta}\sin(\frac{۱}{۲}\pi t^{۲})\,dt$ انحنای k را بصورت تابعی از طول قوس بدست آورید. (s از $(۰,۰)$ اندازه گیری شده است)

$$x=\int_{۰}^{\theta}\cos(\frac{\pi}{۲}t^{۲})dt\Rightarrow\frac{dx}{d\theta}=\cos(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})\Rightarrow\frac{d^{۲}x}{d\theta^{۲}}=-\pi\theta\sin(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})$$

$$y=\int_{۰}^{\theta}\sin(\frac{\pi}{۲}t^{۲})\,dt\Rightarrow\frac{dy}{d\theta}=\sin(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})\Rightarrow\frac{d^{۲}y}{d\theta^{۲}}=\pi\theta\cos(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})$$

(۱)

$$k=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^{۲}+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|\pi\theta\cos^{۲}(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})+\pi\theta\sin^{۲}(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})|}{(\cos^{۲}(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲})+\sin(\frac{\pi}{۲}\theta^{۲}))^{\frac{۳}{۲}}}=\pi\theta$$

(۲)

$$s=\int_{0}^{\theta}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^{2}+(\frac{dy}{d\theta})^{2}}\,d\theta=\int_{0}^{\theta}\sqrt{\cos^{2}(\frac{\pi}{2}\theta^{2})+\sin^{2}(\frac{\pi}{2}\theta^{2})}\,d\theta=\int_{0}^{\theta}d\theta=\theta$$

از (۱) و (۲) داریم: $k=\pi s$

۱۶-۶-۴: زاویهٔ بین بردارهای سرعت و شتاب را در زمان $t=0$ برای تابع برداری زیر بدست آورید:

$$\vec{r}(t)=\ln(t^{2}+1)\vec{i}+\tan^{-1}t\,\vec{j}+\sqrt{t^{2}+1}\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{2t}{t^{2}+1}\vec{i}+\frac{1}{1+t^{2}}\vec{j}+\frac{t}{\sqrt{t^{2}+1}}\vec{k}\qquad t=0\Rightarrow\vec{v}=\vec{j}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{2(1-t^{2})}{(1+t^{2})^{2}}\vec{i}+\frac{-2t}{(1+t^{2})^{2}}\vec{j}+\frac{\sqrt{1+t^{2}}-\frac{t^{2}}{\sqrt{1+t^{2}}}}{1+t^{2}}\vec{k}$$

$$t=0\Rightarrow\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\vec{k})\cdot\vec{j}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{v}$$

۱۷-۶-۴: اگر زاویهٔ بین شعاع حامل از منحنی $r=f(\theta)$ با خط مماس برابر ψ باشد ثابت کنید شعاع انحناء در نقطهٔ $P(r,\theta)$ از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$\rho=\frac{r\operatorname{cosec}\psi}{1+\frac{d\psi}{d\theta}}$$

بعلاوه نشان دهید $\rho=\frac{a}{2}$، برای دایرهٔ $r=a\cos\theta$

$$\varphi=\psi+\theta\Rightarrow\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\psi}{ds}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{ds}\left[1+\frac{d\psi}{d\theta}\right]$$

از طرفی داریم $\sin\psi=r\frac{d\theta}{ds}$ پس

$$k=\frac{\sin\psi}{r}\left[1+\frac{d\psi}{d\theta}\right]\Rightarrow\rho=\frac{\operatorname{cosec}\psi}{1+\frac{d\psi}{d\theta}}$$

$$r = a\cos\theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta \Rightarrow \tan\psi = \frac{r}{r'} = -\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta} = -\cot\theta$$
$$= \tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{۲}+\theta \Rightarrow \frac{d\psi}{d\theta} = ۱$$
$$\rho = \frac{r\cos ec\psi}{۱+\frac{d\psi}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta\cos ec(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{۱+۱} = \frac{a}{۲}\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{۲}$$

۱۸-۶-۴: منحنی $x = a(۱+\sin t)$ و $y = a\cos t$ مفروض است اولاً معادلهٔ منحنی را در مختصات قطبی بنویسید ثانیاً بردارهای سرعت و شتاب را بر حسب u_r و u_θ بدست آورید سپس این ۲ بردار را بر حسب بردارهای یکانی مماس و قائم بنویسید.

حل: اولاً $x^۲ + y^۲ = a^۲(۲+۲\sin t) = ۲a^۲(۱+\sin t)$

$$= ۲a^۲(\frac{x}{a}) = ۲ax \Rightarrow r^۲ = ۲ar\cos\theta \Rightarrow r = ۲a\cos\theta$$

ثانیاً
$$\theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} = \tan^{-۱}\frac{\cos t}{۱+\sin t} = \tan^{-۱}(\tan(\frac{\pi}{۴}-\frac{t}{۲})) = \frac{\pi}{۴}-\frac{t}{۲}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}-\frac{t}{۲}$$

بنابراین بردارهای سرعت و شتاب بر حسب u_r و u_θ عبارتند از:

$$\vec{R} = r\,u_r = ۲a\cos\theta\,\vec{u}_r, \quad d\theta = -\frac{dt}{۲}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = ۲a(-\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta)\cdot -\frac{۱}{۲} = a(\sin\theta\vec{u}_r - \cos\vec{u}_\theta)$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = a(۲\cos\theta\,\vec{u}_r + ۲\sin\theta\vec{u}_\theta)\cdot -\frac{۱}{۲} = -a(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

برای محاسبهٔ این بردارها بر حسب بردارهای T و N داریم:

$$|\vec{v}| = a \Rightarrow \vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\sin\theta\,\vec{u}_r - \cos\theta\,\vec{u}_\theta}{a} \Rightarrow \vec{v} = a\vec{T}$$
$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\theta} = \frac{۲}{a}(\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\vec{u}_\theta) \Rightarrow \vec{a} = -\frac{a^۲}{۲}\vec{N}$$

۱۹-۶-۴: معادلهٔ یک منحنی بصورت $x=\dfrac{۱}{۲\sin t}$ و $y=\dfrac{۱}{۲\cos t}$ مفروض است اولاً معادلهٔ منحنی را در مختصات قطبی بدست آورید ثانیاً بردارهای سرعت و شتاب را بر حسب u_r و u_θ بنویسید و با استفاده از آنها انحناء منحنی را در $t=\dfrac{\pi}{۴}$ حساب کنید.

حل: اولاً:
$$x^۲+y^۲=\frac{۱}{۴\sin^۲ t\cos^۲ t}=\frac{۱}{\sin^۲ ۲t}$$

معادلهٔ منحنی در مختصات قطبی
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\tan t\Rightarrow \theta=t\Rightarrow r^۲=\frac{۱}{\sin^۲ ۲\theta}\Rightarrow r=\pm\frac{۱}{\sin ۲\theta}$$

با فرض $r=\dfrac{۱}{\sin ۲\theta}$ داریم:
$$\vec{R}=r\,\vec{u}_r\Rightarrow \vec{v}=\frac{d\,r}{d\,\vartheta}\vec{u}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\Rightarrow \vec{v}=\frac{-۲\cos ۲t}{\sin^۲ ۲t}\vec{u}_r+\frac{۱}{\sin ۲t}\vec{u}_\theta$$
$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}=\frac{۴\sin^۳ ۲t+۸\sin ۲t\cos^۲ ۲t}{\sin^۴ ۲t}\vec{u}_r-\frac{۴\cos ۲t}{\sin^۲ ۲t}\vec{u}_\theta+\frac{۱}{\sin ۲t}(-\vec{u}_r)$$
$$\Rightarrow \vec{a}=[\frac{۸-۵\sin^۲ ۲t}{\sin^۳ ۲t}]\vec{u}_r-\frac{۴\cos ۲t}{\sin^۲ ۲t}\vec{u}_\theta$$
$$t=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \vec{v}=\vec{u}_\theta,\ \vec{a}=۳\vec{u}_r$$

لذا انحناء منحنی برابر است با:
$$k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^۳}=\frac{۳\,|u_\theta\times u_r|}{|u_\theta|^۳}=\frac{۳\,|\vec{k}|}{۱}=۳$$

۲۰-۶-۴: مختصات قطبی ذره ای در لحظهٔ t بصورت $\theta=t$ و $r=\cosh a\,t$ داده شده است بردار شتاب متحرک را در لحظهٔ $t=۰$ بدست آورید. اانحناء منحنی را در همین لحظه حساب کنید.

$$\vec{R}=r\,\vec{u}_r=\cosh a\theta\,\vec{u}_r$$
$$\vec{v}=a\sinh a\,\theta\,\vec{u}_r+\cosh a\theta\vec{u}_\theta$$
$$\vec{a}=(a^۲\cosh a\theta-\cosh a\theta)\,\vec{u}_r+۲a\sinh a\,\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$t=۰\Rightarrow \theta=۰$$
$$\begin{array}{l}\vec{v}=u_\theta\\ \vec{a}=(a^۲-۱)\vec{u}_r\end{array}\Rightarrow \vec{v}\times\vec{a}=-(a^۲-۱)\vec{k}$$

$$k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^{۳}}=\frac{|a^{۲}-۱|}{۱}=|a^{۲}-۱|$$

۴-۷ سوالات چهار گزینه ای حل شده

۴-۷-۱: معادلهٔ صفحهٔ قائم بر منحنی $z=\sqrt{t^{۲}+۱}$ و $y=\tan^{-۱}t$ و $x=\ln(t^{۲}+t+۱)$ در نقطهٔ نظیر $t=\circ$ عبارتست از:

۱) $x+y=\circ$ ۲) $x-y=\circ$ ۳) $y+z=\circ$ ۴) $y-z=\circ$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است

$$\text{بردار هادی صفحه}=(x',y',z')=\left(\frac{۲t+۱}{t^{۲}+t+۱},\frac{۱}{۱+t^{۲}},\frac{t}{\sqrt{t^{۲}+۱}}\right)$$

$$t=\circ\Rightarrow\vec{v}=(۱,۱,\circ),\quad x_\circ=\circ,y_\circ=\circ,z_\circ=\circ \qquad \text{معادلهٔ صفحه } x+y=\circ$$

۴-۷-۲: برای خم $\vec{R}(t)=۲\cos t^{۲}\vec{i}+۲\sin t^{۲}\vec{j}$ بردار $\vec{N}(t)$ عبارتست از:

۱) $\cos t^{۲}\,\vec{i}-\sin t^{۲}\vec{j}$ ۲) $\sin t^{۲}\vec{i}-\cos t^{۲}\vec{j}$ ۳) $-\cos t^{۲}\vec{i}-\sin t^{۲}\vec{j}$ ۴) $\cos t^{۲}\,\vec{i}+\sin t^{۲}\vec{j}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$\vec{v}(t)=-۲t\sin t^{۲}\vec{i}+۲t\cos t^{۲}\vec{j}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}=-\sin t^{۲}\vec{i}+\cos t^{۲}\vec{j}\Rightarrow\frac{dT}{dt}=-۲t\cos t^{۲}\vec{i}-۲t\sin t^{۲}\vec{j}$$

۴-۷-۳: مولفه های مماس و قائم بردار شتاب (a_N,a_T) در منحنی $\vec{R}(t)=t^{۲}\vec{i}+(t+\frac{t^{۳}}{۳})\vec{j}+(t-\frac{t^{۳}}{۳})\vec{k}$ کدام است؟

۱) $a_T=\sqrt{۲}t,\ a_N=۲$ ۲) $a_T=t,\ a_N=۲t$ ۳) $a_T=۲\sqrt{۲},\ a_N=۲$ ۴) $a_T=۲\sqrt{۲},\ a_N=۲t$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^{۲}+(\frac{dy}{dt})^{۲}+(\frac{dz}{dt})^{۲}}=\sqrt{(۲t)^{۲}+(۱+t^{۲})^{۲}+(۱-t^{۲})^{۲}}$$

$$=\sqrt{۲}(t^{۲}+۱)\Rightarrow a_T=\frac{d^{۲}s}{dt^{۲}}=۲\sqrt{۲}t$$

$$\vec{v}=۲ti+(۱+t^{۲})\vec{j}+(۱-t^{۲})\vec{k}\Rightarrow \vec{a}=۲\vec{i}+۲t\vec{j}-۲t\vec{k}\Rightarrow|\vec{a}|=۲\sqrt{۱+۲t^{۲}}$$

$$a_N=\sqrt{|a|^{۲}-a_T^{۲}}=\sqrt{۴+۸t^{۲}-۸t^{۲}}=۲$$

۴-۷-۴: بردارهای سرعت و شتاب منحنی $\vec{R}(t)=\cosh ۳t\vec{i}+\sinh t\vec{j}+t\vec{k}$ در لحظهٔ $t=۰$ عبارتند از:

۱) $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}, a=۹\vec{i}$ ۲) $\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}, \vec{a}=۹\vec{i}$ ۳) $\vec{v}=\vec{j}-\vec{k}, \vec{a}=۹\vec{i}$ ۴) $\vec{v}=\vec{i}-\vec{k}, a=-۹\vec{i}$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\vec{v}(t)=۳\sinh ۳t\vec{i}+\cosh t\vec{j}+\vec{k} \qquad t=۰\Rightarrow \vec{v}(۰)=\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{a}(t)=۹\cosh ۳t\vec{i}+\sinh t\vec{j} \qquad t=۰\Rightarrow \vec{a}(۰)=۹\vec{i}$$

۴-۷-۵: انحناء منحنی $\vec{R}(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{۲}t\vec{k}$ در هر نقطه برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{e^{t}+e^{-t}}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{e^{t}+e^{-t}}$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\vec{v}\times\vec{a}=-\sqrt{۲}e^{-t}\vec{i}+\sqrt{۲}e^{t}\vec{j}+۲\vec{k}\Rightarrow|\vec{v}\times\vec{a}|=\sqrt{۲}(e^{t}+e^{-t})$$

$$|\vec{v}|^{۳}=(e^{۲t}+e^{-۲t}+۳)^{\frac{۳}{۲}}=(e^{t}+e^{-t})^{۳}\Rightarrow k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{(e^{t}+e^{-t})^{۲}}$$

۴-۷-۶: شعاع انحنای منحنی $y=\cosh x$ در نقطهٔ $P(x,y)$ برابر است با:

۱) y ۲) $y^{۲}$ ۳) $y^{۳}$ ۴) $y^{۴}$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$k=\frac{|y''|}{(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{|\cosh x|}{(۱+\sinh^{۲}x)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{\cosh x}{(\cosh^{۲}x)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{\cosh^{۲}x}=\frac{۱}{y^{۲}}\Rightarrow \rho=y^{۲}$$

۴-۷-۷: منحنی $x=t^{۲}$ و $y=۲t$ و $z=\ln t$ در بازهٔ $[۱,۳]$ مفروض است، طول قوس منحنی در این بازه کدام است؟

۱) $۲+\ln ۲$ ۲) $۱+\ln ۲$ ۳) $۳+\ln ۲$ ۴) $۲+\ln ۳$

گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$ds=\sqrt{۴t^{۲}+۴+\frac{۱}{t^{۲}}}\,dt=\left|\frac{۲t^{۲}+۱}{t}\right|dt=\frac{۲t^{۲}+۱}{t}dt$$

$$s=\int_{۱}^{۳}(۲t+\frac{۱}{t})dt=t^{۲}+\ln t\Big|_{۱}^{۳}=۲+\ln ۳$$

۴-۷-۸: معادلهٔ خط قائم اصلی بر منحنی $x=\frac{t^{۴}}{۴}$، $y=\frac{t^{۳}}{۳}$ و $z=\frac{t^{۲}}{۲}$ در نقطهٔ $t=۱$ کدام است؟

الف) $y=\frac{۱}{۳},\frac{x-\frac{۱}{۴}}{۳}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{۳}$ ب) $y=\frac{۱}{۳},\frac{x-\frac{۱}{۴}}{۲}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{۲}$

ج) $y=\frac{۱}{۳},\frac{x-\frac{۱}{۴}}{۲}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-۲}$ د) $y=\frac{۱}{۳},\frac{x-\frac{۱}{۴}}{-۳}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-۳}$

گزینهٔ (۳) صحیح است. $\frac{d\vec{R}}{dt}=t^{۳}\vec{i}+t^{۲}\vec{j}+t\vec{k}$ $\vec{R}(t)=\frac{t^{۴}}{۴}\vec{i}+\frac{t^{۳}}{۳}\vec{j}+\frac{t^{۲}}{۲}\vec{k}$

$$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|=t\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱}\Rightarrow \vec{T}=\frac{\frac{d\vec{R}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|}=\frac{t^{۲}\vec{i}+t\,\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱}}$$

$$\left.\frac{d\vec{T}}{dt}\right|_{t=۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{i}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\vec{j}\quad ,x_{\circ}=\frac{۱}{۴},y_{\circ}=\frac{۱}{۳},z_{\circ}=\frac{۱}{۲}\qquad y=\frac{۱}{۳},\frac{x-\frac{۱}{۴}}{۲}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-۲}$$

۴-۶-۹: یک مارپیچ بوسیلهٔ تابع مکان $\overrightarrow{R(t)}=(a\cos\omega t)\vec{i}+(a\sin\omega t)\vec{j}+(b\omega)\vec{k}$ که a و b و ω اعداد ثابت و مثبتند توصیف می شود انحنای منحنی در هر نقطه بوسیلهٔ کدام رابطه داده می شود؟

۱) $\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}$ ۲) $\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a}$ ۳) $\frac{b}{a^{۲}+b^{۲}}$ ۴) $\frac{a^{۲}+b^{۲}}{b}$

$$\vec{v}=-a\omega\sin\omega t\,\vec{i}+a\omega\cos\omega t\,\vec{j}+b\omega\vec{k}$$

$$\vec a=-a\omega^۲\cos\omega t\,\vec i-a\omega^۲\sin\omega t\,\vec j$$

$$k=\frac{|v\times a|}{|v|^۳}=\frac{a\omega^۳\sqrt{a^۲+b^۲}}{\omega^۳(a^۲+b^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{a}{a^۲+b^۲}$$

۴-۶-۱۰: اگر $f(t)=t\vec i+t^۲\vec j+t^۳\vec k$ و $g(t)=\vec i+\vec j+t\vec k$ مقدار $\frac{d}{dt}(f\times g)(t)$ در $t=۰$ کدام بردار است؟

۱) $\vec i-\vec k$ ۲) $\vec k$ ۳) $\vec i+\vec j$ ۴) $\vec i+\vec j+\vec k$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\frac{d}{dt}(f\times g)(t)=\frac{d}{dt}f(t)\times\frac{d}{dt}g(t)+f(t)\times\frac{d}{dt}g(t)$$

$$f(t)\times g(t)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ t & t^۲ & t^۳\\ ۱ & ۱ & t\end{vmatrix}=(t^۲-t^۳)\vec i-(t^۲-t^۳)\vec j+(t-t^۲)\vec k$$

$$\frac{d}{dt}(f\times g)(t)=(۲t-۳t^۲)\vec i+(۲t-۳t^۲)\vec j+(۱-۲t)\vec k\Rightarrow\frac{d}{dt}(f\times g)(۰)=\vec k$$

۴-۶-۱۱: انحنای منحنی $y=e^x$ در کدام نقطه max است؟

۱) $\ln\frac{\sqrt۲}{۲}$ ۲) $\ln\sqrt۲$ ۳) $\ln\sqrt۳$ ۴) $\ln\frac{\sqrt۳}{۳}$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$k=\frac{|y''|}{(۱+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{e^x}{(۱+e^{۲x})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow$$

$$k'=\frac{e^x(۱+e^{۲x})^{\frac{۳}{۲}}-۳e^{۳x}(۱+e^{۲x})^{\frac{۱}{۲}}}{(۱+e^{۲x})^۳}=۰\Rightarrow e^x(۱+e^{۲x})^{\frac{۱}{۲}}(۱-e^{۲x}-۳e^{۲x})=۰$$

$$۲e^{۲x}=۱\Rightarrow e^{۲x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\ln\frac{\sqrt۲}{۲}$$

۴-۶-۱۲: معادلهٔ یک متحرک در فضا بصورت $z=\frac{\sqrt۳}{۲}t$ و $y=\frac{۱}{۲}t\sin t$ و $x=\frac{۱}{۲}t\cos t$ می باشد مسیر فوق روی چه رویه ای واقع است؟

۱) مخروط دوار ۲) سهمی گون دوار ۳) سهمی گون هذلولوی ۴) بیضی گون

گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} x^{2}+y^{2}=\frac{1}{4}t^{2} \\ z^{2}=\frac{3}{4}t^{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x^{2}+y^{2}=\frac{1}{3}z^{2} \qquad (\text{مخروط دوار})$$

۴-۶-۱۳: معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر منحنی $y=e^{x}$ در نقطهٔ $x=0$ عبارتست از:

۱) $(x-1)^{2}+(y+3)^{2}=8$ ۲) $(x+1)^{2}+(y-3)^{2}=8$

۳) $(x+2)^{2}+(y-3)^{2}=8$ ۴) $(x-2)^{2}+(y+3)^{2}=8$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$k=\frac{e^{x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \quad x=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \rho=2^{\frac{3}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{c}=x-\dfrac{y'(1+y'^{2})}{y''} \Rightarrow x_{c}=0-\dfrac{1(1+1)}{1}=-2 \\ y_{c}=y+\dfrac{1+y'^{2}}{y''} \Rightarrow y_{c}=1+\dfrac{1+1}{1}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+2)^{2}+(y+3)^{2}=8$$

۴-۶-۱۴: اگر $\overrightarrow{R(t)}=6\sin 2t\,\vec{i}+6\cos 2t\,\vec{j}+5t\,\vec{k}$ آنگاه خمیدگی $\vec{R}$ در نقطهٔ $(0,6,0)$ برابر است با:

۱) $\frac{12}{169}$ ۲) $\frac{24}{169}$ ۳) $\frac{12}{13}$ ۴) $\frac{24}{13}$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\vec{v}(t)=12\cos 2t\,\vec{i}-12\sin 2t\,\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow \vec{v}(0)=12\vec{i}+5\vec{j}$$

$$\vec{a}(t)=-24\sin 2t\,\vec{i}-24\cos 2t\,\vec{j} \Rightarrow \vec{a}(0)=-24\vec{j}$$

$$\vec{v}\times\vec{a}=24(5\vec{i}-12\vec{k}) \Rightarrow k=\frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^{3}}=\frac{24}{169}$$

۴-۶-۱۵: انحناء منحنی $r=\sin 2t$ در نقطهٔ $P(0,0)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

$$k = \frac{|r^{2} - rr'' + 2r'^{2}|}{(r^{2} + r'^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{matrix} r' = 2\cos 2\theta \\ r'' = -4\sin 2\theta \end{matrix} \Rightarrow k = \frac{|0 - 0 + 2(4)|}{(0 + 4)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

۴-۷ مسائل

۴-۷-۱: در هر یک از حدهای زیر حدهای داده شده را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{t \to 0} < \frac{1 - \cos t}{t}, t^{3}, e^{-\frac{1}{t^{2}}} >$

ب) $\lim\limits_{t \to 1} < e^{-t}, \frac{t-1}{t+1}, \tan^{-1} t >$

ج) $\lim\limits_{t \to 0} < t^{2}\left[\frac{1}{t^{2}}\right], \ln(\cos t), \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} >$

د) $\lim\limits_{t \to 1} < \frac{\sqrt[4]{t} - 1}{\sqrt[3]{t} - 1}, (t^{2} - 1)\tan(\pi t), e^{-t}\cos(\ln t) >$

۴-۷-۲: دامنه و مشتق توابع برداری زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $R(t) = \sqrt{t+3}\, i + \frac{t-1}{t^{2}+1}\, j + \frac{\tan t}{t}\, k$

ب) $R(t) = \sqrt{\frac{1}{t} - \left[\frac{1}{t}\right]}\, i + te^{2t}\, j + \tan^{-1} t\, k$

ج) $R(t) = \ln(4 - t^{2})\, i + \sqrt{1 + t^{2}}\, j - \sqrt{6 - t^{2}}\, k$

د) $R(t) = (e^{-t}\cos t)\, i + (e^{-t}\sin t)\, j + \ln(t)\, k$

ه) $R(t) = i + (\tan t)\, j + (\sec t)\, k$

۴-۷-۳: انتگرالهای زیر را حساب کنید.

الف) $\int_{1}^{4} (\sqrt{t}\, i + t\, e^{-t}\, j + \frac{1}{t^{2}}\, k)\, dt$

ب) $\int_{0}^{\pi/4} (\cos 2t\, i + \sin 2t\, j + t \sin t\, k)\, dt$

ج) $\int_0^1 (\sqrt{t+1}\, i + \ln(t+1)\, j + (t+1)k)\, dt$

د) $\int_2^4 (\frac{1}{t\ln t \ln(\ln t)} i + \frac{1}{t \ln t} j + \frac{1}{t} k)\, dt$

ه) $\int_0^{\pi/2} (\frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}} i + \frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}} j + \frac{\sqrt{\tan t}}{\sqrt{\tan t}+\sqrt{\cot t}} k)\, dt$

۴-۷-۴: بردارهای یکانی مماس و قائم اول و قائم دوم را برای هر یک از منحنیهای زیر بدست آورید.

الف) $R(t) = (\frac{1}{2}t^3 - t)\, i + t^2 j \qquad t = 2$

ب) $R(t) = t\cos t\, i + t\sin t\, j$

ج) $R(t) = \frac{1}{2}t^2 i + \frac{1}{3}t^3 j \qquad t = 1$

د) $R(t) = a(1+\cos t)\, i + a\sin t\, j \qquad t = \pi$

ه) $R(t) = \ln(\cos t)\, i + \ln(\sin t)\, j + t^2 k \qquad t = \frac{\pi}{4}$

و) $R(t) = (2t\cos t^2)\, i + (2t\sin t^2)\, j + \sqrt{1-t^2}\, k \qquad t = 0$

ز) $R(t) = (t\cos t)\, i + (t\sin t)\, j + \frac{2}{3}\sqrt{2}\, t^{\frac{3}{2}} k \qquad t = \pi$

ح) $R(t) = e^t i + e^{-t} j + 2t\, k \qquad t = 0$

۴-۷-۵: بردارهای سرعت و شتاب را برای هر یک از توابع برداری زیر بدست آورید.

الف) $R(t) = \ln(t+1)\, i + t^2 j \qquad t = 1$

ب) $R(t) = \sec t\, i + \tan t\, j \qquad t = \frac{\pi}{6}$

ج) $R(t) = (1-\sin t)\, i + (1-\sqrt{2}\cos t)\, j \qquad t = \frac{\pi}{6}$

د) $R(t) = \tan t\, i + (\sinh 2t)\, j + (\sec h3t)k \qquad t = 0$

ه) $R(t) = e^{2t}\sin 3t\, i + 3e^{2t} j + e^{2t}\cos 3t\, k \qquad t = 0$

و) $R(t) = e^{2t}\sin 3t\, i + 3e^{2t} j + e^{2t}\cos t\, k \qquad t = 0$

ز) $R(t) = \sqrt{t+1}\, i + \ln(t+1)\, j + t\, k \qquad t = 0$

۴-۷-۶: بردارهای سرعت و مکان ذره ای با شتاب و سرعت اولیه و مکان اولیه مفروض را بیابید.

الف) $a(t) = i + ۲j + ۲tk \qquad v(\circ) = \circ \,, R(\circ) = i + k$

ب) $a(t) = ti + t^{۲} j + (\cos ۲t)k \qquad v(\circ) = i + k \,, R(\circ) = j$

۴-۷-۷: در هر یک از منحنیهای زیر انحناء و شعاع انحناء را در نقطهٔ داده شده بدست آورید.

الف) $y = e^{x} \qquad x = \circ$

ب) $y = \ln x \qquad x = e$

ج) $y = \ln(\cos x) \qquad x = \dfrac{\pi}{۴}$

د) $x = \sin y \qquad x = \dfrac{۱}{۲}$

ه) $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}} \qquad x = \circ$

و) $\begin{cases} x = a\cos^{۴} t \\ y = a\sin^{۴} t \end{cases} \qquad x = \circ$

ز) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(۱ - \cos t) \end{cases} \qquad t = \dfrac{\pi}{۲}$

ح) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \qquad t = \dfrac{\pi}{۲}$

ط) $\begin{cases} x = e^{t} + e^{-t} \\ y = e^{t} - e^{-t} \end{cases} \qquad t = \circ$

ی) $\begin{cases} x = \dfrac{۱}{۱+t} \\ y = \dfrac{۱}{۱-t} \end{cases} \qquad t = \circ$

۵-۷-۸: منحنی C با معادلهٔ پارامتری $y = a\sin^{۳} t$ و $x = a\cos^{۳} t$، $\circ \le t \le ۲\pi$ و $a > \circ$ مفروض است اولاً فرم دکارتی منحنی را بدست آورید سپس ثابت کنید خط مماس بر این منحنی محورهای مختصات را طوری قطع می کند که مجموع مربعات فواصل نقاط برخورد تا مبداء مختصات مقداریست ثابت. ثانیاً نشان دهید انحناء منحنی $k = \dfrac{۲}{۳a}\left|\dfrac{۱}{\cos ۲t}\right|$ می باشد.

۴-۷-۹: نشان دهید بیشترین انحناء منحنی $y = b\sin t$ و $x = a\cos t$ بر محور اصلی اش و کوچکترین انحناء منحنی بر محور فرعی اش واقع است.

۴-۷-۱۰: منحنی $\begin{cases} x = t - a\tanh\dfrac{t}{a} \\ y = a\,\mathrm{sech}\dfrac{t}{a} \end{cases}$ مفروض است اگر طول قوس منحنی از نقطهٔ $(\circ, a)$ تا (x, y) اندازه گیری شود منحنی را برحسب طول قوس پارامتری کنید سپس بردارهای یکانی $\vec{T}$ و $\vec{N}$ را حساب کرده (برحسب t) و شعاع انحناء را در $t = \circ$ حساب کنید.

۴-۷-۱۱: مختصات مرکز انحناء منحنی $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(۱ - \cos t) \end{cases}$ را بر حسب t بدست آورید.

۴-۷-۱۲: انحناء منحنی $x^۳ + y^۲ + ۳xy + ۵x = \circ$ را در نقطهٔ $(۱, -۲)$ بدست آورید.

۴-۷-۱۳: منحنی $y = \dfrac{mx(۱-x)}{۲a}$ مفروض است مختصات مرکز انحناء را برحسب m بدست آورید (a ثابت) سپس مکان هندسی مرکز انحناء را تعیین کنید. بردار یکانی مماس بر این منحنی با بردار یکانی مماس بر این مکان چه رابطه ای دارند؟

۴-۷-۱۴: مولفه های مماس و قائم شتاب ذرهٔ متحرکی که حرکتش در طول منحنی

$$R(t) = \alpha\cos t i + \alpha\sin t j + t k$$

می باشد را حساب کنید سپس $\alpha > \circ$ را طوری تعیین کنید که این منحنی ماکزیمم انحناء را داشته باشد.

۴-۷-۱۱۵: منحنی به معادلهٔ پارامتری

$$\begin{cases} x = \ln(t^۲ + ۱) \\ y = ۲\tan^{-۱} t \end{cases} \quad \circ \le t \le ۱$$

مفروض است اولاً معادلهٔ خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ متناظر با $t = \circ$ بنویسید سپس طول قوس قسمتی از منحنی را که در فاصلهٔ $[\circ, ۱]$ است بدست آورید و انحناء را در $t = \circ$ حساب کنید.

۴-۷-۱۶: نشان دهید بردار یکانی قائم دوم $\vec{B}$ از رابطهٔ زیر برای منحنی پارامتری $\vec{R}$ بدست می آید.

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}' \times \vec{R}''}{|\vec{R}'|^۳}$$

۴-۷-۱۷: مولفه های مماس و قائم بردارهای سرعت و شتاب و معادلهٔ صفحهٔ بوسان و صفحهٔ قائم را برای هر یک ار منحنیهای زیر در نقطهٔ داده شده بنویسید.

الف) $R(t) = \cosh t i + \sinh t j + t k \qquad t = \circ$

ب) $R(t) = a\cos wt i + a\sin wt j + bwt k \qquad t = \circ$

ج) $R(t)=e^{t}\sin t\,i+e^{t}\cos t\,j+e^{t}k \qquad t=0$

د) $R(t)=(t+\frac{1}{3}t^{3})i+(t-\frac{1}{3}t^{3})j+t^{2}k \qquad t=1$

ه) $R(t)=3t\cos t\,i+3t\sin t\,j+4tk \qquad t=0$

و) $R(t)=\cos^{3}t\,i+\sin^{3}t\,j+\cos 2t\,k \qquad t=\frac{\pi}{2}$

۴-۷-۱۸: متحرکی در صفحهٔ xy بر طبق قانون زمانی $\left(x=\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}, y=\frac{t}{\sqrt{1+t^{2}}}\right)$ حرکت می کند اولاً در چه زمانی سرعت متحرک ماکزیمم است ثانیاً بردارهای قائم و مماس شتاب و $\vec{T}$، $\vec{N}$ و $\vec{B}$ را بدست آورید.

۴-۷-۱۹: منحنی $R(t)=(2t\cos t^{2},2t\sin t^{2},1-t^{2})$ مفروض است این منحنی روی چه رویه ای قرار دارد آنرا تعیین و رسم کنید سپس معادلهٔ خط مماس بر این منحنی را در نقطهٔ نظیر $t=0$ بنویسید.

۴-۷-۲۰: منحنی $\lambda(t)=(t-\sin t,1-\cos t)$ مفروض است اولاً معادلهٔ پارامتری منحنی را بر حسب پارامتر طول قوس (s) بدست آورید (در بازهٔ $((0,t)$) ثانیاً معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر این منحنی را در $t=\frac{\pi}{2}$ حساب کنید.

۴-۷-۲۱: معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر منحنی های زیر را بدست آورید.

الف) $y=\tan^{-1}x \qquad x=0$

ب) $\begin{cases} x=e^{t}\sin t \\ y=e^{t}\cos t \end{cases} \qquad t=0$

ج) $y=e^{x^{2}}\cos(5x^{3}) \qquad x=0$

د) $y=\ln(x+1) \qquad x=0$

ه) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \qquad t=\frac{\pi}{4}$

و) $y=1+x\ln x \qquad x=1$

ز) $y=\frac{1}{x} \qquad x=-1$

۴-۷-۲۲: انحناء منحنی های قطبی زیر را بدست آورید.

الف) $r=1-\sin\theta \qquad \theta=0$

ب) $r=a\theta \qquad \theta=1$

ج) $r=a\sec^{2}\frac{\theta}{2} \qquad \theta=\frac{2\pi}{3}$

۲۳-۷-۴: منحنی که معادلهٔ برداری آن بصورت $\vec{R}(t)=(t^{۴}+۲t^{۲}+۱)\vec{i}+(-t^{۴}+۴t+۱)\vec{j}$ است، خط $x+y=۰$ و $z=۰$ را قطع می کند کسینوس زاویه ای را که بردار شتاب با شعاع حامل نقطهٔ تقاطع می سازد را حساب کنید.

۲۴-۷-۴: ثابت کنید نقاطی بر روی منحنی $r=f(\theta)$ که دایرهٔ انحناء در آنها از مبداء عبور می کند بوسیلهٔ معادلهٔ $f(\theta)+f^{۴}(\theta)=۰$ داده می شوند.

۲۵-۷-۴: منحنی C به معادلات مفروض است اولاً C را بصورت پارامتری بنویسید سپس انحناء منحنی را در نقطه ای از آن حساب کنید. در چه نقطه ای انحناء ماکزیمم است؟ ثانیاً در نقطهٔ $(۱,۰,۱)$ معادلهٔ صفحهٔ بوسان بر منحنی را در این نقطه بنویسید.

۲۶-۷-۴: منحنی λ به معادلات $\lambda(t)=(x=۲\cosh t\ ,\ y=۲\sinh ۳t\ ,۶t)$ مفروض است. اولاً منحنی را در بازهٔ $[۰,t]$ بر حسب طول قوس پارامتری کنید. ثانیاً در لحظهٔ $t=۰$ خط مماس بر منحنی صفحهٔ قائم، صفحهٔ مماس، صفحهٔ بوسان و مقدار انحناء و تاب را بدست آورید. ثانیاً مولفه های مماس و قائم بردارهای سرعت و شتاب را در این لحظه بدست آورید. رابعاً معادلهٔ کرهٔ بوسان بر منحنی را بنویسید.

۲۷-۷-۴: فرض کنید $\vec{R}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ معادلهٔ پارامتری یک متحرک باشد مطلوبست محاسبهٔ عبارت زیر در نقطهٔ نظیر $t=\frac{\pi}{۳}$ الف) بردارهای یکانی مماس و قائم اصلی و قائم دوم ب) انحناء و شعاع انحناء ج) مختصات مرکز انحناء و کرهٔ بوسان د) معادلات صفحهٔ بوسان و صفحهٔ قائم ه) مولفه های مماس و قائم بردار شتاب.

۲۸-۷-۴: منحنی $\vec{R}(t)=(۱+\cos ۲t)\vec{i}+\sin ۲t\,\vec{j}$ مفروض است معادلهٔ منحنی را در مختصات قطبی بنویسید و بردارهای سرعت و شتاب را بر حسب u_r و u_θ بدست آورید. سپس بردارهای یکانی مماس و قائم و انحناء و تاب و شعاع انحناء و مرکز دایرهٔ بوسان را در $t=۰$ بدست آورید. مولفه های مماس قائم بردار سرعت و شتاب را بدست آورید.

۲۹-۷-۴: مختصات قطبی متحرکی در لحظهٔ t بصورت زیر است بردارهای موضع سرعت و شتاب را بر حسب u_r و u_θ بدست آورید.

الف) $r=e^{\omega t}+e^{-\omega t}\quad ,\theta=t$

ب) $r=e^{a\theta}\quad ,\theta=۲t$

ج) $r=a(۱+\sin\theta)\quad ,\theta=۱-e^{t}$

د) $r=a\sin ۲t\quad ,\theta=t^{۲}+۱$

۳۰-۷-۴: منحنی C به معادلات پارامتری $x=3t^2\cos t^2$ و $y=3t^2\sin t^2$ و $z=t$ مفروض است اولاً معادلهٔ منحنی را در مختصات استوانه ای بنویسید. ثانیاً بردارهای سرعت و شتاب را بر حسب u_r، u_θ و k بدست آورید و انحناء منحنی را در $t=0$ حساب کنید.

۴-۸ نمونه سوالات تستی

۱-۸-۴: معادلهٔ صفحهٔ عمود بر منحنی $z=\cos 2t$، $y=\sin t$، $x=\sin t$ در نقطهٔ نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

الف) $x+y-2z=2$　　　ب) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$

ج) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2z=2$　　　د) $x+y-2\sqrt{2}z=2$

۲-۸-۴: در چه نقطه ای انحناء منحنی $y=a\cosh\frac{x}{a}$ ، ماکزیمم است؟

الف) $x=a$　　　ب) $x=2a$　　　ج) $x=0$　　　د) $x=-a$

۳-۸-۴: بردارهای سرعت و شتاب منحنی $\vec{R}(t)=\ln(t+1)\vec{i}+t^2\vec{j}$ را در نقطهٔ نظیر $t=1$ عبارتست از:

الف) $v=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\ ,\ \vec{a}=\frac{1}{4}\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}$　　　ب) $v=-\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}\ ,\ \vec{a}=-\frac{1}{4}\vec{i}+2\vec{j}$

ج) $v=\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}\ ,\ \vec{a}=-\frac{1}{4}\vec{i}+2\vec{j}$　　　د) $v=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\ ,\ \vec{a}=\frac{1}{4}\vec{i}+2\vec{j}$

۴-۸-۴: انحناء دایرهٔ $r=a\sin\theta$ در هر نقطه برابر است با:

الف) $\frac{a}{2}$　　　ب) $\frac{2}{a}$　　　ج) a　　　د) $2a$

۵-۸-۴: انحناء منحنی $y=\ln x$ در هر نقطهٔ (x,y) برابر است با:

الف) $\frac{x}{(x^2+1)^3}$　　　ب) $\frac{x^2}{(x^2+1)^3}$　　　ج) $\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$　　　د) $\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

۶-۸-۴: ماکزیمم انحناء منحنی $y=\ln(\cos x)$ $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}$　　　ب) ۱　　　۳) $\sqrt{2}$　　　د) ۴

۷-۸-۴: معادلهٔ دایرهٔ بوسان بر منحنی $x=e^t\sin t$ و $y=e^t\cos t$ در $t=0$ کدام است؟

الف) $x^{2}+(y-1)^{2}=2$ ب) $(x-1)^{2}+(y-1)^{2}=2$

ج) $x^{2}+(y-1)^{2}=4$ د) $(x-1)^{2}+y^{2}=2$

۴-۸-۸: انحناء منحنی قطبی $r=2(1-\cos\theta)$ در $\theta=\frac{\pi}{3}$ برابر است با:

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۳

۴-۸-۹: مولفه های مماس و قائم بردار شتاب در منحنی $\vec{R}(t)=e^{t}\cos t\,\vec{i}+e^{t}\sin t\,\vec{j}+\sqrt{2}\,e^{t}\vec{k}$ کدام است؟

الف) $a_T=e^{t} \quad ,a_N=e^{t}$ ب) $a_T=2e^{t} \quad ,a_N=2e^{t}$

ج) $a_T=2e^{t} \quad ,a_N=\sqrt{2}\,e^{t}$ د) $a_T=\sqrt{2}\,e^{t} \quad ,a_N=2e^{t}$

۴-۸-۱۰: انحناء منحنی $r(t)=<\frac{t^{3}}{3},\frac{t^{3}}{2},0>$ برابر کدام رابطه است؟

الف) $\frac{1}{\sqrt{t^{2}+1}}$ ب) $\frac{1}{(t^{2}+1)^{\frac{3}{2}}}$ ج) $\frac{t}{(t^{2}+1)^{\frac{3}{2}}}$ د) $\frac{1}{t(t^{2}+1)^{\frac{3}{2}}}$

۴-۸-۱۱: ماکزیمم انحناء منحنی $y=\ln x$ در کدام نقطه اتفاق میافتد؟

الف) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ج) $x=\sqrt{2}$ د) $x=\sqrt{3}$

۴-۸-۱۲: فرض کنید $\vec{R}(t)=t\cos t\,\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}$ در اینصورت بردار یکانی مماس بر منحنی در $t=0$ کدام است؟

الف) $\vec{T}=\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ ب) $\vec{T}=\frac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ ج) $\vec{T}=-\vec{i}$ د) $\vec{T}=\vec{i}$

۴-۸-۱۳: فرض کنید منحنی یک متحرک بصورت $x=\cos t$ و $y=\sin t$ و $z=t$ باشد دراینصورت بردار قائم اصلی بر منحنی برابر است با:

الف) $\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}$ ب) $-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}$

ج) $\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$ د) $-\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$

۴-۸-۱۴: معادلهٔ یک منحنی بصورت $x=\int_{0}^{\theta}\cos(\frac{\pi}{2}t^{2})\,dt$ و $y=\int_{0}^{\theta}\sin(\frac{\pi}{2}t^{2})\,dt$ داده شده است درصورتیکه طول قوس از نقطهٔ (۰,۰) اندازه گیری شود انحناء منحنی بر حسب طول قوس عبارتست از:

الف) πs ب) $\frac{\pi}{۲} s$ ج) s د) $\frac{۱}{۲} s$

۱۵-۸-۴: معادلهٔ صفحهٔ قائم بر منحنی $\vec{R}(t) =< t-\sin t, ۱-\cos t, ۰ >$ در نقطهٔ $t=\pi$ کدام است؟

الف) $x=۲\pi$ ب) $x=۳\pi$ ج) $x=\frac{\pi}{۲}$ د) $x=\pi$

۱۶-۸-۴: انحناء منحنی به معادلهٔ $y=\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})$ در نقطه ای بطول $\sqrt{۳}$ واقع بر آن چقدر است؟

الف) $\frac{۱}{۱۵}\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ ب) $\frac{۱}{۱۵}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$ ج) $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ د) $\frac{۱}{۵}\sqrt{\frac{۵}{۳}}$

۱۷-۸-۴: انحناء k از منحنی زنجیره ای $\vec{R}(t)=t\,\vec{i}+\cosh t\,\vec{j}$ کدام است؟

الف) $\cosh ۲t$ ب) $\frac{۱}{\cosh^۲ t}$ ج) $\frac{t}{\cosh^۲ t}$ د) $\frac{۱}{\cosh t}$

۱۸-۸-۴: فرض کنید $a>b>۰$ و $x=a\cos t$ و $y=b\sin t$ معادلهٔ پارامتری R باشد، در اینصورت انحناء منحنی در $t=\frac{\pi}{۲}$ برابر است با:

الف) $\frac{a}{b^۲}$ ب) $\frac{b}{a^۲}$ ج) $\frac{a^۲}{b}$ د) $\frac{b^۲}{a}$

۱۹-۸-۴: اگر $\vec{R}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\vec{k}$ انحنای منحنی در $t=۰$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۲۰-۸-۴: تمام صفحات قائم بر منحنی فضایی $\vec{R}(t)=a\sin^۲ t\,\vec{i}+a\sin t\cos t\,\vec{j}+a\cos t\,\vec{k}$ از کدام نقطه می گذرد؟

الف) $(۱,۱,۱)$ ب) $(۰,۰,۰)$ ج) (a,a,a) د) $(۰,۰,a)$

۲۱-۸-۴: منحنی فضایی $\vec{R}(t)=۲\sqrt{t}\cos t\,\vec{i}+۳\sqrt{t}\sin t\,\vec{j}+\sqrt{۱-t}\,\vec{k}$ بر روی کدام رویه واقع است؟

الف) بیضی گون ب) سهمی گون ج) مخروط د) هذلولیگون دو پارچه

۲۲-۸-۴: معادلهٔ صفحهٔ بوسان برای منحنی $\vec{R}(t)=۲\cos t\,\vec{i}+۲\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ کدام است؟

الف) $x-۲z=۰$ ب) $y-۲x=۰$ ج) $y+۲z=۰$ د) $y-۲z=۰$

۲۳-۸-۴: شعاع انحناء در هر نقطه از منحنی $r^n=a^n\cos n\theta$ برابر است با:

الف) $\dfrac{a^n}{(n+1)r^n}$ ب) $\dfrac{a^{n-1}}{(n+1)r^n}$ ج) $\dfrac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$ د) $\dfrac{a^n}{(n-1)r^{n-1}}$

۴-۸-۲۴: معادلات پارامتری خط مماس بر مارپیچ $x=2\cos t$ و $y=\sin t$ و $z=t$ در نقطهٔ $(0,1,\frac{\pi}{2})$ برابر است با:

الف) $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$ ج) $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=t+\frac{\pi}{2} \end{cases}$ د) $\begin{cases} x=-2t \\ y=1 \\ z=t+\frac{\pi}{2} \end{cases}$

۴-۸-۲۵: برای منحنی $\vec{R}(t)$ کدام رابطه مولفهٔ قائم شتاب را نشان می دهد؟

الف) $a_N=\dfrac{R'(t)\cdot R''(t)}{|R'(t)|}$ ب) $a_N=\dfrac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|}$

ج) $a_N=\dfrac{(R'\times R'')\cdot R'''}{|R'\times R''|}$ د) $a_N=\dfrac{R'(t)\cdot R''(t)}{|R'(t)|^2}$

۴-۸-۲۶: فرض کنید u و v توابع برداری مشتق پذیر باشند در اینصورت $\dfrac{d}{dt}(u(t)\times v(t))$ برابر است با:

الف) $u'(t)\times v'(t)$ ب) $u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$

ج) $u'(t)\times v'(t)+u(t)\times v(t)$ د) هیچکدام

۴-۸-۲۷: می دانیم بردار سرعت متحرکی در مختصات قطبی بصورت زیر است مولفهٔ شتاب آن در امتداد شعاع حامل قطبی کدام است؟

$$v=u_r\frac{dr}{dt}+u_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

الف) $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ ب) $\dfrac{d^2r}{dt^2}+\dfrac{dr}{dt}$ ج) $\dfrac{d^2r}{dt^2}+r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ د) $\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$

۴-۸-۲۸: انحناء منحنی $\vec{R}(t)=at\vec{i}+\dfrac{at+c}{b}\vec{j}$ در هر لحظه چقدر است؟

الف) $\dfrac{1}{a}$ ب) $\dfrac{1}{b}$ ج) a د) صفر

۲۹-۸-۴: دایره ای بر منحنی $y = x^{۲} + ۱$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ مماس است و مقدار $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ هر دو منحنی در آن نقطه برابرند. شعاع دایره کدام است؟

الف) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ب) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ج) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

۳۰-۸-۴: مارپیچ $\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ مفروض است درصورتیکه طول قوس منحنی از نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ در سوی افزایش t اندازه گیری شود، معادلهٔ پارامتری منحنی بر حسب طول قوس کدام است؟

الف) $\vec{R}(s) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{۲}}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{۲}}\right)\vec{j} + \frac{s}{\sqrt{۲}}\vec{k}$

ب) $\vec{R}(s) = \cos\left(\frac{s^{۲}}{۲}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{s^{۲}}{۲}\right)\vec{j} + \frac{s^{۲}}{۲}\vec{k}$

ج) $\vec{R}(s) = \cos\left(\frac{s}{۲}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{s}{۲}\right)\vec{j} + \frac{s}{۲}\vec{k}$

د) $\vec{R}(s) = \cos(۲s)\vec{i} + \sin(۲s)\vec{j} + ۲s\,\vec{k}$

فصل پنجم

توابع چند متغیره و مشتقات نسبی

5-1 توابع چند متغیره

تابع $y=f(x)$ را درنظر می گیریم در این تابع دو متغیره x و y حضور دارند که نوع این متغیرها متفاوت است متغیر x متغیری است که در انتخاب مقادیر برای آن در محدوده دامنه تعریف تابع f اختیار و آزادی عمل دارد یعنی هر مقداری را از دامنه تعریف می توانیم بجای x قرار دهیم متغیر y متغیری است که مقدار آن پس از قرار دادن مقداری برای x حاصل می شود لذا مقدار y وابسته به مقدار x است و در انتخاب مقادیر برای متغیر y آزادی عمل نداریم. با توجه به این توضیح متغیر x را یک متغیر مستقل و متغیر y را یک متغیر وابسته می نامیم.

5-1-1 تعریف: تابعی را دو متغیره گوییم هر گاه دارای دو متغیر مستقل باشد.

5-1-2 مثال: معلوم کنید کدامیک از توابع زیر یک متغیره یا دو متغیره هستند؟

1) $y=x^{2}$ (یک متغیره) 2) $x^{2}+y^{2}=4$ (یک متغیره)

3) $y+x-\ln z=0$ (دو متغیره) 4) $z=\dfrac{1}{x^{2}+y^{2}}$ (دو متغیره)

5-1-3 تعریف: مشابه تعریف (5-1-1) تابعی را n متغیره می گوییم که دارای n متغیر مستقل باشد. معمولاً توابع n متغیره را بصورت $w=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ نمایش می دهیم.

5-1-4 دامنهٔ تعریف و برد یک تابع دو متغیره: فرض کنید $w=f(x,y)$ و $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ در اینصورت دامنهٔ تعریف تابع f عبارتست از مجموعهٔ زوج مرتب (x,y) در D بطوریکه مقدار $f(x,y)$ موجود تعریف شده باشد در اینصورت مجموعهٔ D دامنهٔ f است و برد آن مجموعهٔ تمام مقادیری است که f اختیار می کند. یعنی

f دامنهٔ تعریف $: D_f\subseteq\mathbb{R}^{2}$ $\qquad$ f برد $: R_f=\{f(x,y)\mid (x,y)\in D\}\subseteq\mathbb{R}$

5-1-5 مثال: دامنهٔ تعریف و برد توابع دو متغیرهٔ زیر را بدست آورید:

الف) $f(x,y)=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ ب) $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

ج) $f(x,y)=x\ln(y^{2}-x)$ د) $f(x,y)=\sin xy$

حل: الف) $R_f = [0,+\infty)$ و $D_f = \mathbb{R}^2$

ب) $R_f = [0,+\infty)$ و $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0\}$

ج) $R_f = \mathbb{R}$ و $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x > 0\}$

د) $R_f = [-1,1]$ و $D_f = \mathbb{R}^2$

5-1-6 دامنهٔ تعریف و برد یک تابع *n* متغیره: فرض کنیم $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ در اینصورت دامنهٔ تعریف تابع f عبارتست از مجموعهٔ تمام n تایی های مرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ در D بطوریکه مقدار $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ تعریف شده باشد و برد f عبارتست از تغییرات $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ بازاء تغییرات $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ در دامنهٔ تعریف f. لذا داریم:

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{و} \quad R_f = \{f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D\} \subseteq \mathbb{R}$$

5-1-7 تذکر: در این فصل ما بیشتر در مورد توابع دو و سه متغیره بحث خواهیم کرد.

5-1-8 مثال: دامنهٔ تعریف و برد توابع سه متغیرهٔ زیر را بیابید.

الف) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ ب) $f(x,y,z) = x\,y \ln z$

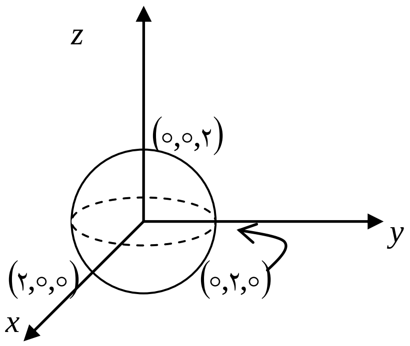
ج) $f(x,y,z) = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$ د) $f(x,y,z) = \dfrac{(x+y+z)^2}{1+(x+y+z)^2}$

حل: الف) $R_f=(0,+\infty)$ و $D_f=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

ب) $R_f=\mathbb{R}$ و $D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>0\}$

ج) $4-x^2-y^2-z^2>0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2<4$

$$R_f=\mathbb{R} \quad \text{و} \quad D_f=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<4\}$$



د) $D_f=\mathbb{R}^3$ برای پیدا کردن برد f داریم:

$$0\le (x+y+z)^2<(x+y+z)^2+1 \Rightarrow 0\le \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+1}<1 \Rightarrow R_f=[0,1)$$

5-2 حد و پیوستگی توابع چند متغیره

5-2-1 تعریف: فرض کنید f تابع دو متغیره باشد که روی قرصی به مرکز (x_0,y_0) بجز احتمالاً (x_0,y_0) تعریف شده است در اینصورت می گوییم وقتی (x,y) بسمت (x_0,y_0) میل می کند، حد $f(x,y)$ برابر L می باشد و می نویسیم: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$

اگر بازاء هر $\varepsilon>0$ یک عدد متناظر $\delta>0$ وجود داشته باشد که برای هر x و y در دامنهٔ تابع f هرگاه

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

5-2-2 تذکر: گاهی اوقات در تعریف حد تابع دو متغیره $f(x,y)$ بجای $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ این شرایط را قرار می دهیم: $|x-x_0|<\delta$ و $|y-y_0|<\delta$ که این دو شرط معادل می باشند. زیرا توجه داریم که اگر چنین شرطی برقرار باشد با توجه به اینکه

$$\sqrt{(x-x_0)^2}\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad \text{و} \quad \sqrt{(y-y_0)^2}\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

برقرار می باشند، می توانیم مجدداً $\sqrt{(x-x_\circ)^2+(y-y_\circ)^2}<\delta$ را نتیجه بگیریم. با این شرط معادل، ناحیهٔ همسایگی از یک ناحیهٔ دایره ای شکل به یک ناحیهٔ مربع شکل تبدیل می شود. لذا می توان گفت که دو تعریف زیر برای حد تابع $f(x,y)$ معادلند.

$$\lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)=L \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1)\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\in D_f \begin{cases}|x-x_\circ|<\delta\\ |y-y_\circ|<\delta\end{cases} \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon \\ 2)\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\in D_f\ ;\sqrt{(x-x_\circ)^2+(y-y_\circ)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon \end{cases}$$

5-2-3 مثال: با تعریف حد ثابت کنید: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy^2}{x^2+y^2}=0$

حل: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\in \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow \left|\dfrac{5xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ در آنصورت $\left|\dfrac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{5|x|y^2}{x^2+y^2}\le 5|x|$ زیرا $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\le 1$. لذا با انتخاب $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$ داریم $\left|\dfrac{5xy^2}{x^2+y^2}\right|\le 5\sqrt{x^2+y^2}\le 5\delta=5(\dfrac{\varepsilon}{5})=\varepsilon$ بنابراین طبق تعریف حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy^2}{x^2+y^2}=0$.

5-2-4 مثال: با تعریف معادل حد ثابت کنید: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} x^2+y^2=13$.

حل: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y)\in \mathbb{R}^2\quad |x-2|<\delta, |y-3|<\delta \Rightarrow |x^2+y^2-13|<\varepsilon$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ در آنصورت داریم:

$$\begin{aligned}|x^2+y^2-13|&=|x^2-4+y^2-9|\le|x^2-4|+|y^2-9|\\ &=|x-2||x+2|+|y-2||y+2|<\delta|x+2|+\delta|y+2|\end{aligned} \tag{1}$$

فرض کنیم $\delta\le 1$ در اینصورت داریم:

$$\begin{cases}|x-2|<1\Rightarrow 1<x<3\\ |y-3|<1\Rightarrow 2<y<4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3<x+2<5\\ 5<y+3<7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x+2|<5\\ |y+3|<7\end{cases}\Rightarrow (1)\le 5\delta+7\delta=12\delta\le\varepsilon$$

با انتخاب $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$ داریم:

$$\left|x^2+y^2-13\right|<|x+2|\,\delta+|y+3|\,\delta<5\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)+7\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)=12\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)=\varepsilon$$

بنابراین طبق تعریف حد داریم: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} x^2+y^2=13$.

5-2-5 تذکر: فرض کنید هنگامیکه از طریق مسیر c_1، $(x,y)\to(x_0,y_0)$ آنگاه $f(x,y)\to L_1$ و هنگامیکه از طریق c_2، $(x,y)\to(x_0,y_0)$ آنگاه $f(x,y)\to L_2$ و $L_1\neq L_2$ در اینصورت $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ وجود ندارد.

5-2-6 مثال: نشان دهید حدود زیر موجود نیستند.

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

حل: 1)

$$\left.\begin{array}{l} y=x\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{2x^2}=1=L_1 \\ y=x^2\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3}{x^2+x^4}=0=L_2 \end{array}\right\}\Rightarrow L_1\neq L_2$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} y=x\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^2+x^6}=0=L_1 \\ y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}=L_2 \end{array}\right\}\Rightarrow L_1\neq L_2$$

3)

$$y=mx\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x^2)(m^2x^2)}{x^4+m^4x^4}=\frac{m^2}{1+m^4}$$

اگر $m=0$، $L_1=0$ و اگر $m=1$، $L_2=\frac{1}{2}$ در اینصورت $L_1\neq L_2$ پس حد وجود ندارد.

5-2-7 خواص عمومی حد تابع دو متغیره: فرض کنیم $f(x,y)$ و $g(x,y)$ توابعی دو متغیره باشند و داشته باشیم:

$$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1 \quad \text{و} \quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_2$$

در اینصورت داریم:

۱) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]=L_1\pm L_2$

۲) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)\cdot g(x,y)\right]=L_1\cdot L_2$

۳) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k\,f(x,y)=kL_1$

۴) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad (L_2 \neq 0)$$

5-2-8 تعریف: اگر f تابعی دو متغیره روی یک قرص به مرکز (x_0,y_0) باشد دراینصورت f را در (x_0,y_0) پیوسته گویند اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

5-2-9 مثال: در پیوستگی توابع زیر در نقاط داده شده بحث کنید.

۱) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{1+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

۲) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin(\dfrac{x}{y}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

۳) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y} & x \neq -y \\ 1 & x = -y \end{cases}$$

حل: 1) ثابت می کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(0,0)$. طبق تعریف حد داریم:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+y}{1+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x+y}{1+y^2} - 0 \right| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \leq \varepsilon$$

با انتخاب $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ داریم $\left| \dfrac{x+y}{1+y^2} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2} < 2\delta \leq 2(\dfrac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ بنابراین طبق تعریف حد

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sin(\frac{x}{y}) = \lim_{x\to 0} (\frac{x}{\frac{2}{\pi}x}) = 1 = L_1 \qquad \text{روی مسیر } \; y = \frac{2}{\pi}x$$

چون $L_1 \neq 0$ لذا f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

3) چون $x+y \neq 0$، f پیوسته است فرض کنید y ثابت و دلخواه باشد باید نشان دهیم: $\lim\limits_{x\to -y} f(x,y) = 1$

فرض کنیم $x+y=t$
$$\lim_{x\to -y} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

لذا f پیوسته است.

5-2-10 تعریف: فرض کنید f تابعی سه متغیره باشد که درون کره ای به مرکز $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ بجز احتمالاً در $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ تعریف شده است در اینصورت:

الف) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_\circ,y_\circ,z_\circ)} f(x,y,z) = L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > \circ$ یک عدد $\delta > \circ$ متناظر با $\varepsilon > \circ$ وجود دارد بطوریکه هر گاه $\circ < \sqrt{(x-x_\circ)^۲ + (y-y_\circ)^۲ + (z-z_\circ)^۲} < \delta$ آنگاه $|f(x,y,z) - L| < \delta$.

ب) f در $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ پیوسته است اگر $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_\circ,y_\circ,z_\circ)} f(x,y,z) = f(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$.

5-3-11 مثال: نشان دهید: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \dfrac{y^۳ + xz^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} = \circ$

حل) طبق تعریف حد داریم:

$$\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} < \delta \Rightarrow \left| \frac{y^۳ + xz^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} - \circ \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > \circ \, \exists \delta > \circ \, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ - \{(\circ,\circ,\circ)\}$$

$$\left| \frac{y^۳ + xz^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} \right| \le \frac{|y^۳| + |xz^۲|}{x^۲ + y^۲ + z^۲} = \frac{y^۲|y| + z^۲|x|}{x^۲ + y^۲ + z^۲}$$

$$\le \frac{(x^۲ + y^۲ + z^۲)|y| + (x^۲ + y^۲ + z^۲)|x|}{x^۲ + y^۲ + z^۲} = |x| + |y| \le ۲\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} < \varepsilon$$

با انتخاب $\delta = \dfrac{\varepsilon}{۲}$ داریم: $\left| \dfrac{y^۳ + xz^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} \right| \le ۲\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} < ۲\delta < ۲(\dfrac{\varepsilon}{۲}) < \varepsilon$

بنابراین طبق تعریف حد: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \dfrac{y^۳ + xz^۲}{x^۲ + y^۲ + z^۲} = \circ$.

5-2-12 تذکر: فرض کنید وقتیکه از طریق مسیر $c_۱$، $(x,y,z) \to (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ آنگاه $f(x,y,z) \to L_۱$ و هنگامیکه از طریق مسیر $c_۲$، $(x,y,z) \to (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ آنگاه $f(x,y,z) \to L_۲$ و $L_۱ \ne L_۲$ در اینصورت $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_\circ,y_\circ,z_\circ)} f(x,y,z)$ وجود ندارد.

5-2-13 مثال: نشان دهید حد زیر موجود نیست: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\circ,\circ,\circ)} \dfrac{x^۴ + yz^۲}{x^۴ + y^۴ + z^۴}$.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y=x, z=0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4+yz^2}{x^4+y^4+z^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^2} = 0 = L_1 \\ x=z, y=0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4+yz^2}{x^4+y^4+z^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} = L_2 \end{array}\right\}$$

5-2-14 مثال: در مورد پیوستگی تابع زیر در مبداء بحث کنید:

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

حل) ثابت می کنیم $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(0,0,0)$ طبق تعریف حد داریم:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$$

$$\left|\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le \varepsilon$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد با انتخاب $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ حکم برقرار است.

5-2-15 تعریف: اگر $f: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی n متغیره باشد:

الف) $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=L$ یعنی بازاء هر عدد $\varepsilon>0$ یک عدد $\delta>0$ متناظر با ε وجود دارد بطوریکه هر گاه $0<|X-X_0|<\delta$ آنگاه $|f(X)-L|<\varepsilon$.

ب) f در X_0 پیوسته است اگر $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=f(X_0)$.

5-3 مشتقات نسبی توابع چند متغیره

5-3-1 تعریف مشتق نسبی تابع دو متغیره: فرض کنیم $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد و فرض کنیم تنها x تغییر کند و y را ثابت نگهداریم مشتق نسبی تابع f نسبت به x را در نقطهٔ (x_0,y_0) که با هر یک از نمادهای $f_x(x_0,y_0)$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ ، $D_1 f(x_0,y_0)$ ، $D_x f(x_0,y_0)$ نمایش می دهیم بصورت زیر تعریف می شود:

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

بطور مشابه مشتق نسبی f را نسبت به y که با ثابت نگهداشتن x و یافتن مشتق معمولی تابع f در y_0 بدست می آید را با نمادهای $f_y(x_0, y_0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ، $D_2 f(x_0, y_0)$ ، $D_y f(x_0, y_0)$ نمایش می دهیم بصورت زیر تعریف می شود:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

در حالت کلی برای پیدا کردن f_x ، y را به عنوان یک مقدار ثابت در نظر گرفته و از $f(x, y)$ نسبت به x مشتق می گیریم و برای پیدا کردن f_y ، x را به عنوان یک مقدار ثابت در نظر گرفته و از $f(x, y)$ نسبت به y مشتق می گیریم.

5-3-2 تعبیر هندسی مشتقات نسبی: فرض کنیم $z = f(x, y)$ معادلهٔ یک رویه در فضا باشد و $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ نقطه ای از این رویه باشد در اینصورت تعریف می کنیم $g(x) = f(x, y_0)$ و $h(y) = f(x_0, y)$ در اینصورت داریم:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0)$$

که $g'(x_0)$ شیب خط مماس بر منحنی $g(x)$ در نقطهٔ x_0 یا بعبارت دیگر نسبت خط مماس (T_1) بر منحنی فصل مشترک رویهٔ $z = f(x, y)$ و صفحهٔ $y = y_0$ (منحنی c_1) در نقطهٔ x_0 است.

به طور مشابه:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(y_0 + \Delta y) - h(y_0)}{\Delta y} = h'(y_0)$$

که $h'(y_0)$ شیب خط مماس بر منحنی $h(y)$ در نقطهٔ y_0 یا بعبارت دیگر شیب خط مماس (T_2) بر منحنی فصل مشترک رویهٔ $z = f(x, y)$ و صفحهٔ $x = x_0$ (منحنی c_2) در نقطهٔ y_0 است.

5-3-3 مثال: اگر $f(x, y) = \cos \frac{x - y}{x + y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x - y}{x + y}\right)\sin\left(\frac{x - y}{x + y}\right) = \frac{-2xy}{(x + y)^2}\sin\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x-y}{x+y})\sin(\frac{x-y}{x+y})=\frac{۲x}{(x+y)^۲}\sin(\frac{x-y}{x+y})$$

5-3-4 مثال: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-xy}{x+y} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ ، مقدار $f_x(۰,۰)$ و $f_y(۰,۰)$ را بدست آورید.

حل: با تعریف مشتق داریم:

$$f_x(۰,۰)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۰+\Delta x,۰)-f(۰,۰)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\frac{(\Delta x)^۲-۰}{\Delta x+۰}-۰}{\Delta x}=۱$$

$$f_y(۰,۰)=\lim_{\Delta y\to ۰}\frac{f(۰,۰+\Delta y)-f(۰,۰)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to ۰}\frac{\frac{۰-۰}{\Delta y+۰}-۰}{\Delta y}=۰$$

5-3-5 تعریف: فرض کنیم $w=f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)$ یک تابع n متغیره باشد در اینصورت مشتق نسبی w نسبت به i امین متغیر x_i بصورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۱,\ldots,x_{i-۱},x_i+h,x_{i+۱},\ldots,x_n)-f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)}{h}$$

همچنین می نویسیم $\frac{\partial w}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_{x_i}=f_i=D_i f=D_{x_i}f$.

5-3-6 مثال: اگر $f(x,y,z)=e^{x+y}\ln(y^۲+z^۲)$ ، f_x ، f_y و f_z را حساب کنید.

حل: با ثابت گرفتن z و y و مشتق نسبت به x داریم: $f_x=e^{x+y}\ln(y^۲+z^۲)$

و بطور مشابه داریم: $f_y=(e^{x+y}\ln(y^۲+z^۲)+\frac{۲y}{y^۲+z^۲})$ و $f_z=e^{x+y}+\frac{۲z}{y^۲+z^۲}$

5-3-7 مشتقات مراتب بالاتر: اگر f تابعی دو متغیره باشد، آنگاه مشتقات نسبی آن f_x و f_y نیز توابعی دو متغیره اند لذا می توانیم مشتقات $(f_x)_x$، $(f_x)_y$، $(f_y)_y$، $(f_y)_x$ را که مشتقات نسبی مرتبهٔ دوم f نام دارند، مانند تعریف 5-3-1 حساب کنیم. اگر $z=f(x,y)$ از نمادهای زیر برای مشتق مرتبه دوم استفاده می کنیم:

$$(f_x)_x=f_{xx}=f_{۱۱}=D_{۱۱}f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$$

$$\left(f_x\right)_y = f_{xy} = f_{12} = D_{12} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\left(f_y\right)_y = f_{yy} = f_{22} = D_{22} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\left(f_y\right)_x = f_{yx} = f_{21} = D_{21} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

به همین ترتیب مشتقات نسبی مرتبۀ 3 و بالاتر را نیز می توان تعریف کرد برای مثال:

$$\left(f_{xy}\right)_y = f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\left(f_{xx}\right)_x = f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

5-3-8 قضیه: فرض کنید f روی قرص D شامل نقطۀ (x_0, y_0) تعریف شده باشد اگر توابع f_{xy} و f_{yx} هر دو روی D پیوسته باشند، آنگاه $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

با استفاده از قضیۀ بالا می توان نشان داد $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ اگر این توابع پیوسته باشند.

5-3-9 مثال: اگر $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ، مقدار $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ را بدست آورید.

حل:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_y(0,0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(0+\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x}$$

$$f_y(\Delta x, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(\Delta x, 0+\Delta y) - f(\Delta x, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{(\Delta x)^2 - (\Delta x)(\Delta y)}{\Delta x + \Delta y} - \dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x\left(\dfrac{\Delta x - \Delta y}{\Delta x + \Delta y} - 1\right)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-2\Delta x \Delta y}{\Delta y\left(\Delta x + \Delta y\right)} = -2$$

از طرفی با توجه به مثال 5-3-4 داریم $f_y(0,0) = 0$ لذا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2-0}{\Delta x} = \begin{cases} +\infty & \Delta x \to 0^- \\ -\infty & \Delta x \to 0^+ \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(f_x(0,0))=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,0+\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}$$

$$f_x(0,\Delta y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2-(\Delta x)(\Delta y)}{\Delta x+\Delta y}-0}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-\Delta y}{\Delta x+\Delta y}=\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

از طرفی با توجه به مثال 4-3-5 داریم $f_x(0,0)=1$ لذا داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-1-1}{\Delta y}=\begin{cases}+\infty & \Delta y\to 0^-\\ -\infty & \Delta y\to 0^+\end{cases}$$

5-3-10 مثال: اگر $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ مقدار $f_z(0,0,0)$ را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0,0,0+\Delta z)-f(0,0,0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta z)^2}-0}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=\begin{cases}1 & \Delta z\to 0^+\\ -1 & \Delta z\to 0^-\end{cases}$$

5-3-11 مثال: اگر $f(x,y,z)=e^x\sin(zy)$، f_{xxyz} را محاسبه کنید.

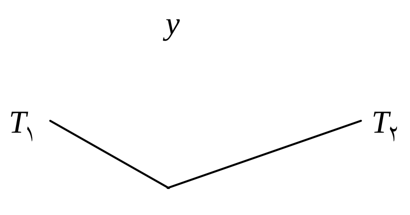
$$f_x=e^x\sin(yz) \quad \text{و} \quad f_{xx}=e^x\sin(yz)$$

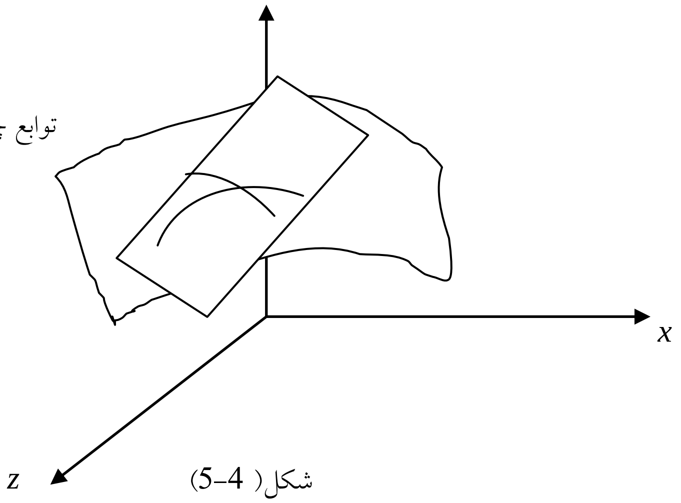
$$f_{xxy}=z\,e^x\cos(yz) \quad \text{و} \quad f_{xxyz}=e^x(\cos(yz)-zy\sin(yz))$$

5-4 صفحهٔ مماس و خط قائم بر یک رویه

فرض کنید $z=f(x,y)$ یک رویه در فضا باشد و (x_0,y_0,z_0) نقطه ای از این رویه باشد همانطور که در بخش 3-5 بیان شد $f_y(x_0,y_0)$ و $f_x(x_0,y_0)$ به ترتیب شیبهای خط مماس بر منحنی های فصل مشترک

رویه با صفحات عمودی $y=y_0$ و $x=x_0$ می باشد. چون این خطوط مماس منحصر بفرد هستند لذا اگر T_1 خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه با صفحهٔ $y=y_0$ در نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) و T_2 خط مماس بر منحنی فصل مشترک رویه با صفحهٔ $x=x_0$ فرض شوند آنگاه صفحهٔ شامل خطوط T_1 و T_2 را صفحهٔ مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) می گوییم.





شکل(5-4)

توجه داریم که صفحهٔ مماس بر یک رویه در یک نقطه از آن منحصر بفرد است زیرا خطوط T_1 و T_2 منحصر بفرد هستند.

5-4-1 محاسبهٔ معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم بر یک رویه

با توجه به تعریف صفحهٔ مماس و خط قائم و نقش اساسی که خطوط مماس T_1 و T_2 ایفا می کنند برای محاسبهٔ صفحهٔ مماس و خط قائم کافیست بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را به ترتیب به موازات خطوط T_1 و T_2 بدست آوریم پس $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}$ بردار نرمال صفحهٔ مماس و نیز بردار هادی خط قائم حاصل خواهد شد.

5-4-2 محاسبهٔ بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$: فرض کنیم بردار $\vec{u}$ برداری منطبق بر خط T_1 باشد که بصورت زیر حاصل شده است اگر از نقطهٔ P به مختصات $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ به موازات محور z ها در صفحهٔ $y=y_0$ به سمت پایین حرکت کنیم تا نقطهٔ Q حاصل شود بطوریکه اگر از نقطهٔ Q در صفحهٔ $y=y_0$ به موازات محور x ها خطی رسم کنیم تا خط T_1 را در نقطهٔ R قطع کند، مقدار پاره خط QR برابر واحد شود در اینصورت بردار $\vec{u}$ را بردار $\overrightarrow{PR}$ که منطبق بر خط T_1 می باشد در نظر می گیریم. با توجه به توصیف هندسی $f_x(x_0, y_0)$ اگر φ زاویهٔ میان خط مماس T_1 و جهت مثبت محور x ها فرض شود آنگاه خواهیم داشت :

$$\tan\varphi = f_x(x_0, y_0)$$

شکل (5-4-2)

اکنون در مثلث قائم الزاویهٔ PQR داریم:

$$\tan P\hat{Q}R = \tan(\pi-\varphi) = -\tan\varphi = -f_x(x_0, y_0)$$

$$\tan P\hat{Q}R=\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{QR}|}=\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{۱}=|\overrightarrow{PQ}|$$

$$\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|(-\vec{k})=(-f_x(x_\circ,y_\circ))(-\vec{k})=f_x(x_\circ,y_\circ).\vec{k}$$

همچنین $\overrightarrow{QR}=|\overrightarrow{QR}|.\vec{i}=\vec{i}$ بنابراین:

$$\vec{u}=\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\vec{i}+f_x(x_\circ,y_\circ).\vec{k}$$

به طور مشابه بردار $\vec{v}$ دارای نمایشی بصورت زیر خواهد بود: $\vec{v}=\vec{j}+f_y(x_\circ,y_\circ).\vec{k}$

اگر $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}$، آنگاه $\vec{N}$ بردار نرمال صفحهٔ مماس خواهد بود لذا داریم:

$$\vec{N}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & \circ & f_x(x_\circ,y_\circ) \\ \circ & ۱ & f_y(x_\circ,y_\circ)\end{vmatrix}=-f_x(x_\circ,y_\circ).\vec{i}-f_y(x_\circ,y_\circ).\vec{j}+\vec{k}$$

بنابراین معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم بر رویهٔ $z=f(x,y)$ در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ,f(x_\circ,y_\circ))$ را می توان بصورت زیر نوشت:

معادلهٔ صفحهٔ مماس: $f_x(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)+f_y(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)-(z-f(x_\circ,y_\circ))=\circ$

معادلهٔ خط قائم: $$\frac{(x-x_\circ)}{f_x(x_\circ,y_\circ)}=\frac{(y-y_\circ)}{f_y(x_\circ,y_\circ)}=\frac{(z-f(x_\circ,y_\circ))}{-۱}$$

5-4-3 مثال: معادلی صفحهٔ مماس و خط قائم بر رویهٔ $z=x^۲+y^۲$ را در نقاط $(۱,۱,۲)$ و $(\circ,\circ,\circ)$ بدست آورید.

حل: معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم در نقطهٔ $(۱,۱,۲)$

$$f(x,y)=x^۲+y^۲,\quad f_x=۲x,\quad f_y=۲y,\quad f_x(۱,۱)=۲$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس: $۲(x-۱)+۲(y-۱)-(z-۲)=\circ$

معادلهٔ خط قائم: $$\frac{(x-۱)}{۲}=\frac{(y-۱)}{۲}=\frac{(z-۲)}{-۱}$$

معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم در نقطهٔ $(\circ,\circ,\circ)$:

$$f_x(\circ,\circ)=\circ,\quad f_y(\circ,\circ)=\circ$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس: $\circ(x-\circ)+\circ(y-\circ)-۱(z-\circ)=\circ\Rightarrow z=\circ$

محور z ها ($t \in \mathbb{R}$) $\quad$ معادلهٔ خط قائم:

$$\frac{(x-0)}{0}=\frac{(y-0)}{0}=\frac{(z-0)}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$$

5-4-4 تعریف: فرض کنیم $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد در اینصورت بردار گرادیان تابع f را با $\overrightarrow{\nabla f}$ نمایش می دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overrightarrow{\nabla f}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \quad \text{بردار گرادیان } f$$

در حالت کلی بردار گرادیان را می توان برای توابع سه متغیره و بیشتر نیز تعریف کرد

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \quad \text{بردار گرادیان } f \text{ (حالت سه متغیره)}$$

$$\nabla f(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \quad \text{بردار گرادیان } f \text{ (حالت } n \text{ متغیره)}$$

5-4-5 مثال: بردار گرادیان تابع $f(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ را در حالت کلی بدست آورده و آنرا در نقطهٔ $(1,1)$ حساب کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\overrightarrow{\nabla f}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{j}$$

$$\nabla f(1,1)=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$$

5-4-6 تعبیر هندسی بردار گرادیان: ابتدا رویهٔ $z=f(x,y)$ را در نظر بگیرید معادلهٔ رویهٔ فوق را می توان بصورت زیر نمایش داد

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$$

بنا بر تعریف بردار گرادیان داریم:

$$\overrightarrow{\nabla F}(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}$$

بنابراین اگر $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ یک نقطه از رویهٔ فوق باشد داریم:

$$\overrightarrow{\nabla F}(x_0,y_0,f(x_0,y_0))=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}-\vec{k}$$

که این همان بردار عمود بر صحفه مماس بر یک رویه در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ, f(x_\circ, y_\circ))$ است. پس تعبیر هندسی بردار گرادیان رویهٔ $F(x,y,z)=\circ$ در یک نقطه عبارتست از بردار عمود بر یک رویه در همان نقطه.

5-4-7 معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم در حالت کلی: فرض کنیم $f(x,y,z)=\circ$ یک رویه در فضا و $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ یک نقطه از رویهٔ فوق باد در اینصورت معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم بصورت زیر نوشته میشوند:

معادلهٔ مماس:

$$f_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ)(x-x_\circ)+f_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ)(y-y_\circ)+f_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ)(z-z_\circ)=\circ$$

معادلهٔ خط قائم:

$$\frac{x-x_\circ}{f_x(x_\circ, y_\circ, z_\circ)}=\frac{y-y_\circ}{f_y(x_\circ, y_\circ, z_\circ)}=\frac{z-z_\circ}{f_z(x_\circ, y_\circ, z_\circ)}$$

5-4-8 مثال: معادلات صفحهٔ و خط قائم بر رویهٔ $z^۲=x^۲+y^۲$ را در نقطهٔ $(۱,۱,\sqrt{۲})$ بدست آورید.

حل:

$$f(x,y,z)=x^۲+y^۲-z^۲$$
$$f_x=۲x,\quad f_y=۲y,\quad f_z=-۲z$$
$$\vec{\nabla} f(۱,۱,\sqrt{۲})=۲\vec{i}+۲\vec{j}-۲\sqrt{۲}\vec{k}$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس : $۲(x-۱)+۲(y-۱)-۲\sqrt{۲}(z-\sqrt{۲})=\circ \Rightarrow ۲x+۲y-۲\sqrt{۲}\,z=\circ$

معادلهٔ خط قائم : $\dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y-۱}{۲}=\dfrac{z-\sqrt{۲}}{-۲\sqrt{۲}}$

5-4-9 مثال: نشان دهید بردار قائم یکه بر سطح $x^۳y^۳+y-z+۲=\circ$ در نقطهٔ $P(\circ,\circ,۲)$ برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(j-k)$ می باشد. سپس معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح را در همین نقطه بدست آورید.

حل:

$$f(x,y,z)=x^۳y^۳+y-z+۲=\circ$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=۳x^۲y^۳,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=۳x^۳y^۲+۱,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-۱$$
$$f_x(P)=\circ,\quad f_y(P)=۱,\quad f_z(P)=-۱\Rightarrow \nabla f=\vec{j}-\vec{k}$$

بردار قائم یکه بر رویه عبارتست از: $\vec{u}=\dfrac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|}=\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}(\vec{j}-\vec{k})$

و معادلهٔ صفحهٔ مماس عبارتست از: $0(x-0)+1(y-0)-1(z-2)=0 \Rightarrow y-z=-2$

5-4-10 مثال: نقاطهٔ روی بیضی گون $x^2+2y^2+3z^2=1$ را بیابید که صفحهٔ مماس در آنها موازی صفحهٔ $3x-y+3z=1$ باشد.

حل: باید بردار گرادیان رویه در نقاط مفروض موازی بردارهای صفحهٔ مفروض باشد اگر

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-1=0$$

داریم:

$$\vec{\nabla} f=2x\vec{i}+4y\vec{j}+6z\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f \parallel <3,-1,3> \Rightarrow \frac{2x}{3}=\frac{4y}{-1}=\frac{6z}{3} \Rightarrow x=-6y, \quad z=-2y$$

از طرفی نقطهٔ مفروض روی بیضی گون واقع است لذا:

$$x^2+2y^2+3z^2=1 \Rightarrow 36y^2+2y^2+12y^2=1 \Rightarrow 50y^2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین نقاط مفروض عبارتند از $P_0(-15\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{2},-5\sqrt{2})$ و $P_1(15\sqrt{2},\frac{-5\sqrt{2}}{2},5\sqrt{2})$.

5-4-11 مثال: نشان دهید معادلهٔ خط مماس بر سهمی گون بیضوی

$$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

در نقطهٔ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ را می‌توان بصورت $\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=\frac{z+z_0}{c}$ نوشت.

حل: فرض کنیم $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c}$ بردار گرادیان f عبارتست از:

$$\vec{\nabla} f=\frac{2x}{a^2}\vec{i}+\frac{2y}{b^2}\vec{j}-\frac{1}{c}\vec{k}$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس در P_0:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{1}{c}(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow \frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=\frac{2x_0^2}{a^2}+\frac{2y_0^2}{b^2}+\frac{z}{c}-\frac{z_0}{c}=\frac{2z_0}{c}+\frac{z}{c}-\frac{z_0}{c}=\frac{z+z_0}{c}$$

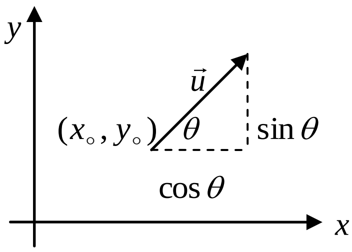
پس معادلهٔ صفحهٔ مماس بصورت $\frac{2xx_0}{a^2}+\frac{2yy_0}{b^2}=\frac{z+z_0}{c}$ بدست می‌آید.

5-5 مشتق سویی، دیفرانسیل، قاعدهٔ زنجیری

فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی دو متغیره باشد مشتقات جزئی f_x و f_y را در نقطهٔ دلخواه $(x_\circ ,y_\circ)$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_x=\lim_{\Delta x\to \circ}\frac{f(x_\circ+\Delta x,y_\circ)-f(x_\circ,y_\circ)}{\Delta x} \quad \text{و} \quad f_y=\lim_{\Delta y\to \circ}\frac{f(x_\circ,y_\circ+\Delta y)-f(x_\circ,y_\circ)}{\Delta y}$$

که f_x و f_y معرف تغییرات z در سوی بردار های یکهٔ $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌باشند. فرض کنید می خواهیم نرخ تغییر z را در $(x_\circ ,y_\circ)$ و در سوی بردار یکهٔ دلخواه $\vec{u}=<a,b>$ بدست اوریم:



برای این منظور رویهٔ S به معادلات $z=f(x,y)$ و نقطهٔ $P\,(x_\circ ,y_\circ ,z_\circ)$ را روی این رویه در نظر می گیریم.

صفحهٔ قائمی که از نقطهٔ P در سوی $\vec{u}$ می گذرد S را در منحنی c قطع می کند شیب خط مماس T بر منحنی c در نقطهٔ P را نرخ تغییر z در سوی $\vec{u}$ می باشد.

شکل(5-5)

اگر Q نقطهٔ دیگری روی c و P' و Q' تصویر P و Q روی صفحهٔ xy باشند آنگاه $\overrightarrow{P'Q'}$ موازی $\vec{u}$ است. و لذا برای برخی مقادیر h داریم $\overrightarrow{P'Q'}=h\vec{u}=<ha,hb>$ بنابراین

$x-x_\circ=ha$ و $y-y_\circ=hb$ لذا $x=x_\circ+ha$ و $y=y_\circ+hb$ و

$$\frac{\Delta z}{h}=\frac{z-z_\circ}{h}=\frac{f(x_\circ+ha,y_\circ+hb)-f(x_\circ,y_\circ)}{h}$$

5-5-1 تعریف: اگر هنگامیکه $h \to ۰$ از عبارت بالا حد بگیریم نرخ تغییر z را (نسبت به فاصله) در سوی $\vec{u}$ بدست می آوریم که مشتق سویی f در سوی $\vec{u}$ نام دارد و $D_u f(x_۰, y_۰)$ یا $D_u f(P_۰)$ نمایش می دهیم لذا

$$D_u f(P_۰) = D_u f(x_۰, y_۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x_۰ + ha, y_۰ + hb) - f(x_۰, y_۰)}{h}$$

یا

$$D_u f(P_۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(P_۰ + hu) - f(P_۰)}{h}$$

حال اگر در تعریف فوق فرض کنیم $g(h) = f(x_۰ + ha, y_۰ + hb)$ و $g'(h)$ را بازاء $h = ۰$ بدست آوریم داریم:

$$g'(۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{g(h) - g(۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x_۰ + ha, y_۰ + hb) - f(x_۰, y_۰)}{h} = D_u f(x_۰, y_۰)$$

5-5-2 مثال: اگر $f(x, y) = x^۲ - xy + ۵y$ و $P(-۱,۲)$ و $\vec{v} = <۳,-۴>$ باشد مشتق سویی f را در سوی بردار $\vec{v}$ بدست آورید.

حل: طبق تعریف مشتق سویی داریم: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{۱}{۵}(۳i - ۴j)$

$$D_{\vec{u}} f(P) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(P + hu) - f(P)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(-۱ + \frac{۳}{۵}h, ۲ - \frac{۴}{۵}) - f(-۱,۲)}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{۱}{۵h}(۲۱h^۲ - ۳۶h) = -\frac{۳۶}{۵}$$

5-5-3 قضیه: اگر f تابعی مشتق پذیر از x و y باشد و $P(x_۰, y_۰)$ یک نقطهٔ دلخواه رویهٔ f باشد در اینصورت f دارای مشتق سویی در سوی هر بردار یکهٔ $\vec{u} = <a, b>$ است و

$$D_u f(x_۰, y_۰) = f_x(x_۰, y_۰) + f_y(x_۰, y_۰)$$

یا بعبارت دیگر

$$D_u f(x_۰, y_۰) = \vec{\nabla} f(x_۰, y_۰) \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} f(P) \cdot u$$

اگر بردار یکهٔ $\vec{u}$ با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ α بسازد آنگاه داریم $\vec{u} = <\cos\theta, \sin\theta>$ درآنصورت فرمول بالا بصورت زیر در می آید:

$$D_{\vec{u}} f(P) = f_x(P)\cos\theta + f_y(P)\sin\theta$$

5-5-4 مثال: فرض کنید $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ مشتق سویی f را در مبداء و در جهتی که با جهت مثبت محور x ها زاویه θ می سازد را بدست آورید. در حالت خاص $\theta = \dfrac{\pi}{۴}$ مساله را حل کنید.

حل: طبق قضیهٔ بالا داریم: $D_{\vec{u}}f(P)=f_x(P)\cos\theta+f_y(P)\sin\theta$

$$f_x=\frac{e^x}{e^x+e^y}\Rightarrow f_x(0,0)=\frac{1}{2},\quad f_y=\frac{e^x}{e^x+e^y}\Rightarrow f_y(0,0)=\frac{1}{2}$$

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$

اگر $\theta=\frac{\pi}{4}$ داریم $D_{\vec{u}}f(0,0)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5-5-5 تعریف: مشتق سویی f در نقطهٔ $P(x_0,y_0,z_0)$ در سوی بردار یکهٔ $\vec{u}=<a,b,c>$ عبارتست از:

$$D_u f(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb,z_0+hc)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

و یا

$$D_u f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\,a+f_y(x_0,y_0,z_0)\,b+f_z(x_0,y_0,z_0)\,c$$

$$D_u f(x_0,y_0,z_0)=D_u f(P)=\overrightarrow{\nabla f}(P)\cdot\vec{u}$$

5-5-6 مثال: مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=z\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ را در نقطهٔ $P(1,-1,1)$ و در سوی بردار قائم بر رویهٔ $x\sin(y+z)-xy+z^2=0$ را بدست آورید.

حل: فرض کنیم $g(x,y,z)=x\sin(y+z)-xy+z^2=0$ بردار قائم بر رویهٔ g عبارتست از بردار $\overrightarrow{\nabla g}$ لذا:

$$\overrightarrow{\nabla g}=<g_x,g_y,g_z>$$

$$g_x=\sin(y+z)-y,\quad g_y=x\cos(y+z)-x,\quad g_z=x\cos(y+z)+2z$$

$$g_x(P)=1,\quad g_y(P)=0,\quad g_z(P)=3$$

بنابراین بردار قائم یکانی بر رویهٔ g عبارتست از $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{\nabla g}}{|\overrightarrow{\nabla g}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}<i+3k>$

طبق قضیهٔ 3-5-5 داریم $D_{\vec{u}}f(P)=\overrightarrow{\nabla f}\cdot\vec{u}$

$$\nabla f=<f_x,f_y,f_z>=\frac{-yz}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{xy}{x^2+y^2}\vec{j}+\tan^{-1}(\frac{y}{x})\vec{k}$$

$$\nabla f(P)=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{\pi}{4}\vec{k}$$

بنابراین

$$D_{\vec{u}}f(P)=\nabla f(P)\cdot\vec{u}=<\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\frac{\pi}{4}\vec{k}>\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}<\vec{i}+3\vec{k}>=\frac{1}{2\sqrt{10}}(1-\frac{\pi}{2})$$

5-5-7 مثال: رویه های $z=e^{x-y}$ و $z=\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}$ یکدیگر ار در منحنی c قطع می کنند اگر $\vec{T}$ بردار یکانی مماس بر c باشد مشتق تابع $f(x,y,z)=xe^{yz}$ را در نقطهٔ $P(۱,۱,۱)$ و در سوی $\vec{T}$ بدست آورید.

حل: فرض کنیم $h(x,y,z)=z-e^{x-y}=۰$ و $g(x,y,z)=z-\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}=۰$ بردار یکانی مماس بر منحنی c محل برخورد دو رویه عبارتست از: $\vec{T}=\frac{\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h}{|\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h|}$

$$\vec{\nabla}g=<-۲x,-۲y,۱>\Rightarrow\vec{\nabla}g(۱,۱,۱)=-۲\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}h=<-e^{x-y},e^{x-y},۱>\Rightarrow\vec{\nabla}h(۱,۱,۱)=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۳\vec{i}+\vec{j}-۴\vec{k}\Rightarrow\vec{T}=\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}<-۳,۱,-۴>$$

$$\vec{\nabla}f=<e^{yz},xze^{yz},xye^{yz}>\Rightarrow\vec{\nabla}f(۱,۱,۱)=<e,e,e>$$

طبق قضیهٔ 5-5-3 داریم: $D_T f(P)=\vec{\nabla}f(P)\cdot u=<e,e,e>\cdot\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}<-۳,۱,-۴>=\frac{-۸e}{\sqrt{۲۶}}$

5-5-8 قضیه: فرض کنید f تابعی مشتق پذیر از n متغیر باشد مقدار ماکزیمم مشتق سویی $D_u f(X)$ برابر با $|\nabla f(X)|$ است و این مقدار ماکزیمم هنگامی رخ می دهد که بردار $\vec{u}$ در سوی بردار گرادیان $\nabla f(X)$ باشد.

طبق قضیهٔ 5-5-3 داریم : $D_u f=\vec{\nabla}f\cdot\vec{u}=|\vec{\nabla}f||\vec{u}|\cos\theta=|\vec{\nabla}f|\cos\theta$

که در اینجا θ زاویهٔ بین $\vec{\nabla}f$ و $\vec{u}$ است و از آنجائیکه بیشترین مقدار $\cos\theta$ برابر 1 است و این هنگامی است که $\theta=۰$ یعنی بیشترین مقدار مشتق سویی برابر با $|\nabla f|$ است و این وقتی رخ می دهد که جهت $\vec{u}$ و جهت بردار گرادیان یکی باشند.

5-5-9 مثال: فرض کنید درجه حرارت در یک نقطه (x,y,z) از یک قطعه فلز با فرمول $T(x,y,z)=e^{۲x+۲y+۳z}$ اندازه گیری می شود که در آن T بر حسب درجه سانتیگراد و x و y و z بر حسب متر اندازه گیری شده اند. در چه جهتی در نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ درجه حرارت سریعترین افزایش را دارد و مقدار این افزایش چقدر است؟

حل: بردار گرادیان T را در نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ بدست می آوریم.

$$\vec{\nabla T}=e^{۲x+۲y+۳z}(۲\vec{i}+۲\vec{j}+۳\vec{k})\Rightarrow \vec{\nabla T}(۰,۰,۰)=۲\vec{i}+۳\vec{j}+۳\vec{k}$$

بنا به قضیهٔ 8-5-5 درجه حرارت در سوی بردار گرادیان بیشترین مقدار را دارد یعنی در سوی بردار $۲\vec{i}+۳\vec{j}+۳\vec{k}$ و مقدار این افزایش ماکزیمم برابر با اندازهٔ بردار گرادیان می باشد:

$$|\nabla T(۰,۰,۰)|=\sqrt{۴+۴+۹}=\sqrt{۱۷}$$

5-5-10 تعریف: تابع دو متغیرهٔ $z=f(x,y)$ را در نظر می گیریم اگر به x و y نموهای به ترتیب Δx و Δy داده شود آنگاه نمو متناظر آن عبارتست از

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (1)$$

در اینجا Δz معرف تغییر مقدار f است وقتیکه (x,y) به $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ تغییر می کند در اینصورت دیفرانسیل dz را که به دیفرانسیل کل نیز معروف است به صورت زیر تعریف می شود:

$$dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

دیفرانسیل های dx و dy متغیرهای مستقل هستند یعنی به آنها هر مقداری می توان داد. در حالتیکه f تابعی سه متغیره باشد دیفرانسیل کل آن برابر است با $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

در حالت کلی برای تابع n متغیرهٔ f داریم $df=\sum_{i=۱}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$.

5-5-11 تعریف: رابطهٔ (1) وقتی Δx و Δy کوچک باشند تغییر واقعی در z تقریباً برابر با دیفرانسیل dz است که این به ما امکان می دهد مقدار $f(x+\Delta x,y+\Delta y)$ را برآورد کنیم هنگامیکه $f(x,y)$ مشخص باشد داریم:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+dz$$

بنا به تعریف دیفرانسیل کل داریم:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

یا

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\,\Delta y$$

5-5-12 مثال: با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt{۹(۱/۹۵)^۲+(۸/۱)^۲}$ را بدست آورید.

حل: تابع $z=f(x,y)=\sqrt{۹x^۲+y^۲}$ را در نظر می گیریم مشاهده می شود که $f(۲,۸)=۱۰$ بنابراین اگر در رابطهٔ قسمت 5-5-11 قرار دهیم $x=۲$ و $y=۸$ و $\Delta x=-۰/۰۵$ و $\Delta y=۰/۱$ چون

$$f_x(x,y)=\frac{۹x}{\sqrt{۹x^۲+y^۲}} \quad و \quad f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{۹x^۲+y^۲}}$$

داریم:

$$\sqrt{۹(۱/۹۵)^۲+(۸/۱)^۲} = f(۱/۹۵,۸/۱) \simeq f(۲,۸)+f_x(۲,۸)\Delta x+f_y(۲,۸)\Delta y$$
$$=۱۰+\frac{۱۸}{۱۰}(-۰/۰۵)+\frac{۸}{۱۰}(۰/۱)=۹/۹۹$$

5-5-13 فرمول تقریب برای توابع سه متغیره: مشابه حالت قبل برای توابع سه متغیره نیز داریم:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \approx f(x,y,z)+f_x(x,y,z)\,dx+f_y(x,y,z)\,dy+f_z(x,y,z)\,dz$$

5-5-14 مثال: ابعاد جعبه ای مستطیلی شکل را با دقت ۰/۲ سانتی متر اندازه می گیریم و اندازه های 75 و ۶۰ و ۴۰ سانتی متر را بدست آورده ایم با استفاده از دیفرانسیل ماکزیمم خطایی را که در محاسبۀ حجم جعبه از اندازه گیری های فوق بدست می آید را برآورد کنید.

حل: اگر ابعاد جعبه x و y و z باشند حجم آن بصورت $v=xyz$ خواهد بود لذا

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$$

طبق مفروضات مساله $|\Delta x|\leq ۰/۲$ و $|\Delta y|\leq ۰/۲$ و $|\Delta z|\leq ۰/۲$ بنابراین جهت یافتن ماکزیمم خطا در رابطۀ بالا اگر قرار دهیم $dx=۰/۲$ و $dy=۰/۲$ و $dz=۰/۲$ و $x=۷۵$ و $y=۶۰$ و $z=۴۰$ داریم:

$$\Delta v \approx dv=(۶۰)(۴۰)(۰/۲)+(۷۵)(۴۰)(۰/۲)+(۶۰)(۷۵)(۰/۲)=۱۹۸۰$$

یعنی یعنی خطایی به اندازۀ $۰/۲cm$ در اندازه گیری هر بعد منجر به خطایی به بزرگی $۱۹۸۰cm^۳$ در محاسبۀ حجم خواهد شد.

5-5-15 قضیه: فرض کنیم $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد و $\vec{u}=\langle a,b\rangle$ بردار یکانی باشد. می گوییم f در نقطۀ P دیفرانسیل پذیر است هر گاه در یک مجموعه باز شامل P واقع در حوزۀ تعریف f داشته باشیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+ha+y+hb)-f(x,y)}{h}=(f_x(x,y)a+f_y(x,y)b)=۰$$

یا بعبارت دیگر

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(P+hu)-f(P)-df(P,hu)}{h}=۰$$

که

$$df(P,hu)=\vec{\nabla}f(P)\cdot h\vec{u}$$

5-5-16 مثال: نشان دهید تابع زیر در مبداء دیفرانسیل پذیر نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{x^5+y^5} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل: ثابت می کنیم

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P+hu)-f(P)-df(P,hu)}{h}\neq 0$$

فرض کنیم $u=<\cos\alpha,\sin\alpha>$ بردایکهٔ دلخواهی باشد

$$\nabla f(0,0)=<\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)>$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^6}{(\Delta x)^5+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0}{0+(\Delta y)^5}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{(\Delta y)^6}=0$$

طبق قضیهٔ 15-5-5 داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\alpha,h\sin\alpha)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot<h\cos\alpha,h\sin\alpha>}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^6\cos^6\alpha}{h^5\cos^5\alpha+h^5\sin^5\alpha}}{h}=\frac{-\cos\alpha\sin^5\alpha}{\cos^5\alpha+\sin^\alpha\alpha}$$

که چون حد فوق بازاء بعضی مقادیر α مخالف صفر است لذا f در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر نیست.

5-5-17 تعریف: فرض کنیم $M(x,y)$ و $N(x,y)$ توابعی دو متغیره باشند عبارت $M(x,y)\,dx+N(x,y)dy$ را دیفرانسیل کامل گویند هر گاه $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

5-5-18 مثال: تحقیق کنید کدامیک از عبارات زیر دیفرانسیل کاملند؟

الف) $x^3y^2dx+x^2y^3dy$ ب) $(e^x+\ln y+\dfrac{y}{x})dx+(\dfrac{x}{y}+\ln x+\sin y)dy$

حل: الف) $M=x^3y^2,\quad N=x^2y^3,\quad \dfrac{\partial M}{\partial y}=2x^3y,\quad \dfrac{\partial N}{\partial x}=2xy^3$

در عبارت (الف) $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ پس دیفرانسیل کامل نیست.

ب) $M=(e^x+\ln y+\frac{y}{x}),\quad N=(\frac{x}{y}+\ln x+\sin y),\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{۱}{y}+\frac{۱}{x},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{۱}{y}+\frac{۱}{x}$

در عبارت (ب) $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ پس دیفرانسیل کامل است.

5-5-19 قضیه: فرض کنیم عبارت $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ دیفرانسیل کامل باشد یعنی دیفرانسیل تابعی مانند $f(x,y)$ باشد در اینصورت f را می توان از رابطهٔ زیر بدست آورد

$$f(x,y)=\int_{x_\circ}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ y)dy$$

5-5-20 مثال: تابعی مانند $f(x,y)$ را بیابید که دیفرانسیل کل آن عبارت زیر باشد

$$df=(ye^{xy}-۲y^۳)dx+(xe^{xy}-۶xy^۲-۲y)dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}-۶y^۲=\frac{\partial N}{\partial x}$$

حل: با توجه به رابطهٔ 19-5-5 داریم:

$$f(x,y)=\int_\circ^x (ye^{xy}-۲y^۳)dx+\int_\circ^y -۲ydy=e^{xy}-۲xy^۳-y^۲+c$$

5-5-21 قضیه: فرض کنیم عبارت $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ دیفرانسیل کامل باشد یعنی دیفرانسیل تابعی مانند $f(x,y)$ باشد در اینصورت f را می توان از رابطهٔ زیر بدست آورد

حالت اول) $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$

و $g(y)$ را می توان از تساوی $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ حساب کرد.

حالت دوم) $f(x,y)=\int N(x,y)dy+g(x)$

و $g(x)$ را می توان از تساوی $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ حساب کرد.

5-5-22 مثال: تابعی مانند $f(x,y)$ بیابید که دیفرانسیل کل آن عبارت زیر باشد:

$$df=(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})dx+(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})dy$$

حل: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{۱}{۲}(x+y)^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲}(x-y)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$f(x,y)$ را از حالت اول قسمت قبل بدست می آوریم

$$f(x,y)=\int(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})dx+g(y)=\frac{۲}{۳}(x+y)^{\frac{۳}{۲}}+\frac{۲}{۳}(x-y)^{\frac{۳}{۲}}+g(y)$$

حال از تساوی $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} + \frac{\partial g}{\partial y} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \circ \Rightarrow g(y) = c$$

لذا تابع f عبارتست از

$$f(x,y) = \frac{۲}{۳}(x+y)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۲}{۳}(x-y)^{\frac{۳}{۲}} + c$$

23-5-5 تعریف: فرض کنید $M(x,y,z)$ و $N(x,y,z)$ و $P(x,y,z)$ توابعی سه متغیره باشند عبارت

$M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$ را دیفرانسیل کامل گوییم هر گاه سه شرط زیر تواماً برقرار باشند:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1 \qquad\qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3$$

24-5-5 مثال: نشان دهید که عبارت زیر دیفرانسیل کامل است پس تابعی مانند $f(x,y,z)$ را بیابید که دیفرانسیل آن عبارت زیر باشد:

$$e^x \cos y dx + (z\cos(yz)) - e^x \sin y)dy + y\cos(yz)dz$$

حل:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \sin y = \frac{\partial N}{\partial x} \quad و \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \circ = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$و \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \cos(yz) - yz\sin(yz) = \frac{\partial P}{\partial y}$$

لذا طبق تعریف بالا عبارت فوق دیفرانسیل کامل است برای پیدا کردن f می توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$f(x,y,z) = \int_{x_\circ}^{x} M(x,y,z)dx + \int_{y_\circ}^{y} N(x,y,z)dy + \int_{z_\circ}^{z} P(x,y,z)dz$$

لذا داریم:

$$f(x,y,z) = \int_{\circ}^{x} e^x \cos y dx + \int_{\circ}^{y} (z\cos yz - \sin y)dy + \int_{\circ}^{z} \circ dz$$

$$= e^x \cos y - \cos y + \sin(yz) + \cos y + c = e^x \cos y + \sin yz + c$$

بنابراین

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + \sin(yz) + c$$

البته می توان $f(x,y,z)$ را مانند قسمت 21-5-5 در توابع سه متغیره نیز بدست آورد در اینصورت داریم

$$f(x,y,z) = \int M(x,y,z)dx + g(y,z)$$

که $g(y,z)$ را می توان از تساویهای $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ و $\frac{\partial f}{\partial z}=P$ بدست آورد حالتهای دیگر این روش عبارتند از:

$$f(x,y,z)=\int P(x,y,z)dx+g(x,y) \quad \text{و} \quad f(x,y,z)=\int N(x,y,z)dy+g(x,z)$$

که $g(x,z)$ را از تساویهای $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ و $\frac{\partial f}{\partial z}=P$ و $g(x,y)$ را از تساویهای $\frac{\partial f}{\partial x}=M$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=N$ می توانید حساب کنید.

5-5-25 مثال: تابعی مانند $f(x,y,z)$ بیابید که دیفرانسیل کل عبارت زیر باشد.

$$(x^2+y^2+z^2)dx+2xydy+2xzdz$$

حل: عبارت فوق دیفرانسیل کامل است زیرا $\frac{\partial N}{\partial x}=2y=\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial P}{\partial x}=2z=\frac{\partial M}{\partial z}$ و

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial z}$$

بنابراین $$f(x,y,z)=\int(x^2+y^2+z^2)dx+g(y,z)=\frac{x^3}{3}+xy^2+xz^2+g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=2xy\Rightarrow\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=0\Rightarrow g(y,z)=h(z)$$

بنابراین تابع f عبارتست از: $$f(x,y,z)=\frac{x^3}{3}+xy^2+xz^2+h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xz+\frac{\partial h(z)}{\partial z}=2xz\Rightarrow\frac{\partial h(z)}{\partial z}=0\Rightarrow h(z)=c$$

لذا تابع f به اینصورت در می آید: $$f(x,y,z)=\frac{x^3}{3}+xy^2+xz^2+c$$

5-5-26 قاعدهٔ زنجیره ای در توابع چند متغیره

حالت اول) فرض کنید $w=f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر از x و y باشد و $x=x(t)$ و $y=y(t)$ توابعی مشتق پذیر از t باشند در اینصورت w تابعی مشتق پذیر از t است و

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & t & \end{tikzcd}$$

5-5-27 مثال: فرض کنید $w = x\tan^{-۱}(\frac{y}{x})$ و $x = \cos t$ و $y = e^t$، $\frac{dw}{dt}$ را حساب کنید.

حل: طبق رابطهٔ بالا داریم: $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) - \frac{\frac{y}{x}}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{۱}{۱+\frac{y^۲}{x^۲}} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left[\tan^{-۱}\left(\frac{e^t}{\cos t}\right) - \frac{e^t\cos t}{e^{۲t}+\cos^۲ t}\right](-\sin t) + \left[\frac{\cos^۲ t}{e^{۲t}+\cos^۲ t}\right](e^t)$$

$$= \frac{e^t\cos t(\cos t + \sin t)}{e^{۲t}+\cos^۲ t} - (\sin t)\tan^{-۱}\left(\frac{e^t}{\cos t}\right)$$

حالت دوم) فرض کنید $w = f(x,y,z)$ تابعی مشتق پذیر از x و y و z باشد و $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $z = z(t)$ توابعی مشتق پذیر از t باشند در اینصورت w تابعی مشتق پذیر از x است و داریم:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

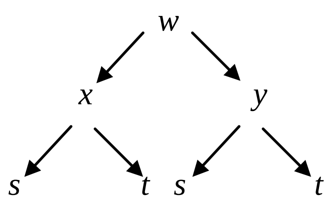
5-5-28 مثال: فرض کنید $w = f(x,y,z)$ که $x = t$ و $y = t^۲$ و $z = x - y$ در اینصورت $\frac{dw}{dx}$ را بر حسب مشتقات نسبی f بدست می آوریم.

حل: طبق رابطهٔ بالا داریم $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = ۱, \quad \frac{dy}{dt} = ۲t, \quad \frac{dz}{dt} = ۱-۲t \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} + ۲t\frac{\partial f}{\partial y} + (۱-۲t)\frac{\partial f}{\partial z}$$

حالت سوم) فرض $w = f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر از x و y باشد و $x = x(s,t)$ و $y = y(s,t)$ توابعی مشتق پذیر از s و t باشند دراینصورت:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$



5-5-29 مثال: اگر $w = f(x,y)$ که در آن $x = e^s\cos t$ و $y = e^s\sin t$ نشان دهید:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{۲}=e^{-۲s}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{۲}\right]$$

حل: طبق رابطهٔ بالا داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}(e^{s}\cos t)+\frac{\partial w}{\partial y}(e^{s}\sin t)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^{۲}=e^{۲s}\cos^{۲}t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}+e^{۲s}\sin^{۲}t\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{۲}+۲e^{۲s}\sin t\cos t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}(-e^{s}\sin t)+\frac{\partial w}{\partial y}(e^{s}\cos t)$$

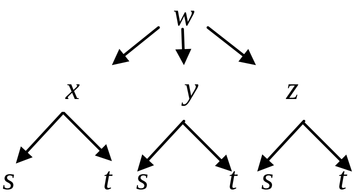
$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{۲}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}(e^{۲s}\sin^{۲}t)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{۲}(e^{۲s}\cos^{۲}t)-۲e^{۲s}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^{۲}=e^{۲s}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}(\sin^{۲}t+\cos^{۲}t)+e^{۲s}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{۲}(\sin^{۲}t+\cos^{۲}t)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{۲}=e^{-۲s}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^{۲}\right]$$

حالت چهارم) فرض $w=f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر از x و y باشد و $x=x(s,t)$ و $y=y(s,t)$ و $z=z(s,t)$ توابعی مشتق پذیر از s و t باشند دراینصورت:

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\quad و\quad \frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$



5-5-30 قاعدهٔ زنجیره ای در حالت کلی: فرض کنید $w=f(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)$ تابعی مشتق پذیر از $x_۱,x_۲,\ldots,x_n$ باشد و هر x_j تابعی از m متغیر $t_۱,t_۲,\ldots,t_m$ باشند بطوریکه مشتقات نسبی $\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$ (برای $j=۱,۲,\ldots,n$ و $i=۱,۲,\ldots,m$) موجود باشند در اینصورت w تابعی مشتق پذیر از $t_۱,t_۲,\ldots,t_m$ است و برای هر $i=۱,۲,\ldots,m$ داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial t_i}=\sum_{j=۱}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\qquad i=۱,۲,\ldots,m$$

5-5-31 مثال: فرض کنید $w=f(x^۲-y^۲)$ ثابت کنید: $y^۲\dfrac{\partial w}{\partial x}+xy\dfrac{\partial w}{\partial y}=xw$

حل: فرض کنیم $u=x^۲-y^۲$ در اینصورت $w=yf(u)$ بنابراین طبق قاعدهٔ زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial x}=y\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=۲xyf'(u)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=f(u)+y\frac{\partial f}{\partial y}=f(u)+y\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=f(u)-۲y^۲f'(u)$$

مقادیر بدست آمده را در رابطهٔ زیر قرار می دهیم:

$$y^۲\frac{\partial w}{\partial x}+xy\frac{\partial w}{\partial y}=y^۲(۲xyf'(u))+xy(f(u)-۲y^۲f'(u))$$

$$=۲xy^۳f'(u)+xyf(u)-۲xy^۳f'(u)=xyf(u)=xw$$

5-5-32 مثال: فرض کنید با تغییر متغیرهای $x=uv$ و $y=\frac{۱}{۲}(u^۲-v^۲)$ تابع $f(x,y)$ به $g(u,v)$ تبدیل می شود مطلوبست محاسبهٔ $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ و $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ و $\dfrac{\partial^۲ g}{\partial u\partial v}$ بر حسب x و y و مشتقات نسبی f.

حل: با توجه به قاعدهٔ زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot v+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot u$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial f}{\partial y}(-v)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot u-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot v$$

$$\frac{\partial^۲ g}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(uf_x-vf_y\right)=f_x+u\frac{\partial f_x}{\partial u}-v\frac{\partial f_y}{\partial u} \qquad (1)$$

$\dfrac{\partial f_x}{\partial u}$ و $\dfrac{\partial f_y}{\partial u}$ را از قاعدهٔ زنجیری بدست می آوریم:

$$\frac{\partial f_x}{\partial u}=\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=f_{xx}\cdot v+f_{xy}\cdot u \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial u}=\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=f_{yx}\cdot v+f_{yy}\cdot u \qquad (3)$$

مقادیر بدست آمده در (2) و (3) را در رابطهٔ (1) قرار می دهیم:

$$\frac{\partial^{۲} g}{\partial u \partial v}= f_x + u(v f_{xx} + u f_{xy}) - v(v f_{yx} + u f_{yy})$$
$$= f_x + uv f_{xx} + u^{۲} f_{xy} - v^{۲} f_{yx} - uv f_{yy}$$
$$= f_x + uv(f_{xx} - f_{yy}) + f_{xy}(u^{۲} - v^{۲})$$
$$= f_x + x(f_{xx} - f_{yy}) + ۲y f_{xy}$$

5-5-33 مشتق گیری ضمنی: فرض کنید z تابعی برحسب x و y باشد و داشته باشیم $F(x,y,z)=۰$ در اینصورت داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

اگر با استفاده از قاعدهٔ زنجیری از معادلهٔ $F(x,y,z)=۰$ بصورت زیر مشتق بگیریم

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$$

چون $\frac{\partial x}{\partial x}=۱$ و $\frac{\partial y}{\partial x}=۰$ داریم $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = ۰$. بنابراین با فرض اینکه $\frac{\partial F}{\partial z} \neq ۰$ نتیجه می گیریم: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. به طریق مشابه اگر از معادلهٔ $F(x,y,z)=۰$ بصورت زیر مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

چون $\frac{\partial x}{\partial y}=۰$ و $\frac{\partial y}{\partial y}=۱$ با فرض $\frac{\partial F}{\partial z} \neq ۰$ داریم : $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

5-5-34 مثال: فرض کنید z تابعی برحسب x و y باشد و داشته باشیم $y\ln x + \sin(yz) = ۰$ مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

حل: فرض کنیم $F(x,y,z) = y\ln x + \sin(yz) = ۰$ داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + z\cos(yz) \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y\cos(yz)$$

بنابراین با توجه به فرمول 33-5-5 داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\frac{y}{x}}{y\cos(yz)}=\frac{۱}{x\cos(yz)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\ln x+z\cos(yz)}{y\cos(yz)}$$

35-5-5 مثال: فرض کنید $f(x+y-z,x^۲+y^۲)=۰$ و z تابعی برحسب x و y باشد ثابت کنید :

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=x-y$$

حل: اگر $x+y-z=u$ و $x^۲+y^۲=v$، $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را با توجه به قاعدهٔ زنجیری بدست می آوریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=۰$$

چون z تابعی برحسب x و y است لذا $\frac{\partial u}{\partial x}=۱-\frac{\partial z}{\partial z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(۱-\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial f}{\partial v}(۲x)=۰\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۲x\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \qquad (1)$$

به طریق مشابه:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}(۱-\frac{\partial z}{\partial y})+\frac{\partial f}{\partial v}(۲y)=۰\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲y\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}} \qquad (2)$$

بنابراین از (1) و (2) داریم: $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=۲xy\frac{f_v}{f_u}+x-۲xy\frac{f_v}{f_u}-y=x-y$

6-5 ماکزیمم و مینیمم توابع چند متغیره

1-6-5 تعریف: فرض کنیم $z=f(x,y)$ معادلهٔ یک رویه در فضا باشد نقطهٔ $(a,b,f(a,b))$ از این رویه را یک نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم نسبی گوییم هرگاه صفحهٔ مماس در این نقطه از رویه صفحه ای افقی (صفحه ای به موازات صفحهٔ xy باشد). این تعبیر از نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم نسبی دقیقاً معادل اینست که در یک همسایگی در نقطهٔ $(a,b,۰)$ رویهٔ فوق دارای بیشترین مقدار یا کمترین مقدار باشد با توجه به این تعریف و با توجه به اینکه خطوط مماس بر منحنی های فصل مشترک رویه با صفحات $x=a$ و $x=b$

باید شیب مساوی صفر داشته باشند لذا برای یافتق نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یا زین اسبی (نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی) ابتدا لازم است که دستگاه $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ را حل کنیم ریشه های این دستگاه به عنوان نقطهٔ مورد نظر برای ماکزیمم یا مینیمم نسبی یا زیر اسبی می باشند. جهت تعیین نوع نقاط حاصل از حل دستگاه فوق دو آزمون وجود دارد که بصورت زیر بیان می شوند:

5-6-2 آزمون اول (مشتقات دوم) ماکزیمم و می نیمم نسبی توابع دو متغیره

فرض کنید نقاط $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ ریشه های دستگاه $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ باشند یعنی داشته باشیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i)=\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i)=0$$

که $i=1,\ldots,k$ و فرض کنید:

$$\Delta=f_{xx}(a_i,b_i)\,f_{yy}(a_i,b_i)-\left[f_{xy}(a_i,b_i)\right]^2=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}$$

الف) اگر $\Delta>0$ و $f_{xx}(a_i,b_i)>0$ در اینصورت نقطهٔ (a_i,b_i) یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

ب) اگر $\Delta>0$ و $f_{yy}(a_i,b_i)<0$ در اینصورت نقطهٔ (a_i,b_i) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

ج) اگر $\Delta<0$ در اینصورت نقطهٔ (a_i,b_i) یک نقطهٔ زینی (زین اسبی) است.

د) اگر $\Delta=0$ آنگاه از این آزمون نتیجه ای حاصل نمی شود و باید آزمون دوم مورد استفاده قرار گیرد.

5-6-3 آزمون دوم ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع دو متغیره

فرض کنید (a_i,b_i) ریشهٔ دستگاه $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ باشد در اینصورت D را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$D=f(a_i+h,b_i+k)-f(a_i,b_i)$$

که در آن h و k مقادیر کوچک مثبت یا منفی می باشند.

الف) اگر $D>0$ آنگاه نقطهٔ (a_i,b_i) یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

ب) اگر $D<0$ آنگاه نقطهٔ (a_i,b_i) یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

ج) اگر $D=0$ آنگاه رویهٔ $z=f(x,y)$ در محدودهٔ نقطهٔ (a_i,b_i) یک صفحهٔ افقی است.

5-6-4 مثال: اکسترممها و نقاط زینی تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x,y)=x^۳+y^۳-۳x^۲-۶y^۲+۱$$

حل: ابتدا دستگاه $\begin{cases} f_x=۰ \\ f_y=۰ \end{cases}$ را حل می کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۳x^۲-۶x=۰\Rightarrow ۳x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰,\ x=۲$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=۳y^۲-۱۲y=۰\Rightarrow ۳y(y-۴)=۰\Rightarrow y=۰,\ y=۴$$

بنابراین ریشه های دستگاه فوق عبارتند از : $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$ و $(۲,۰)$ و $(۲,۴)$.

حال مشتقات مرتبهٔ دوم و Δ را محاسبه می کنیم

$$f_{xx}=۶x-۶,\quad f_{yy}=۶y-۱۲,\quad f_{xy}=۰$$

$$\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^۲=۳۶(x-۱)(y-۲)$$

چون $\Delta(۰,۰)=۷۲>۰$ و $f_{xx}(۰,۰)=-۶<۰$ لذا نقطهٔ $(۰,۰)$ یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

چون $\Delta(۰,۴)=-۷۲<۰$ پس نقطهٔ $(۰,۴)$ یک نقطهٔ زینی است.

چون $\Delta(۲,۰)=-۷۲<۰$ لذا نقطهٔ $(۲,۰)$ یک نقطهٔ زینی است.

همچنین $\Delta(۲,۴)=۷۲>۰$ و $f_{xx}(۲,۴)=۶>۰$ لذا نقطهٔ $(۲,۴)$ یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

5-6-5 مثال: هر گاه $x+y+z=۱$ کمترین مقدار $x^۲+y^۲+z$ را بدست آورید.

حل: چون $x+y+z=۱$ پس $z=۱-x-y$ لذا کمترین مقدار تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲-x-y+۱$ را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} f_x=۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ f_y=۲y-۱=۰\Rightarrow y=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$f_{xx}=۲,\quad f_{yy}=۲,\quad f_{xy}=۰,\quad \Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^۲=۴$$

چون $\Delta\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)>۰$ و $f_{xx}\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)>۰$ لذا نقطهٔ $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ نقطهٔ مینیمم تابع است لذا کمترین مقدار $x^۲+y^۲+z$ عبارتست از : $f\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۲}$

5-6-6 ماکزیمم و مینیمم نسبی همراه با شرط (ضربگرهای لاگرانژ)

گاهی ممکن است پیدا کردن نقاط ماکزیمم یا مینیمم یک تابع مانند $f(x,y)$ همراه با یک یا چند شرط توام باشد مثلاً ممکن است بخواهیم نقطه ای روی سهمی $g(x,y)=y-x^{۲}=\circ$ پیدا کنیم بطوریکه فاصله از نقطهٔ $(۱,\circ)$ مینیمم باشد در اینصورت تابعی که باید مینیمم شود عبارتست از تابع فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,\circ)$ تا نقطهٔ (x,y) از سهمی که به این صورت می باشد: $f(x,y)=\sqrt{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}$

بنابراین بدنبال نقطه یا نقاطی هستیم که در این شرط صدق کند: $Min\ f(x,y);\ g(x,y)=\circ$

حتی ممکن است شرایط بیشتری نیز داشته باشیم مثلاً نقطه ای روی فصل مشترک سهمی فوق و خط $h(x,y)=y-۲x=\circ$. اینگونه مسائل تحت عنوان **ماکزیمم و مینیمم همراه با شرط** معروف می باشد با توجه به اینکه تابع f دارای چه تعداد متغیر و تعداد شرط چه مقدار باشد حالات زیر را در نظر میگیریم:

5-6-7 حالت اول $\begin{cases}\max(\min) f(x,y)\\ g(x,y)=\circ\end{cases}$

برای یافتن نقطهٔ مورد نظر یعنی نقطه ای که بعنوان ***min*** یا ***max*** تابع f محسوب می شود و در شرط $g(x,y)=\circ$ نیز صدق می کند مراحل زیر را انجام می دهیم.

مرحلهٔ 1) تابع H را به این صورت تعریف می کنیم: $H(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$

(عدد λ هر عدد حقیقی می تواند باشد و ضربگر لاگرآنژ نامیده می شود و از حل معادلات زیر بدست می‌آید)

مرحلهٔ 2) مشتقات نسبی تابع H را محاسبه کرده و در دستگاه زیر قرار می دهیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}=\circ\\ \dfrac{\partial H}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}=\circ\\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}=-g(x,y)=\circ\end{cases}$$

مرحلهٔ 3) با حل دستگاه فوق نقاط $(a_n,b_n),\ldots,(a_۱,b_۱)$ حاصل می شوند برای پیدا کردن نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم نسبی مورد نظر نقاط فوق را در تابع $f(x,y)$ قرار می دهیم اگر نقطهٔ مینیمم مورد نظر باشد نقطه ای را انتخاب می کنیم که مقدار f در آن نقطه کمترین مقدار را انتخاب کند چنانچه نقطهٔ ماکزیمم مورد نظر باشد نقطه ای را انتخاب می کنیم که مقدار f در آن نقطه بیشترین مقدار را داشته باشد. البته می توان نوع نقاط مربوط به حل دستگاه فوق را از آزمون اول یا دوم ماکزیمم نسبی برای تابع f نیز مشخص نمود این روش مخصوصاً وقتیکه نقطهٔ مورد نظر تنها باشد مفید است.

5-8-6 حالت دوم $\begin{cases}\max(\min) f(x,y,z)\\ g(x,y,z)=\circ\end{cases}$

در این حالت نیز می توان تابع $H(x,y,z,\lambda)$ را بصورت زیر تعریف کرد

$$H(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z) \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

و یا بدست آوردن ریشه های دستگاه $\begin{cases}H_x=0\\H_y=0\\H_z=0\\H_\lambda=0\end{cases}$ مشابه حالت اول جواب مورد نظر را بدست آورد.

5-6-9 مثال: نزدیکترین نقطهٔ رویه $z^2=xy+1$ را از مبداء مختصات بیابید.

حل: فرض کنیم $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه از رویه فوق از مبداء مختصات باشد. برای بدست آوردن مینیمم تابع f، زیر رادیکال را مینیمم می کنیم در اینصورت بنا به رابطهٔ بالا داریم:

$$H(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(z^2-xy-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}H_x=2x+\lambda y=0\Rightarrow 2x+y=0\\H_y=2y+\lambda x=0\Rightarrow 2y+x=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=0,\ y=0$$

$$H_z=2z-2z\lambda=0\Rightarrow z(1-\lambda)=0\Rightarrow z=0,\ \lambda=1$$

$$H_\lambda=0\Rightarrow z^2-xy-1=0\Rightarrow z^2=xy+1$$

اگر $x=y=0$ باشد از معادلهٔ $H_\lambda=0$ بدست می آوریم: $z=\pm1$ توجه داریم که با توجه به اینکه $x=y=0$ جواب $z=0$ غیر قابل قبول است لذا نقاط مذکور عبارتند از $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$ که هر دو نقطه نزدیکترین فاصله را تا مبداء دارند.

5-6-10 حالت سوم $\begin{cases}\max(\min) f(x,y)\\g(x,y)=0,\ h(x,y)=0\end{cases}$

در این حالت چون دو قید داریم تابع $H(x,y,\lambda,\mu)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$H(x,y,\lambda,\mu)=f(x,y)-\lambda g(x,y)-\mu h(x,y)$$

و با بدست آوردن ریشه های دستگاه $\begin{cases}H_x=0\\H_y=0\\H_\lambda=0\\H_\mu=0\end{cases}$ مشابه حالت اول جواب مورد نظر را بدست می آوریم.

5-6-11 حالت چهارم $\begin{cases}\max(\min) f(x,y,z)\\g(x,y,z)=0,\ h(x,y,z)=0\end{cases}$

تابع $H(x,y,\lambda,\mu)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$H(x,y,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)-\mu h(x,y,z) \qquad (\lambda,\mu\in\mathbb{R})$$

با حل دستگاه $\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_z = 0 \\ H_\lambda = 0 \\ H_\mu = 0 \end{cases}$ و پیدا کردن ریشه های دستگاه می توان جواب مورد نظر را بدست آورد.

5-6-12 حالت کلی: فرض کنید بخواهیم ماکزیمم یا مینیمم تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را همراه با k شرط بصورت زیر بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \max\ (\min)\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

دستگاه زیر را تشکیل داده و آنرا حل می کنیم:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{\nabla g_i} \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k \end{cases}$$

دستگاه بالا شامل $n+k$ معادله می باشد با حل دستگاه و بدست آوردن ریشه های آن و قرار دادن هر کدام در تابع f می توان جواب مورد نظر را در صورت وجود بدست آورد.

5-6-13 مثال: صفحهٔ $x+y+2z=2$، سهمی گون $z = x^2 + y^2$ را در یک بیضی قطع می کند. نزدیکترین و دورترین نقاط روی این بیضی از مبداء مختصات را پیدا کنید.

حل: فصل مشترک رویه های فوق بصورت $x+y+2(x^2+y^2)=2$ است و تابع فاصله یک نقطه از فصل مشترک از مبداء مختصات نیز بصورت $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ بیان می شود. با استفاده از روش ضربگر لاگرآنژ داریم: $H(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-\lambda(2x^2+x+2y^2+y-2)$

$$\begin{cases} H_x = 2x - \lambda(4x+1) = 0 \Rightarrow 2x = \lambda(4x+1) \\ H_y = 2y - \lambda(4y+1) = 0 \Rightarrow 2y = \lambda(4y+1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4x+1}{4y+1} \Rightarrow 4xy + x = 4xy + y \Rightarrow x = y$$

$$\begin{cases} H_z = 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ H_\lambda = 2x^2 + x + 2y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا نقاط مورد نظر عبارتند از $(-1,-1,0)$ و $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ بسادگی دیده می شود نقطهٔ $(-1,-1,0)$ دورترین نقطه از مبداء و نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ نزدیکترین نقطه به مبداء است.

5-7 نمونه مسائل حل شده

5-7-1: در پیوستگی توابع زیر در نقاط داده شده تحقیق کنید.

الف) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{۲xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} & (x,y)=(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)\neq(۰,۰)\end{cases}$$

حل: بایستی ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>۰\quad\exists\delta>۰\quad s.t.\quad \sqrt{x^۲+y^۲}<\delta\Rightarrow\left|\frac{۲xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}-۰\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{۲xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right|=\frac{۲|x||y|}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\leq\frac{۲\sqrt{x^۲+y^۲}\times\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}<\varepsilon$$

با انتخاب $\delta=\dfrac{\varepsilon}{۲}$ داریم:

$$\left|\frac{۲xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right|\leq۲\sqrt{x^۲+y^۲}\leq۲\left(\frac{\varepsilon}{۲}\right)=\varepsilon$$

بنابراین حکم برقرار است و $f(x,y)$ در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\left[\dfrac{۱}{x+y}\right] & (x,y)=(۰,۰)\\ ۱ & (x,y)\neq(۰,۰)\end{cases}$$

بایستی ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>۰\quad\exists\delta>۰\quad s.t.\quad \sqrt{x^۲+y^۲}<\delta\Rightarrow\left|(x+y)\left[\frac{۱}{x+y}\right]-۱\right|<\varepsilon$$

$$\left|(x+y)\left[\frac{۱}{x+y}\right]-۱\right|=\left|(x+y)\left(\left[\frac{۱}{x+y}\right]-\frac{۱}{x+y}\right)\right|\leq|x+y|\quad (۰\leq t-[t]<۱\ \text{زیرا})$$

$$\leq|x|+|y|\leq۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$

با انتخاب $\delta=\dfrac{\varepsilon}{۲}$ داریم

$$|(x+y)[x+y]-1| \le |x+y| \le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2} \le 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

ثابت کردیم $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=1$ بنابراین تابع f در $(0,0)$ پیوسته می باشد.

ج) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\,,\,y\neq 0\\[2ex] 0 & x=0\,,\,y=0\end{cases}$$

$$x=y \text{ روی مسیر } \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}+x\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{2}=L_1 \qquad (1)$$

$$y=0 \text{ روی مسیر } \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=L_2 \qquad (2)$$

چون $L_1\neq L_2$ نتیجه می شود که تابع f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

2-5-7: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ الف) $D_1 f(0,0)$ و $D_2 f(0,0)$ را بدست آورید. ب) اگر $\vec{u}$ بردار دلخواهی در $\mathbb{R}^2$ باشد نشان دهید $D_{\vec{u}} f(0,0)$ وجود دارد و قدر مطلق آن حداکثر یک است. ج) آیا f در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر است؟

الف) $$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

ب) چون $\vec{u}$ بردار یکانی است فرض کنیم $\vec{u}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ لذا داریم:

$$D_{\vec{u}} f(0,0)=\vec{\nabla}f(0,0)\cdot\vec{u}=(1,0)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)=\cos\alpha$$

$$|D_{\vec{u}} f(0,0)|=|\cos\alpha|\le 1$$

ج) طبق تعریف دیفرانسیل پذیری باید ثابت کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P_0+h\vec{u})-f(P_0)-df(P_0,h\vec{u})}{h}=0$$

$$P_0=(0,0) \qquad ,\vec{u}=(\cos\alpha,\sin\alpha) \qquad ,df(P_0,h\vec{u})=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot h\vec{u}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3}{h^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}-0-h\cos\alpha}{h}=\cos^3\alpha-\cos\alpha\neq 0$$

لذا f در $(0,0)$ دیفرانسیل پذیر نیست.

5-7-3: مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را در نقطهٔ $P(1,1,1)$ و در سوی بردار قائم بر رویهٔ $e^{xy^2z^3}=e$ در نقطهٔ P بدست آورید. $p(x,y,z)=e^{xy^2z^3}-e$

$$\vec{\nabla}g=(y^2z^3e^{xy^2z^3},2xye^{xy^2z^3},3xy^2z^2e^{xy^2z^3})$$

$$\vec{\nabla}g_{(1,1,1)}=e(1,2,3)\,,\vec{u}=\frac{\vec{\nabla}g}{|\vec{\nabla}g|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(i+2j+3k)$$

$$\vec{\nabla}f=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\vec{\nabla}f(1,1,1)=\frac{1}{3}(1,1,1)$$

$$D_{\vec{u}}f(1,1,1)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{u}=\frac{1}{3}(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

5-7-4: مشتق سویی تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ $P_0(1,2)$ و در سوی بردار P_0 به $P_1(2,3)$ برابر $2\sqrt{2}$ و در سوی بردار P_0 به $P_2(1,0)$ برابر 3- است مطلوبست محاسبهٔ مشتق سویی f، در سوی P_0 به $P_3(4,6)$.

فرض کنیم: $\nabla f(P_0)=(a,b)$

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$$

$$\overrightarrow{P_0P_2}=-2\vec{j}\Rightarrow\vec{u}_2=-\vec{j}\quad,\overrightarrow{P_0P_3}=3\vec{i}+4\vec{j}\Rightarrow\vec{u}_3=\frac{1}{5}(3\vec{i}+4\vec{j})$$

$$\begin{aligned}&D_{\vec{u}_1}f(P_0)=2\sqrt{2}\Rightarrow(a,b)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\\&D_{\vec{u}_2}f(P_0)=-3\Rightarrow(a,b)\cdot(0,-1)=-3\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}a+b=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}f(P_0)=(1,3)$$

$$D_{\vec{u}_3}f(P_0)=\vec{\nabla}f(P_0)\cdot\vec{u}_3=(1,3)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=3$$

5-7-5: رویهٔ s با معادلهٔ مفروض است اولاً معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه را در P بنویسید ثانیاً مشتق تابع $f(x,y,z)=xyz$ را در P و در سوی $\vec{n}$ بدست آورید.

$$\vec{N}=(۲x)\vec{i}+(۲y)\vec{j}+(۲z-۲)\vec{k}$$

$$P(۱,-۱,۰)\Rightarrow \vec{N}=۲\vec{i}-۲\vec{j}-۲\vec{k}\Rightarrow n=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس: $(x-۱)-(y+۱)-z=۰\Rightarrow x-y-z-۲=۰$

$$\vec{\nabla}f=(yz)\vec{i}+(xz)\vec{j}+(xy)\vec{k}\Rightarrow \vec{\nabla}f(P)=-\vec{k}$$

$$D_{\vec{u}}f(P)=\vec{\nabla}f(P)\cdot\vec{n}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

5-7-6: معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}+z^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ را بنویسید و سپس فصل مشترک این صفحه با محورهای مختصات را بدست آورید. همچنین نشان دهید که مجموع مربعات این فواصل از مبداء مقداری ثابت است.

$$f(x,y,z)=x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}+z^{\frac{۲}{۳}}-a^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}\quad ,\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۲}{۳}y^{-\frac{۱}{۳}}\quad ,\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{۲}{۳}z^{-\frac{۱}{۳}}$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس در $(x_۰,y_۰,z_۰)$:

$$\frac{۲}{۳}x_۰^{-\frac{۱}{۳}}(x-x_۰)+\frac{۲}{۳}y_۰^{-\frac{۱}{۳}}(y-y_۰)+\frac{۲}{۳}z_۰(z-z_۰)^{-\frac{۱}{۳}}=۰$$

$$\Rightarrow xx_۰^{-\frac{۱}{۳}}+yy_۰^{-\frac{۱}{۳}}+zz_۰^{-\frac{۱}{۳}}=x_۰^{\frac{۲}{۳}}+y_۰^{\frac{۲}{۳}}+z_۰^{\frac{۲}{۳}}$$

$$=xx_۰^{-\frac{۱}{۳}}+yy_۰^{-\frac{۱}{۳}}+zz_۰^{-\frac{۱}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$$

فصل مشترک با محور x $\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\z=۰\end{cases}\Rightarrow xx_۰^{-\frac{۱}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow x=x_۰^{\frac{۱}{۳}}a^{\frac{۲}{۳}}$

فصل مشترک با محور y $\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\z=۰\end{cases}\Rightarrow yy_۰^{-\frac{۱}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow y=y_۰^{\frac{۱}{۳}}a^{\frac{۲}{۳}}$

فصل مشترک با محور z $\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\y=۰\end{cases}\Rightarrow zz_۰^{-\frac{۱}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow z=z_۰^{\frac{۱}{۳}}a^{\frac{۲}{۳}}$

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{\frac{۴}{۳}}(x_{\circ}^{\frac{۲}{۳}}+y_{\circ}^{\frac{۲}{۳}}+z_{\circ}^{\frac{۲}{۳}})=a^{\frac{۴}{۳}}\cdot a^{\frac{۲}{۳}}=a^{۲}$$

5-7-7: منحنی C فصل مشترک دو رویه با معادلات

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱۱ \text{ و } x^{۳}+۳x^{۲}y^{۲}+y^{۳}+۴xy-z^{۲}=\circ$$

است. اولاً معادلهٔ صفحهٔ قائم و خط مماس بر C را در $P(۱,۱,۳)$ بنویسید. ثانیاً مشتق تابع : $f(x,y,z)=xyz$ را در P و در سوی بردار یکانی مماس بر C حساب کنید.

$$\vec{N}_{۱}=۲x\vec{i}+۲y\vec{j}+۲z\vec{k}\Rightarrow\vec{N}_{۱}=۲\vec{i}+۲\vec{j}+۶\vec{k}$$

$$\vec{N}_{۲}=(۳x^{۲}+۶xy^{۲}+۴y)\vec{i}+(۶x^{۲}y+۳y^{۲}+۴x)\vec{j}-۲z\vec{k}\Rightarrow\vec{N}_{۲}=۱۳\vec{i}+۱۳\vec{j}-۶\vec{k}$$

$$\vec{N}_{۱}\times\vec{N}_{۲}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۲ & ۶ \\ ۱۳ & ۱۳ & -۶ \end{vmatrix}=-۹\circ\vec{i}+۹\circ\vec{j}$$

معادلهٔ خط مماس : $\dfrac{x-۱}{۱}=\dfrac{y-۱}{۱}\,,z=۳$

معادلهٔ صفحهٔ قائم : $-۱(x-۱)+۱(y-۱)=\circ\Rightarrow x-y=\circ$

$$\vec{u}=\frac{\vec{N}_{۱}\times\vec{N}_{۲}}{|\vec{N}_{۱}\times\vec{N}_{۲}|}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(-\vec{i}+\vec{j})\quad,\nabla f(P)=۳\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k}$$

$$D_{\vec{u}}f(P)=\nabla\vec{f}(P)\cdot\vec{u}=(۳\vec{i}+۳\vec{j}+\vec{k})\cdot(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\vec{i}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\vec{j})=-\frac{۳}{\sqrt{۲}}+\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\circ$$

5-7-8: ثابت کنید هر صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=xe^{\frac{x}{y}}$ ار مبداء مختصات می گذرد.

$$f(x,y,z)=xe^{\frac{x}{y}}-z$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس در $(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$:

$$(e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}+\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}})(x-x_{\circ})-\frac{x_{\circ}^{۲}}{y_{\circ}^{۲}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}(y-y_{\circ})-(z-z_{\circ})=\circ$$

$$xe^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}-x_{\circ}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}+x\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}-\frac{x_{\circ}^{۲}}{y_{\circ}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}-y\frac{x_{\circ}^{۲}}{y_{\circ}^{۲}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}+\frac{x_{\circ}^{۲}}{y_{\circ}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}-z+z_{\circ}=\circ$$

$$xe^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}+x\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}-y\frac{x_{\circ}^{۲}}{y_{\circ}^{۲}}e^{\frac{x_{\circ}}{y_{\circ}}}-z=\circ$$

نقطهٔ $(\circ,\circ,\circ)$ در معادلهٔ فوق صدق می کند لذا هر صفحهٔ مماس بر رویه از مبداء می گذرد.

5-7-9: نشان دهید منحنی $\vec{r}=(\ln t)\vec{i}+(t\ln t)\vec{j}+t\vec{k}$ در نقطهٔ $(\circ,\circ,۱)$ بر رویهٔ $xz^۲-yz+\cos xy=۱$ مماس است.

$$f(x,y,z)=xz^۲-yz+\cos xy-۱$$
$$\vec{\nabla}f=(z^۲-y\sin xy)\vec{i}-(z+x\sin xy)\vec{j}+(۲xz-y)\vec{k}$$
$$\vec{\nabla}f(\circ,\circ,۱)=\vec{i}-\vec{j}$$
$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{۱}{t}\vec{i}+(\ln t+۱)\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow \vec{V}(t=۱)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$
$$\vec{\nabla}f(\circ,\circ,۱)\cdot\vec{V}(t=۱)=۱-۱+\circ=\circ\Rightarrow \quad \text{منحنی بر رویه عمود است}$$

5-7-10: ثابت a را چنان تعیین کنید که در هر نقطه از مقطع دو کرهٔ زیر صفحه های مماس بر آنها بر همدیگر عمود باشند.

$$\begin{cases}(x-a)^۲+y^۲+z^۲=۳\\ x^۲+(y-۱)^۲+z^۲=۱\end{cases}$$
$$f=(x-a)^۲+y^۲+z^۲-۳\quad ,g=x^۲+(y-۱)^۲+z^۲-۱$$
$$\vec{N}_۱=\vec{\nabla}f=۲(x-a)\vec{i}+۲y\vec{j}+۲z\vec{k}\qquad \vec{N}_۲=\vec{\nabla}g=۲x\vec{i}+۲(y-۱)\vec{j}+۲z\vec{k}$$
$$\vec{N}_۱\cdot\vec{N}_۲=\circ\Rightarrow ۴(x^۲-ax)+۴(y^۲-y)+۴z^۲$$
$$=۲[x^۲-۲ax+a^۲-a^۲+x^۲+y^۲-۲y+۱-۱+y^۲+۲z^۲]$$
$$=۲[[(x-a)^۲+y^۲+z^۲]+[x^۲+(y-۱)^۲+z^۲]+(-a^۲-۱)]=\circ$$
$$=۲[۳+۱+(-a^۲-۱)]=\circ\Rightarrow a^۲=۳\Rightarrow a=\pm\sqrt{۳}$$

5-7-11: معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ S با معادلات پارامتری زیر را در نقطهٔ نظیر $u=\circ$ و $v=\frac{۱}{۲}$ بدست آورید.

$$s:\begin{cases}x=u^۲-v^۲\\ y=u+v\\ z=u^۲+۴v\end{cases}\quad \begin{matrix}u_\circ=\circ\\ v_\circ=\frac{۱}{۲}\end{matrix}\Rightarrow (x_\circ,y_\circ,z_\circ)=(-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۲)$$

$$s_u(u,v)=(۲u)\vec{i}+\vec{j}+(۲u)\vec{k}\Rightarrow s_u(u_\circ,v_\circ)=\vec{j}$$

$$s_v(u,v)=(-۲v)\vec{i}+\vec{j}+۴\vec{k}\Rightarrow s_v(u_\circ,v_\circ)=-\vec{i}+\vec{j}+۴\vec{k}$$

$$s_u\times s_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \circ & ۱ & \circ \\ -۱ & ۱ & ۴ \end{vmatrix}=۴\vec{i}+\vec{k}$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس : $۴(x+\frac{۱}{۴})+\circ(y-\frac{۱}{۲})+۱(z-۲)=\circ\Rightarrow ۲x+z=۱$

5-7-12: مقدار تقریبی عبارت $\sqrt{(\circ.۹۸)^۲+(۲.\circ۱)^۲+(۱.۹۴)^۲}$ را بدست آورید.

فرض کنیم $f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ و $P(x,y,z)=(۱,۲,۳)$ داریم

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)=f(x,y,z)+f_x\Delta x+f_y\Delta y+f_z\Delta z$$

$$x+\Delta x=\circ.۹۸\xrightarrow{x=۱}\Delta x=-\circ.\circ۲\quad,f_x=\frac{x}{f}\Rightarrow f_x(P)=\frac{۱}{۲}$$

$$y+\Delta y=۲.\circ۱\xrightarrow{y=۲}\Delta y=\circ.\circ۱\quad,f_y=\frac{y}{f}\Rightarrow f_y(P)=\frac{۲}{۳}$$

$$z+\Delta z=۱.۹۴\xrightarrow{z=۲}\Delta z=-\circ.\circ۶\quad,f_z=\frac{z}{f}\Rightarrow f_z(P)=\frac{۲}{۳}$$

$$\Delta f=f_x\Delta x+f_y\Delta y+f_z\Delta z=\frac{۱}{۳}(-\circ.\circ۲)+\frac{۲}{۳}(\circ.\circ۱)+\frac{۲}{۳}(-\circ.\circ۶)=-\circ.\circ۴$$

$$\sqrt{(\circ.۹۸)^۲+(۲.\circ۱)^۲+(۱.۹۴)^۲}=۳-\circ.\circ۴=۲.۹۶$$

5-7-13: تابعی مانند f بیابید که دیفرانسیل آن عبارت زیر باشد.

$$df=\frac{y}{x}dx+(\ln x+z\cos yz)dy+y\cos yz\,dz$$

$$M=\frac{y}{x}\quad,N=\ln x+z\quad,P=y\cos yz$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{۱}{x}\quad,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{۱}{x}\Rightarrow M_y=N_x \tag{1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z}=\circ\quad,\frac{\partial P}{\partial x}=\circ\Rightarrow M_z=P_x \tag{2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z}=\cos yz-yz\sin yz\quad,\frac{\partial P}{\partial y}=\cos yz-yz\sin yz\Rightarrow N_z=P_y \tag{3}$$

(1) و (2) و (3) $\Rightarrow$ f دیفرانسیل کامل است

$$f(x,y,z)=\int_{x_\circ}^{x}\frac{y}{x}dx+\int_{y_\circ}^{y}(\ln x_\circ+z\cos yz)dy+\int_{z_\circ}^{z}y_\circ\cos y_\circ z\,dz$$

با انتخاب $x_\circ = ۱$ و $y_\circ = \circ$ و $z_\circ = \circ$ داریم:

$$f(x,y,z) = [y\ln x]_۱^x + [\sin yz]_\circ^y + \circ$$

بنابراین تابع f برابر است با $f(x,y,z) = y\ln x + \sin xy + C$

5-7-14: بسط تیلور تابع $f(x,y) = \cos x \cos y$ را در نقطهٔ $(\circ,\circ)$ تا درجهٔ دوم بنویسید.

$$f(x,y) = f(\circ,\circ) + xf_x + yf_y + \frac{۱}{۲!}(x^۲ f_{xx} + ۲xyf_{xy} + y^۲ f_{yy})$$

$$+\cdots + \frac{۱}{n!} + (x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^n f + \cdots$$

$$f(\circ,\circ) = \cos x \cos y\big|_{(\circ,\circ)} = ۱ \qquad f_{xx}(\circ,\circ) = -\cos x cosy\big|_{(\circ,\circ)} = -۱$$

$$f_x(\circ,\circ) = -\sin x \cos y\big|_{(\circ,\circ)} = \circ \qquad f_{yy}(\circ,\circ) = -\cos x cosy\big|_{(\circ,\circ)} = -۱$$

$$f_y(\circ,\circ) = -\cos x \sin y\big|_{(\circ,\circ)} = \circ \qquad f_{xy}(\circ,\circ) = \sin x \sin y\big|_{(\circ,\circ)} = \circ$$

$$f(x,y) \simeq ۱ + \circ + \circ + \frac{۱}{۲!}(-x^۲ + ۲xy(\circ) - y^۲) = ۱ - \frac{۱}{۲}(x^۲ + y^۲)$$

5-7-15: تابع $u(x,y) = xyf(\frac{x+y}{xy})$ مفروض است $g(x,y)$ را چنان بیابید که:

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x} - y^۲\frac{\partial u}{\partial y} = u(x,y)g(x,y)$$

فرض کنیم $\frac{x+y}{xy} = t$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf(t) + xy\frac{\partial f(t)}{\partial x} = yf(t) + xy\frac{\partial f(t)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = y\, f(t) + xy\, f_t(-\frac{۱}{x^۲})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\, f(t) + xy\frac{\partial f(t)}{\partial y} = x\, f(t) + xy\, f_t(-\frac{۱}{y^۲})$$

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x} - y^۲\frac{\partial u}{\partial y} = x^۲ y\, f(t) - xy\, f_t - y^۲ x\, f(t) + xyf_t = xyf(t)(x-y)$$

$$= u(x,y)g(x,y) \Rightarrow g(x,y) = x - y$$

5-7-16: تابع دو متغیرهٔ $F(u,v) = \circ$ با تغییر متغیرهای $u = xy$ و $v = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ به $F(x,y,z) = \circ$ تبدیل می شود با فرض اینکه $F_۱(۱,۲) = ۱$ و $F_۲(۱,۲) = ۲$ مقدار $\vec{\nabla} f$ را در نقطهٔ $A(۱,۱,\sqrt{۳})$ بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}y + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_A = ۱\times ۱ + ۲\times\frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۱ + \sqrt{۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}x+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A=۱\times۱+۲\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۱+\sqrt{۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=\circ$$

$$\vec{\nabla}f(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(A)}\vec{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(A)}\vec{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(A)}\vec{k}=(۱+\sqrt{۲})(\vec{i}+\vec{j})$$

5-7-17: تابع $f(x,y)$ با تغییر متغیرهای $x=u+v$ و $y=uv^{۲}$ به تابع $g(u,v)$ تبدیل می شود مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^{۲}g}{\partial u\partial v}$ برحسب u و v و مشتقات نسبی f.

$$\frac{\partial f}{\partial u}=f_{۱}\cdot۱+f_{۲}\cdot v^{۲}=f_{۱}+v^{۲}f_{۲}$$

$$\frac{\partial^{۲}f}{\partial u\partial v}=(f_{۱۱}+f_{۱۲}۲uv)+(f_{۲۱}v^{۲}+f_{۲۲}\cdot۲uv^{۳}+۲vf_{۲})$$

$$=f_{۱۱}+(۲uv+v^{۲})f_{۲۱}+۲uv^{۳}f_{۲۲}+۲vf_{۲}$$

5-7-18: اگر $w=f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره باشد اگر مختصات استوانه ای را در این تابع قرار دهیم بصورت $w=F(r,\theta,z)$ در می آید. با توجه به بردارهای یکانی $\vec{u}_r$ و $\vec{u}_\theta$ ثابت کنید که بردار گرادیان در مختصات استوانه ای بصورت زیر حاصل می شود.

$$\vec{\nabla}w=\frac{\partial w}{\partial x}\vec{i}+\frac{۱}{r}\frac{\partial w}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k} \qquad \vec{\nabla}w=\frac{\partial w}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{۱}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\quad ,\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\quad ,\theta=\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=\cos\theta\quad ,\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=\sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{-y}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=-\frac{\sin\theta}{r}\quad ,\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}=\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\vec{u}_r=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\quad ,\vec{u}_\theta=-\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{\nabla} w=[\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}]\vec{i}+[\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}]\vec{j}+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\partial w}{\partial r}(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j})+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\partial w}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

5-7-20: فرض کنید $f(x,y,z)=0$ بقسمیکه $z=x+y$ دراینصورت $\frac{dz}{dy}$ را حساب و مشتقات نسبی f را بدست آورید.

$$dz=dx+dy\Rightarrow\frac{dz}{dy}=\frac{dx}{dy}+1$$

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz=0\Rightarrow f_x\frac{dx}{dy}+f_y+f_z\frac{dz}{dy}=0$$

$$f_x(\frac{dz}{dy}-1)+f_y+f_z\frac{dz}{dy}=0\Rightarrow\frac{dz}{dy}=\frac{f_x-f_y}{f_x+f_y}$$

5-7-21: مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ اگر تابع f بصورت زیر تعریف شده باشد.

$$f(x,y)=\int_0^1\cos(x+2y+t)\,dt$$

$$x+2y+t=u\Rightarrow dt=du\quad,\begin{cases}t=1\Rightarrow u=x+2y+1\\ t=0\Rightarrow u=x+2y\end{cases}$$

$$f(x,y)=\int_{x+2y}^{x+2y+1}\cos u\,du\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+2y+1)-\cos(x+2y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2\cos(x+2y+1)-2\cos(x+2y)\end{cases}$$

5-7-22: اگر $z^2=x^2+y^2$ حاصل عبارت $\frac{\partial\ln z}{\partial\ln x}+\frac{\partial\ln z}{\partial\ln y}$ را بدست آورید.

$$\ln x=u\Rightarrow x=e^u\quad,\ln y=v\Rightarrow y=e^v$$

$$z^2=x^2+y^2\Rightarrow\ln z=\frac{1}{2}\ln(e^{2u}+e^{2v})$$

$$\frac{\partial\ln z}{\partial\ln x}+\frac{\partial\ln z}{\partial\ln y}=\frac{e^{2u}}{e^{2u}+e^{2v}}+\frac{e^{2v}}{e^{2u}+e^{2v}}=1$$

5-7-23: اگر $u(x,y)=xg(\frac{y}{x})+yf(\frac{y}{x})$ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$P = x^{۲}u_{xx} + ۲xyu_{xy} + y^{۲}u_{yy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}g'(\frac{y}{x}) - \frac{y^{۲}}{x^{۲}}f'(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} = -\frac{y}{x^{۲}}g'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^{۲}}g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۲}}{x^{۳}}g''(\frac{y}{x}) + ۲\frac{y^{۲}}{x^{۳}}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۳}}{x^{۴}}f''(\frac{y}{x})$$

$$= \frac{y^{۲}}{x^{۳}}g''(\frac{y}{x}) + ۲\frac{y^{۲}}{x^{۳}}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۳}}{x^{۴}}f''(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g'(\frac{y}{x}) + f(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}) \qquad \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = \frac{۱}{x}g''(\frac{y}{x}) + \frac{۲}{x}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^{۲}}f''(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^{۲}}g''(\frac{y}{x}) - \frac{۲y}{x^{۲}}f'(\frac{y}{x}) - \frac{y^{۲}}{x^{۳}}f''(\frac{y}{x})$$

$$x^{۲}u_{xx} + ۲xyu_{xy} + y^{۲}u_{yy} = ۲\frac{y^{۲}}{x}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۳}}{x^{۲}}f''(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۲}}{x}g''(\frac{y}{x})$$

$$-۴\frac{y^{۲}}{x}f'(\frac{y}{x}) - ۲\frac{y^{۳}}{x^{۲}}f''(\frac{y}{x}) - ۲\frac{y^{۲}}{x}g''(\frac{y}{x}) + ۲\frac{y^{۲}}{x}f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۳}}{x^{۲}}f''(\frac{y}{x}) + \frac{y^{۲}}{x}g''(\frac{y}{x}) = ۰$$

$$\Rightarrow P = ۰$$

5-7-24: اگر $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = ۰$ و $z = g(x, y)$ نشان دهید که تحت شرایط مناسب:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$$

فرض کنیم $\frac{y}{x} = u$ و $\frac{z}{x} = v$ طبق فرمول $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ و $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f_u(-\frac{y}{x^{۲}}) + f_v(-\frac{z}{x^{۲}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = f_u(\frac{۱}{x}) + f_v(۰) = \frac{۱}{x}f_u$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = f_u(۰) + f_v(\frac{۱}{x}) = \frac{۱}{x}f_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^{2}}f_u-\frac{z}{x^{2}}f_v}{\frac{1}{x}f_v}=\frac{yf_u+zf_v}{xf_v}\qquad ,\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}f_v}{\frac{1}{x}f_v}=-\frac{f_u}{f_v}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yf_u+zf_v}{f_v}-y\frac{f_u}{f_v}=z=g(x,y)$$

5-7-25: فرض کنید z تابعی از دو متغیر مستقل x و y و $z^{2}=f(x^{2}+z^{2},y^{2}+z^{2})$ باشد با فرض اینکه f تابعی مشتق پذیر از دو متغیر $u=x^{2}+z^{2}$ و $v=y^{2}+z^{2}$ باشد ثابت کنید:

$$y\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^{2})=\frac{\partial}{\partial x}f(x^{2}+z^{2},y^{2}+z^{2})\Rightarrow$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial f}{\partial v}(2z\frac{\partial z}{\partial x})\Rightarrow$$

$$z\frac{\partial z}{\partial x}(1-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})=x\frac{\partial f}{\partial u}\Rightarrow z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}(1-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})=x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}\qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^{2})=\frac{\partial}{\partial y}f(x^{2}+z^{2},y^{2}+z^{2})\Rightarrow$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}(2z\frac{\partial z}{\partial y})+\frac{\partial f}{\partial v}(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y})$$

$$z\frac{\partial z}{\partial y}(1-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})=y\frac{\partial f}{\partial v}\Rightarrow z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}(1-\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})=y\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}\qquad (2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow y\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}=0$

5-7-26: اکسترممها و نقاط زینی توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x,y)=\frac{x^{4}}{4}-xy+\frac{y^{2}}{2}$ ب) $f(x,y)=x^{3}+y^{3}-9xy+27$

حل: الف) $\frac{\partial f}{\partial x}=x^{3}-y=0\Rightarrow x^{3}-x=0\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=0\,,x=-1\,,x=+1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x+y=0\Rightarrow y=x\qquad \frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}=3x^{2}\quad ,\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}=1\quad ,\frac{\partial^{2} f}{\partial y\partial x}=-1\Rightarrow \Delta=3x^{2}-1$$

$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow \Delta=-1<0\Rightarrow$ $(0,0)$ نقطهٔ زینی است

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 2 > 0 \quad , f_{xx} = 3 > 0 \Rightarrow$ نقطهٔ $(1,1)$ min است

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 2 > 0 \quad , f_{xx} = 3 > 0 \Rightarrow$ نقطهٔ $(-1,-1)$ min است

ب) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y = 0 \Rightarrow x^2 = 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x = 0 \Rightarrow y^2 = 3x$$

اکسترمم ها نقاط $(0,0)$ و $(3,3)$ می باشند.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad , \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \quad , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9$$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36xy - 81$$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = -81 < 0 \Rightarrow$ نقطهٔ $(0,0)$ نقطهٔ زینی است

$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \Delta > 0 \quad , f_{xx} > 0 \Rightarrow$ نقطهٔ $(3,3)$ min است

5-7-27: a و b را طوری بدست آورید که مقدار انتگرال زیر min باشد.

$$I = \int_0^1 (ax + b - \frac{1}{x^2+1})^2 dx$$

فرض کنیم $f(a,b) = \int_0^1 (ax + b - \frac{1}{x^2+1})^2 dx$

$$F_a = \int_0^1 2x(ax + b - \frac{1}{x^2+1})\, dx = \frac{2}{3} a x^3 + bx^2 - \ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{2}{3} a + b - \ln 2$$

$$F_b = \int_0^1 2(ax + b - \frac{1}{x^2+1})\, dx = a x^2 + 2bx - 2 Arc\tan x]_0^1 = a + 2b - \frac{\pi}{2}$$

$$F_{aa} = \frac{2}{3}, F_{bb} = 2, F_{ab} = 1, \Delta = \frac{2}{3} \times 2 - 1 = \frac{1}{3} > 0$$

از $\Delta > 0$ و $F_{aa} > 0$ نتیجه می گیریم (a,b) نقطهٔ min است که از حل دستگاه زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} a + b - \ln 2 = 0 \\ a + 2b - \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 6\ln 2 - \frac{3\pi}{2} \quad , b = \pi - 3\ln 2$$

5-7-28: با شروع از نقطهٔ $P(2,-1,2)$ در چه سویی باید حرکت کرد تا بیشترین سرعت افزایش برای تابع

$f=(x+y)^{۲}+(y+z)^{۲}+(z+x)^{۲}$ بدست آید این سرعت افزایش را بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=۲(x+y)+۲(z+x)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(P)=۱۰\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=۲(x+y)+۲(z+y)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(P)=۴$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=۲(z+y)+۲(z+x)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(P)=۱۰$$

بایستی در جهت $v=۱۰\vec{i}+۴\vec{j}+۱۰\vec{k}$ حرکت کنیم بیشترین سرعت افزایش عبارتست از ماکزیمم مشتق سویی f در این جهت است.

$$D_{\vec{u}}f(P)=\vec{\nabla}f(P)\cdot\vec{u}\qquad \vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\qquad \max|D_{\vec{u}}f(P)|=|\vec{\nabla}f(P)|=|\vec{v}|=\sqrt{۲۱۶}$$

5-7-29: تابع مفروض است ثابتهای a و b را چنان تعیین کنید که بازاء تمام مقادیر x و y:

$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=۰$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+aue^{ax+by}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+bu\,e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial y}e^{ax+by}+b\frac{\partial u}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial u}{\partial y}e^{ax+by}+abue^{ax+by}$$

$$[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu-\frac{\partial u}{\partial x}-au-\frac{\partial u}{\partial y}-bu+u]e^{ax+by}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-۱=۰\\ a-۱=۰\\ ab-a-b+۱=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۱\end{cases}$$

5-7-30: فرض کنید $f(x,t)=\int_{۰}^{x/۲\sqrt{kt}}e^{-u^{۲}}du$ عبارت زیر را حساب کنید.

$$P=k\,f_{xx}-f_t$$

$$f_x=\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{۲\sqrt{k}}e^{-\frac{x^{۲}t^{-۱}}{۴k}}\qquad f_{xx}=-\frac{۱}{۲k}xt^{-۱}e^{-\frac{x^{۲}t^{-۱}}{۴k}}\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{۲\sqrt{k}}=\frac{-xt^{-\frac{۳}{۲}}}{۴k\sqrt{k}}e^{-\frac{x^{۲}t^{-۱}}{۴k}}$$

$$f_t=e^{-\frac{x^{۲}t^{-۱}}{۴k}}\times-\frac{۱}{۴\sqrt{k}}xt^{-\frac{۳}{۲}}\Rightarrow k\,f_{xx}-f_t=-\frac{xt^{-\frac{۳}{۲}}}{۴\sqrt{k}}e^{-\frac{x^{۲}t^{-۱}}{۴k}}+\frac{xt^{-\frac{۳}{۲}}}{۴\sqrt{k}}e^{-\frac{x^{۲}t^{-۱}}{۴k}}=۰$$

5-7-31: نقاطی از منحنی $C:\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۱ \\ ۲x-y+z=۲ \end{cases}$ را بدست آورید که بیشترین و کمترین فصله را تا صفحهٔ xy داشته باشند.

$$H(x,y,z,\lambda_۱,\lambda_۲)=z-\lambda_۱(x^{۲}+y^{۲}-۱)-\lambda_۲(۲x-y+z-۲)$$

$$H_x=-۲\lambda_۱x-۲\lambda_۲=\circ\Rightarrow x=-\frac{۱}{\lambda_۱} \qquad H_y=-۲\lambda_۱y+\lambda_۲=\circ\Rightarrow y=\frac{۱}{۲\lambda_۱}$$

$$H_z=۱-\lambda_۲=\circ\Rightarrow \lambda_۲=۱$$

$$H_{\lambda_۱}=x^{۲}+y^{۲}-۱=\circ\Rightarrow \frac{۱}{\lambda_۱^{۲}}+\frac{۱}{۴\lambda_۱^{۲}}=۱\Rightarrow \frac{۵}{۴\lambda_۱^{۲}}=۱\Rightarrow \lambda_۱=\mp\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$H_{\lambda_۲}=۲x-y+z-۲=\circ$$

$$\lambda_۱=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲}{\sqrt{۵}},y=-\frac{۱}{\sqrt{۵}} \qquad ,\lambda_۱=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۲}{\sqrt{۵}},y=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$z=y-۲x+۲\Rightarrow z_{\min}=-\frac{۱}{\sqrt{۵}}-\frac{۴}{\sqrt{۵}}+۲=\frac{۲\sqrt{۵}+۵}{\sqrt{۵}},z_{\max}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\frac{۴}{\sqrt{۵}}+۲=\frac{۲\sqrt{۵}+۵}{\sqrt{۵}}$$

5-7-32: می نیمم حجم محدود به صفحهٔ مماس بر رویهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ و صفحات مختصات را بیابید.

معادلهٔ صفحهٔ مماس در $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$: $\quad \frac{۲x_\circ}{a^{۲}}(x-x_\circ)+\frac{۲y_\circ}{b^{۲}}(y-y_\circ)+۲\frac{z_\circ}{c^{۲}}=\circ$

$$\Rightarrow \frac{xx_\circ}{a^{۲}}+\frac{yy_\circ}{b^{۲}}+\frac{zz_\circ}{c^{۲}}=\frac{x_\circ^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y_\circ^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z_\circ^{۲}}{c^{۲}}\Rightarrow P:\frac{xx_\circ}{a^{۲}}+\frac{yy_\circ}{b^{۲}}+\frac{zz_\circ}{c^{۲}}=۱$$

محل تقاطع صفحهٔ P و محورهای مختصات را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} x=\circ \\ y=\circ \end{cases}\Rightarrow z=\frac{c^{۲}}{x_\circ} \quad ,\begin{cases} y=\circ \\ z=\circ \end{cases}\Rightarrow x=\frac{a^{۲}}{x_\circ} \quad ,\begin{cases} x=\circ \\ z=\circ \end{cases}\Rightarrow y=\frac{b^{۲}}{y_\circ}$$

حجم هرم تشکیل شده در ناحیهٔ اول $\quad V=\frac{۱}{۶}xyz=\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{x_\circ y_\circ z_\circ}$

$$H(x,y,z,\lambda)=\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xyz}-\lambda\,(\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}-۱)$$

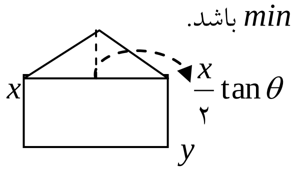
$$\left.\begin{array}{l} H_x=-\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{x^{۲}yz}-\frac{۲\lambda x}{a^{۲}}=۰\Rightarrow\frac{-۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xyz}=\frac{۲x^{۲}}{a^{۲}}\lambda \\ H_y=-\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xy^{۲}z}-\frac{۲\lambda y}{b^{۲}}=۰\Rightarrow\frac{-۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xyz}=\frac{۲y^{۲}}{b^{۲}}\lambda \\ H_x=-\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xyz^{۲}}-\frac{۲\lambda z}{c^{۲}}=۰\Rightarrow\frac{-۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xyz}=\frac{۲z^{۲}}{c^{۲}}\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x^{۲}}{a^{۲}}=\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=\frac{z^{۲}}{c^{۲}}$$

$$H_\lambda=۰\Rightarrow\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}-۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳\frac{x^{۲}}{a^{۲}}=۱\Rightarrow x=\pm\frac{a}{\sqrt{۳}}\quad ,۳\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱\Rightarrow y=\pm\frac{b}{\sqrt{۳}}\quad ,۳\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱\Rightarrow z=\pm\frac{c}{\sqrt{۳}}$$

$$V_{\min}=\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{xyz}=\frac{۱}{۶}\frac{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}{\frac{abc}{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۶}abc=\frac{\sqrt{۳}}{۲}abc$$

5-7-33: روی مستطیلی یک مثلث متساوی الساقین قرار می دهیم تا یک 5 ضلعی بدست آید اگر مساحت شکل عدد ثابت $k^{۲}$ باشد ابعاد پنج ضلعی را طوری بدست آورید که محیط آن min باشد.



$$s=xy+\frac{۱}{۲}[x\cdot\frac{x}{۲}\tan\theta]=k^{۲}$$

$$P=x+۲y+\frac{x}{\cos\theta}$$

تابع $f(x,y,z)=x+۲y+\frac{x}{\cos\theta}$ را با شرط $xy+\frac{x^{۲}}{۴}\tan\theta-k^{۲}=۰$ ، min می کنیم.

$$H(x,y,\theta,\lambda)=x+2y+\frac{x}{\cos\theta}-\lambda\,(xy+\frac{x^2}{4}\tan\theta-k^2)$$

$$H_x=1+\frac{1}{\cos\theta}-\lambda y+\lambda\frac{x^2}{2}\tan\theta=0 \qquad H_y=2-\lambda x=0\Rightarrow\lambda=\frac{2}{x}$$

$$H_\theta=\frac{x\sin\theta}{\cos^2\theta}-\lambda\frac{x^2}{4}\sec^2\theta=0\Rightarrow\frac{x\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{x}\frac{x^2}{4}\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$H_x=0\Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{3}}-\lambda y+\frac{\sqrt{3}}{3}=0\Rightarrow y=\frac{1+\sqrt{3}}{\lambda}$$

$$H_y=0\Rightarrow\frac{2(1+\sqrt{3})}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\sqrt{3}}{3}=k^2\Rightarrow\frac{6+7\sqrt{3}}{3}=\lambda^2k^2$$

$$\Rightarrow\lambda k=\sqrt{\frac{6+7\sqrt{3}}{3}}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{6+7\sqrt{3}}{3}}$$

$$x=\frac{2}{\lambda}=2k\sqrt{\frac{6+7\sqrt{3}}{3}}\quad ,y=(1+\sqrt{3})k\sqrt{\frac{6+7\sqrt{3}}{3}}\quad ,\theta=\frac{\pi}{6}$$

5-7-4: فرض کنید x و y و z زوایای مثلثی باشند، ماکزیمم $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$ را بدست آورید.

$$f(x,y,z,\lambda)=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}-\lambda(x+y+z-\pi)$$

$$f_x=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}-\lambda=0$$

$$f_y=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2}-\lambda=0\Rightarrow\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}\Rightarrow\tan\frac{x}{2}=\tan\frac{y}{2}\Rightarrow x=y$$

$$f_z=\frac{1}{2}\cos\frac{z}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}-\lambda=0\Rightarrow\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}=\cos\frac{z}{2}\sin\frac{y}{2}\Rightarrow\tan\frac{y}{2}=\tan\frac{z}{2}\Rightarrow z=y$$

$$\Rightarrow x=y=z$$

$$f_\lambda=0\Rightarrow x+y+z=\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\quad ,y=\frac{\pi}{3}\quad ,z=\frac{\pi}{3}$$

$$\max\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

5-7-35: ثابت کنید می توان فاصلهٔ max و min مبداء از فصل مشترک $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $Ax+By+Cz=0$ را از حل معادلهٔ زیر نسبت به d بدست آورد.

$$\frac{A^2a^2}{a^2-d^2}+\frac{B^2b^2}{b^2-d^2}+\frac{C^2c^2}{c^2-d^2}=0$$

فرض کنیم (x,y,z) روی فصل مشترک دو رویهٔ مزبور باشد لذا

$$d^2=x^2+y^2+z^2 \text{ و } d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$H(x,y,z,,)=x^2+y^2+z^2-\lambda_1(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)-\lambda_2(Ax+By+Cz)$$

$$H_x=2x-2\lambda_1\frac{x}{a^2}-A\lambda_2=0\Rightarrow 2x^2=2\lambda_1\frac{x^2}{a^2}+\lambda_2 Ax \qquad (1)$$

$$H_y=2y-2\lambda_1\frac{y}{b^2}-B\lambda_2=0\Rightarrow 2y^2=2\lambda_1\frac{y^2}{b^2}+\lambda_2 By \qquad (2)$$

$$H_z=2z-2\lambda_1\frac{z}{c^2}-C\lambda_2=0\Rightarrow 2z^2=2\lambda_1\frac{z^2}{c^2}+\lambda_2 Cz \qquad (3)$$

$$H_{\lambda_2}=Ax+By+Cz=0$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3)\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)=2\lambda_1(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})+\lambda_2(Ax+By+Cz)$$

$$H_x=0\Rightarrow 2x-2\frac{d^2x}{a^2}-A\lambda_2=0\Rightarrow x=\frac{Aa^2\lambda_2}{2(a^2-d^2)}$$

$$H_y=0\Rightarrow 2y-2\frac{d^2y}{b^2}-B\lambda_2=0\Rightarrow y=\frac{Bb^2\lambda_2}{2(b^2-d^2)}$$

$$H_z=0\Rightarrow 2z-2\frac{d^2z}{c^2}-C\lambda_2=0\Rightarrow z=\frac{Cc^2\lambda_2}{2(c^2-d^2)}$$

$$H_{\lambda_2}=0\Rightarrow \frac{Aa^2\lambda_2}{2(a^2-d^2)}+\frac{Bb^2\lambda_2}{2(b^2-d^2)}+\frac{Cc^2\lambda_2}{2(c^2-d^2)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{Aa^2\lambda_2}{a^2-d^2}+\frac{Bb^2\lambda_2}{b^2-d^2}+\frac{Cc^2\lambda_2}{c^2-d^2}=0$$

5-8 مسائل

5-8-1: دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

ز) $f(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{x+y+z-1}{x^2+y^2+z^2-1}}$

ب) $f(x,y)=\cos^{-1}(\frac{2x-y}{x+y})$

ج) $f(x,y)=\sqrt[4]{y-2x}$

د) $f(x,y)=xy\sqrt{x^{2}+y}$

ه) $f(x,y)=\ln x+\sin y$

و) $f(x,y)=\sqrt{y-x\ln(x+y)}$

ح) $f(x,y,z)=\ln(z-y)+xy\sin z$

ط) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^{2}-y^{2}-z^{2}}$

ی) $f(x,y,z)=x\sin(y+z)$

ک) $f(x,y,z)=x^{2}\ln(x-y+z)$

ل) $f(x,y,z)=\frac{xyz}{(x+y)^{3}-(x+z)^{3}}$

5-8-2: با تعریف حد ثابت کنید:

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 3x-2y=1$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} xy-3x+4=0$

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)}{x+y}=0$

د) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \frac{x+y-z}{x-y+z}=-1$

ه) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^{5}+y^{5}+z^{5}}{x^{6}+y^{6}+z^{6}}=0$

و) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^{3}+yz^{2}}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$

5-8-3: در پیوستگی توابع زیر در نقاط داده شده بحث کنید.

الف) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ب) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^{2}(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ج) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{2}y^{2}}{x^{3}+y^{3}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

د) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{2}y^{2}}{x^{4}+y^{4}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ه) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^{2}+y^{2})}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

و) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{y} & y\neq 0\\ x & y=0\end{cases}$

ز) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{2}y}{1+x} & 1+x\neq 0\\ y & x=0\end{cases}$

ح) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{2}y^{100}}{x^{4}+y^{200}} & (x,y)\neq(0,0)\\ \frac{1}{2} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

ط) $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xz^2+y^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0)\end{cases}$

ی) $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y,z)=(0,0)\end{cases}$

5-8-4: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ آیا f در مبداء پیوسته است؟ آیا f در مبداء دیفرانسیل پذیر است؟

5-8-4: فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ثابت کنید f در مبداء پیوسته است. بعلاوه $D_{21}f(0,0)=-1\,,D_{12}f(0,0)=1$

5-8-6: در پیوستگی و دیفرانسیل پذیری توابع زیر در مبداء بحث کنید.

الف) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ب) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

5-8-7: نشان دهید که هر صفحهٔ مماس بر رویهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ محورهای مختصات را چنان قطع می کند که مجموع طولهای قطع شده توسط صفحهٔ مماس روی محورهای مختصا مقداری است ثابت.

5-8-8: در چه نقاطی از بیضیگون $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ خطوط قائم با محورهای مختصات زوایای مساوی می سازند؟

5-8-9: نقاطی از رویهٔ $x^2-2y^2+2z=4$ را پیدا کنید که صفحهٔ مماس در این نقاط افقی باشد.

5-8-10: ثابت کنید هر صفحهٔ مماس بر رویهٔ $z=xf(\dfrac{y}{x})$ از مبداء مختصات می گذرد.

5-8-11: نقاطی روی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ پیدا کنید که صفحهٔ مماس در آنها موازی صفحهٔ $2x+t-3z=2$ باشد.

5-8-12: نشان دهید بیضی گون $3x^2+2y^2+z^2=9$ و کرهٔ

$x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24=0$ در نقطهٔ $(1,1,2)$ بر یکدیگر مماس هستند.

5-8-13: معادلهٔ صفحهٔ مماس و خط قائم بر هر یک از منحنیهای زیر را در نقطهٔ داده شده بنویسید.

الف) $z=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ $\qquad P_\circ(1,1,\frac{\pi}{4})$

ب) $\cos(\frac{\pi x}{2})-z=0$ $\qquad P_\circ(1,0,0)$

ج) $z=y+\ln\frac{x}{z}$ $\qquad P_\circ(1,1,1)$

د) $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ $\qquad P_\circ(1,2,-1)$

5-8-14: فرض کنید نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ نقطه ای بر روی رویهٔ $z=xy$ باشد و دو خط $\begin{cases} y=y_\circ \\ z=xy_\circ \end{cases}$ و $\begin{cases} x=x_\circ \\ z=yx_\circ \end{cases}$ یکدیگر را در همین نقطه قطع کنند نشان دهید صفحهٔ مماس بر رویهٔ فوق در نقطهٔ مفروض شامل این دو خط است.

5-8-15: نشان دهید خم زیر وقتی $t=1$ بر رویهٔ $x^2+y^2-z=1$ مماس است.

$$\overrightarrow{R(t)}=\sqrt{t}\,\vec{i}+\sqrt{t}\,\vec{j}+\frac{1}{4}(8t-4)\vec{k}$$

5-8-16: معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ پارامتری $z=2s-r$ و $y=r^2-s^2$ و $x=r-s$ را در نقطهٔ نظیر $r=s=1$ بنویسید.

5-8-17: نشان دهید هر صفحهٔ مماس بر مخروط $z^2=a^2x^2+b^2y^2$ از مبداء عبور می کند.

5-8-18: فرض کنید با تغییر متغیر $x=uv$ و $y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ تابع $f(x,y)$ به $g(u,v)$ تبدیل شود اگر بازاء هر x و y ، $|\nabla f|^2=2$ ثابتهای a و b را طوری بیابید که:

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$$

5-8-19: فرض کنید $f(x,y)=y^ne^{-\frac{x^2}{4y}}$ مقدار n را چنان بیابید که: $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

5-8-20: اگر $u(x,y,z)=\frac{xy}{z}\ln x+xf\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)$ آنگاه ثابت کنید:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$$

5-8-21: اگر $w = f\left(\frac{xy}{x^{2}+y^{2}}\right)$ ثابت کنید:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

5-8-22: هر گاه $z = f(x^{2} - y^{2})$ مطلوبست محاسبهٔ $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$.

5-8-23: نشان دهید تابع $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$ در رابطهٔ زیر صدق می کند $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

5-8-24: ثابت کنید تابع $w = f(x-y, y-z, z-x)$ در رابطهٔ زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

5-8-25: تابع $f(x,y)$ با تغییر متغیر $x = u^{2}v$ و $y = uv^{2}$ به نابع $g(u,v)$ تبدیل می شود حاصل عبارت $\frac{\partial^{2} g}{\partial u^{2}} + \frac{\partial^{2} g}{\partial v^{2}}$ را بدست آورید.

5-8-26: فرض کنید f تابعی مشتق پذیر از x و y باشد و بفرض $u = f(x,y)$ و $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ نشان دهید:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)$$

5-8-27: اگر $u = \ln(x+\rho)$ و $\rho = \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$ ثابت کنید عبارت زیر مقداریست ثابت:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

5-8-28: فرض کنید f تابعی از سه متغیر x و y و z باشد و g تابعی از یک متغیر باشد بطوریکه $f(x,y,z) = g(\rho)$ و $\rho = \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$ نشان دهید:

$$\frac{d^{2} g}{d\rho^{2}} + \frac{2}{\rho}\frac{dg}{d\rho} = \frac{d^{2} f}{dx^{2}} + \frac{d^{2} f}{dy^{2}} + \frac{d^{2} f}{dz^{2}}$$

5-6-29: اگر $u(x,y) = e^{6ax} f(bx - ay)$ حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$P = a^{2}\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} + 2ab\frac{\partial^{2} u}{\partial x\partial y} + b^{2}\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}}$$

5-8-30: تابع $f(x,y)$ با تغییر متغیر $x = e^{s}$ و $y = e^{t}$ به تابع $g(s,t)$ تبدیل می شود ثابت کنید:

$$g_{ss} + g_{tt} = x^{۲} f_{xx} + y^{۲} f_{yy} + x f_x + y f_y$$

5-8-31: با فرض $z = f(x + y^{۲}, y - z^{۲})$ ، $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}$ را بر حسب مشتقات نسبی f محاسبه کنید.

5-8-32: فرض کنید z تابعی بر حسب x و y باشد و g یک تابع دو متغیره بطوریکه $g(x^{۲} - z, z^{۲} - y^{۲}) = x$ با فرض وجود مشتقات نسبی g و مخالف صفر بودن آنها مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial y \partial x}$ بر حسب مشتقات نسبی g.

5-8-33: فرض کنید $z = x + f(u)$ و $u = yz$ و f تابعی مشتق پذیر از u است، $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}$ را برحسب مشتقات نسبی f بدست آورید.

5-8-34: هر گاه توابع $u(x, y, z)$ و $v(x, y, z)$ بوسیلهٔ $F(u, v) = ۰$ بهم مربوط گردند مطلوبست محاسبهٔ $\vec{\nabla} u \times \vec{\nabla} v$.

5-8-35: فرض کنید $G(x, y) = F\left(\frac{ax}{x^{۲} + y^{۲}}, \frac{ay}{x^{۲} + y^{۲}}\right)$ و بعلاوه $F_{۱۱} + F_{۲۲} = ۰$ نشان دهید:

$$\frac{\partial^{۲} G}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} G}{\partial y^{۲}} = ۰$$

5-8-36: اگر $u = x^{۳} f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ نشان دهید: $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = ۳u$.

5-8-37: فرض کنید $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = f(x^{۲} + z^{۲}, y^{۲} + z^{۲})$ و z تابعی بر حسب x و y باشد ثابت کنید:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y}\left(\frac{۱ - f_{۱}}{۱ - f_{۲}}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

5-8-38: فرض کنید $z = f(x, y)$ و $x = u^{۲} + v^{۲}$ و $y = ۲uv$ ثابت کنید.

$$\frac{\partial^{۲} z}{\partial u^{۲}} - \frac{\partial^{۲} z}{\partial v^{۲}} = ۴(u^{۲} - v^{۲})\left[\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} = \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}\right]$$

5-8-39: اگر $z = \frac{۱}{v} f(\frac{u}{v})$ نشان دهید: $v\frac{\partial z}{\partial v} + u\frac{\partial z}{\partial u} + z = ۰$

5-8-40: اگر z تابعی از دو متغیر x و y باشد و $\sin(x + y) + \sin(x + z) = ۱$ مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y}$.

5-8-41: تابع $z=e^{y}f(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ مفروض است ثابت کنید:

$$(x^2-\frac{y^2}{4})\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

5-8-42: توابع $F(x,y,z)=0$ و $G(x,y,z)=0$ مفروضند این توابع ارتباط بین x و y و z را نشان می دهند اولاً $\frac{dx}{dz}$ و $\frac{dy}{dz}$ را بر حسب مشتقات نسبی F و G بدست آورید. ثانیاً در حالت خاص اگر $F=x^2+y^2+z^2$ و $G=xyz$ مساله را حل کنید.

5-8-43: فرض کنیم $z=f(t)$ و $t=x^2+y^2$ عبازت $\frac{d^2z}{dt^2}$ را حساب کنید.

5-8-44: فرض کنید f تابعی همگن از درجهٔ n باشد بطوریکه:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \quad \forall x\in$$

ثابت کنید:

1) $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$

2) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2=n(n-1)f(x,y)$

5-8-45: هر گاه $u=f(x+at)+g(x-at)$ و $u_{tt}=4u_{xx}$ مقدار a را بدست آورید.

5-8-46: اگر $z=x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ ثابت کنید $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$

5-8-47: اگر $w=\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$ نشان دهید: $x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=0$.

5-8-48: اگر $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$ و $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ که در آن α ثابت است نشان دهید

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)^2$$

5-8-49: اگر $2uy-xv^3=4x$ و $xu^2+v=y^3$ مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$.

5-8-50: اگر $x=f(u,v)$ و $y=g(u,v)$ که در آن $u=\varphi(r,s)$ و $v=\psi(r,s)$ ثابت کنید

الف) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$

ب) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$

5-8-51: معادلات زیر متغیرهای x و y و z را بعنوان توابعی ضمنی از u و v تعریف می کند. مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial x}{\partial v}$ در $x=y=۱$ و $u=\frac{\pi}{۲}$ و $v,z=۰$.

$$\begin{cases} x^۲ - y\cos(uv) + z^۲ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - \sin(uv) + ۲z^۲ = ۲ \\ xy - \sin u \cos v + z = ۰ \end{cases}$$

5-8-52: نشان دهید که در مبداء مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ در هر سو برابر واحد است. ولی این تابع در مبداء دارای گرادیان نیست.

5-8-53: مشتق سویی تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲$ را در نقطه ای بطول 1 نسبت به منحنی $y=x^۲+۲x$ بدس آورید.

5-8-54: توزیع ولتاژ بر روی صفحه ای فلزی بصورت زیر می باشد $V=۵۰-x^۲-۴y^۲$

الف: در نقطهٔ $(۱,-۲)$ در چه جهتی ولتاژ با بیشترین سرعت افزایش می یابد؟ ب: در همین نقطه در چه جهتی ولتاژ با بیشترین سرعت کاهش می یابد؟ ج: مقدار این بیشترین تنزل را حساب کنید. د: مسیری را تعیین کنید که در طول آن ذره ای از نقطهٔ $(۱,-۲)$ حرکت می کند و در جهت بیشترین افزایش ولتاژ پیش می رود.

5-8-55: جهتی از نقطهٔ $(۱,۳)$ را بیابید که در آن مقدار تابع f، $f(x,y)=e^{۲y}\tan^{-۱}\left(\frac{y}{۳x}\right)$ تغییر نکند.

5-8-56: تابع سه متغیرهٔ $f(x,y,z)=۰$ با تغییر متغیر $x=u\sin v\cos w$ و $y=u\sin v\sin w$ و $z=u\cos w$ به تابع سه متغیرهٔ $g(u,v,w)$ تبدیل می شود با فرض اینکه بیشترین مقدار مشتق سویی f در نقطهٔ $P(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ برابر 8 باشد و $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(P)} > ۰$ و $D_{<۱,۱,۰>}(P)=D_{<۱,۱,-۱>}(P)=۰$ در اینصورت مشتق سویی g را در نقطهٔ $(۱,\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۳})$ و در سوی بردار مماس بر فصل مشترک رویه های $x^۲+z^۲=۱۰$ و $x^۲+y^۲=۵$ در نقطهٔ $(۱,۱,۳)$ حساب کنید.

5-8-57: در مورد تابع $f(x,y)=x^۲y+۲xy^۲$ در نقطهٔ $P_۰(۱,۳)$ مقادیر زیر را پیدا کنید.

الف) جهت بزرگترین کاهش f ب) مشتق f در جهت بزرگترین کاهش f

5-8-58: درجهٔ حرارت در یک نقطه (x,y,z) توسط معادلهٔ $T(x,y,z)=۲۰۰e^{-x^۲-۳y^۲-۹z^۲}$ داده شده است که در آن T بر حسب درجهٔ سانتیگراد و x و y و z بر حسب متر اندازه گیری شده اند .

الف) نرخ تغییر درجهٔ حرارت را در نقطهٔ $P(۲,-۱,۲)$ به طرف نقطهٔ $(۳,-۳,۳)$ بیابید.

ب) در چه سویی درجهٔ حرارت سریعترین افزایش را در P دارد؟ ج) نرخ افزایش ماکزیمم را در P پیدا کنید.

5-8-59: تابع $f(x,y,z)=axy^۲+byz+cx^۳z^۲$ مفروض است a و b و c را چنان تعیین کنید که ماکزیمم مشتق سویی تابع فوق در سوی موازی با محور z ها در نقطهٔ $P(۱,۲,-۱)$ برابر 64 باشد.

5-8-60: در چه جهتی متحرک باید از نقطهٔ آغازین مبداء حرکت کند تا بیشترین سرعت افزایش تابع f بدست آید.

$$f(x,y,z)=(۳-x+y)^۲+(۴x-y+z+۲)^۳$$

5-8-61: ثابت کنید مشتق سویی تابع $g(x,y)=\dfrac{y^۲}{x}$ $(x\neq ۰)$ در هر نقطه از بیضی $۲x^۲+y^۲=۱$ و در سوی قائم بر بیضی صفر است.

5-8-62: بردارهای $\vec{u}=۲\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ و $a\in\mathbb{R}^۲$ مفروضند بعلاوه f تابعی است دو متغیره بطوریکه $D_{\vec{u}}f(a)=۱$ و $D_{\vec{v}}f(a)=\sqrt{۲}$ اگر $w=x\vec{i}+y\vec{j}$ برداری در صفحه باشد و بعلاوه $D_{\vec{w}}f(a)=۶$ ، چه رابطه ای بین x و y برقرار است؟

5-8-63: مخروط $x^۲+۴y^۲=z^۲$ و صفحهٔ $۲x-y+۲z=۱۴$ یکدیگر را در منحنی c قطع می کنند معادلهٔ خط مماس و صفحهٔ قائم بر منحنی C را در نقطهٔ $P(۳,۲,۵)$ بنویسی و سپس مشتق تابع $f(x,y,z)=\ln(x^۲+y^۲+z^۲)$ را در نقطهٔ P و در سوی بردار یکانی مماس بر C حساب کنید.

5-8-64: کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ و مخروط $x^۲+y^۲=z^۲$ مفروضنداولاً نشان دهید این دو رویه در هر نقطه از فصل مشترشان بر هم عمودند ثانیاً بردار یکانی مماس بر منحنی C فصل مشترک را در نقطهٔ $P(\frac{a}{۲},\frac{a}{۲},\frac{a}{۲})$ بدست آورید و مشتق تابع $f(x,y,z)=(x^۲+y^۲+z^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$ را در نقطهٔ P و در سوی این بردار حساب کنید.

5-8-65: در چه سویی مشتق تابع $f(x,y)=\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$ در نقطهٔ $(۱,۱)$ برابر صفر است؟

5-8-66: مشتق تابع $f(x,y,z)$ در P و در سوی بردار $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ دارای بیشترین مقدار و برابر $۲\sqrt{۳}$ است. اولاً بردار $\vec{\nabla}f(P)$ را بدست آورید ثانیاً مشتق سویی تابع f را در P و در سوی بردار $۲\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ حساب کنید.

5-8-67: در حرارت در هر نقطه (x,y) از صفحهٔ xy با رابطهٔ $T=۱۰۰\dfrac{xy}{x^۲+y^۲}$ مشخص شده است.

الف) مشتق سویی تابع را در نقطهٔ $(2,1)$ در جهتیکه با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ 60° می سازد، بیابید.
ب) در چه جهتی از $(2,1)$ مقدار مشتق سویی max می شود؟ ج) مقدار این ماکزیمم چقدر است؟

5-8-68: رویه های $x^2+2y^2-z^2+1=0$ و $x^2-2yz+y^3=4$ یکدیگر را در منحنی C قطع می کنند. اولاً زاویهٔ بین این دو رویه را در نقطهٔ $P(1,-1,2)$ بدست آورید. ثانیاً معادلهٔ خط مماس و صفحهٔ قائم بر منحنی C را در نقطهٔ P بنویسید . ثالثاً اگر T بردار یکانی مماس بر C در P باشد مشتق تابع $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ را در P و در سوی T بدست آورید.

5-8-69: تابع برداری $R(t)=\cos 2t\vec{i}+\sin 2t\vec{j}+2\vec{k}$ مفروض است، مشتق سویی تابع $w=f(x,y,z)$ در نقطهٔ $t=\dfrac{\pi}{4}$ و در جهت بردار سرعت مارپیچ فوق دارای بزرگترین مقدار خود بوده و برابر $16\sqrt{2}$ می باشد مشتق سویی تابع f در نقطهٔ $t=\dfrac{\pi}{4}$ و در جهت بردار $2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ را بدست آورید.

5-8-70: مقدار تقریبی $(1098)^3\sqrt{(3.02)^2+(3.95)^2}$ را با دیفرانسیل تقریب بزنید.

5-8-71: مقدار تقریبی عبارت زیر را بدست آورید:

الف) $\sqrt{0.99}\, e^{0.02}$ ب) $\sin 28^\circ \cos 29^\circ \tan 44^\circ$

5-8-72: اعداد a و b را چنان بیابید $(a\le b)$ که عبارت زیر بیشترین مقدار خود را داشته باشد:

$$\int_a^b (24-2x-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

5-8-73: a و b را طوری بدست آورید که مقدار عبارت زیر min باشد:

$$\int_0^1 (\sin x - x(ax+b))^2 dx$$

5-8-74: اکسترممها و نقاط زینی توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$ ب) $f(x,y)=x\sin y$

ج) $f(x,y)=x^5+2y^5-\dfrac{5}{4}x^4-5y^4+3$ د) $f(x,y)=3+2x+2y-2x^2-2xy-y$

ه) $f(x,y)=x^2+xy+x^4y^4+y^2$ و) $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$

ز) $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ ح) $f(x,y)=xy+2x-\ln x^2y$

5-8-75: اگر x و y زوایای حادهٔ یک مثلث قائم الزاویه باشد، مطلوبست محاسبهٔ max تابع $\sin x\sin y$.

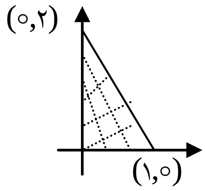
5-8-76: ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=2\ln x+4\ln y+9\ln z$ را روی قسمتی از بیضیگون:

$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ واقع در ناحیهٔ اول فضا بدست آورید.

5-8-77: بیشترین مقدار $\log x+\log y+۳\log z$ را با شرط $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۵r^{۲}$ $(x,y,z>۰)$ بدست آورید و با استفاده از آن نشان دهید که برای هر سه عدد مثبت a و b و c

$$adc^{۳}\leq ۲۷\left(\frac{a+b+c}{۵}\right)^{۵}$$

5-8-78: یک صفحهٔ فلزی ناحیهٔ مثلث شکل D از صفحهٔxy را می پوشاند درجهٔ حرارت T این صفحه در هر نقطهٔ (x,y) در D و روی مرز آن از رابطهٔ $T=x^{۲}+xy+۲y^{۲}-۳x+۲y$ بدست می آید گرمترین و سردترین نقاط صفحه و درجه حرارت این نقاط را بدست آورید.



5-8-79: فاصلهٔ خط $x+y=۴$ را از استوانهٔ بیضیگون $x^{۲}+۴y^{۲}=۴$ بدست آورید.

5-8-80: min مقدار $x^{n}+y^{n}+z^{n}$ را با شرط $x+y+z=c$ بدست آورید. ($n\in\mathbb{N}$ و c ثابت)

5-8-81: نزدیکترین نقطه از سطح $z^{۲}-xy=۱$ را به مبداء بدست آورید.

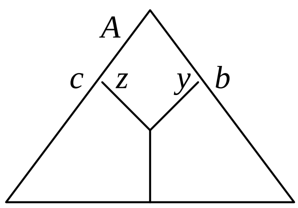
5-8-82: نزدیکترین نقطه از رویهٔ $z=x^{۲}+۲y^{۲}$ را تا صفحهٔ $x+۲y-۲z-۱=۰$ تعیین کنید.

5-8-83: ورقی مستدیر مسطحی به شکل ناحیهٔ $x^{۲}+y^{۲}\leq ۱$ مفروض است این ورقه را به نحوی حرارت داده اند که درجه حرارت T در هر نقطهٔ (x,y) آن از رابطهٔ $T=x^{۲}+۲y^{۲}-x$ بدست می آید. گرمترین و سردترین نقاط صفحه و درجه حرارت این نقاط را بدست آورید.

5-8-84: ابعاد مکعب مستطیلی با حجم ماکزیمم را بیابید که یک راس آن مبداء مختصات و صفحات مختصات سه وجه آن باشند و بعلاوه راس مقابل به مبداء بر صفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ $(a,b,c>۰)$ واقع باشد.

5-8-85: مثلثی با اضلاع a و b و c و مساحت $۲A$ مفروض است نقطه ای داخل مثلث تعیین کنید که مجموع مجذورات فاصله اش از اضلاع مثلث مینیمم باشد

.



B x C

a

5-9 نمونه سوالات تستی حل شده

5-9-1: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^4}$ کدام است؟

1) 0 2) 1 3) وجود ندارد 4) 2

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$y=0 \text{ روی مسیر} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4+0} = 0 \qquad (1)$$

$$y=x^2 \text{ روی مسیر} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 2 \qquad (2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow$ حد وجود ندارد

5-9-2: حاصل $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ کدام است؟

1) 0 2) 1 3) وجود ندارد 4) -1

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$\lim_{(0,0,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{z\to 0} -\frac{z^2}{z^2} = -1 \qquad (1)$$

$$\lim_{(x,0,0)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad (2)$$

(1) و (2) $\Rightarrow$ حد وجود ندارد

5-9-3: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{Arc\tan(xy-2)}{Arc\sin(3xy-6)}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2 4) 3

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{Arc\tan(xy-2)}{Arc\sin(3xy-6)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{6x-6} = \frac{1}{3}$$

5-9-4: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$ کدام است؟

1) $\circ$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) وجود ندارد

- گزینهٔ (4) صحیح است.

$$\lim_{(x,\circ)\to(\circ,\circ)} \frac{xye^{xy}}{x^2+y^2} = \lim_{x\to\circ} \frac{\circ}{x^2} = \circ \quad , \quad \lim_{(x,x)\to(\circ,\circ)} \frac{xye^{xy}}{x^2+y^2} = \lim_{x\to\circ} \frac{x^2e^{xy}}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

5-9-5: در مورد $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{4-x^2}{y+2}$ کدام گزینه صحیح است؟

1) حد موجود و برابر 1- است
2) حد موجود و برابر صفر است
3) حد موجود و برابر 1 است
4) حد موجود نیست

5-9-6: کدامیک از گزاره های زیر در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$ صحیح است؟

1) تابع f در $(\circ,\circ)$ نه پیوسته است و نه مشتق پذیر
2) تابع f در $(\circ,\circ)$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست
3) تابع f در $(\circ,\circ)$ هم پیوسته است و هم مشتق پذیر
4) تابع f در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست ولی مشتق پذیر هست

- گزینهٔ (1) صحیح است.

$\lim\limits_{(x,x)\to(\circ,\circ)} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq \circ \Rightarrow$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نیست

5-9-7: کدام گزینه در مورد تابع $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(\circ,\circ) \\ \circ & (x,y)=(\circ,\circ) \end{cases}$ درست است؟

1) تابع f در $(\circ,\circ)$ نه پیوسته است و نه مشتق پذیر
2) تابع f در $(\circ,\circ)$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست
3) تابع f در $(\circ,\circ)$ هم پیوسته است و هم مشتق پذیر
4) تابع f در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست ولی مشتق پذیر هست

- گزینهٔ (1) صحیح است.

روی مسیر $x=\circ \Rightarrow \lim\limits_{y\to\circ} f(x,y) = \lim\limits_{y\to\circ} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq \circ \Rightarrow$

f در $(۰,۰)$ پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نیست

5-9-8: در کدام نقطه از خط $y=x-۱$ تابع $f(x,y)=\sqrt{|y||x-۱|}$ مشتق پذیر نیست؟

1) $(۱,۰)$ 2) $(۲,۱)$ 3) $(۰,-۱)$ 4) $(۳,۲)$

- گزینهٔ (1) صحیح است.

$$y=x-۱\Rightarrow f(x,y)=\sqrt{|x-۱|^{۲}}=|x-۱|=g(x)$$

$$g'(x)\big|_{x=۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|-۰}{x-۱}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)}{(x-۱)}=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)}{(x-۱)}=۱\end{cases}\Rightarrow$$

$f(x,y)$ در نقطهٔ $(۱,۰)$ مشتق پذیر نیست

5-9-9: اگر $f(x,y)=\frac{۱}{۲}\left(||x|-|y||-|x|-|y|\right)$ ، $f_y(۰,۰)$ چقدر است؟

1) -1 2) ۰ 3) 1 4) $+\infty$

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$f_y(۰,۰)=\lim_{\Delta y\to ۰}\frac{f(x,\Delta y)-f(۰,۰)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}\left(|۰-|\Delta y||-۰-|\Delta y|\right)-۰}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to ۰}\frac{۰}{\Delta y}=۰$$

5-9-10: مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=x^{۲}+\tan^{-۱}(yz)$ در سوی $\vec{v}(۴,۱,-۲)$ و در نقطهٔ $P(۱,۰,۲)$ چقدر است؟

1) $\sqrt{۲۱}$ 2) $\frac{۱۰}{۲۱}$ 3) $\frac{۱۰\sqrt{۲۱}}{۲۱}$ 4) $۱۰\sqrt{۲۱}$

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$\vec{\nabla}f=۲x\vec{i}+\frac{z}{۱+y^{۲}z^{۲}}\vec{j}+\frac{y}{۱+y^{۲}z^{۲}}\vec{k}\Rightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{P(۱,۰,۲)}=۲\vec{i}+۲\vec{j}$$

$$\vec{x}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{۴\vec{i}+\vec{j}-۲\vec{k}}{\sqrt{۲۱}}\Rightarrow D_{\vec{u}}f=\vec{\nabla}f\cdot\vec{u}=\frac{۸+۲}{\sqrt{۲۱}}=\frac{۱۰\sqrt{۲۱}}{۲۱}$$

5-9-11: در چه سویی باید از نقطهٔ حرکت کرد تا حداکثر نزول تابع

$$f(x,y)=(x+y-۲)^۲+(۳x-y-۶)^۲$$

بدست آید؟

1) $۲۴\vec{i}-۸\vec{j}$ 2) $-۲۴\vec{i}+۸\vec{j}$ 3) $۸\vec{i}+۲۴\vec{j}$ 4) $-۸\vec{i}+۲۴\vec{j}$

- گزینهٔ (1) صحیح است.

حداقل مقدار $D_{\vec{u}}f$ زمانی رخ می دهد که زاویهٔ بین $\vec{u}$ و $\vec{\nabla}f$، π رادیان باشد یعنی در خلاف جهت هم باشند.

$$\vec{\nabla}f=[۲(x+y-۲)+۶(۳x-y-۶)]\vec{i}+[۲(x+y-۲)-۲(۳x-y-۶)]\vec{j}$$

حداکثر سرعت نزول در این جهت است. $\vec{\nabla}f(P_\circ)=-۲۴\vec{i}+۸\vec{j}\to\vec{u}=-\overrightarrow{\nabla f}=۲۴\vec{i}-۸\vec{j}$

5-9-12: مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$ را در نقطهٔ $P(۳,۴,۵)$ و در سوی مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویهٔ $۲x^۲-۲y^۲-z^۲=۲۵$ و $x^۲+y^۲=z^۲$ چقدر است؟

1) 1 2) $\circ$ 3) 2 4) 4

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$g(x,y,z)=۲x^۲+۲y^۲-z^۲-۲۵\Rightarrow\vec{\nabla}g=۴x\vec{i}+۴y\vec{j}-۴zk\Rightarrow\vec{\nabla}g(P)=۱۲\vec{i}+۱۶\vec{j}+۱۰\vec{k}$$

$$h(x,y,z)=z^۲-x^۲-y^۲\Rightarrow\vec{\nabla}h=-۲x\vec{i}-۲y\vec{j}+۲z\vec{k}\Rightarrow\vec{\nabla}h(P)=-۶\vec{i}-۸\vec{j}+۱۰\vec{k}$$

$$u=\frac{\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h}{|\vec{\nabla}g\times\vec{\nabla}h|}=\frac{۴\vec{i}-۳\vec{j}}{۵},\vec{\nabla}f(P)=۶\vec{i}+۸\vec{j}+۱۰\vec{k}\Rightarrow D_{\vec{u}}f(P)=\vec{\nabla}f(P)\cdot\vec{u}=\circ$$

5-9-13: معادلات خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $x^۲+y^۲=۵$ و $x^۲+z^۲=۱۰$ در نقطهٔ $P(۱,۲,۳)$ کدام است؟

1) $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۲}{۶}=\frac{z-۳}{۲}$ 2) $\frac{x-۱}{-۳}=\frac{y-۲}{-۶}=\frac{z-۳}{۲}$

3) $\frac{x-۱}{۶}=\frac{y-۲}{-۳}=\frac{z-۳}{-۲}$ 4) $\frac{x-۱}{-۶}=\frac{y-۲}{-۳}=\frac{z-۳}{-۲}$

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$f(x,y,z)=x^۲+y^۲-۵\Rightarrow\vec{\nabla}f(P)=۲\vec{i}+۴\vec{j}$$

$$g(x,y,z)=x^۲+z^۲-۱۰\Rightarrow\vec{\nabla}g(P)=۲\vec{i}+۶\vec{k}$$

$\vec{v}=\vec{\nabla}f(P)\times\vec{\nabla}g(P)=۶\vec{i}-۳\vec{j}-۲\vec{k}\Rightarrow$ معادلهٔ مخروط $=\frac{x-۱}{۶}=\frac{y-۲}{-۳}=\frac{z-۳}{-۲}$

5-9-14: بردار مماس بر منحنی فصل مشترک رویه های $z=e^{x-y}$ و $z=\frac{x^۲+y^۲}{۲}$ در نقطهٔ $P(۱,۱,۱)$ کدام است؟

1) $\vec{i}-\vec{j}$ 2) $\vec{i}+\vec{k}$ 3) $\vec{j}+\vec{k}$ 4) $\vec{i}-\vec{k}$

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$f(x,y,z)=z-e^{x-y}\Rightarrow \vec{\nabla}f(P)=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$
$$g(x,y,z)=z-\frac{x^۲+y^۲}{۲}\Rightarrow \vec{\nabla}g(P)=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$
$$\Rightarrow \vec{T}=\vec{\nabla}f\times\vec{\nabla}g=\vec{i}+\vec{k}$$

5-9-15: معادلهٔ سطح مماس بر سطح $z=\frac{۱۵x^۲}{۲۵}+\frac{۸y^۲}{۲۵}$ در نقطهٔ $A(۱,۲,۲)$ کدام است؟

1) $۳۶x+۱۶y-۲۵z-۵۰=۰$ 2) $-۳۶x-۱۶y-۲۵z+۵۰=۰$

3) $۳۶x-۱۶y-۲۵z+۵۰=۰$ 4) $۳۶x+۱۶y+۲۵z+۵۰=۰$

- گزینهٔ (1) صحیح است.

$$f(x,y,z)=z-\frac{۱۵x^۲}{۲۵}+\frac{۸y^۲}{۲۵}\Rightarrow \vec{\nabla}f=\left(-\frac{۳۶}{۲۵}x\right)\vec{i}-\left(\frac{۳۲}{۲۵}y\right)\vec{j}+\vec{k}$$
$$\vec{\nabla}f(A)=-\frac{۳۶}{۲۵}\vec{i}-\frac{۳۲}{۲۵}\vec{j}+\vec{k}$$

معادلهٔ صفحهٔ مماس : $-\frac{۳۶}{۲۵}(x-۱)-\frac{۳۲}{۲۵}(y-۲)+۱(z-۲)=۰\Rightarrow ۳۶x+۱۶y-۲۵z-۵۰=۰$

5-9-16: خط عمود بر رویهٔ $x^۳+y^۳+z^۳-xyz=۴$ در نقطهٔ $A(۱,۱,a)$ برابر است با:

1) $x=-y=z$ 2) $x=y=-z$ 3) $-x=y=z$ 4) $x=y=z$

- گزینهٔ (4) صحیح است.

$$(۱,۱,a)\in \text{رویه}\Rightarrow ۲+a^۳+a=۴\Rightarrow a^۳+a=۲\Rightarrow a(a^۲+۱)=۲\Rightarrow a=۱$$
$$f=x^۳+y^۳+z^۳-xyz-۴\Rightarrow \vec{\nabla}f=(۳x^۲+yz)\vec{i}+(۳y^۲+xz)\vec{j}+(۳z^۲+xy)\vec{k}$$

$\vec{\nabla}f(A)=۴(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ معادلهٔ خط $=\frac{x-۱}{۴}=\frac{y-۱}{۴}=\frac{z-۱}{۴}\Rightarrow x=y=z$

5-9-17: اگر $g(u)$ مشتق پذیر و پیوسته باشد و $w=g(x^{۲}-y^{۲})$ حاصل عبارت $y\dfrac{\partial w}{\partial x}+x\dfrac{\partial w}{\partial y}$ کدام است؟

1) 1   2) $y-x$ 3) $\circ$ 4) $x-y$

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$u=x^{۲}-y^{۲}\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=۲xg'(u)\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-۲yg'(u)\end{cases}\Rightarrow y\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial y}=\circ$$

5-9-18: اگر $f(x,y)=e^{xy}$ و $x=\ln t+s$ و $y=s+t$ آنگاه $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ در $s=t=۱$ کدام است؟

1) $۲e^{۲}$ 2) $۳e^{۲}$ 3) $۲e^{۳}$ 4) $۳e^{۳}$

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=(ye^{xy})(۱)+(xe^{xy})(۱)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial s}(x=۱,y=۲)=۳e^{۲}$$

5-9-19: اگر $f(x,y,z)=\circ$ عبارت $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با:

1) -1 2) $\circ$ 3) 1   4) تابعی بر حسب متغیرهای x و y و z می باشد

- گزینهٔ (1) صحیح است.

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}\quad,\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}\quad,\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-۱$$

5-9-20: فرض کنید $f(x,y)=\circ$ و $g(z,x)=\circ$ توابع مشتق پذیر باشند آنگاه:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z}$ 2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z}$

3) $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z}$ 4) $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z}$

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$f(x,y)=\circ\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\circ\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (1)$$

$$g(z,x)=\circ\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}=\circ\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \qquad (2)$$

$$\frac{(١)}{(٢)}\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}$$

5-9-21: در رابطهٔ $x^{٢}z+٢y+e^{x-y-٢z}=\circ$ متغیرهای x و y مستقل از یکدیگرند مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطهٔ $(١,-١,١)$ کدام است؟

-3 (1   -2 (2   2 (3   3(4

- گزینهٔ (4) صحیح است.

$$٢x+x^{٢}\frac{\partial z}{\partial x}+e^{x-y-٢z}-٢\frac{\partial z}{\partial x}e^{x-y-٢z}=\circ\overset{(١,-١,١)}{\Rightarrow}٢+\frac{\partial z}{\partial x}+١-٢\frac{\partial z}{\partial x}=\circ\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=٣$$

5-9-22: اگر تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ در نقطهٔ $A(١,٢)$ و در سوی بردار $\vec{i}$ دارای مشتق سویی 5 و در سوی بردار $\vec{j}$ دارای مشتق سویی 7 باشد آنگاه مشتق سویی f دز نقطهٔ A و در سوی $\frac{\sqrt{٢}}{٢}(\vec{i}+\vec{j})$ چقدر است؟

$٣\sqrt{٢}$ (1 $۵\sqrt{٢}$ (2 $۶\sqrt{٢}$ (3 $٧\sqrt{٢}$ (4

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$\vec{\nabla}f(A)=(a,b)\quad D_{\vec{i}}\,f(A)=(a,b)\cdot i=a=۵$$
$$D_{\vec{j}}\,f(A)=(a,b)\cdot j=b=٧$$

$$\vec{u}=\frac{\sqrt{٢}}{٢}(i+j)\Rightarrow D_{\vec{u}}\,f(A)=(۵,٧)\cdot\frac{\sqrt{٢}}{٢}(١,١)=۶\sqrt{٢}$$

5-9-23: مشتق تابع $f(x,y)=\begin{cases}x & y\le -x\vee y>x\\ -y & -x<y\le x\end{cases}$ در نقطهٔ $(\circ,\circ)$ در امتداد $\vec{A}=\vec{j}-\vec{i}$ کدام است؟

1 (1 $\quad$ -1 (2 $\quad$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3 $\quad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$D_{\vec{u}} f(P)=\lim_{t\to 0}\frac{f(P+tu)-f(P)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\frac{\sqrt{2}}{2}t)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5-9-24: فرض کنید $z=yf(x^2-y^2)$ در اینصورت حاصل عبارت $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

yz (1 $\quad$ xz (2 $\quad$ xy (3 $\quad$ z (4

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$x^2-y^2=u$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial x}=2xyf'(u)\quad ,\frac{\partial z}{\partial y}-=f(u)-2y^2f'(u)$$

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^3f'(u)+xyf(u)-2xy^3f'(u)=xyf(u)=xz$$

5-9-25: اگر $\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}=2$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در $(1,1)$ کدام است؟

-2 (1 $\quad$ -1 (2 $\quad$ 1 (3 $\quad$ 2 (4

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{y^3}y'=0\Rightarrow y'=-\frac{y^3}{x^3}\Rightarrow y'(1,1)=-1$$

5-9-26: مشتق تابع $z=x^2y^2-xy^3-3y$ در نقطهٔ $(1,2)$ و در جهتیکه این نقطه را به مبداء وصل می کند برابر است با:

$\sqrt{5}$ (1 $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (2 $\quad$ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (3 $\quad$ $-\sqrt{5}$ (4

- گزینهٔ (4) صحیح است.

$$\vec{u}=\frac{-2\vec{i}-j}{\sqrt{5}}\quad ,\nabla f=(2xy^{2}-y^{3})\,\vec{i}+(2yx^{2}-3xy^{2}-3)\Rightarrow \nabla f(2,1)=3\vec{i}-\vec{j}$$

$$D_{\vec{u}}\,f(2,1)=\left(\frac{-2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{j}\right)=-\frac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$$

5-9-27: مشتق جهتدار تابع $f(x,y)=2x^{2}-3xy+5y^{2}$ در نقطهٔ $(1,2)$ در جهت بردار واحد $\vec{u}$ که با محور x ها زاویهٔ 45° بسازد چقدر است؟

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ 3) 15 4) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$\vec{u}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})\quad ,\vec{\nabla}f=(4x-3y)\vec{i}+(-3x+10y)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}f(1,2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})\cdot(-2\vec{i}+17\,\vec{j})=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

5-9-28: مینیمم موضعی تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=3x^{3}+y^{2}-9x+4y$ کدام است؟

1) -8 2) -10 3) -12 4) -14

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$f_x=9x-9=0\Rightarrow x=1\quad ,f_{xx}=9\quad ,\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^{2}=18$$
$$f_y=2y+4=0\Rightarrow y=-2\quad ,f_{yy}=2$$

چون $\Delta>0$ و $f_{xx}>0$ پس نقطهٔ $(1,-2)$ نقطهٔ min است و داریم:

$$f(1,-2)=3+4-9-8=-10$$

5-9-29: اگر $f(x,y)=x^{2}y-y^{2}-x^{3}+xy$ کدام گزینه صحیح است؟

1) $(0,0)$ نقطهٔ بحرانی نیست
2) $(0,0)$ نقطهٔ زینی است
3) $(0,0)$ نقطهٔ مینیمم موضعی است
4) $(0,0)$ نقطهٔ ماکزیمم موضعی است

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$\left.\begin{aligned} f_x&=2xy-3x^{2}+y=0\\ f_y&=x^{2}-2y+x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow (0,0)\ \text{نقطهٔ بحرانی است}$$

$$f_{xx}=2y-6x\Rightarrow f_{xy}=2x+1\quad ,f_{yy}=-2\quad ,\Delta=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^{2}=-4$$

در نتیجه $(0,0)$ نقطهٔ زینی است.

5-9-30: ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y)=4x^2+2xy-3y^2$ بر روی مربع $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ کدام است؟

1) ماکزیمم مطلق 3 و مینیمم مطلق 3−
2) ماکزیمم مطلق $\frac{13}{3}$ و مینیمم مطلق 3−
3) ماکزیمم مطلق 0 و مینیمم مطلق 0
4) ماکزیمم مطلق 4 و مینیمم مطلق 3

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$\begin{matrix} f_x=8x+2y=0 \\ f_y=2x-6y=0 \end{matrix} \Rightarrow \text{نقطهٔ بحرانی است } (0,0)$$

$$\begin{matrix} f_{xx}=8 \quad , f_{xy}=0 \\ f_{yy}=-6 \end{matrix} \Rightarrow \Delta=-48<0 \Rightarrow \text{نقطهٔ زینی است } (0,0)$$

$$x=0 \text{ روی خط } (0\le y\le 1) \Rightarrow g(y)=-3y^2 \Rightarrow g'(y)=-6y=0 \Rightarrow y=0$$

$$y=0 \text{ روی خط } (0\le x\le 1) \Rightarrow g(x)=4x^2 \Rightarrow g'(x)=8x=0 \Rightarrow x=0$$

$$x=1 \text{ روی خط } (0\le y\le 1) \Rightarrow g(y)=-3y^2+2y+4 \Rightarrow g'(y)=-6y+2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$g''(y)=-6<0 \Rightarrow (1,\frac{1}{3}) \text{ نقطهٔ ماکزیمم است} \Rightarrow f(1,\frac{1}{3})=\frac{13}{3} \Rightarrow \text{ موضعی است } max$$

5-9-31: ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=x-2y+5z$ با شرط $x^2+y^2+z^2=30$ کدام است؟

1) $\min=-15 \quad ,\max=15$
2) $\min=-20 \quad ,\max=20$
3) $\min=-30 \quad ,\max=30$
4) $\min=-10 \quad ,\max=10$

- گزینهٔ (3) صحیح است.

$$\begin{matrix} f=x-2y+5z \\ g=x^2+y^2+z^2-30 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(P)=\lambda\nabla g(P) \\ g(P)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=2\lambda x \\ -2=2\lambda y \\ 5=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=\frac{1}{2}\lambda \\ y=-\frac{1}{\lambda} \\ z=\frac{5}{2\lambda} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{4}{4\lambda^2}+\frac{25}{4\lambda^2}=30 \Rightarrow 30=30\times 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm 1, y=\pm 2, z=\pm 5$$

$$P_1(1,-2,5) \Rightarrow f(P_1)=30 \quad \max \quad , P_2(-1,2,-5) \Rightarrow f(P_2)=-30 \quad \min$$

5-9-32: اگر $z=\ln\sqrt{x^۲+y^۲}$ در اینصورت مقدار عبارت $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

1) 1   2) $\circ$ 3) z 4) 2

- گزینهٔ (1) صحیح است.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲x}{x^۲+y^۲}\right)\quad,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲y}{x^۲+y^۲}\right)\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=۱$$

5-9-33: کمترین فاصلهٔ مبداء از رویهٔ $xyz=۱$ چقدر است؟

1) $\sqrt{۲}$ 2) $\sqrt{۳}$ 3) 2   4) 5

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$\begin{matrix} f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲ \\ g(x,y,z)=xyz-۱\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}۲x=\lambda yz\Rightarrow ۲xyz=\lambda y^۲z^۲\\ ۲y=\lambda xz\Rightarrow ۲xyz=\lambda x^۲z^۲\\ ۲z=\lambda yx\Rightarrow ۲xyz=\lambda y^۲x^۲\end{cases}\Rightarrow x^۲=y^۲=z^۲$$

$$g(x,y,z)=\circ\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱\Rightarrow(x,y,z)=(۱,۱,۱)\ \text{یا}\ (۱,-۱,-۱)\ \text{یا}\ (-۱,۱,-۱)\ \text{یا}\ (-۱,-۱,۱)$$

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

5-9-34: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=۳x+۴y$ بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ کدام است؟

1) ماکزیمم 1 و مینیمم 1-   2) ماکزیمم 5 و مینیمم 5-

3) ماکزیمم 5 و مینیمم 3-   4) ماکزیمم 3 و مینیمم 5-

- گزینهٔ (2) صحیح است.

$$H(x,y,z,\lambda)=۳x+۴y-\lambda(x^۲+y^۲-۱)$$

$$H_x=۳-۲\lambda x=\circ\Rightarrow x=\frac{۳}{۲\lambda}$$

$$H_y=۴-۲\lambda y=\circ\Rightarrow y=\frac{۲}{\lambda}$$

$$H_\lambda=x^۲+y^۲-۱-\circ\Rightarrow\frac{۹}{۴\lambda^۲}+\frac{۴}{\lambda^۲}=۱\Rightarrow ۲۵=۴\lambda^۲\Rightarrow\lambda=\pm\frac{۵}{۲}$$

$$\lambda=\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۵},y=\frac{۴}{۵},\lambda=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۳}{۵},y=-\frac{۴}{۵}$$

$$f(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})=\frac{۹}{۵}+\frac{۱۶}{۵}=\frac{۲۵}{۵}=۵\quad,f(-\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵})=-\frac{۹}{۵}-\frac{۱۶}{۵}=-\frac{۲۵}{۵}=-۵$$

5-10 نمونه سوالات تستی

5-10-1: تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$ داده شده است. در اینصورت:

1) f در همهٔ نقاط $\mathbb{R}^2$ مشتق پذیر است
2) f در هیچ نقطه از $\mathbb{R}^2$ مشتق پذیر نیست
3) f در $(0,0)$ مشتق پذیر است
4) f فقط در $(0,0)$ مشتق پذیر است

5-10-2: در بازهٔ رویهٔ $z=x^3+y^3-3xy$ کدام گزینه صحیح است؟

1) در $(1,1)$ مینیمم و در $(0,0)$ مینیمم است
2) در $(1,1)$ ماکزیمم و در $(0,0)$ زینی است
3) در $(1,1)$ مینیمم و در $(0,0)$ زینی است
4) در $(1,1)$ ماکزیمم و در $(0,0)$ ماکزیمم است

5-10-3: نقطهٔ بحرانی تابع $z=x^2-3xy+2y^2-5x+7y$ کدام است؟

1) $(-1,1)$ مینیمم
2) $(-1,1)$ مینیمم
3) $(-1,1)$ ماکزیمم
4) $(-1,1)$ زینی

5-10-4: در تابع پارامتری $\begin{cases} x=\tan t \\ y=\sin t \end{cases}$ مقدار $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ در $t=\dfrac{\pi}{4}$ چقدر است؟

1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{16}$
2) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$
3) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$
4) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

5-10-5: اگر $z=e^{\frac{x}{y}}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$ حاصل عبارت $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) z

5-10-6: اگر $z=\ln(x^2+y^2)$ حاصل عبارت $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ کدام است؟

1) 0
2) 1
3) 2
4) z

5-10-7: تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$ تعریف شده است در اینصورت:

1) تابع f در $(0,0)$ نه پیوسته است و نه مشتق پذیر
2) تابع f در $(0,0)$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست
3) تابع f در $(0,0)$ هم پیوسته است و هم مشتق پذیر
4) تابع f در $(0,0)$ پیوسته نیست ولی مشتق پذیر است

5-10-8: مشتق جهتی تابع $F(x,y,z)=x^2yz^3$ در امتداد منحنی $\begin{cases} x=e^{-u} \\ y=2\sin u+1 \\ z=u-\cos u \end{cases}$ در نقطهٔ نظیر $u=0$ کدام است؟

1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 4) $\sqrt{2}$

5-10-9: اگر c منحنی $x=t\cos t$ و $y=t\sin t$ باشد، در مورد حد تابع $f(x,y)=\begin{cases} 1 & (x,y)\in c \\ 0 & (x,y)\notin c \end{cases}$ چه می توان گفت؟

1) این حد برابر 1 است
2) این حد برابر $\frac{1}{2}$ است
3) این حد برابر صفر است
4) این حد وجود ندارد

5-10-10: اگر $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$ بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته باشد مجموع مقادیر a کدام است؟

1) این خط در فتوکپی نیافتاده

5-10-11: حاصل حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}$ کدام است؟

1) صفر 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) 2

5-10-12: قانون گازهای ایده آل بیان می کند که $PV=nRT$ که P فشار گاز و V حجم گاز و n تعداد مولکولهای گاز و R ثابت جهانی گازها و T درجه حرارت مطلق است. در اینصورت حاصل عبارت $\frac{\partial T}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}$ کدام است؟

1) 0 2) 1 3) -1 4) تابعی بر حسب P و V و T

5-10-13: حاصل $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$ کدام است؟

1) 0 2) -1 3) 1 4) حد وجود ندارد

5-10-14: اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)\neq(۰,۰)\end{cases}$ دراینصورت :

1) $\frac{\partial}{\partial x}f(۰,۰)=۰ \quad ,\frac{\partial}{\partial y}f(۰,۰)=۰$

2) $\frac{\partial}{\partial x}f(۰,۰)=۱ \quad ,\frac{\partial}{\partial y}f(۰,۰)=۰$

3) $\frac{\partial}{\partial x}f(۰,۰)=۰ \quad ,\frac{\partial}{\partial y}f(۰,۰)=۱$

4) $\frac{\partial}{\partial x}f(۰,۰)=۰ \quad ,\frac{\partial}{\partial y}f(۰,۰)=-۱$

5-10-15: معادلات $x=u+v$ و $y=u^۲+v^۲$ و $z=u^۳+v^۳$ مفروض است دراینصورت:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{۳}x \quad ,\frac{\partial z}{\partial y}=y$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=۳y \quad ,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۳}{۲}x$

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۳}{۲}x \quad ,\frac{\partial z}{\partial y}=۳y$

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{۱}{۳}y \quad ,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{۲}{۳}x$

5-10-16: مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^۲+y^۲-z^۲$ در نقطهٔ $P(۱,۱,۲)$ و در سوی بردار $\vec{v}=(۲,۱,۲)$ کدام است؟

1) $-\frac{۲}{۳}$ 2) $-\frac{۱}{۳}$ 3) $\frac{۱}{۳}$ 4) $\frac{۲}{۳}$

5-10-17: اگر $w=r^۲\cos ۲\theta$ که $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ دراینصورت حاصل عبارت $\frac{\partial w}{\partial y}$ برابر است با:

1) $۲y$ 2) $-۲y$ 3) $۲x$ 4) $-۲x$

5-10-18: رابطهٔ $z=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ در کدام گزینه صدق می کند؟

1) $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+nz=۰$

2) $y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}-nz=۰$

3) $\frac{\partial z}{\partial x}-n\frac{\partial z}{\partial y}=۰$

3) $\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}-nz=۰$

5-10-19: کدام یک از نقاط زیر یک مینیمم نسبی تابع $f(x,y)=x^۲-۴xy+y^۳+۴y$ می باشد.

1) $(-۲,-۴)$ 2) $(۴,۲)$ 3) $(\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳})$ 4) $(-\frac{۲}{۳},-\frac{۴}{۳})$

5-10-20: معادلات خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $x^2+y^2-z=8$ و $x-y^2+z^2=-2$ در نقطهٔ $(2,-2,0)$ کدام است؟

1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{20}$ 2) $\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{10}$

3) $\frac{x-2}{}=\frac{y+2}{}=\frac{z}{}$ 4) $\frac{x-2}{}=\frac{y+2}{}=\frac{z}{}$

مخرج کسرهای بالا در فتوکپی نیافتاده

5-10-21: برد تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=\frac{x}{|y|-|x|}$ کدام مجموعه است؟

1) $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}-\{0\}$ $\{(x,y,z): y\neq z\}$

$\{(x,y,z): |y|\neq|z|\}$

5-10-22: تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{y}$ در کدام نقاط مشتق پذیر است؟

1) بر $\mathbb{R}^2$) در هر نقطه از دامنه اش

) بر مجموعهٔ $\{(x,y):(x,y)\neq(0,0)\}$) برمجموعهٔ $\{(x,y): x\neq y$ یا $y\neq 0\}$

5-10-23: مشتق جهتی در نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},2)$ و در امتداد $\vec{u}=-\sqrt{3}\,\vec{i}+\vec{j}$ واقع بر رویه به معادلهٔ $f(x,y)=y^2+g^2x$ کدام است؟

1) -42 2) -38 3) -36 4) -32

5-10-24: در ورقهٔ نازک فلزی با ناحیهٔ $x^2+y^2\leq 9$ اندازهٔ درجه حرارت در هر نقطهٔ (x,y) از رابطهٔ $T=x^2+2y^2-4x$ بدست می آید. کمترین مقدار T کدام است؟

1) -4 2) -2 3) -1 4) 0

5-20-25: معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $4x^2+y^2+2z^2=26$ در نقطهٔ $(1,-2,3)$ کدام است؟

1) $x-2y+3z=13$ 2) $2x-y+3z=13$

3) $x+2y+3z=13$ 4) $2x+y-3z=13$

5-10-26: در چه سویی مشتق سویی تابع $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ در نقطهٔ $(1,1)$ برابر صفر است؟

1) $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}(i+j)$ 2) $\vec{u}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(i+j)$ 3) $\vec{u}=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}j$ 4) موارد 1 و 2

5-10-27: فرض کنید $f(x,y,z)=xyz$ و $\vec{R}=(\cos ۳t)\vec{i}+(\sin ۳t)\vec{j}+۳t\vec{k}$ مشتق سویی تابع f در سوی بردار سرعت مزبور در نقطهٔ $t=\frac{\pi}{۳}$ برابر است با:

1) π 2) ۲π 3) ۳π 4) ۴π

5-10-28: رویه های $z^۲=xy-\frac{۷}{۴}$ و $yz-x^۲=۰$ یکدیگر را در منحنی C قطع می کنند برداریکه مماس بر منحنی C در نقطهٔ $P(۱,۲,\frac{۱}{۲})$ برابر است با:

1) $\vec{T}=\frac{۱}{\sqrt{۷۷}}(۵\vec{i}+۴\vec{j}+۶\vec{k})$ 2) $\vec{T}=\frac{۱}{\sqrt{۷۷}}(-۵\vec{i}+۴\vec{j}-۶\vec{k})$

3) $\vec{T}=\frac{۱}{\sqrt{۷۷}}(-۵\vec{i}+۴\vec{j}+۶\vec{k})$ 4) $\vec{T}=\frac{۱}{\sqrt{۷۷}}(-۵\vec{i}-۴\vec{j}+۶\vec{k})$

5-10-29: فرض کنید $\frac{z}{y}=f\left(\frac{x}{z}\right)$ دراینصورت حاصل عبارت $\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با:

1) ۰ 2) -1 3) 1 4) 2

5-10-30: ماکزیمم xyz تحت شرایط $۳x^۲+y^۲+z^۲=۴$ کدام است؟

1) $\frac{۸}{۹}$ 2) $\frac{۹}{۸}$ 3) 9 4) $\frac{۱}{۹}$

5-10-31: اگر x و y زوایای حاده از یک مثلث قائم الزاویه باشند، ماکزیمم $\sin x\sin y$ کدام است؟

1) $\frac{۱}{۴}$ 2) $\frac{۱}{۲}$ 3) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ 4) $\frac{۱}{۸}$

5-10-32: کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,-۲,-۴)$ تا صفحهٔ $x+y-۴z=۵$ برابر است با:

1) $\sqrt{۴۲}$ 2) $\frac{\sqrt{۴۲}}{۴۲}$ 3) $\frac{\sqrt{۴۲}}{۲}$ 4) $\frac{\sqrt{۲۱}}{۲۱}$

5-10-33: بزرگترین مقداری که تابع $f(x,y)=xy$ روی بیضی $\frac{x^۲}{۸}+\frac{y^۲}{۲}=۱$ اختیار می کند برابر است با:

1) $\sqrt{۵}$ 2) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ 3) $۲\sqrt{۵}$ 4) 5

5-10-34: مشتق سویی تابع $u(x,y,z)=۲x^۳y-۳y^۲z$ در نقطهٔ $P(۱,۲,-۱)$ و در جهت PQ بقسمیکه $Q(۳,-۱,۵)$ چقدر است؟

1) ۹۰ 2) -۹۰ 3) $\frac{۹۰}{۷}$ 4) $-\frac{۹۰}{۷}$

5-10-35: اگر مشتق سویی تابع دو متغیرهٔ f در سوی بردار $\vec{u}_۱=\vec{i}+\vec{j}$ و در نقطهٔ $P_۰$ برابر 3 باشد و در سوی $\vec{u}_۲=\vec{i}-\vec{j}$ و در همین نقطه برابر 4 باشد مشتق سویی f در $P_۰$ در چه سویی ماکزیمم است؟

1) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{i}-\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}$ 2) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{i}+\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}$

3) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}\vec{i}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}$ 4) $-\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}\vec{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{j}$

5-10-36: در نقطهٔ $(۱,۲)$ مشتق تابع $f(x,y)$ در جهت $(۱,-۱)$ برابر است با 2 و در جهت $(۱,۱)$ برابر است با 2- ، مشتق f در نقطهٔ $(۴,۶)$ چیست؟

1) $\frac{۶}{\sqrt{۲۶}}$ 2) $-\frac{۶}{\sqrt{۲۶}}$ 3) $\frac{۱۲}{\sqrt{۲۶}}$ 4) $-\frac{۱۲}{\sqrt{۲۶}}$

5-10-37: اگر $F(x,y)=\int_۰^{x^۲y}\cos\sqrt{t}\,dt$ باشد. $\frac{\partial F}{\partial x}$ در $(x,y)=(\pi,۱)$ برابر است با:

1) π 2) $-\pi$ 3) ۲π 4) -۲π

5-10-38: بیشترین حجم مکعب مستطیلی که داخل یک کره به شعاع واحد قرار می گیرد کدام است؟

1) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$ 2) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$ 3) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$ 4) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۹}$

5-10-39: اگر $z=f(u,v)$ و $u=x-y$ و $v=x^۲y$، $\frac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با:

1) $\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$ 2) $\frac{\partial z}{\partial u}+۲\frac{\partial z}{\partial v}$ 3) $-y\frac{\partial z}{\partial u}+۲xy\frac{\partial z}{\partial v}$ 4) $۲xy\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$

5-10-40: پرحجم ترین مکعب مستطیلی که در بیضیگون $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ محاط می شود برابر است با:

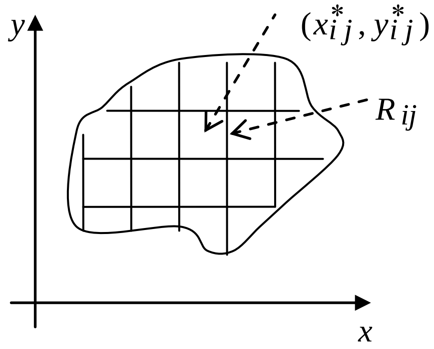
1) $\frac{abc}{\sqrt{۳}}$ 2) $\frac{abc}{۳\sqrt{۳}}$ 3) $\frac{abc}{۲۷\sqrt{۳}}$ 4) $\frac{abc}{۹\sqrt{۳}}$

فصل ششم

انتگرالهای چندگانه

6-1 انتگرالهای دوگانه

فرض کنیم تابع $f(x,y)$ در ناحیهٔ بستهٔ R از صفحهٔ xy پیوسته و یا بطور مقطعی پیوسته تعریف شده باشد، با رسم خطوطی به موازات محورهای مختصات R را به mn ناحیهٔ جزئی با مساحتهای $\Delta A_{ij}\,(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ تقسیم می‌کنیم سپس یک نقطه مانند (x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) در R_{ij} را انتخاب کرده و مجموع ریمان زیر را تشکیل می دهیم:



$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\,\Delta A_{ij}$$

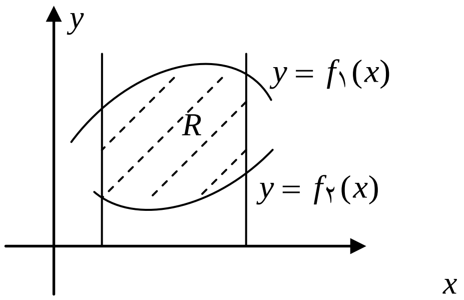
عبارت :

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\,\Delta A_{ij}$$

را در نظر می گیریم در اینصورت وقتیکه $m,n\to\infty$ تعداد ناحیه های جزئی به بینهایت میل می‌کند بطوریکه بزرگترین بعد خطی هر زیر ناحیه جزئی R_{ij} که آنرا با $\|p\|$ نشان می دهیم به سمت صفر میل می‌کند در اینصورت انتگرال دوگانهٔ تابع f روی ناحیهٔ R را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\,\Delta A_{ij}$$

6-1-1 تعریف: اگر R طوری باشد که هر خط موازی محور y ها مرز آنرا حداکثر در دو نقطه مطابق شکل زیر قطع کند و $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ دو تابع پیوسته در $a \le x \le b$ باشند، دراینصورت مطابق تعریف انتگرال دو گانه با انتخاب نواحی R_{ij} بعنوان مسطتیلهایی که موازی محور های x و y ساخته می شوند و ΔA_{ij} مساحت آنها می باشد ، می توان انتگرال دوگانه را برای این نواحی بصورت زیر تعریف کرد:



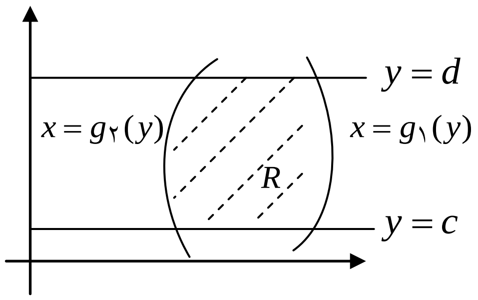
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

که در آن انتگرال داخل پرانتز را با ثابت گرفتن x حساب کرده و سپس انتگرال را بر حسب y حساب می کنیم.

6-1-2 تعریف: اگر R طوری باشد که هر خط موازی محور x ها آنرا حداکثر در دو نقطه مطابق شکل زیر قطع کند، و $x=g_1(y)$ و $x=g_2(y)$ دو تابع پیوسته در $c \le y \le d$ باشند، دراینحالت نیز می‌توان تعریف انتگرال دوگانه را برای این نواحی بصورت زیر تعریف کرد:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=g_1(x)}^{x=g_2(x)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

که در اینجا ابتدا انتگرال داخل پرانتز را با ثابت گرفتن y حساب کرده و سپس انتگرال را بر حسب y حساب می کنیم .



6-1-3 قضیهٔ فوبینی: اگر f روی مستطیل $R=\{(x,y)\,|\,a \le x \le b, c \le y \le d\}$ بطور پیوسته انتگرال پذیر باشد، آنگاه

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

6-1-4 مثال: حاصل انتگرالهای دوگانهٔ زیر را بدست آورید:

الف) $\int_{۰}^{\sqrt{۲}}\int_{-\sqrt{۴-۲x^۲}}^{\sqrt{۴-۲x^۲}} xd\,y\,dx$ ب) $\int_{۱}^{۳}\int_{۰}^{\ln y} ye^x dxdy$

حل: الف) مطابق تعریف 1-6-1 داریم:

$$\int_{۰}^{\sqrt{۲}}\int_{-\sqrt{۴-۲x^۲}}^{\sqrt{۴-۲x^۲}} xd\,y\,dx=\int_{۰}^{\sqrt{۲}}[xy]_{-\sqrt{۴-۲x^۲}}^{\sqrt{۴-۲x^۲}}\,dx=\int_{۰}^{\sqrt{۲}} x(\sqrt{۴-۲x^۲}+\sqrt{۴-۲x^۲})\,dx$$

$$=۲\int_{۰}^{\sqrt{۲}} x\sqrt{۴-۲x^۲}\,dx=\left[-(۴-۲x^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{\sqrt{۲}}=۸$$

ب) مطابق تعریف 2-6-1 داریم:

$$\int_{۱}^{۳}\int_{۰}^{\ln y} ye^x d\,y=\int_{۱}^{۳} y(y-۱)\,dy=\left[\frac{y^۳}{۳}-\frac{y^۲}{۲}\right]_{۱}^{۳}=\frac{۱۴}{۳}$$

6-1-5 مثال: نشان دهید

$$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\frac{xy}{\sqrt{۱+x^۲+y^۲}}\,dxdy=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\frac{xy}{\sqrt{۱+x^۲+y^۲}}\,dydx$$

حل:

$$\text{طرف چپ}=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\frac{xy}{\sqrt{۱+x^۲+y^۲}}\,dxdy=\int_{۰}^{۱} y\left[\sqrt{۱+x^۲+y^۲}\right]_{۰}^{۱}dy$$

$$=\int_{۰}^{۱} y(\sqrt{۲+y^۲}-\sqrt{۱+y^۲})\,dy=\frac{۱}{۳}\left[(۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}-(۱+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{۱} \qquad (1)$$

$$=\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲}-۱)$$

$$\text{طرف راست}=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\frac{xy}{\sqrt{۱+x^۲+y^۲}}\,dydx=\int_{۰}^{۱} x\left[\sqrt{۱+x^۲+y^۲}\right]_{۰}^{۱}dx$$

$$= \int_{۰}^{۱} x(\sqrt{۲+x^{۲}} - \sqrt{۱+x^{۲}})\,dx = \frac{۱}{۳}\left[(۲+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - (۱+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right]_{۰}^{۱} \qquad (2)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۲} - ۱)$$

از (1) و (2) نتیجه می‌گیریم که حاصل دو انتگرال با هم برابر می باشد.

16-1-6 برخی خواص انتگرالهای دوگانه

1) فرض کنیم f روی مستطیل $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b\,, c \le y \le d\}$ بطور پیوسته انتگرال پذیر باشد و فرض کنیم f را بتوان بصورت زیر نوشت:

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

در اینصورت
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

2) فرض کنیم c یک عدد ثابت باشد، دراینصورت

$$\iint_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$$

3)
$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

4) اگر بازاء هر $(x,y) \in R$، $f(x,y) \le g(x,y)$ آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dA \le \iint_R g(x,y)\,dA$$

6-1-7 قضیهٔ (تعویض ترتیب انتگرال گیری): اگر R نواحی تعریف شده در تعاریف 1-1-6 و 2-1-6 با هم برابر باشند، آنگاه

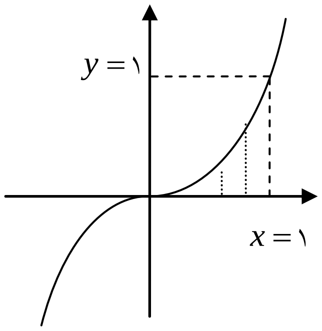
$$\int_a^b \int_{f_{۱}(x)}^{f_{۲}(x)} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_{g_{۱}(y)}^{g_{۲}(y)} f(x,y)\,dydx$$

1-6-8 مثال : حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید:

الف) $\displaystyle\int_{۰}^{۱}\int_{\sqrt[۳]{y}}^{۱} \frac{\sin(\pi x^{۲})}{x^{۲}}\,dxdy$
ب) $\displaystyle\int_{-۲}^{۰}\int_{۰}^{۴-x^{۲}} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}\,dydx$

حل: الف) چون انتگرال به اینصورت قابل محاسبه نیست ترتیب متغیرها را بطریق زیر تغییر می‌دهیم:

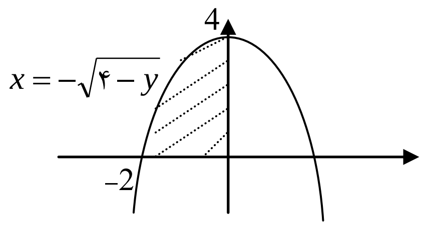
$$y = x^{۳}$$



$$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\,dxdy=\int_0^1\int_0^{x^3}\frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\,dydx$$

$$=\int_0^1\left[y\frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\right]_0^{x^3}dx=\int_0^1 x\sin(\pi x^2)\,dx=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x^2)\right]_0^1=\frac{1}{\pi}$$

ب)



$$\int_{-2}^0\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dydx=\int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^0\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy=\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{4-y}}^0 dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^4\frac{e^{2y}}{4-y}(4-y)\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}dy=\left[-\frac{1}{4}e^{2y}\right]_0^4=\frac{1}{4}(1-e^8)$$

6-1-9 عوامل موثر در انتخاب صحیح ترتیب متغیرهای x و y در انتگرالهای دوگانه:

1) ترتیب متغیرها را به گونه ای اختیار کنیم که به انتگرالهای غیر قابل حل منجر نشود.

2) ترتیب منغیرها را طوری اختیار کنیم که در معاددلات منحنی ها تبدیل اول نسبت به دوم به سهولت انجام پذیرد.

3) ترتیب متغیرها باید به گونه ای باشد که انتگرالهای ساده تری را ایجاد کند.

4) ترتیب متغیرها را طوری در نظر بگیریم که تعداد ناحیه های کمتری را بوجود آورد به عبارت دیگر تقسیم ناحیه یا صورت نپذیرد و یا تعداد آن کمتر باشد.

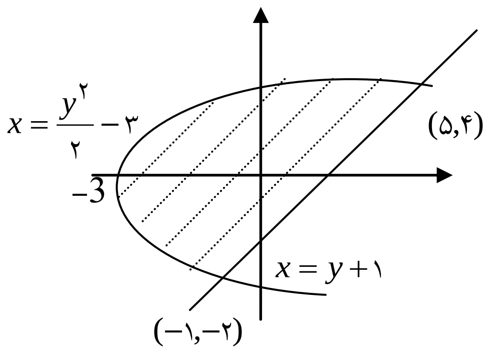
6-1-10 مثال: مقدار $\iint_A xy\,dA$ را که در آن R ناحیهٔ محصور بین خطوط $y=x-۱$ و سهمی $y^۲=۲x-۶$ می باشد را حساب کنید.

حل: ناحیهٔ R را رسم می کنیم. ابتدا انتگرال را با ثابت گرفتن متغیر y (تعریف 2-1-6) حل می‌کنیم. داریم:

$$\iint_A xy\,dA=\int_{-۲}^{۴}\int_{\frac{y^۲}{۲}-۳}^{y+۱} xy\,dxdy=\int_{-۲}^{۴}\left[y\,\frac{x^۲}{۲}\right]_{\frac{y^۲}{۲}-۳}^{y+۱}dy$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۴}y\left[(y+۱)^۲-(\frac{y^۲}{۲}-۳)^۲\right]dy=\frac{۱}{۲}\int_{-۲}^{۴}(-\frac{y^۵}{۴}+۴y^۳+۲y^۲-۸y)\,dy$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[-\frac{y^۶}{۲۴}+y^۴+\frac{۲}{۳}y^۳-۴y^۲\right]_{-۲}^{۴}=۳۶$$



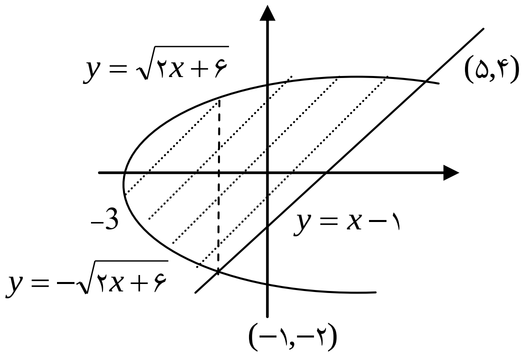
حال اگر بخواهیم انتگرال را از ابتدا با ثابت گرفتن متغیر x (تعریف 1-6-1) حل کنیم، خواهیم داشت:

$$\iint_R xy\,dA=\int_{-۳}^{-۱}\int_{-\sqrt{۲x+۶}}^{\sqrt{۲x+۶}} xy\,dydx+\int_{-۱}^{۵}\int_{x-۱}^{\sqrt{۲x+۶}} xy\,dydx$$

مشاهده می‌کنیم که در اینحالت محاسبهٔ انتگرال دوگانه مشکلتر از حالت قبل است.

6-2 انتگرالهای سه گانه

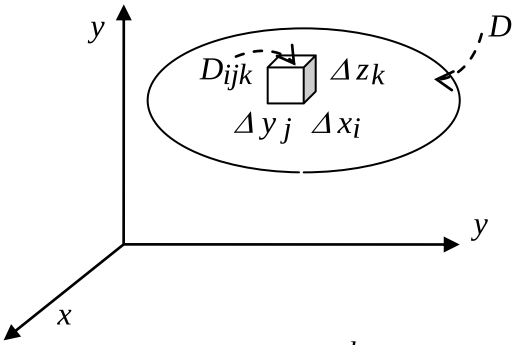
بطور مشابه نتایج بدست آمده در انتگرالهای دوگانه را می توان در یک ناحیه سه بعدی بسته تعمیم داد. تابع $f(x,y,z)$ را در نظر می‌گیریم که در ناحیهٔ سه بعدی D پیوسته و یا بطور مقطعی پیوسته می‌باشد فرض کنید این ناحیه را به mnk ناحیهٔ جزئی به حجمهای ΔV_{ijk} که در آن



$(i=۱,\dots,l\ ,\ j=۱,\dots,m\ ,\ k=۱,\dots,n)$ تقسیم می‌کنیم.

سپس یک نقطه مانند $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ در D_{ijk} انتخاب کرده و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\sum_{i=۱}^{l}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V_{ijk}$$



عبارت $\lim\limits_{(m,n,l)\to(\infty,\infty,\infty)} \sum_{i=۱}^{l}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V_{ijk}$ را در نظر بگیرید. در اینصورت وقتیکه $m,n,l\to\infty$ تعداد ناحیه های جزیی بسمت بینهایت میل می کند بطوریکه بزرگترین بعد خطی هر ناحیه جزیی D_{ijk} را که با $\| p \|$ نشان می دهیم به سمت صفر میل می‌کند دراینصورت انتگرال سه گانهٔ تابع f را روی ناحیهٔ D بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{\| p\|\to\infty} \sum_{i=۱}^{l}\sum_{j=۱}^{m}\sum_{k=۱}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V_{ijk}$$

چون در حد وقتیکه $\| p \| \to 0$ داریم $dV = dx\,dy\,dz$ (حجم هر زیر مستطیل جزیی) بنابراین انتگرال بالا را می توان بصورت زیر نمایش داد

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dydz$$

6-2-1 تعیین حدود انتگرالهای سه گانه

تعیین حدود انتگرالهای سه گانهٔ $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dydz$: فرض کنیم D ناحیهٔ محدود به رویه های $z_1 = f_1(x)$ از پایین و $z_2 = f_2(x)$ از بالا باشد و تصویر ناحیهٔ D در صفحه xy ناحیه ای مانند R محدود به منحنی های $y_1 = g_1(x)$ از پایین و $y_2 = g_2(x)$ از بالا و تصویر این ناحیه محدود به فاصله $a \le x \le b$ باشد در اینصورت

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dzdydx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left\{ \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dy \right] dx$$

در اینحالت ابتدا انتگرال داخل آکولاد را با ثابت گرفتن متغیرهای x و y بدست آورده سپس انتگرال داخل کروشه را با ثابت گرفتن متغیر x حساب می‌کنیم و سپس انتگرال آخر را محاسبه می‌کنیم.

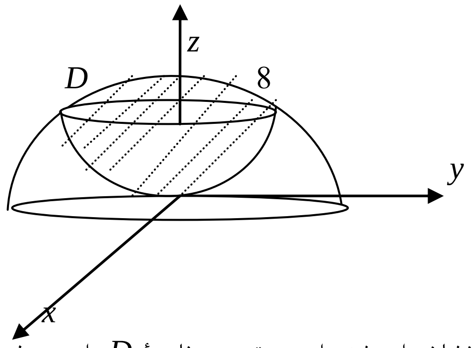
در حالت کلی برای بدست آوردن حدود انتگرال سه گانه نیز بهمین صورت، عمل می‌کنیم. مثلاً برای تعیین حدود انتگرال سه گانهٔ $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dydz$ فرض می‌کنیم ناحیهٔ D محدود به رویه های $x_1 = h_1(y,z)$ از پایین و $y_2 = h_2(y,z)$ از بالا در راستای محور x ها باشد و تصویر ناحیهٔ D در صفحهٔ yz محدود به منحنی های $z_1 = g_1(y)$ و $z_2 = g_2(y)$ از بالا در راستای محور z ها و تصویر این ناحیه روی محور y ها محدود به فاصلهٔ $c \le y \le d$ باشد، دراینصورت داریم:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)dxdydz$$

6-2-2 مثال: فرض کنید ناحیهٔ D محدود به رویه های $z = 8 - x^2 - y^2$ و $z = x^2 + y^2$ و $y \ge 0$ باشد، حاصل انتگرال سه گانه زیر را حساب کنید:

$$\iiint_D y\,dV$$

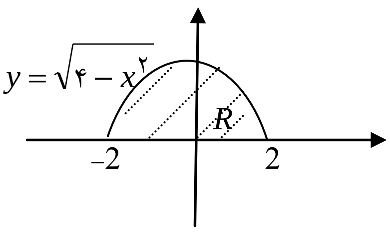
حل: ناحیهٔ D در شکل زیر نشان داده شده است



تصویر ناحیهٔ D در شکل بالا نشان داده شده است. تصویر ناحیهٔ D را در صفحهٔ xy از تقاطع دو رویه بدست می آوریم، خواهیم داشت:

$$۸-x^{۲}-y^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۴$$

بنابراین ناحیهٔ R عبارتست از $x^{۲}+y^{۲}\leq ۴$ در نتیجه می توان نوشت:



$$\iiint_D x\,dV=\int_{-۲}^{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}}\int_{x^{۲}+y^{۲}}^{۸-x^{۲}-y^{۲}} y\,dz\,dy\,dx=\int_{-۲}^{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} y\big[z\big]_{x^{۲}+y^{۲}}^{۸-x^{۲}-y^{۲}}\,dy\,dx$$

$$\int_{-۲}^{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}} y\left[۸-۲x^{۲}-۲y^{۲}\right]dydx=\int_{-۲}^{۲}\left[۴y^{۲}-x^{۲}y^{۲}-\frac{۱}{۲}y^{۴}\right]_{۰}^{\sqrt{۴-x^{۲}}}dx$$

$$\int_{-۲}^{۲}(۴(۴-x^{۲})-x^{۲}(۴-x^{۲})-\frac{۱}{۲}(۴-x^{۲})^{۲})\,dx=\int_{-۲}^{۲}(\frac{x^{۴}}{۲}-۴x^{۲}+۸)\,dx$$

$$=\left[\frac{۱}{۱۰}x^{۵}-\frac{۴}{۳}x^{۳}+۸x\right]_{-۲}^{۲}=\frac{۲۵۶}{۱۵}$$

6-3 تغییر مختصات در انتگرالهای دو گانه

در محاسبهٔ انتگرالهای دوگانه گاهی اوقات مناسب است که غیر از مختصات دکارتی از مختصات دیگری استفاده کنیم فرض کنیم R یک ناحیه در صفحهٔ xy باشد و قرار دهید $y=y(u,v)$ و $x=x(u,v)$ در اینصورت نقاط (x,y) از صفحهٔ xy به نقاط (u,v) در صفحهٔ uv تبدیل می‌شوند و ناحیهٔ R از صفحهٔ xy به ناحیهٔ R' در صفحهٔ uv تبدیل می شود درنتیجه حاصل انتگرال دو گانهٔ $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ در دستگاه مختصات uv بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA=\iint\limits_{R'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,du\,dv$$

که در آن J دترمینان تغییر مختصات به صورت زیر می باشد و آنرا دترمینان ژاکوبین نیز می‌نامند.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

درصورتیکه ارتباط میان متغیر های قدیم یعنی x و y و متغیرهای جدید یعنی u و v بصورت $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ داده شده باشد، کافیست دترمینان زیر را محاسبه کرده و در اینصورت دترمینان ژاکوبین یعنی J برابر است با $\frac{۱}{I}$.

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix} \qquad ,J=\frac{۱}{I}$$

6-3-1 انتگرالهای دو گانه در مختصات قطبی : می دانیم روابط $y=r\sin\theta$ و $x=r\cos\theta$ بین مختصات قطبی و دکارتی برقرار است. لذا برای بدست آوردن فرمول تغییر مختصات در انتگرالهای دوگانه از مختصات دکارتی به قطبی کافیست دترمینان ژاکوبین را محاسبه کنیم لذا داریم:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^{۲}\theta+r\sin^{۲}\theta=r$$

درنتیجه می توان نوشت:

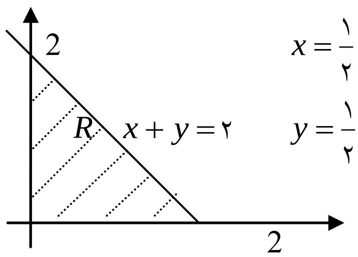
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

6-3-2 مثال: انتگرالهای دوگانهٔ زیر را حساب کنید:

الف) $\iint\limits_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dy\,dx \qquad R:\begin{cases} x+y\le ۲ \\ x+y\ge ۰ \end{cases}$

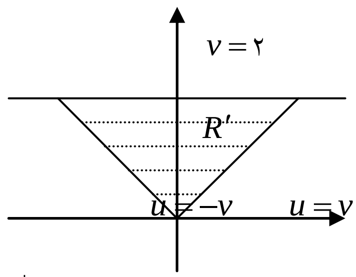
ب) $\iint\limits_R \frac{x+y}{x}e^{x+y}\,dx\,dy \qquad R:\begin{cases} ۱\le x+y\le ۲ \\ x\le y\le ۳x \end{cases}$

حل: الف) با تغییر متغیر $y-x=u$ و $y+x=v$ ناحیهٔ R در صفحهٔ xy به ناحیهٔ R' در صفحهٔ uv نقش می شود.



$$x = \frac{۱}{۲}(u-v)$$

$$y = \frac{۱}{۲}(v+u)$$



$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{vmatrix} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow |J| = \frac{۱}{۲}$$

درنتیجه داریم:

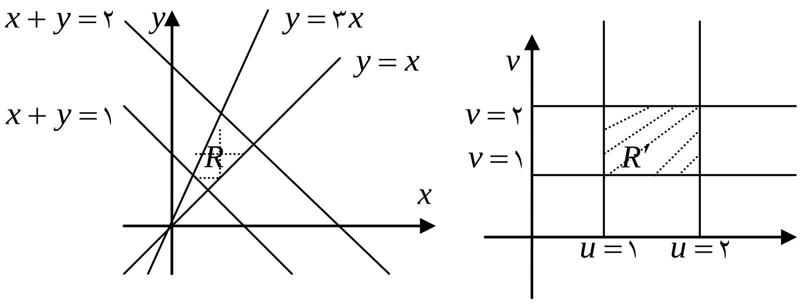
$$\iint\limits_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy = \iint\limits_{R'} \frac{۱}{۲}e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv = \frac{۱}{۲}\int_۰^۲\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv = e - \frac{۱}{e}$$

حل: ب) با تغییر متغیر $x+y=u$ و $\frac{y}{x}=v$ داریم:

$$\frac{۱}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -\frac{y}{x^۲} & \frac{۱}{x} \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^۲} \Rightarrow J = \frac{x^۲}{x+y}$$

$$\frac{y}{x}=v \Rightarrow y=vx\,,\, x+y=u \Rightarrow x=\frac{u}{v+۱}$$

درنتیجه می‌توان نوشت:



$$\iint\limits_R \frac{x+y}{x} e^{x+y} dx\,dy=\int_۱^۳ \int_۱^۲ \frac{u}{v+۱} e^u du\,dv=\int_۱^۳ \frac{۱}{v+۱} dv \int_۱^۲ u\,e^u du$$

$$=\left[\ln(v+۱)\right]_۱^۳ \left[u(e^u-۱)\right]_۱^۲=(\ln ۲)(۲e^u-e-۱)$$

6-3-3 مثال: اگر R ناحیهٔ $x^۲+xy+y^۲ \le ۱$ باشد، ثابت کنید:

$$\iint\limits_R e^{-(x^۲+xy+y^۲)} dx\,dy=\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}(e-۱)$$

حل: ابتدا جملهٔ xy را از معادلهٔ $x^۲+xy+y^۲=۱$ با استفاده از ماتریس دوران حذف می کنیم.

$$\theta=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{B}{A-C}=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\frac{۱}{۱-۱}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y') \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادلهٔ $x^۲+xy+y^۲=۱$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(۳x'^۲+y'^۲)=۱ \qquad\qquad J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}=\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{vmatrix}=۱$$

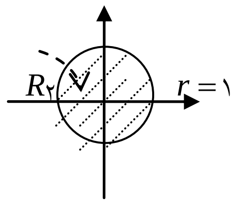
بنابراین داریم:

$$\iint\limits_{R} e^{-(x^{۲}+xy+y^{۲})}dxdy=\iint\limits_{R_{۱}} e^{-\frac{۱}{۲}(۳x'^{۲}+y'^{۲})}dx'\,dy' \qquad R_{۱}:\frac{۱}{۲}(۳x'^{۲}+y'^{۲})\leq ۱$$

مجدداً با تغییر متغیر $x'=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}r\cos\theta$ و $y'=\sqrt{۲}r\sin\theta$ داریم:

$$J=\frac{\partial(x',y')}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\cos\theta & -\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}r\sin\theta\\ \sqrt{۲}\sin\theta & \sqrt{۲}\,r\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}r$$

در نتیجه می توان نوشت:



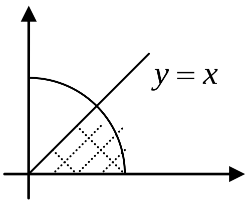
$$\iint\limits_{R_{۱}} e^{-\frac{۱}{۲}(۳x'^{۲}+y'^{۲})}dx\,dy=\iint\limits_{R_{۱}}\frac{۲}{\sqrt{۳}}r\,e^{-r^{۲}}\,dr\,d\theta$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{۱}۲r\,e^{-r^{۲}}\,dr\,d\theta=\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}\left[-e^{-r^{۲}}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}(e-۱)$$

بنابراین داریم:

$$\iint\limits_{R} e^{-(x^{۲}+xy+y^{۲})}dx\,dy=\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}(e-۱)$$

6-3-4 مثال: اگر R ناحیهٔ محصور به خط $x=y$ و دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۲$، $x,y\geq ۰$ باشد مطلوبست محاسبهٔ



$$I=\iint\limits_{R}(xy+\frac{۱}{x}y^{۳})\,dx\,dy$$

حل: مطابق شکل و با استفاده از تغییر متغیر قطبی داریم:

$$I=\iint\limits_{R}\frac{y}{x}(x^{۲}+y^{۲})\,dx\,dy=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{۰}^{\sqrt{۲}}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\cdot r^{۲}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\left[-\ln(\cos\theta)\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\left[\frac{r^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{\sqrt{۲}}=-\frac{۱}{۲}\ln\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۴}\ln ۲$$

6-4 تغییر مختصات در انتگرالهای سه گانه

بطور مشابه آنچه که در انتگرال دوگانه دیدیم اگر D یک ناحیه در فضای سه بعدی باشد و قرار دهیم $z=z(u,v,w)$ و $y=y(u,v,w)$ و $x=x(u,v,w)$ نقاط (x,y,z) در فضای D به نقاط (u,v,w) در فضای D' تبدیل می شوند دراینصورت می توان نوشت:

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_{D'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dV$$

که در آن J دترمینان تغییر مختصات یا دترمینان ژاکوبین می باشد و بصورت زیر بدست می آید:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

6-4-1 انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه ای: می دانیم روابط زیر بین مختصات دکارتی و استوانه ای برقرار است:

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta \qquad z=z$$

دراینصورت دترمینان تغییر مختصات عبارتست از:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & ۰\\ \sin\theta & r\cos\theta & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{vmatrix}=r(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=r$$ درن

تیجه می توان نوشت:

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

6-4-2 انتگرالهای سه گانه در مختصات کروی: می دانیم روابط زیر بین مختصات دکارتی و استوانه ای برقرار است

$$x=\rho\cos\theta\sin\varphi \qquad y=\rho\sin\theta\sin\varphi \qquad z=\rho\cos\varphi$$

در اینصورت دترمینان تغییر مختصات عبارتست از:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & ۰ & -\rho\sin\varphi\end{vmatrix}$$

$$=-\rho^{۲}\sin\varphi$$

چون $\sin\varphi\geq ۰$ و $۰\leq\varphi\leq\pi$ داریم: $|J|=\rho^{۲}\sin\varphi$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint_{D'} f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\rho^{۲}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

6-4-3 مثال: فرض کنید D ناحیهٔ درون و روی بیضیگون به معادلهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ باشد. دراینصورت مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint_D\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}}}\,dV$$

حل: با استفاده از تغییر متغیر کروی

$$\frac{x}{a}=\rho\cos\theta\sin\varphi \quad \text{و} \quad \frac{y}{b}=\rho\sin\theta\sin\varphi \quad \text{و} \quad \frac{z}{c}=\rho\cos\varphi$$

خواهیم داشت:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}=abc\rho^{۲}\sin\varphi$$

و ناحیهٔ D به کره ای بشعاع واحد تبدیل می شود درنتیجه می توان نوشت:

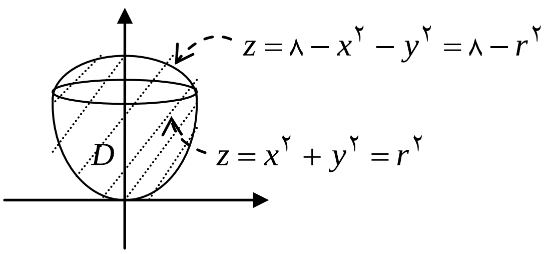
$$\iiint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\sqrt{1-\rho^2}\,abc\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

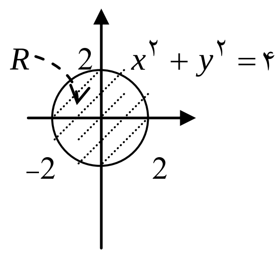
$$=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{1}\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=\frac{abc}{4}\pi^2$$

6-4-4 مثال: فرض کنید D ناحیهٔ محدود به رویه های $z=x^2+y^2$ و $z=8-x^2-y^2$ باشد، دراینصورت مطلوبست محاسبهٔ

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dV$$

حل: با استفاده از تغییر متغیر استوانه از $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و $z=z$ خواهیم داشت:





$$\begin{matrix} z=8-x^2-y^2 \\ z=x^2+y^2 \end{matrix}\Rightarrow x^2+y^2=4$$

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{8-r^2} r^2\cdot r\,z\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}r^3(8-r^2-r^2)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[2r^4-\frac{1}{3}r^6\right]_0^2 d\theta$$

$$=(2\pi)(32-\frac{64}{3})=\frac{64\pi}{3}$$

6-5 کاربردهای انتگرال دو گانه

1) محاسبهٔ سطح: اگر در انتگرالگیری دوگانه از تابع ثابت $f(x,y)=1$ روی ناحیهٔ R انتگرال بگیریم آنگاه مساحت ناحیهٔ R بدست می آید بنابراین $\iint_R dA=A(R)$.

2) محاسبهٔ حجم: اگر $f(x,y)\geq 0$ و f روی R انتگرال پذیر باشد، آنگاه حجم جسم صلب v که در بالای ناحیهٔ R و زیر رویهٔ $z=f(x,y)$ قرار دارد عبارتست از:

$$V=\iint\limits_R f(x,y)\,dA$$

3) محاسبهٔ جرم: فرض کنیم R یک ناحیهٔ در صفحه باشد اگر $\delta(x,y)$ را چگالی ناحیهٔ R در نظر بگیریم آنگاه M جرم ناحیهٔ R بصورت زیر محاسبه می شود

$$M=\iint\limits_R \delta(x,y)\,dA$$

تذکر: اگر $\delta(x,y)=k$ مقدار ثابتی باشد آنگاه جسم متشکل از ناحیهٔ R با چگالی ثابت فوق را یک جسم همگن و در غیر اینصورت آنرا غیر همگن می نامیم.

4) محاسبهٔ گشتاورها: فرض کنیم R یک ناحیه در صفحه و $\delta(x,y)$ چگالی ناحیهٔ R باشد دراینصورت داریم:

$$M_x=\iint\limits_R y\,\delta(x,y)\,dA$$ گشتاور مرتبهٔ اول نسبت به محور x ها

$$M_y=\iint\limits_R x\,\delta(x,y)\,dA$$ گشتاور مرتبهٔ اول نسبت به محور y ها

$$I_x=\iint\limits_R y^2\delta(x,y)\,dA$$ گشتاور مرتبهٔ دوم نسبت به محور x ها

$$I_y=\iint\limits_R x^2\delta(x,y)\,dA$$ گشتاور مرتبه دوم نسبت به محور y ها

$$I_O=I_x+I_y=\iint\limits_R (x^2+y^2)\delta(x,y)\,dA$$ گشتاور مرتبه دوم نسبت به مبداء مختصات

5) محاسبهٔ مرکز جرم (مرکز ثقل): اگر $(\bar{x},\bar{y})$ را مختصات مرکز جرم ناحیهٔ R در صفحهٔ با چگالی $\delta(x,y)$ در نظر بگیریم، در اینصورت خواهیم داشت:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{1}{M}\iint\limits_R x\,\delta(x,y)\,dA$$

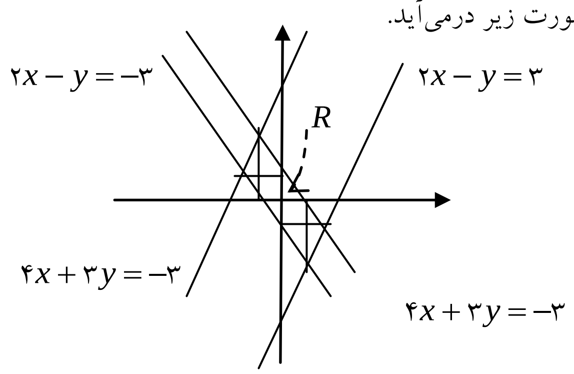
$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{M}\iint\limits_R y\,\delta(x,y)\,dA$$

6-5-1 مثال: مساحت متوازی الاضلاع $|3x+y|+|x+2y|=3$ را با استفاده از انتگرال دو گانه بیابید.

حل: ابتدا ناحیهٔ R را مشخص می کنیم، برای این منظور معادلات خطوطی را که از تلاقی آنها متوازیالاضلاع ساخته شده را بدست می آوریم دراینصورت داریم:

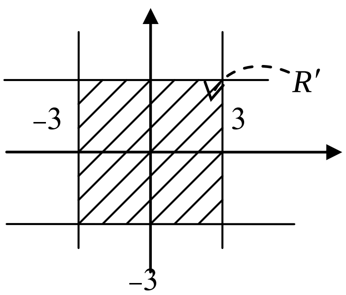
$$۳x+y\geq ۰\,,\,x+۲y\geq ۰\Rightarrow ۳x+y+x+۲y=۳\Rightarrow x+۳y=۳$$
$$۳x+y\geq ۰\,,\,x+۲y\leq ۰\Rightarrow ۳x+y-(x+۲y)=۳\Rightarrow ۲x-y=۳$$
$$۳x+y\leq ۰\,,\,x+۲y\geq ۰\Rightarrow -(۳x+y)+x+۲y=۳\Rightarrow ۲x-y=-۳$$
$$۳x+y\leq ۰\,,\,x+۲y\leq ۰\Rightarrow -(۳x+y)-(x+۲y)=۳\Rightarrow ۴x+۳y=-۳$$

بنابراین ناحیهٔ R بصورت زیر درمی‌آید.



حال با تغییر متغیر $۴x+۳y=u$ و $۲x-y=v$ داریم:

$$\frac{۱}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=-۱۰\Rightarrow |J|=\frac{۱}{۱۰}$$

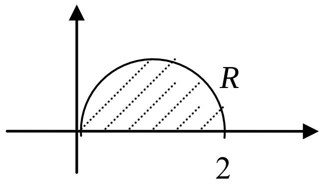


درنتیجه می توان نوشت:

$$A(R)=\iint_R dA=\iint_{R'}\frac{۱}{۱۰}\,dx\,dy=\int_{-۳}^{۳}\int_{-۳}^{۳}\frac{۱}{۱۰}\,dx\,dy=\frac{۳۶}{۱۰}=۳.۶$$

6-5-2 مثال: حجم زیر رویه با معادلهٔ $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ و بالای ناحیهٔ R محدود به $y\geq 0$ و $x^2+y^2-2x=0$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از رابطهٔ حجم و تغییر متغیر قطبی داریم:

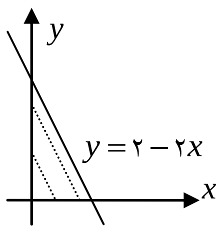


$$v=\iint_R z\,dA=\iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dA=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}(\cos\theta+\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta=2\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1$$

6-5-3 مثال: مرکز جرم ورقه ای مثلثی شکل به رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(2,0)$ را با چگالی $\delta(x,y)=1+3x+y$ بیابید.

حل: مثلث در شکل زیر نشان داده شده است:



جرم ورقه عبارتست از:

$$M=\iint_R \delta(x,y)\,dA=\int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[y+3xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x}dx=4\int_0^1(1-x^2)\,dx=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

به موجب روابط بیان شده در 5-6 قسمت 5 داریم:

$$\bar{x}=\frac{۱}{M}\iint_R x\,\delta(x,y)\,dA=\frac{۳}{۸}\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۲-۲x}(x+۳x^{۲}+xy)\,dy\,dx$$

$$=\frac{۳}{۸}\int_{\circ}^{۱}\left[xy+۳x^{۲}y+x\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{۲-۲x}dx=\frac{۳}{۲}\int_{\circ}^{۱}(x-x^{۳})\,dx=\frac{۳}{۸}\left[\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{\circ}^{۱}=\frac{۳}{۸}$$

$$\bar{y}=\frac{۱}{M}\iint_R y\,\delta(x,y)\,dA=\frac{۳}{۸}\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۲-۲x}(y+۳xy+y^{۲})\,dy\,dx$$

$$=\frac{۳}{۸}\int_{\circ}^{۱}\left[\frac{y^{۲}}{۲}+۳x\frac{y^{۲}}{۲}+\frac{y^{۳}}{۳}\right]_{\circ}^{۲-۲x}=\frac{۹}{۴}\int_{\circ}^{۱}(۷-۹x-۳x^{۲}+۵x^{۳})\,dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\left[۷x-\frac{۹}{۲}x^{۲}-x^{۳}+\frac{۵}{۴}x^{۴}\right]_{\circ}^{۱}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

بنابراین مختصات مرکز جرم عبارتست از $(\frac{۳}{۸},\frac{۱۱}{۱۶})$.

6-6 کاربردهای انتگرال سه گانه

1) محاسبهٔ جرم: اگر در انتگرال گیری سه گانه از توابع ثابت $f(x,y,z)=۱$ روی ناحیهٔ D انتگرال بگیریم آنگاه حجم ناحیهٔ D بدست می آید دراینصورت می توان نوشت: $V(D)=\iiint_D dV$

2) محاسبهٔ جرم: فرض کنیم یک جسم صلب با تابع چگالی $\delta(x,y,z)$ ناحیهٔ D از فضا را اشغال کرده است در اینصورت M جرم جسم صلب از رابطهٔ زیر بدست می آید:

$$M=\iiint_D \delta(x,y,z)\,dV$$

3) محاسبهٔ گشتاورها: فرض کنیم یک جسم صلب با تابع چگالی $\delta(x,y,z)$ ناحیهٔ D از فضا را اشغال کرده است، دراینصورت داریم:

$M_{xy}=\iiint_D z\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور مرتبهٔ اول جسم نسبت به صفحهٔ xy

$M_{yz}=\iiint_D x\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور مرتبهٔ اول جسم نسبت به صفحهٔ yz

$M_{xz} = \iiint\limits_D y\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور مرتبهٔ اول جسم نسبت به صفحهٔ xz

$I_{xy} = \iiint\limits_D z^{۲}\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور مرتبهٔ دوم جسم نسبت به صفحهٔ xy

$I_{yz} = \iiint\limits_D x^{۲}\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور مرتبهٔ دوم جسم نسبت به صفحهٔ zy

$I_{xz} = \iiint\limits_D y^{۲}\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور مرتبهٔ دوم جسم نسبت به صفحهٔ xz

$I_O = I_{xy} + I_{yz}$ گشتاور مرتبهٔ اول جسم نسبت به صفحهٔ مبداء مختصات

$$= \iiint\limits_D (x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\,\delta(x,y,z)\,dV$$

$I_x = \iiint\limits_D (y^{۲}+z^{۲})\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور ماند جسم حول محور x ها

$I_y = \iiint\limits_D (x^{۲}+z^{۲})\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور ماند جسم حول محور y ها

$I_z = \iiint\limits_D (y^{۲}+x^{۲})\,\delta(x,y,z)\,dV$ گشتاور ماند جسم حول محور z ها

4) محاسبهٔ مرکز جرم: اگر $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ را مختصات مرکز جرم جسم صلب D در فضا با چگالی $\delta(x,y,z)$ درنظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{۱}{M}\iiint\limits_D x\,\delta(x,y,z)\,dV \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{۱}{M}\iiint\limits_D y\,\delta(x,y,z)\,dV$$

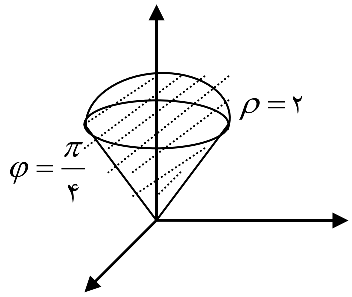
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{۱}{M}\iiint\limits_D x\,\delta(x,y,z)\,dV$$

6-6-1 مثال: فرض کنید ناحیهٔ D از فضا محدود به رویه های $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ باشد، الف) حجم جسم D را بیابید. ب) اگر چگالی جسم در هر نقطه متناسب با مجذور فاصلهٔ نقطه تا مبداء مختصات باشد، جرم جسم D را بیابید.

حل: الف) معادلهٔ کره و مخروط در مختصات کروی عبارتست از:

$\rho = ۲$ معادلهٔ کره

$\varphi = \tan^{-۱}\frac{r}{z} = \tan^{-۱} ۱ = \frac{\pi}{۴}$ معادلهٔ مخروط



بنابراین حجم جسم D عبارتست از:

$$V = \iiint\limits_D dV = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi/۴}\int_۰^{۲} \rho^۲ \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= [\theta]_۰^{۲\pi} [-\cos\varphi]_۰^{\pi/۴} \left[\frac{\rho^۳}{۳}\right]_۰^۲ = (۲\pi)(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۸}{۳}) = \frac{۸\pi}{۳}(۲ - \sqrt{۲})$$

ب) با توجه به 6-6 قسمت 2 داریم: $\delta(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ و $M = \iiint\limits_D \delta(x,y,z)\, dV$

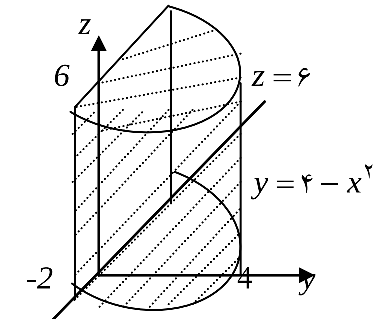
$$M = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi/۴}\int_۰^{۲} \varphi^۲ \rho^۲ \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

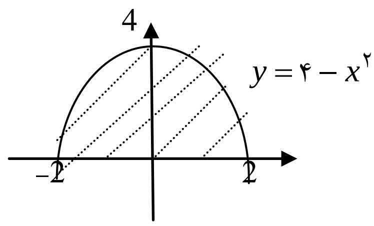
$$= [\theta]_۰^{۲\pi} [-\cos\varphi]_۰^{\pi/۴} \left[\frac{\rho^۵}{۵}\right]_۰^۲ = (۲\pi)(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{۳۲\pi}{۵}(۲ - \sqrt{۲})$$

2-6-6 مثال: مختص اول مرکز جرم ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $y = ۴ - x^۲$ و صفحات $z = ۶$، $z = ۰$ و $y = ۰$ را با فرض آنکه چگالی جسم در هر نقطه از رابطهٔ $\delta(x,y,z) = xyz$ محاسبه شود، بدست آورید.

حل: ناحیهٔ انتگرال گیری در شکل زیر رسم شده است. با توجه به 6-6 قسمت 4 داریم:

تصویر ناحیهٔ مذکور روی صفحهٔ xy بصورت زیر است:





$$M = \iiint\limits_D \delta \, dV = \int_۰^۶ \int_{-۲}^{۲} \int_۰^{۴-x^۲} xyz \, dy \, dx \, dz$$

$$=\int_{\circ}^{۶}\int_{-۲}^{۲}xz\left[\frac{y^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{۴-x^{۲}}dx\,dz=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۶}\int_{-۲}^{۲}xz\,(۴-x^{۲})^{۲}\,dx\,dz$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۶}۲\int_{\circ}^{۲}zx\,(۴-x^{۲})^{۲}\,dx\,dz=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۶}z\left[-\frac{۱}{۳}(۴-x^{۲})^{۳}\right]_{\circ}^{۲}dz$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۶}\frac{۶۴}{۳}z\,dz=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۶۴}{۳}\cdot\frac{۳۲}{۲}=۱۹۲$$

$$M_{yz}=\iiint_{D}x\delta\,dV=\int_{\circ}^{۶}\int_{-۲}^{۲}\int_{\circ}^{۴-x^{۲}}x^{۲}yz\,dy\,dx\,dz$$

$$=\int_{\circ}^{۶}\int_{-۲}^{۲}x^{۲}z\,(۴-x^{۲})^{۲}\,dx\,dz=\int_{\circ}^{۶}zdz\int_{-۲}^{۲}(۱۶x^{۲}-۸x^{۴}+x^{۶})\,dx$$

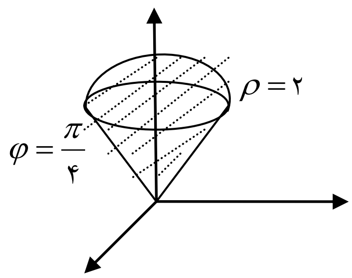
$$=\left[\frac{z^{۲}}{۲}\right]_{\circ}^{۶}\left[\frac{۱۶}{۳}x^{۳}-\frac{۸}{۵}x^{۵}+\frac{۱}{۷}x^{۷}\right]_{-۲}^{۲}=$$

بنابراین مختص اول مرکز جرم یعنی $\bar{x}$ عبارتست از $\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{M}=$

3-6-6 مثال: گشتاور جسم صلبی با چگالی ثابت که از بالا به کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ و از پایین به مخروط $x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}\tan^{۲}\alpha$ محدود شده است را حول محور تقارن جسم بدست آورید.

حل: ناحیهٔ مذکور در شکل زیر رسم شده است با استفاده از مختصات کروی و با توجه به اینکه محور تقارن شکل محور z ها می باشد داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}\Rightarrow\rho=a$$
$$x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}\tan^{۲}\alpha\Rightarrow\varphi=\alpha$$



$$I_z = \iiint (x^۲ + y^۲)\delta\, dV = \delta \int_\circ^{۲\pi} \int_\circ^{\alpha} \int_\circ^{a} (\rho^۲ \sin^۲ \varphi)(\rho^۲ \sin\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

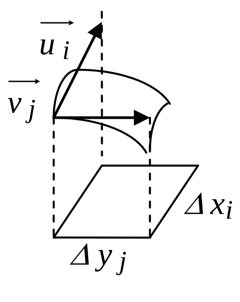
$$= \delta \left[\frac{۱}{۲}\theta - \frac{۱}{۴}\sin ۲\theta \right]_\circ^{۲\pi} \left[-\cos\varphi \right]_\circ^{\alpha} \left[\frac{\rho^۵}{۵} \right]_\circ^{\alpha} = \frac{\pi a^۵}{۵}(۱ - \cos\alpha)$$

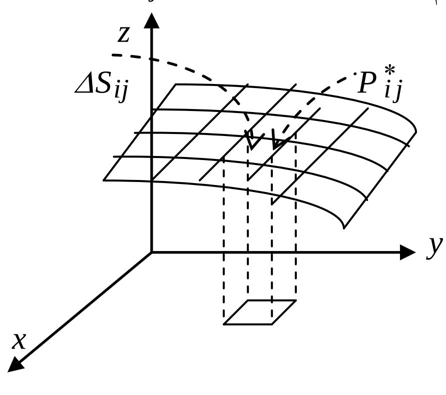
6-7 محاسبهٔ مساحت یک رویه

فرض کنیم $z = f(x, y)$ معادلهٔ یک رویه در فضا باشد، اگر s سطح رویه و R تصویر سطح s روی صفحهٔ xy باشد، برای بدست آوردن مساحت رویه بصورت زیر عمل می کنیم:

R را به mn ناحیهٔ جزیی به مساحتهای $(۱ = ۱, \ldots, m \;,\; j = ۱, \ldots, n)$ ΔA_{ij} تقسیم می‌کنیم و یک ستون قائم روی هر ناحیهٔ جزیی ایجاد می‌کنیم تا s را در فصل مشترک به مساحت $(۱ = ۱, \ldots, m \;,\; j = ۱, \ldots, n)$ ΔS_{ij} قطع کند. دراینصورت واضح است که مساحت رویهٔ s برابر با $\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \Delta S_{ij}$.

فرض کنیم (a_i, b_j) نقطه ای درون ناحیهٔ ΔA_{ij} باشد، دراینصورت $P_{ij}^{*}(a_i, b_j, f(a_i, b_j))$ نقطه ای از رویهٔ s می‌باشد که در ΔS_{ij} قرار گرفته است. اکنون از این نقطه صفحهٔ مماس بر رویه را رسم می‌کنیم اگر قسمتی از این صفحه که در داخل ناحیهٔ محدود بین صفحات عمودی $x = x_{i-۱}$ و $x = x_i$ و $y = y_{i-۱}$ و $y = y_i$ واقع است را با ΔP_{ij} تقریب مناسبی برای مساحت جزء رویهٔ ΔS_{ij} می‌باشد اگر $\overrightarrow{u_i}$ قسمتی از ΔP_{ij} باشد که تصویر آن در صفحهٔ xy، Δx_i باشد و $\overrightarrow{v_j}$ قسمتی از ΔP_{ij} باشد که تصویر آن در صفحهٔ xy، Δy_j باشد، دراینصورت بنا به آنچه که در پیدا کردن صفحهٔ مماس در فصل چهارم بیان شد بردارهای $\overrightarrow{u_i}$ و $\overrightarrow{v_j}$ دارای نمایشی بصورت زیر می‌باشند.





$$\overrightarrow{u_i} = \Delta x_i\, i + f_x(a_i, b_j)\,\Delta x_i k$$
$$\overrightarrow{v_j} = \Delta y_j\, j + f_y(a_i, b_j)\,\Delta y_j k$$

در اینصورت مساحت متوازی الاضلاع بنا شده بر بردارهای $\overrightarrow{u_i}$ و $\overrightarrow{v_j}$ عبارتست از:

$$\Delta P_{ij} \text{ مساحت } = |\overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{v_j}|$$
$$= \sqrt{(-f_x(a_i,b_j)\Delta x_i \Delta y_j)^۲ + (-f_y(a_i,b_j)\Delta x_i \Delta y_j)^۲ + (\Delta x_i \Delta y_j)^۲}$$
$$= \sqrt{۱ + f_x^۲(a_i,b_j) + f_y^۲(a_i,b_j)}\;\Delta x_i\; \Delta y_j$$

بنابراین مساحت ΔP_{ij} تقریبی جزء رویه یعنی ΔS_{ij} بصورت زیر می‌باشد. پس

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \Delta S_{ij} \approx \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \sqrt{۱ + f_x^۲(a_i,b_j) + f_y^۲(a_i,b_j)}\;\Delta x_i\; \Delta y_j$$

حال اگر $m,n \to \infty$ یعنی تقسیمات ناحیهٔ R بقدر کافی زیاد باشند، آنگاه مساحت رویهٔ s بوسیلهٔ انتگرال دوگانه بصورت زیر بیان می‌شود:

$$A(s) = \iint_R \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^۲}\, dx\, dy$$

که در آن R تصویر s روی صفحهٔ $x\,y$ می‌باشد.

چنانچه تصویر رویه روی صفحهٔ $x\,y$ یا صفحهٔ $y\,z$ اختیار شود، آنگاه فرمول محاسبهٔ مساحت رویهٔ s بصورت زیر بیان می‌شود:

$$۱)\; A(s) = \iint_R \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^۲}\, dx\, dz \qquad (R \text{ تصویر رویه بر صفحهٔ } x\,z)$$

$$۲)\; A(s) = \iint_R \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^۲}\, dy\, dz \qquad (R \text{ تصویر بر صفحهٔ } y\,z)$$

در صورتیکه معادلهٔ s بصورت $F(x,y,z) = ۰$ باشد، روابط فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$۱)\quad A(s) = \iint_R \frac{\sqrt{F_x^۲ + F_y^۲ + F_z^۲}}{|F_z|}\, dx\, dy \qquad ۲)\quad A(s) = \iint_R \frac{\sqrt{F_x^۲ + F_y^۲ + F_z^۲}}{|F_y|}\, dx\, dz$$

$$۳)\quad A(s) = \iint_R \frac{\sqrt{F_x^۲ + F_y^۲ + F_z^۲}}{|F_x|}\, dy\, dz$$

6-7-1 تعریف: اگر رویهٔ هموار s با معادلات پارامتری

$$\vec{R}(u,v)=x(u,v)i+y(u,v)j+z(u,v)k \qquad (u,v)\in R$$

داده شده باشد، و (u,v) سراسر دامنهٔ R را طی کند، آنگاه مساحت رویهٔ s برابر است با

$$A(s)=\iint_R |\vec{R}_u\times\vec{R}_v|dA$$

که در آن $\vec{R}_u\times\vec{R}_v$ حاصلضرب اساسی بردارهای مماس بر رویه یعنی $\vec{R}_u$ و $\vec{R}_v$ نامیده می‌شود. و

$$\vec{R}_u=\frac{\partial x}{\partial u}i+\frac{\partial y}{\partial u}j+\frac{\partial z}{\partial u}k \quad \text{و} \quad \vec{R}_v=\frac{\partial x}{\partial v}i+\frac{\partial y}{\partial v}j+\frac{\partial z}{\partial v}k$$

6-11-2 مثال: فرض کنید s سطح نیمکرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲ \ , z\ge ۰$ و $\vec{n}$ بردار قائم یکانی بر s باشد اگر $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$ و $\frac{\partial f}{\partial n}$ مشتق سویی f در سوی $\vec{n}$ در نقطهٔ دلخواه $P(x,y,z)$ از کره باشد، مطلوبست محاسبهٔ $\iint_s \frac{\partial f}{\partial n}ds$.

حل: قرار می‌دهیم $g(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲-a^۲$ طبق تعریف مشتق سویی داریم:

$$D_{\vec{n}}f(p)=\overrightarrow{\nabla f}(p).\vec{n}$$

$$\overrightarrow{\nabla f}(p)=\frac{۱}{x}i+\frac{۱}{y}j+\frac{۱}{z}k \quad ,\vec{n}=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{۲xi+۲yj+۲zk}{\sqrt{۴(x^۲+y^۲+z^۲)}}=\frac{x}{a}i+\frac{y}{a}j+\frac{z}{a}k$$

بنابراین داریم:

$$D_{\vec{n}}f(p)=<\frac{۱}{x},\frac{۱}{y},\frac{۱}{z}>\cdot<\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}>=\frac{۳}{a}$$

از طرفی اگر رویهٔ s را بر صفحهٔ xy تصویر کنیم ناحیهٔ R نقاط داخل و روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ بدست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت

$$\iint_s\frac{\partial f}{\partial n}ds=\frac{۳}{a}\iint_R\frac{a}{z}dx\,dy=۳\iint_R\frac{۱}{\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}}dx\,dy$$

$$=۳\int_۰^{۲\pi}\int_۰^a\frac{r\,drd\theta}{\sqrt{a^۲-r^۲}}=۳\int_۰^{۲\pi}\left[-\sqrt{a^۲-r^۲}\right]_۰^a d\theta=۳\int_۰^{۲\pi}a\,d\theta=۶\pi a$$

6-8 انتگرالهای رویه ای

انتگرالهای رویه ای را می‌توان مانند یک انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیهٔ R از صفحهٔ xy فرض کرد.

با این تفاوت که ناحیهٔ انتگرال گیری به جای R قسمتی از رویهٔ S است. برای این منظور S را به قطعات S_{ij} با مساحت ΔS_{ij} تقسیم کرده مقدار f را در یک نقطهٔ P_{ij} در هر قطعه در مساحت ΔS_{ij} ضرب می‌کنیم. و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^{*})\,\Delta S_{ij}$$

پس وقتی $m,n\to\infty$ از مجموع فوق حد می‌گیریم دراینصورت انتگرال رویه تابع f بر S بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds=\lim_{m\to\infty\ n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^{*})\Delta S_{ij}$$

با توجه به مطالب گفته شده در بخش 7–6 اگر R تصویر رویهٔ S بر صفحهٔ $x\,y$ باشد و $z=f(x,y)$. معادلهٔ رویه باشد، رابطهٔ بالا را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\iint_S f(z,y,z)\,ds=\iint_R f(z,y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

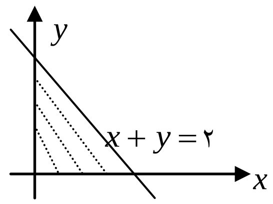
توجه داریم که تمامی روابط بدست آمده در قسمت 7–6 را می‌توان در محاسبهٔ انتگرال رویه ای نیز بکار برد.

1–11–6 مثال: فرض کنید S قسمتی از رویهٔ $z=2x+3y$، $x\geq 0$، $y\geq 0$ و $x+y\leq 2$ باشد، حاصل انتگرال زیر را بدست آورید:

$$\iint_S (x+y+z)\,ds$$

حل: با توجه به مفروضات مساله تصویر صفحهٔ $z=2x+3y$ در شکل زیر نشان داده شده است:

$$ds=\sqrt{1+4+9}\,dx\,dy=\sqrt{14}\,dx\,dy$$



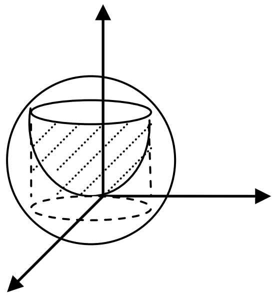
درنتیجه داریم:

$$\iint_S (x+y+z)\,ds=\int_0^2\int_0^{2-x}\sqrt{14}(x+y+2x+3y)\,dy\,dx$$

$$=\sqrt{14}\int_0^2\Big[3xy+2y^2\Big]_0^{2-x}dx=\sqrt{14}\int_0^2\sqrt{14}\big(3x(2-x)+2(2-x)^2\big)\,dx$$

$$= \sqrt{۱۴}\left[۳x^۲ - x^۳ + \frac{۲}{۳}(x-۲)^۳ \right]_۰^۲ = \frac{۲۸\sqrt{۱۴}}{۳}$$

6-8-2 مثال: مساحت قسمتی از رویهٔ $z = x^۲ + y^۲$ را که بوسیلهٔ کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۶$ بریده شده است را بدست آورید.



حل: ابتدا ناحیهٔ تصویر را در صفحهٔ xy مشخص می‌کنیم.

$$\begin{matrix} z = x^۲ + y^۲ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۶ \end{matrix} \Rightarrow z^۲ + z - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} z = -۳ \\ z = ۲ \end{cases}$$

$z = -۳$ غیر قابل قبول است بنابراین $z = ۲$. یعنی ناحیهٔ تصویر عبارتست از نقاط درون و روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ \le ۲$

یعنی $R: x^۲ + y^۲ \le ۲$. از طرفی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ۲x \quad و \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ۲y \quad و \quad \sqrt{۱ + z_x^۲ + z_y^۲} = \sqrt{۱ + ۴(x^۲ + y^۲)}$$

درنتیجه

$$A(s) = \iint_R \sqrt{۱ + ۴(x^۲ + y^۲)}\, dA = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۲}} r\sqrt{۱ + ۴r^۲}\, dr\, d\theta$$

$$= [\theta]_۰^{۲\pi}\left[\frac{۱}{۱۲}(۱ + ۴r^۲)^{\frac{۳}{۲}} \right]_۰^{\sqrt{۲}} - (۲\pi)(\frac{۲۶}{۱۲}) = \frac{۱۳}{۳}\pi$$

6-8-3 مثال: معادلات پارامتری کره ای به شعاع a بصورت زیر است:

$$x = a\cos\theta\sin\varphi \quad و \quad y = a\sin\theta\sin\varphi \quad و \quad z = a\cos\varphi \quad و \quad ۰ \le \theta \le ۲\pi \quad و \quad ۰ \le \varphi \le \pi$$

مساحت آنرا بدست آورید.

حل: فرض کنیم $\vec{R}(\varphi,\theta) = (a\cos\theta\sin\varphi)i + (a\sin\theta\sin\varphi)j + (a\cos\varphi)k$

دراینصورت حاصلضرب اساسی بردارهای مماس عبارتست از:

$$\vec{R}_\varphi \times \vec{R}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\varphi\cos\theta & a\cos\varphi\sin\theta & -a\sin\varphi \\ -a\sin\varphi\sin\theta & a\sin\varphi\cos\theta & ۰ \end{vmatrix}$$

$$=(a^{۲}\sin^{۲}\varphi\cos\theta)\,i+(a^{۲}\sin^{۲}\varphi\sin\theta)\,j+(a^{۲}\sin\varphi\cos\varphi)k$$

پس از خلاصه کردن بدست می‌آوریم: $|\vec{R}_\varphi\times\vec{R}_\theta|=a^{۲}\sin\varphi$

بنابراین مساحت کره برابر است با

$$A(s)=\iint_R|\vec{R}_\varphi\times\vec{R}_\theta|\,dA=\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}a^{۲}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

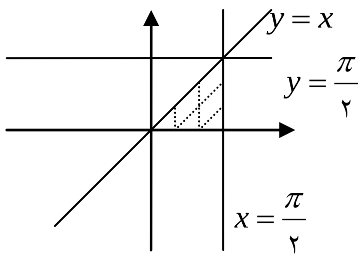
$$=a^{۲}\left[\theta\right]_{\circ}^{۲\pi}\left[-\cos\varphi\right]_{\circ}^{\pi}=a^{۲}(۲\pi)(۲)=۴\pi a^{۲}$$

6-9 نمونه مسائل حل شده

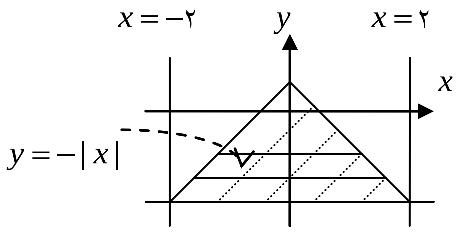
6-9-1: انتگرالهای دوگانهٔ زیر را حل کنید:

1) $I=\int_{-۲}^{۲}\int_{-۲}^{-|x|}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)dy\,dx$

$$I=\int_{\circ}^{۲}\int_{y}^{-y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)dx\,dy=\int_{\circ}^{۲}-y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{y}^{-y}dy=\int_{\circ}^{۲}-y\,(\cos(-۱)-\cos(۱))\,dy=\circ$$



شکل 2



شکل 1

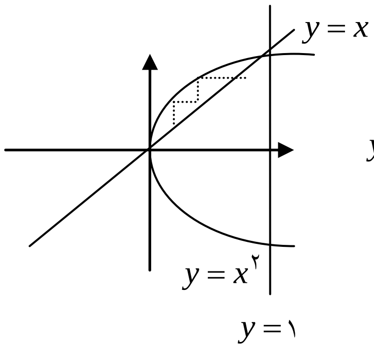
2) $I=\int_{\circ}^{\pi/۲}\int_{y}^{x}\dfrac{\sin x}{x}\,dy\,dx$

$$I=\int_{\circ}^{\pi/۲}\int_{y}^{x}\frac{\sin x}{x}\,dy\,dx=\int_{\circ}^{\pi/۲}y\,\frac{\sin x}{x}\Bigg|_{\circ}^{x}dx=\int_{\circ}^{\pi/۲}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\circ}^{\pi/۲}=۱$$

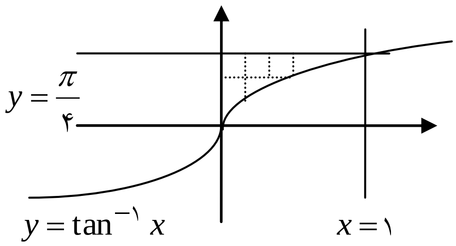
3) $\int_{\circ}^{۱}\int_{\tan^{-۱}x}^{\pi/۴}\ln\cos y\,dy\,dx$

$$I=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\tan y}\ln\cos y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/4}x\ln\cos y\Big]_0^{\tan y}dy$$

$$=\int_0^{\pi/4}-\tan y\ln\cos y\,dy=\frac{(\ln\cos y)^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}$$



شکل 4



شکل 3

4) $\int_0^1\int_{y^2}^{y}\sin\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)dx\,dy$

$$I=\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy\,dx=\int_0^1-\sqrt{x}\cos\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_x^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_0^1-\sqrt{x}(\cos 1-\cos\sqrt{x})dx=\int_0^1-\sqrt{x}\cos 1\,dx+\int_0^1\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$$

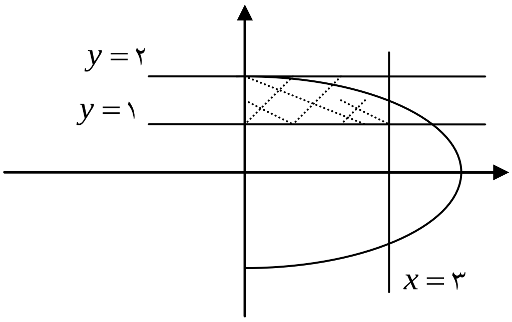
$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[2x\sin\sqrt{x}+2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-2\sin\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{10}{3}\cos 1-2\sin 1$$

5) $\int_0^1\int_0^{Arc\cos y}\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\,dy$

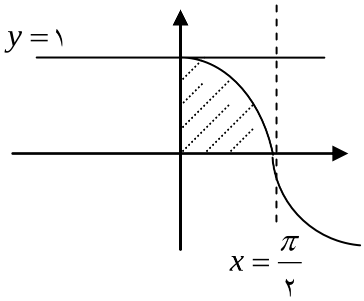
$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x}\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[y\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}\right]_0^{\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$1+\sin^2 x=u\Rightarrow 2\sin x\cos x=du\Rightarrow I=\int_1^2\frac{\sqrt{u}}{2}du=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$



شکل 6



شکل 5

6-9-2: انتگرال های دو گانهٔ زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

1) $\int_0^1\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$

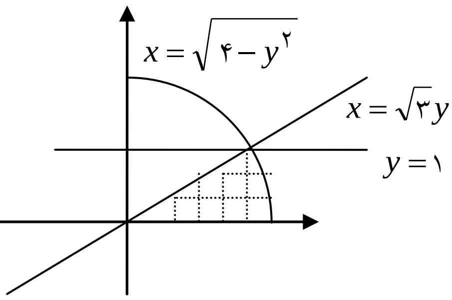
$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\ln r^2\,dr\,d\theta$$

$$J=r \quad ,0\le r\le 2 \quad ,\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$=2\int_0^{\pi/6}d\theta\int_0^2 r\ln r\,dr=2[\theta]_0^{\pi/6}\left[r\ln r-r\right]_0^2$$

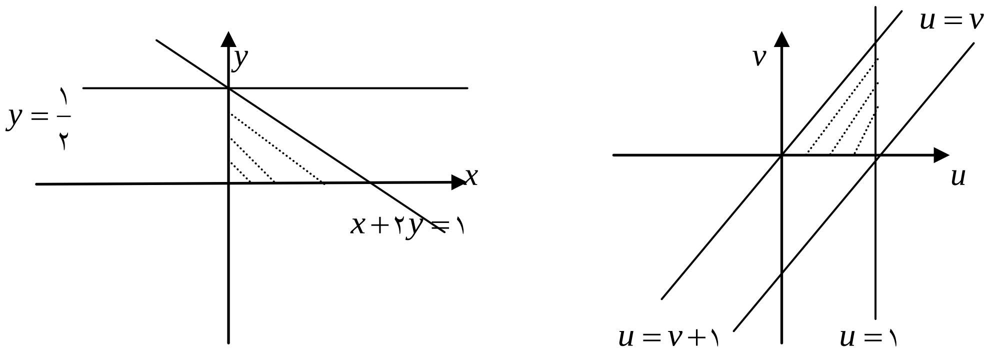
$$=2\times\frac{\pi}{6}\times 2(\ln 2-1)=\frac{\pi}{6}(\ln 2-1)$$



شکل 1

2) $\int_0^{1/2}\int_0^{1-2y} e^{\frac{x}{x+2y}}\,dx\,dy$

$$\begin{cases} x+2y=u \\ x=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0\Rightarrow v=0 \\ x=1-2y\Rightarrow u=1 \\ y=0\Rightarrow u=v \\ y=\frac{1}{2}\Rightarrow u=v+1 \end{cases}$$



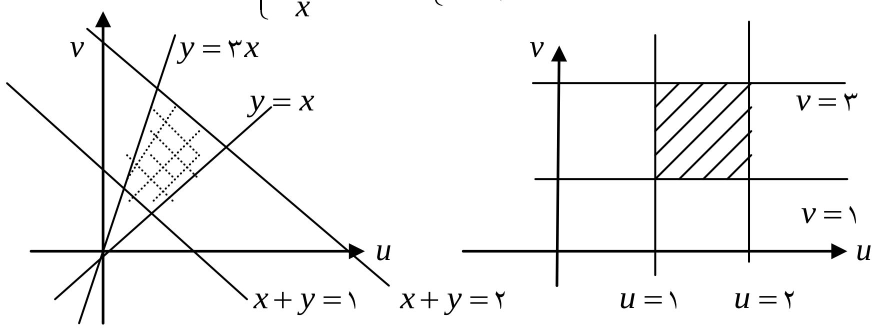
شکل 2

$$J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \Rightarrow \frac{۱}{J} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۲ \Rightarrow J = -\frac{۱}{۲}$$

$$I = \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{u} \frac{۱}{۲} e^{\frac{v}{u}} dv du = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{۱} \left[x e^{\frac{v}{u}} \right]_{۰}^{u} dv = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{۱} u (e - ۱) du = \frac{e - ۱}{۴}$$

3) $\iint\limits_{R} \frac{x + y}{x^{۲}} e^{x+y} dx dy \qquad R: \begin{cases} x + y = ۱ , x + y = ۲ \\ y = x, y = ۳x \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = ۱, u = ۲ \\ v = ۱, v = ۳ \end{cases}$$



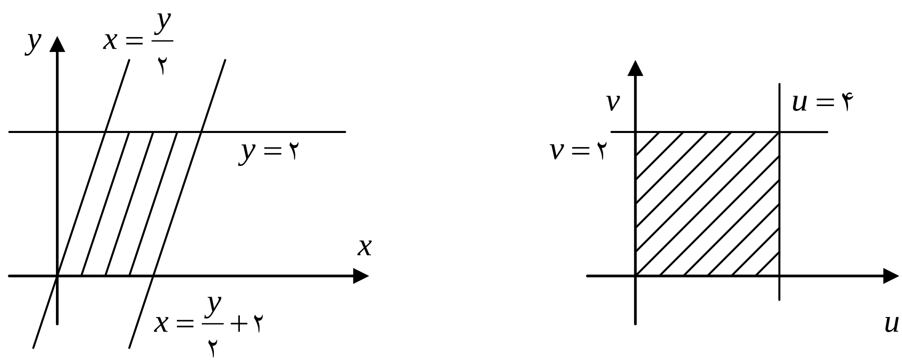
شکل 3

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Rightarrow\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{x+y}{x^2}\Rightarrow J=\frac{x^2}{x+y}$$

$$I=\int_1^3\int_1^2 e^u\,du\,dv=2(e^2-e^1)$$

4) $\int_0^2\int_{y/2}^{y/2+2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$

$$\begin{cases}2x-y=u\\ y=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\Rightarrow v=0\\ y=2\Rightarrow v=2\\ x=\dfrac{y}{2}\Rightarrow u=0\\ x=\dfrac{y}{2}+2\Rightarrow u=1\end{cases}$$



شکل 4

$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\Rightarrow J=\frac{1}{2}$$

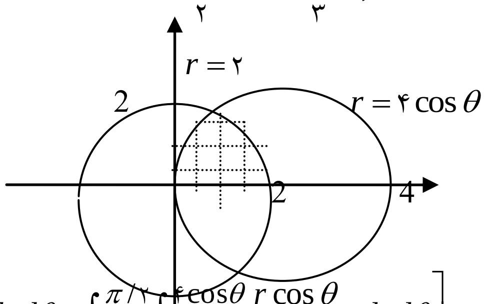
$$I=\int_0^2\int_0^4\frac{1}{2}v^3u\,e^{u^2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\left[\frac{v^4}{4}\right]_0^2\left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^4=e^{16}-1$$

5) $\iint\limits_R\frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy\qquad R:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ (x-2)^2+y^2\le 4\end{cases}$

$$x^2+y^2\le 4\quad\Rightarrow r\le 2$$

$$(x-2)^2+y^2\le 4\Rightarrow r\le 4\cos\theta$$

نقطهٔ تلاقی دو دایره : $\Rightarrow ۴\cos\theta = ۲ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳} \quad , J = r$

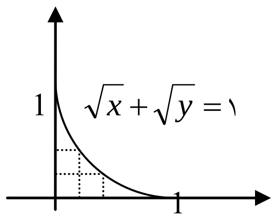


$$I = ۲\left[\int_{۰}^{\pi/۳}\int_{۰}^{۲}\frac{(r\cos\theta)}{r^{۲}}\, r\, dr d\theta + \int_{\pi/۳}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۴\cos\theta}\frac{r\cos\theta}{r^{۲}}\, r\, dr d\theta\right]$$

$$= ۲\left[\int_{۰}^{\pi/۳}\int_{۰}^{۲}\cos\theta\; dr d\theta + \int_{\pi/۳}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۴\cos\theta}\cos\theta\; dr d\theta\right]$$

$$= ۲\left[(\sin\theta)_{۰}^{\pi/۳}(۲) + (۲\theta + \sin\theta)_{\pi/۳}^{\pi/۲}\right] = \sqrt{۳} + ۲ + \frac{۲\pi}{۳}$$

6) $\iint\limits_{R} \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\; dx\, dy \qquad R: \sqrt{x} + \sqrt{y} \le ۱$



$$\begin{cases} x = r\cos^{۴}\theta \\ y = \sin^{۴}\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos^{۴}\theta & -۴r\cos^{۳}\theta\sin\theta \\ \sin^{۴}\theta & ۴r\sin^{۳}\theta\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= ۴r\cos^{۳}\theta\sin^{۳}\theta(\cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta) = ۴r\cos^{۳}\theta\sin^{۳}\theta$$

$$I = \int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{۱} ۴\sqrt[۴]{r}\cos^{۳}\theta\sin^{۳}\theta\, d\theta = ۴\int_{۰}^{\pi/۲}\left[\frac{۴}{۹}r^{\frac{۹}{۴}}\right]_{۰}^{۱}\cos^{۳}\theta\sin^{۳}\theta\, d\theta$$

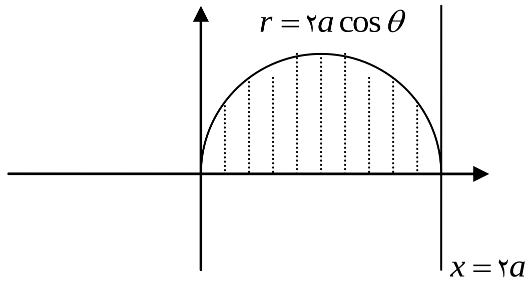
$$= \frac{۱۶}{۹}\int_{۰}^{\pi/۲}\cos\theta(۱ - \sin^{۲}\theta)\sin^{۳}\theta\, d\theta = \frac{۱۶}{۹}\int_{۰}^{\pi/۲}(\cos\theta\sin^{۳}\theta - \cos\theta\sin^{۵}\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{۱۶}{۹}\left[\frac{۱}{۴}\sin^{۴}\theta - \frac{۱}{۶}\sin^{۶}\theta\right]_{۰}^{\pi/۲} = \frac{۱۶}{۹}\left[\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶}\right] = \frac{۴}{۲۷}$$

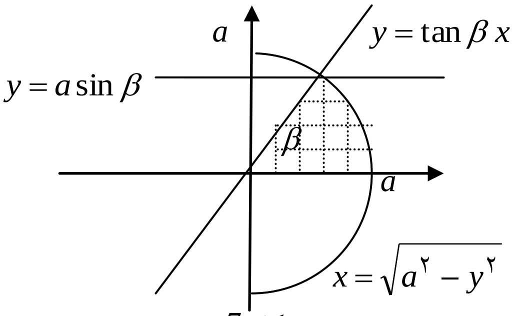
7) $\int_{۰}^{a\sin\beta}\int_{y\cot\beta}^{\sqrt{a^{۲} - y^{۲}}} \ln(x^{۲} + y^{۲})\, dxdy$

$$I=\int_0^{\beta}\int_0^{a} r\ln r^2\,dr\,d\theta=2\beta\int_0^{a} r\ln r\,dr$$

$$=2\beta\left[\frac{r^2}{2}\ln r-\frac{r^2}{4}\right]_0^{a}=a^2\beta\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)$$



شکل 8



شکل 7

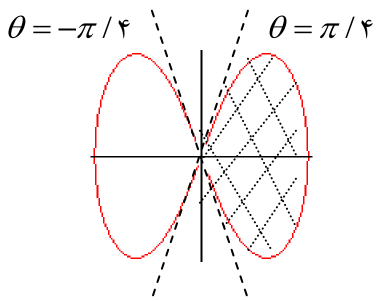
8) $\displaystyle\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$ $\qquad$ $y=\sqrt{2ax-x^2}\Rightarrow r=2a\cos\theta$

$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=4a^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=4a^4\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=4a^4\left[\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta-\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 4\theta}{8}\,d\theta\right]=a^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\right)$$

6-9-3: مساحتی که توسط پروانهٔ $r^2=4\cos 2\theta$ محدود شده است را بدست آورید.

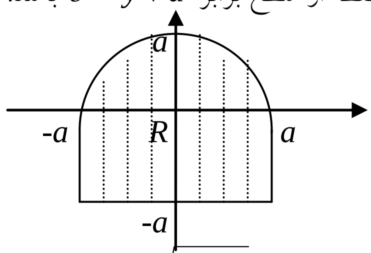


$$A=۲\iint\limits_R dxdy=۲\int_{-\pi/۴}^{+\pi/۴}\int_{۰}^{\sqrt{۴\cos۲\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$=۲\int_{-\pi/۴}^{+\pi/۴}\left(\frac{r^۲}{۲}\right)_{۰}^{\sqrt{۴\cos۲\theta}} d\theta=\int_{-\pi/۴}^{+\pi/۴}۴\cos۲\theta\,d\theta$$

$$=۲\sin۲\theta\Big|_{-\pi/۴}^{+\pi/۴}=۴$$

6-9-4: مرکز ثقل سطح محدود به نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^۲-x^۲}$ و خطوط $x=\pm a$ و $y=-a$ را دز صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه از سطح برابر $\delta=y+a$ باشد.



$$M=\iint\limits_R \delta\,dxdy=\iint\limits_R (x+y)\,dxdy=\int_{-a}^{a}\int_{a}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}(y+a)\,dy\,dx$$

$$M=\int_{-a}^{a}\left[\frac{۱}{۲}\left(a^۲-x^۲-a^۲\right)+a\left(\sqrt{a^۲+x^۲}+a\right)\right]dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\left(a\sqrt{a^۲-x^۲}+a^۲-\frac{x^۲}{۲}\right)dx=a^۳\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{۵}{۳}\right)$$

$$M_y=\iint\limits_R x\delta\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}(xy+xa)\,dy\,dx$$

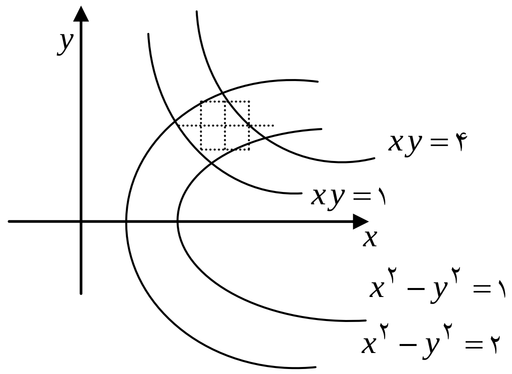
$$=\int_{-a}^{a}\left[ax\left(\sqrt{a^۲+x^۲}+a\right)+\frac{۱}{۲}x(-x^۲)\right]dx$$

$$M_x=\iint\limits_R y\delta\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}(y^۲+ya)\,dy\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\left[\frac{۱}{۲}a(-x^۲)+\frac{۱}{۳}((a^۲-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}-a^۳)\right]dx=\left(\frac{۳\pi}{۸}-۱\right)a^۴$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=0 \quad ,\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{3\pi}{8}-1}{\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}}a$$

6-9-5: گشتاور مرتبه دوم نسبت به مبداء ناحیهٔ واقع در صفحهٔ xy و محدود به رویه های $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} xy=1 \\ xy=4 \end{cases}$ را با فرض چگالی برابر 1 بدست آورید.



شکل 5-9-6

$$M_D=\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$u=x^2-y^2$$

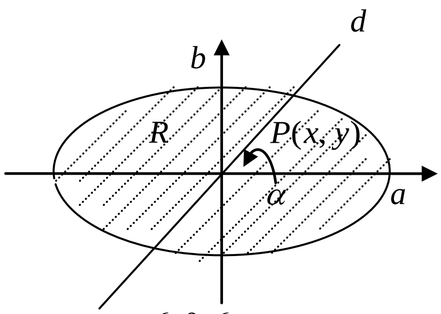
$$v=xy \qquad \Rightarrow \frac{1}{J}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}=2(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2(x^2+y^2)} \Rightarrow M_D=\int_2^4\int_1^2 \frac{1}{2}\,du\,dv=1$$

6-9-6: ورقه ای بشکل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مفروض است گشتاور ماند این ورقه را نسبت به خطهٔکه از مبداء رسم می شود و با قطر بزرگتر به طول $2a$ زاویهٔ α می سازد را حساب کنید. (δ ثابت است)

$$d: y=\tan\alpha\, x$$

d از خط $P(x,y)$ فاصلهٔ نقطهٔ $=h=\frac{|x\sin\alpha-y\cos\alpha|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=|x\sin\alpha-y\cos\alpha|$



شکل 6-9-6

d گشتاور ماند نسبت به خط : $I_d = \iint\limits_R \delta h^۲ dx\,dy = \iint\limits_R (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^۲ dx\,dy$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a} = r\cos\theta \Rightarrow x = ar\cos\theta\\ \frac{y}{b} = r\sin\theta \Rightarrow y = br\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow J = abr \quad ,\circ \le \theta \le ۲\pi \quad ,\circ \le r \le ۱$$

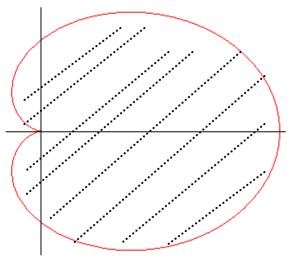
$$I_d = ab\int_\circ^{۲\pi}\int_\circ^{۱} r^۳ (a\sin\alpha\cos\theta - b\cos\alpha\sin\theta)^۲\, dr\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{۴}\int_\circ^{۲\pi}(a^۲\sin^۲\alpha\cos^۲\theta + b^۲\cos^۲\alpha\sin^۲\theta - ۲ab\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{۴}\int_\circ^{۲\pi}(a^۲\sin^۲\alpha\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲} + b^۲\cos^۲\alpha\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} - ab\sin\alpha\cos\alpha\sin ۲\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{ab\pi}{۴}(a^۲\sin^۲\alpha + b^۲\cos^۲\alpha)$$

6-9-7: مرکز جرم ناحیهٔ R که توسط کاردیوئید $r = ۲(۱+\cos\theta)$ محدود شده است را بدست آورید.
(δ ثابت)



$$M=\iint_R \delta\,dx\,dy=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$
$$=2\delta\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=2\delta\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta\right)^2 d\theta$$
$$=2\delta\,(2\pi+\pi)=6\pi\,\delta$$
$$M_y=\iint_R x\,\delta\,dA=\delta\int_0^{2\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac{8\,\delta}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^3\,d\theta$$
$$=\frac{8\,\delta}{3}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+3\cos\theta^3+3\cos^2\theta+\cos\theta)\,d\theta=10\,\pi\,\delta$$
$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{10\,\pi\,\delta}{6\pi\,\delta}=\frac{5}{3}\quad,\bar{y}=0$$

6-9-8: فرض کنید s قسمتی از سطح $z=xy$ است که توسط استوانهٔ $x^2+y^2=1$ بریده می شود انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\iint_s \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$s:z=xy\Rightarrow \vec{n}=\frac{-y\vec{i}-x\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Rightarrow ds=\frac{dA}{\cos\gamma}=\sqrt{1+x^2+y^2}\;dA$$
$$I=\iint_s \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint_R \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA=\iint_R \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+r^2}\;dr\,d\theta\xrightarrow{r=\tan t} I=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{\cos t}\cdot\tan t\right]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\frac{\sin t\tan t}{\cos^2 t}\,dt=\pi\left[\frac{\tan t}{\cos t}+\ln|\sec t+\tan t|\right]_0^{\pi/4}$$
$$=\pi\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

6-11 نمونه مسائل حل نشده

6-11-1: انتگرالهای دو گانهٔ زیر را حل کنید:

1) $\int_0^1 \int_{e^x}^{e} \frac{1}{\ln y} \, dy \, dx$

2) $\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{1} \sec^2(\cos x) \, dx \, dy$

3) $\int_{۰}^{\pi/۲}\int_{۰}^{y}\cos ۲y\,(۱-k^{۲}\sin^{۲} x)^{\frac{۱}{۲}}\,dx\,dy \quad k\neq ۱$

4) $\int_{۰}^{۱}\int_{\sqrt{y}}^{۱}\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۳}}}\,dx\,dy$

5) $\int_{۱}^{۲}\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\left(\frac{\pi x}{۲y}\right)dy\,dx$

6) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x}\cos\frac{\pi(x-y)}{۲(x+y)}\,dy\,dx$

7) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x} e^{\frac{x}{x+y}}\,dy\,dx$

8) $\int_{۰}^{۸}\int_{\sqrt[۳]{x}}^{۲}\frac{۱}{y^{۴}+۱}\,dy\,dx$

9) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$

10) $\int_{۰}^{۱}\int_{۲x}^{۲} x\cos y^{۳}\,dy\,dx$

11) $\int_{۰}^{۱}\int_{x^{۲}}^{x}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)dy\,dx$

12) $\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{x}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\,dy\,dx$

13) $\int_{۰}^{۱}\int_{x^{۲}}^{x} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}}\,dy\,dx$

14) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{(x^{۲}+y^{۲}+۱)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx\,dy$

15) $\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty} e^{-(x+y)}\sin\left(\frac{\pi y}{x+y}\right)dx\,dy$

16) $\int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{\sqrt{۱-(x-۱)^{۲}}}\frac{x+y}{x^{۲}+y^{۲}}\,dx\,dy$

17) $\int_{۰}^{۱}\int_{y}^{\sqrt{y}}\cos\left(\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۲}}{۲}\right)dx\,dy$

18) $\iint_{R}(x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}})\,dA \qquad R: x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}\le ۱$

19) $\iint_{R}\sqrt{۲y-y^{۲}-۴x^{۲}}\,dA \qquad R: ۴x^{۲}+(y-۱)^{۲}\le ۱$

20) $\int_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}^{۱}\int_{\sqrt{۱-x^{۲}}}^{x}\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\,dy\,dx$

21) $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}\sin(\pi(۱-x-y))\,dy\,dx$

22) $\iint_{R}\frac{y}{x}\sin(x^{۲}+y^{۲})\,dx\,dy \qquad R:\begin{cases} y=x, & y=\sqrt{۳}x\\ y=\sqrt{۱-x^{۲}}, & y=\sqrt{۴-x^{۲}}\end{cases}$

23) $\iint_R (x-y)^۲ \sin^۲(x+y)\,dx\,dy \qquad R:\begin{cases} x-y=\pm\pi \\ x+y=\pi,۳\pi \end{cases}$

24) $\iint_R \frac{x^۲ \sin(xy)}{y}\,dA \qquad R:\begin{cases} x^۲=ay, x^۲=by \\ y^۲=px, y^۲=qx \end{cases}$

25) $\iint_R \frac{x}{x^۲+y^۲}\,dA \qquad R:\begin{cases} x^۲+y^۲\le ۴ \\ (x-۲)^۲+y^۲\le ۴ \end{cases}$

26) $\iint_R \sin^۲(x+y)\,dx\,dy \qquad R: |x|+|y|\le \frac{\pi}{۲}$

27) $\int_{-۱}^{\circ}\int_{\sqrt{y+۱}}^{۱} \sin x^۳\,dx\,dy$

28) $\int_{\circ}^{\sqrt{۲}}\int_{-\sqrt{۴-۲y^۲}}^{\sqrt{۴-۲y^۲}} y\,dy\,dx$

29) $\iint_R x^۲-۴y^۲\,dA \qquad R:\begin{cases} x+۲y=\pm ۲ \\ x-۲y=\pm ۱ \end{cases}$

30) $\int_{-۲}^{۲}\int_{|x|}^{۲} (۱+\sin\left(\frac{x}{y}\right))\,dy\,dx$

31) $\iint_R \sin\frac{\pi(y-x)}{x+y}\,dA \qquad R:\begin{cases} x+y=۱,۲ \\ x=\circ, y=\circ \end{cases}$

32) $\int_{\circ}^{۱}\int_{\circ}^{۱} \frac{x-y}{(x+y)^۳}\,dy\,dx$

33) $\int_{\circ}^{\pi/۲}\int_{\circ}^{\sqrt{۱-x^۲}} e^{-(x^۲+y^۲)}\,dy\,dx$

$\int_{\circ}^{۲}\int_{\circ}^{\sqrt{۴-x^۲}} \frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\,dy\,dx$

35) $\iint_R (\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{y}{x}})\,dA \qquad R:\begin{cases} xy=۱,۹ \\ y=x,۴x \end{cases}$

34)

36) $\iint_R (x-y)^۲ \sin(x^۲-y^۲)\,dA$ ($A\big|_{\circ}^{\circ}, B\big|_{-۱}^{۱}, C\big|_{\circ}^{۲}, D\big|_{۱}^{۱}$ متوازی الضلاعی به رئوس R)

37) $\iint_R e^{(x+y)^۲}\,dA \qquad R:\begin{cases} x+y=۱,۲ \\ x,y\ge\circ \end{cases}$

38) $\iint_R \sqrt{(a^{\frac{۲}{۳}}-(x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}))^۳}\,dA \qquad R: x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$

39) $\iint_R \frac{dA}{(۱+x^۲+y^۲)^۲} \qquad R:(x^۲+y^۲)^۲-(x^۲-y^۲)=\circ$

40) $\iint\limits_R e^{\frac{-xy}{۲}}\, dy\, dx \qquad R:\begin{cases} y=\frac{۱}{۴}x\,,\ y=۲x \\ xy=۱\,,\ xy=۴ \end{cases}$

41) $\iint\limits_R \sqrt{(x-y)(x+۴y)}\, dA \qquad$ ($A\big|_{۰}^{۰}, B\big|_{۱}^{۱}, C\big|_{۰}^{۵}, D\big|_{-۱}^{۴}$ متوازی الضلاعی به رئوس R)

42) $\iint\limits_R (\sqrt{x}+\sqrt{y})^{۲}\, dx\, dy \qquad R:\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$

43) $\iint\limits_R e^{x+y}\, dx\, dy \qquad R:|x|+|y|\le ۱$

44) $\iint\limits_R (x^{۲}+y^{۲})\, dA \qquad R:\begin{cases} xy=۲\,,\ xy=۴ \\ x^{۲}-y^{۲}=۱\,,\ x^{۲}-y^{۲}=۴ \end{cases}$

45) $\iint\limits_R \sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}}\, dA \qquad R:\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$

6-11-2: تغییر متغیر $x=u+v$ و $y=v-u^{۲}$ مثلث T برئوس $(۰,۰)\,,(۲,۰)\,,(۰,۲)$ در صفحهٔ $u\,v$ را به ناحیهٔ S در صفحهٔ $x\,y$ تبدیل می‌کند. اولاً s را رسم کنید ثانیاً $\iint\limits_S (x-y+۱)^{۲}\, dx\, dy$ را بدست آورید.

6-11-3: انتگرال دو گانهٔ $\iint\limits_R f(xy)\, dx\, dy$ روی ناحیهٔ R که محدود به دو منحنی $xy=۱$ و $xy=\sqrt{۳}$ و خطوط $y=\frac{۱}{۴}x$ و $y=x$ مفروض است. نشان دهید:

$$\iint\limits_R f(xy)\, dx\, dy = \ln ۲\int_{۱}^{\sqrt{۳}} f(u)\, du$$

سپس بازاء $f(x,y)=\frac{۱}{۱+x^{۲}y^{۲}}$ انتگرال بالا را بدست آورید.

6-11-4: مساحت ناحیه ای را که توسط منحنی های $xy=۴$ و $xy=۸$ و $xy^{۳}=۵$ و $xy^{۳}=۱۵$ محدود شده است را بدست آورید.

6-11-5: ثابت کنید:

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^۲+y^۲)}\sin(x^۲+y^۲)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^۲+y^۲)}\cos(x^۲+y^۲)\,dx\,dy=\frac{\pi}{۲}$$

2) $\iint\limits_{S} f(ax+by+c)\,dx\,dy=۲\int_{-۱}^{۱}\sqrt{۱-u^۲}\,f(u\sqrt{a^۲+b^۲}+c)\,du$

$$S: x^۲+y^۲\le ۱\,,\, a^۲+b^۲\neq ۰$$

3) $\iint\limits_{S} f(xy)\,dx\,dy=\int_{-۱}^{۱} f(u)\,du \qquad S: |x|+|y|\le ۱$

6-11-6: ورقهٔ نازکی بشکل ناحیهٔ R محدود به سهمی $y=x^۲-۴$ و خط $y=x-۲$ مفروض است، اگر $S=x+y+۱$ باشد مرکز جرم این ورقه را بدست آورید.

6-11-7: حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول فضا محدود به صفحهٔ $y+z=۳$ و استوانهٔ $x^۲+y^۲=۴$ می‌باشد.

6-11-8: حجم جسمی را بدست آورید که به سطوح $z=x+y$ و $z=۰$ و $xy=۱,۲$ و $y=۲,۲x$ محدود شده است.

6-11-9: حجم ناحیهٔ محدود به صفحهٔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ وصفحات مختصات را در یک هشتم اول فضا بدست آورید.

6-11-10: مرکز جرم و گشتاور لختی یک ورقهٔ نازک را حول محور x درصورتیکه دارای چگالی ثابت $\delta=۶۰$ باشد و از راست به سهمی $y^۲+x=۰$ و از چپ به خط $y=x+۲$ محدود باشد را بیابید.

6-11-11: مرکز جرم ناحیه ای واقع در ربع اول را بیابید که به محور x و سهمی $y^۲=۲x$ و خط $x+y=۴$ محدود شده است.

6-11-12: گشتاورهای خم $y=\frac{\sin^۲ x}{x^۲}$ را بیابید. در صورتیکه منحنی دارای $\delta=۱$ و در بازهٔ $\pi\le x\le ۲\pi$ و محور x محدود شده باشد.

6-11-13: مرکز جرم ناحیه ای در صفحهٔ $x\,y$ را حول محور x بیابید که به خمهای $y=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $y=-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و خطوط $x=۰$ و $x=۱$ محدود شده باشد.

6-11-14: یک ورقهٔ مستطئل شکل با چگالی ثابت $\delta = ۱$ ناحیه ای را می‌پوشاند که به خطوط $x = ۴$ و $y = ۲$ محدود و در ربع اول واقع است گشتاور لختی I_a حول خط $y = a$ از انتگرال زیر بدست می‌آید. بازاء چه مقداری از a، I_a مینیمم است؟

$$I_a = \int_{۰}^{۴}\int_{۰}^{۲}(y-a)^{۲}\,dy\,dx$$

6-11-15: اولاً مساحت ناحیه ای از صفحهٔ محدود به منحنی $r^{۲} = ۴a^{۲}\cos ۲\theta$ را بیابید ثانیاً اگر R ناحیهٔ داخل این منحنی قاعدهٔ جسمی باشد که از بالا توسط نیمکرهٔ $r^{۲} + z^{۲} = ۴a^{۲}$ محدود شده است، حجم جسم را بیابید ($z > ۰$ فرض شود).

6-11-16:

6-11-44: مرکز جرم جسم محصور به رویه های $r=۳\cos\theta$ و $z=۲r^{۲}$ و صفحهٔ $z=۰$ را با چگالی $\delta=k\sin\theta$ بدست آورید.

6-11-45: ناحیهٔ D از فضا محدود است به بیضیگون $x^{۲}+y^{۲}+\frac{z^{۲}}{۴}=۱$ و نیمهٔ بالایی مخروط $x^{۲}+y^{۲}=\frac{z^{۲}}{۴}$، $z\geq۰$ اگر M جرم جسم بشکل D با چگالی ثابت باشد، گشتاور ماند جسم را حول محور oz بدست آورید سپس $\iiint\limits_{D}\frac{۱}{z^{۳}}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+\frac{z^{۲}}{۴}}\,dN$ را بدست آورید.

6-11-46: جسم صلبی محدود به مخروط $z=r$ و استوانهٔ $r^{۲}=a^{۲}\cos ۲\theta$ است اگر چگالی در هر نقطه $\delta=cr$ باشد، جرم جسم را حساب کنید.

6-11-47: حجم ناحیهٔ D که توسط رویه های $x^{۲}+y^{۲}=۲x$ و $۴z=x^{۲}+y^{۲}$ و $z^{۲}=x^{۲}+y^{۲}$ محدود شده است را بدست آورید.

6-11-48: جسم D محدود است به مخروط های $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و $z=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و کرهٔ $z^{۲}+x^{۲}+y^{۲}=۴$ اگر $\delta=۱$ باشد، دراینصورت مختص سوم مرکز جرم $\bar{z}$ را بدست آورید.

6-11-49: ناحیهٔ D محصور به دو هذلولیگون $\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{y^{۲}}{۴}-\frac{z^{۲}}{۱۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}-\frac{z^{۲}}{۱۲}=۱$ و دو مخروط $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و $z=-\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ است، اگر چگالی هر نقطه (x,y,z) از D به صورت زیر بیان شود

$$\delta(x,y,z)=\frac{\sqrt{۴x^{۲}+۴y^{۲}-z^{۲}}}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

دراینصورت جرم این جسم را بدست آورید.

6-11-50: گشتاور ماند نسبت به محور z های جسم صلبی که از پایین به سهمیگون $۳az=x^{۲}+y^{۲}$ و از بالا به کرهٔ $z^{۲}+x^{۲}+y^{۲}=۴a^{۲}$ محدود شده است را بدست آورید.