

$$F_{ext}(t) = F_0 \left[0.1 + \frac{1}{\pi} \sin(0.1\pi) \cos(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \sin(0.2\pi) \cos(2\omega t) \right. \\ \left. + \frac{1}{3\pi} \sin(0.3\pi) \cos(3\omega t) + \dots \right] \\ = F_0 [0.1 + 0.197 \cos(\omega t) + 0.187 \cos(2\omega t) \\ + 0.172 \cos(3\omega t) + \dots]$$

مخزجهای تشدید در معادله (۷۰.۳) از رابطه زیر به دست می آیند

$$D_n = \left[\left(\omega_0^2 - n^2 \frac{\omega_0^2}{4} \right)^2 + 4(0.1)^2 \omega_0^2 n^2 \frac{\omega_0^2}{4} \right]^{1/2} \\ = \left[\left(1 - \frac{n^2}{4} \right)^2 + 0.04 n^2 \right]^{1/2} \omega_0^2$$

بنابراین

$$D_0 = \omega_0^2 \quad D_1 = 0.757 \omega_0^2 \quad D_2 = 0.2 \omega_0^2 \quad D_3 = 1.285 \omega_0^2$$

زاویه های فاز، معادله (۷۱.۳)، عبارت اند از

$$\varphi_n = \tan^{-1} \left(\frac{0.2n\omega_0^2/2}{\omega_0^2 - n^2\omega_0^2/4} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.2n}{4 - n^2} \right)$$

که از آنجا داریم

$$\varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = \tan^{-1}(0.1) = 0.0997$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \infty = \pi/2 \quad \varphi_3 = \tan^{-1}(-0.24) = -0.246$$

بنابراین، حرکت حالت پایای سیستم به صورت سری زیر، معادله (۶۹.۳)، بیان می شود

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [0.1 + 0.26 \cos(\omega t - 0.0997) + 0.935 \sin(2\omega t) \\ + 0.134 \cos(3\omega t + 0.246) + \dots]$$

جمله غالب، جمله ای شامل هماهنگک دوم، $2\omega = \omega_0$ ، است؛ زیرا ω نزدیک به بسامد تشدید است. همچنین به فاز این جمله، یعنی $\cos(2\omega t - \pi/2) = \sin(2\omega t)$ ، توجه کنید.

مسائل

۱۰۳ سیم گیتاری با بسامد ۵۱۲ Hz (یک گام هشت تایی بالای C وسط در مقیاس موسیقی)

ارتفاع هماهنگ می‌کند. اگر دامنه نوسان نقطه مرکز سیم $200\pi \text{ m}$ (2 mm) باشد، سرعت و شتاب بیشینه در آن نقطه چیست؟

۲۰۳ پیستونی با دامنه 1 m در حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند. اگر با سرعت 0.5 m/s از مرکز حرکتش عبور کند، دوره تناوب نوسان چیست؟

۳۰۳ ذره‌ای با بسامد 10 Hz حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند. جابه‌جایی x را در هر لحظه t برای شرایط اولیه زیر بیابید

$$t=0 \quad x=0.25 \text{ m} \quad \dot{x}=0.1 \text{ m/s}$$

۴۰۳ صحت روابط بین چهار کمیت A ، B ، φ ، و A را که درست بعد از معادله (۸.۳) داده شده‌اند، تحقیق کنید.

۵۰۳ سرعت ذره‌ای که حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند، به‌ازای جابه‌جایی x_1 عبارت از $\dot{x}_1$ و به‌ازای جابه‌جایی x_2 عبارت است از $\dot{x}_2$. بسامد زاویه‌ای و دامنه حرکت را بر حسب کمیت‌های داده شده به‌دست آورید.

۶۰۳ شتاب گرانی در سطح ماه در حدود یک ششم شتاب گرانی در روی زمین است. نصف زمان تناوب یک آونگ ساده به‌طول یک متر بر روی ماه چقدر است؟

۷۰۳ دو فنر که ضریب سفتی آنها به‌ترتیب k_1 و k_2 است، در وضعیت قائم قرار داده شده‌اند، تا یک تک شیء به‌جرم m را نگه دارند. نشان دهید که هرگاه فنرها موازی بسته شوند، بسامد زاویه‌ای نوسان عبارت است از: $[(k_1 + k_2)/m]^{1/2}$ ، و هرگاه متوالی بسته شده باشند، برابر $[k_1 k_2 / (k_1 + k_2) m]^{1/2}$ است.

۸۰۳ فنری به‌ضریب سفتی k جعبه‌ای به‌جرم M را نگه می‌دارد؛ در داخل آن جعبه جسمی به‌جرم m قرار دارد. اگر سیستم را به‌اندازه d از وضعیت تعادل به‌پایین بکشیم و آنگاه رهاش کنیم، نیروی واکنش میان آن جسم و کف جعبه را به‌صورت تسابعی از زمان پیدا کنید. به‌ازای چه مقدار d جسم دقیقاً شروع به‌ترك کف جعبه در بالاترین وضعیت نوسانهای عمودی می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم‌پوشید.

۹۰۳ نشان دهید که نسبت دو بیشینه متوالی در جابه‌جایی یک نوسانگر هماهنگ میرا مقدار $Ae^{-\gamma t}$ است ثابت. [یادآوری: بیشینه‌ها در نقاط تماس منحنی جابه‌جایی با منحنی $Ae^{-\gamma t}$ واقع نمی‌شوند].

۱۰۰۳ بسامد یک نوسانگر هماهنگ میرا، f_d ، برابر 100 Hz ، و نسبت دامنه دو بیشینه متوالی یک دوم است. (الف) بسامد نامیرای این نوسانگر، f ، چقدر است؟ (ب) بسامد تشدید، f_r ، چقدر است؟

۱۱۰۳ به‌فرض آنکه: دامنه یک نوسانگر هماهنگ میرا بعد از n نوسان کامل $1/e$ مقدار اولیه‌اش افت کند، نشان دهید که نسبت دوره تناوب این نوسان به‌دوره تناوب همان نوسانگر بدون میرایی از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{T_d}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

که در رابطه آخر اگر n بزرگ باشد، تقریب صادق است. (فرمولهای تقریبی را در پیوست د ببینید.)

۱۲۰۳ تمام بخشهای مثال ۷.۳ را برای حالتی که در آن ضریب میرایی نمایی γ نصف مقدار بحرانی، و بسامد محرك مساوی ω_0 باشد، انجام دهید.

۱۳۰۳ برای نوسانگر هماهنگی با میرایی جزئی داریم: $\omega \ll \omega_0$ ، نشان دهید که بسامد محرکی که به ازای آن دامنه حالت پایا نصف دامنه حالت پایا در بسامد تشدید است، عبارت خواهد بود از: $\omega \simeq \omega_0 \pm \gamma/\sqrt{3}$.

۱۴۰۳ نشان دهید که ضریب کیفیت، Q ، يك نوسانگر هماهنگ با میرایی جزئی مساوی است با نسبت دامنه حالت پایا در بسامد تشدید به دامنه در بسامد محرك صفر، به ازای مقدار معلوم دامنه واداشته F_0 .

۱۵۰۳ نوسانگر هماهنگ میرایی توسط نیروی خارجی به شکل

$$F_{ext} = F_0 \sin \omega t$$

واداشته می شود. نشان دهید که جواب حالت پایا از رابطه زیر به دست می آید

$$x(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)$$

که $A(\omega)$ و φ در عبارت هایی که در معادلات (۳۷.۳) و (۳۸.۳) به دست آمده اند، همسان اند. ۱۶۰۳ معادله دیفرانسیل حرکت نوسانگر هماهنگ میرایی را که توسط يك نیروی هماهنگ میرا، به شرح زیر، واداشته می شود، حل کنید

$$F_{ext}(t) = F_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$$

[دانهمایی: $e^{-\alpha t} \cos \omega t = \operatorname{Re}(e^{-\alpha t + i\omega t}) = \operatorname{Re}(e^{\beta t})$ که $\beta = -\alpha + i\omega$. جوابی را به صورت $Ae^{\beta t}$ فرض کنید.]

۱۷۰۳ آونگ ساده ای به طول l با دامنه 45° نوسان می کند. (الف) دوره تناوب آن چقدر است؟ (ب) اگر این آونگ به عنوان وسیله آزمایشی برای تعیین مقدار g در آزمایشگاه به کار رود، خطای حاصل را در استفاده از فرمول مقدماتی $T_0 = 2\pi(l/g)^{1/2}$ پیدا کنید. (ج) مقدار تقریبی هماهنگ سوم موجود در نوسان آونگ را بیابید.

۱۸۰۳ صحت معادلات (۶۵.۳) و (۶۶.۳) در متن درس را تحقیق کنید.

۱۹۰۳ نشان دهید که سری فوریه برای يك «موج مربعی» دوره ای به صورت زیر است

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

که در آن

$$f(t) = +1 \quad \text{به ازای } 0 < \omega t < \pi, \quad 0 < \omega t < 3\pi, \quad 2\pi < \omega t < 4\pi, \quad \text{و غیره}$$