
بسم الله الرحمن الرحيم

فصل ۲۷- نوسانات الکترومغناطیسی و جریان متناوب

۱- مقدمه

۲- نوسانات LC ، بررسی کیفی

۳- قیاس الکتریکی - مکانیکی

٤- نوسانات LC ، بررسی کمی

٥- نوسانهای میرا در مدار RLC

٦- جریان متناوب

۷- نوسانهای واداشته

۸- سه مدار ساده

۹- مدار RLC متوالی

۱۰- توان در مدارهای جریان متناوب

۱۱- مبدلها

۹- مدار RLCمتوالی

اکنون می‌توانیم نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب معادلهٔ ۲۷-۲۸ را برای مدار کامل شکل ۲۷-۷ به کار بریم

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m \sin \omega_d t \quad (\text{emf اعمال شده}) \qquad (۵۵-۲۷)$$

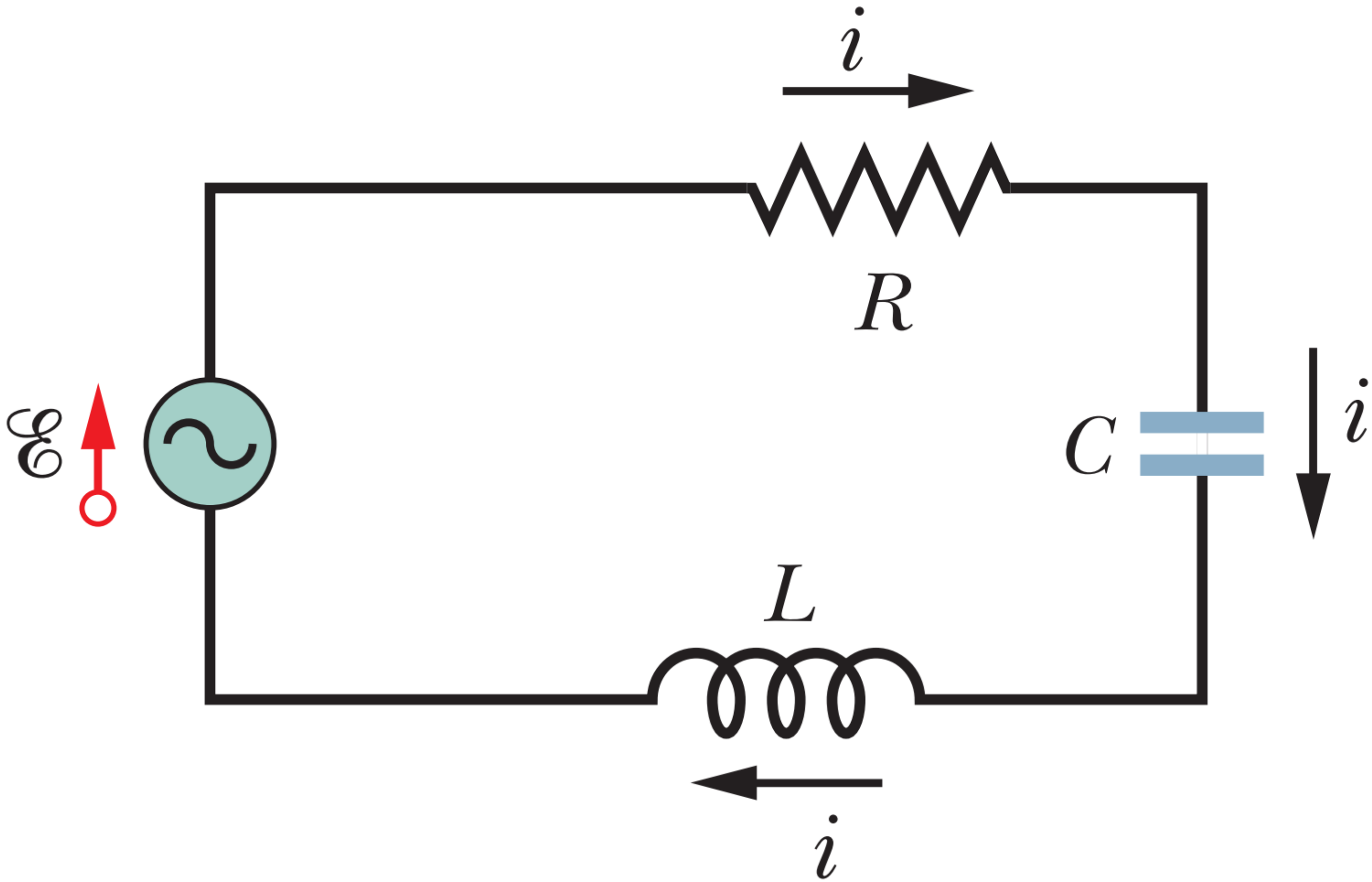
چون R، L و C متوالی‌اند، جریان یکسان زیر در هر سه ایجاد می‌شود

$$i = I \sin(\omega_d t - \phi) \qquad (۵۶-۲۷)$$

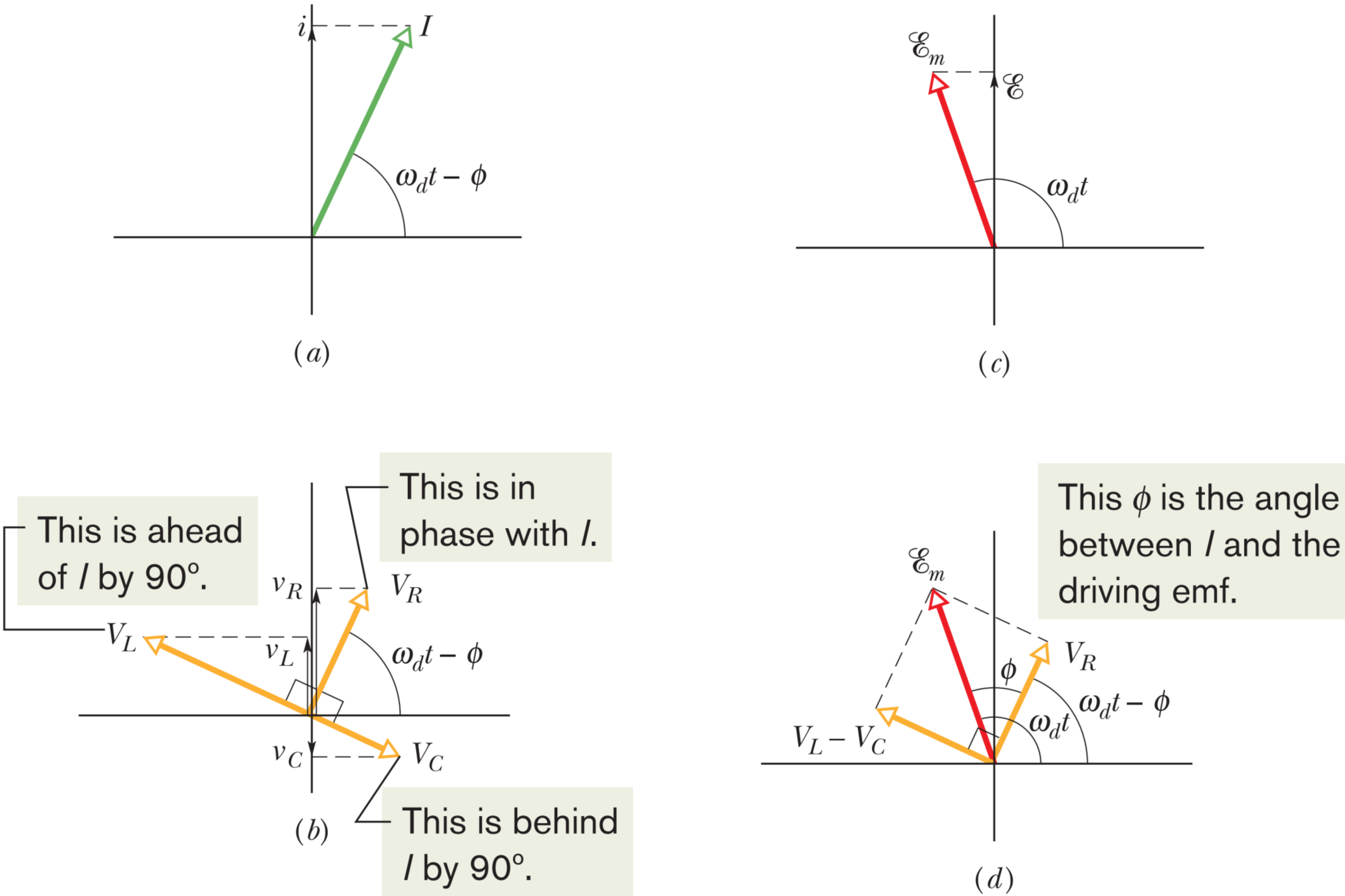
می‌خواهیم دامنهٔ I و ثابت فاز ϕ را به دست آوریم. با به کاربردن نمودار بردار فاز، حل ساده می‌شود.

دامنهٔ جریان

با شکل ۲۷-۱۴ الف شروع می‌کنیم که بردار فازی را نشان می‌دهد که جریان به معادلهٔ ۲۷-۵۶ را در زمان دلخواه t بیان می‌کند. طول بردار فاز برابر دامنهٔ جریان I است، تصویر بردار



شکل ۲۷–۷ یک مدار تک حلقه که شامل مقاومت، خازن و القاگر است. مولدی که، با موج سینوسی در دایره نشان داده شده است نیروی محرکه الکتریکی متناوبی ایجاد می‌کند که یک جریان متناوب به وجود می‌آورد؛ جهتهای نیروی محرکهٔ الکتریکی و جریان در اینجا فقط برای یک لحظه مشخص شده‌اند.



زیر نویس شکل در صفحه بعد

شکل در صفحه قبل

شکل ۲۷–۱۴ (الف) بردار فازی که جریان متناوب را در مدار RLC شکل ۲۷–۷ در زمان t ، نشان می‌دهد. دامنهٔ I ، مقدار لحظه‌ای i ، و فاز $(\omega_d t - \phi)$ نشان داده شده‌اند. (ب) بردارهای فاز نشان دهنده ولتاژ دو سر القاگر، مقاومت و خازن نسبت به بردار فاز جریان در (الف). (پ) بردار فاز نشان دهندهٔ emf متناوب که جریان را در (الف) برقرار می‌کند. (ت) بردار فاز نیروی محرکهٔ الکتریکی جمع برداری سه بردار فاز ولتاژ شکل (ب) است. در اینجا، بردارهای فاز ولتاژ V_L و V_C با هم به طور برداری جمع شده‌اند تا بردار فاز خالص آنها $(V_L - V_C)$ حاصل شود.

فاز روی محور قائم جریان i در زمان t، و زاویهٔ چرخش بردار فاز، فاز $\omega t-\phi$ جریان در زمان t را به دست می‌دهد.

شکل ۲۷–۱۴ ب بردارهای فاز را نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر R ، L و C را در زمان t بیان می‌کند. جهت هر بردار فاز نسبت به زاویهٔ چرخش بردار فاز جریان I در شکل ۲۷–۱۴ الف بر پایهٔ داده‌های جدول ۲۷–۲ نشان داده شده است.

مقاومت: در اینجا جریان و ولتاژ همفازند؛ پس، زاویهٔ چرخش بردار فاز ولتاژ V_R با زاویهٔ چرخش بردار فاز I برابر است.

خازن: در اینجا جریان به اندازهٔ 90° از ولتاژ جلو است؛ در نتیجه، زاویهٔ چرخش بردار فاز ولتاژ V_R ، 90° کمتر از زاویهٔ چرخش بردار فاز I است.

القاگر: در اینجا جریان به اندازهٔ 90° از ولتاژ عقب است؛ در نتیجه، زاویهٔ چرخش بردار فاز ولتاژ V_R ، 90° بیشتر از زاویهٔ چرخش بردار فاز I است.

شکل ۲۷–۱۴ ب ولتاژهای لحظه‌ای v_R ، v_C و v_L را در دو

سر R ، C و L در زمان t نیز نشان می‌دهد؛ این ولتاژها تصویربردارهای فاز متناظر روی محور قائم شکل هستند.

شکل ۲۷-۱۴ پ بردار فازی را نشان می‌دهد که نیروی محرکهٔ الکتریکی اعمال شده با معادلهٔ ۲۷-۵۵ را توصیف می‌کند. طول بردار فاز نشان دهندهٔ دامنهٔ $\mathscr{E}_m$، یعنی تصویر بردار فاز نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ روی محور قائم در زمان t و زاویهٔ چرخش بردار فاز نشان‌دهندهٔ فاز $\omega_d t$ نیروی محرکهٔ الکتریکی در زمان t است.

از قاعدهٔ حلقه می‌دانیم که در هر لحظه مجموع ولتاژهای v_R ، v_C و v_L با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ اعمال شده برابر است

$$\mathscr{E} = v_R + v_C + v_L \qquad (۵۷-۲۷)$$

به این ترتیب، در زمان t تصویر $\mathscr{E}$ در شکل ۲۷-۱۴ پ با جمع جبری تصویرهای v_R ، v_C و v_L در شکل ۲۷-۱۴ ب

برابر است. در واقع، وقتی بردارهای فاز با هم می‌چرخند، این تساوی همواره برقرار است. این بدان معناست که بردار فاز $\mathscr{E}_m$ در شکل ۲۷-۱۴ پ باید جمع برداری سه بردار فاز ولتاژ V_R ، V_C و V_L در شکل ۲۷-۱۴ ب، برابر باشد.

این شرط در شکل ۲۷-۱۴ ت نشان داده شده است که در آن بردار فاز $\mathscr{E}_m$ به صورت جمع بردارهای فاز V_R ، V_C و V_L رسم شده است. چون بردارهای فاز V_C و V_L در شکل در جهت مخالف‌اند، می‌توانیم این جمع برداری را ساده کنیم به این صورت که ابتدا L_L و V_C را ترکیب کنیم تا بردار فاز $V_L - V_C$ به دست آید و آنگاه برای به دست آوردن بردار فاز خالص، این بردار فاز را با بردار فاز V_R ترکیب می‌کنیم. دوباره یادآوری می‌کنیم که بردار فاز خالص باید همان‌طور که نشان داده شده بر بردار فاز $\mathscr{E}_m$ منطبق شود.

هر دو مثلث نشان داده شده در شکل ۲۷-۱۴ ت قائم الزاویه‌اند. از این رو، با به کار بردن قضیهٔ فیثاغورس برای هر یک از مثلثها، داریم

$$\mathscr{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \qquad (۵۸-۲۷)$$

از اطلاعات مربوط به دامنهٔ بیان شده در جدول ۲۷-۲ می‌توانیم رابطهٔ بالا را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\mathscr{E}_m^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 \qquad (۵۹-۲۷)$$

و سپس آن را به شکل زیر مرتب می‌کنیم

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad (۶۰-۲۷)$$

مخرج در معادلهٔ ۲۷-۶۰ را **مقاومت ظاهری Z** مدار برای بسامد زاویه‌ای محرک ω_d می‌نامند

impedance

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(تعریف مقاومت ظاهری)} \qquad (۶۱-۲۷)$$

حال، می‌توانیم معادلهٔ ۲۷-۶۰ را به صورت زیر بنویسیم

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{Z} \qquad (۶۲-۲۷)$$

اگر مقدارهای X_C و X_L را از معادله‌های ۲۷-۳۹ و ۲۷-۴۹ قرار دهیم، می‌توانیم معادلهٔ ۲۷-۶۰ را به صورت

روشنتری بنویسیم

$$I=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^{۲}+(\omega_d L-۱/\omega_d C)^{۲}}}$$ (دامنهٔ جریان) (۶۳-۲۷)

اکنون به نیمهٔ هدف خود رسیده‌ایم: ما عبارتی را برای دامنهٔ جریان I برحسب نیروی محرکهٔ الکتریکی محرک سینوسی و عنصرهای مدار RLC متوالی به دست آورده‌ایم.

مقدار I به اختلاف بین $\omega_d L$ و $۱/\omega_d C$ در معادلهٔ ۲۷-۶۳، یا به طور معادل به اختلاف بین X_L و X_C در معادلهٔ ۲۷-۶۰ بستگی دارد. در هر معادله، مهم نیست که کدامیک از این دو کمیت بزرگتر است چون تفاضل آنها همیشه مجذور می‌شود. جریانی که در این بخش بیان می‌کنیم *جریان حالت پایا* است که اندکی پس از اینکه نیروی محرکهٔ الکتریکی تناوبی اعمال شد

در مدار برقرار می‌شود. وقتی در ابتدا نیروی محرکهٔ الکتریکی به مداری اعمال شود، در زمان کوتاهی یک *جریان گذرا* در مدار به وجود می‌آید. مدت این جریان گذرا (قبل از اینکه به صورت جریان حالت پایا درآید) با ثابتهای زمانی $\tau_L = L/R$ و $\tau_L = RC$ وقتی عنصرهای القایی و خازنی «شروع به عمل کردند»، تعیین می‌شود. این جریان گذرا، برای مثال، اگر طراحی مدار موتور مناسب نباشد، می‌تواند موقع روشن کردن باعث خرابی آن شود.

ثابت فاز

از مثلث بردار فاز سمت راست در شکل ۲۷-۱۴ ت و از جدول ۲۷-۲ می‌توانیم بنویسیم

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} \qquad (۶۴\text{–}۲۷)$$

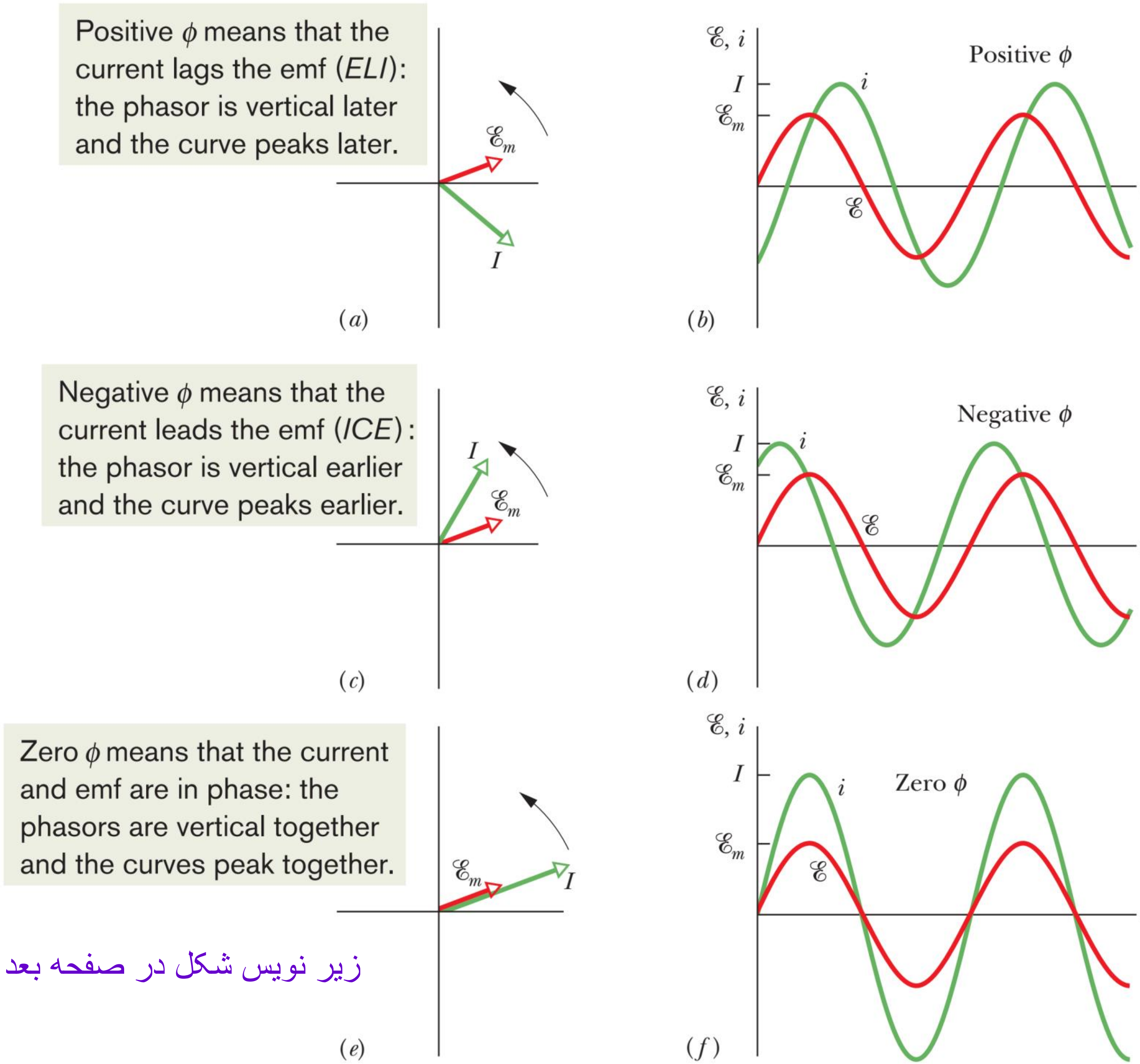
که به دست می‌دهد

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{ثابت فاز}) \qquad (۶۵\text{–}۲۷)$$

این نیمهٔ دیگر هدف ماست: یافتن عبارتی برای ثابت فاز ϕ در یک مدار RLC متوالی با محرک سینوسی. این عبارت به ما سه نتیجهٔ متفاوت برای ثابت فاز به دست می‌دهد که بستگی به مقدارهای نسبی X_L و X_C دارد:

$X_L > X_C$: گفته می‌شود که *مدار بیشتر القایی است تا خازنی.* معادلهٔ ۲۷–۶۵ حاکی از آن است که برای چنین مداری ϕ مثبت است، و این بدان معناست که بردار فاز I عقبتر از بردار فاز $\mathscr{E}_m$ می‌چرخد (شکل ۲۷–۱۵ الف). نمودارهای $\mathscr{E}$ و i نسبت به زمان مشابه شکل ۲۷–۱۵ ب هستند. (شکلهای ۲۷–۱۵ پ و ت با فرض $X_L > X_C$ رسم شده‌اند.)

$X_C > X_L$ گفته می‌شود که *مدار بیشتر خازنی است تا القایی.* معادلهٔ ۲۷–۶۵ حاکی از آن است که برای چنین مداری ϕمنفی است و این بدان معناست که بردار فاز I جلوتر از بردار فاز $\mathscr{E}_m$ می‌چرخد (شکل ۲۷–۱۵ پ). نمودارهای $\mathscr{E}$ و i برحسب زمان مشابه شکل ۲۷–۱۵ ت هستند.



زیر نویس شکل در صفحه بعد

شکل در صفحه قبل

شکل ۲۷–۱۵ نمودارهای بردار فاز و منحنیهای نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ و جریان i برای مدار RLC شکل ۲۷–۷. در نمودار بردار فاز (الف) و منحنی جریان i (ب) از نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ عقب می‌ماند و ثابت فاز ϕ جریان مثبت است. در شکلهای (پ) و (ت)، جریان i از نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ جلو می‌افتد و ثابت فاز ϕ منفی است. در شکلهای (ث) و (ج) جریان i با نیروی محرکهٔ الکتریکی $\mathscr{E}$ همفاز و ثابت فاز ϕ برابر صفر است.

$X_C = X_L$: گفته می‌شود که مدار در *تشدید* است، حالتی که بعداً به شرح آن می‌پردازیم. معادلهٔ ۲۷–۶۵ حاکی از آن است که برای چنین مداری $\phi = 0°$ است، که به این معناست که بردارهای فاز $\mathscr{E}_m$ و I با هم می‌چرخند (شکل ۲۷–۱۵ ج). نمودارهای $\mathscr{E}$ و i برحسب زمان مانند شکل ۲۷–۱۵ ج هستند.

به عنوان توضیح، دو مدار دور از حد متعارف را درنظر می گیریم: در *مدار القایی خالص* شکل ۲۷–۱۲ که در آن X_L صفر نیست و $X_C = R = 0$ است، معادلهٔ ۲۷–۶۵ بر آن دلالت دارد که $\phi = +90°$ (بیشترین مقدار ϕ) که با شکل ۲۷–۱۳ ب سازگار است. در *مدار خازنی خالص* شکل ۲۷–۱۰ که در آن X_C صفر نیست و $X_L = R = 0$ است، معادلهٔ ۲۷–۶۵ حاکی از آن است که $\phi = -90°$ (کمترین مقدار ϕ) که با شکل ۲۷–۱۱ ب سازگار است.

تشدید **Resonance**

معادلهٔ ۲۷–۶۳ دامنهٔ جریان I را در یک مـدار RLC بـه صـورت تابعی از بسامد زاویه‌ای محرک ω_d یک نیروی محرکهٔ الکتریکی متناوب خارجی به دست می‌دهـد. بـرای مقاومـت داده شـدهٔ R وقتی کمیت $\omega_d L - ۱/\omega_d C$ در مخرج صفر باشد دامنـه بیشـینه است، یعنی وقتی

$$\omega_d L = \frac{۱}{\omega_d C}$$

یا

$$\omega_d = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \quad (I \text{ بیشینه}) \qquad (۲۷–۶۶)$$

چون ω ، بسامد زاویه‌ای طبیعی مدار RLC هم برابر $۱/\sqrt{LC}$ است، بیشینهٔ مقدار I وقتی حاصل می‌شود که بسامد زاویه‌ای محرک با بسامد زاویه‌ای طبیعی با هم جور باشند– یعنی در موقع تشدید. از این رو، در مدار RLC تشدید و بیشینهٔ دامنهٔ I وقتی به وجود می‌آیند که داشته باشیم

$$\omega_d = \omega = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \quad (\text{تشدید}) \qquad (۲۷–۶۷)$$

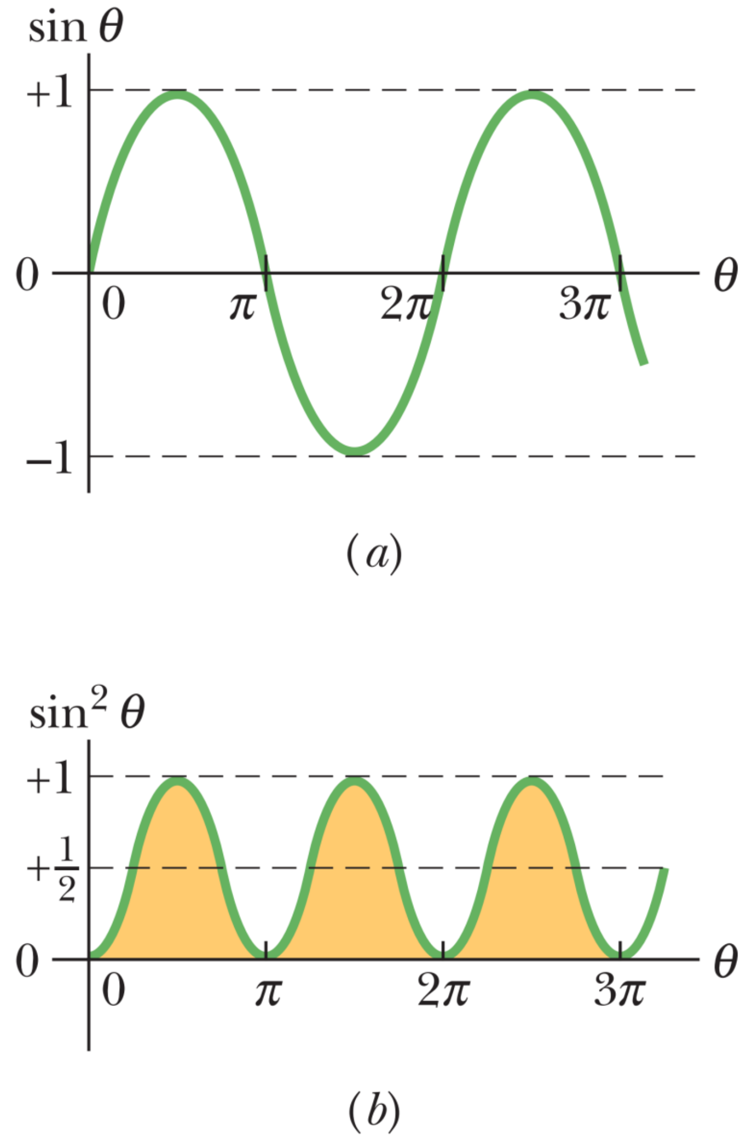
۱۰- توان در مدارهای جریان متناوب

در مدار RLC شکل ۲۷-۷ منبع انرژی یک مولد جریان متناوب است. مقداری از انرژی که مولد تهیه می‌کند در میدان الکتریکی خازن و مقداری در میدان مغناطیسی القاگر ذخیره می‌شود و مقداری نیز به صورت انرژی گرمایی در مقاومت تلف می‌شود. در حالت پایا – که فرض بر آن است- میانگین انرژی ذخیره در خازن و در القاگر ثابت می‌ماند. بنابراین، انتقال انرژی خالص از مولد به مقاومت است که در آنجا انرژی الکترومغناطیسی به صورت انرژی گرمایی تلف می‌شود.

آهنگ لحظه‌ای اتلاف انرژی در مقاومت را می‌توان به کمک معادله‌های ۲۷-۲۲ و ۲۷-۲۹ به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} P &= i^{2} R = [I \sin(\omega_d t - \phi)]^{2} R \\ &= I^{2} R \sin^{2}(\omega_d t - \phi) \end{aligned} \qquad (۲۷-۶۸)$$

ولی، *آهنگ میانگین* اتلاف انرژی در مقاومت، مقدار میانگین معادلهٔ ۲۷-۶۸ روی زمان است. مقدار میانگین $\sin\theta$ که θ هر متغیری است، در یک چرخهٔ کامل صفر است (شکل ۲۷-۱۷



شکل ۲۷–۱۷ (الف) منحنی $\sin\theta$ برحسب θ. مقدار میانگین در یک چرخه صفر است. (ب) منحنی $\sin^{2}\theta$ برحسب θ. مقدار میانگین در یک چرخه $\frac{1}{2}$ است.

الف). اما مقدار میانگین $\sin^{۲}\theta$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است (شکل ۲۷–۱۷ ب). (توجه کنید که در شکل ۲۷–۱۷ ب، قسمتهای سایه‌دار منحنی که در بالای خط افقی با علامت $+\frac{۱}{۲}$ واقع‌اند چگونه دقیقاً فضاهای خالی زیر آن را پر می‌کنند.) به این ترتیب، از معادلهٔ ۲۷–۶۸ می‌توانیم بنویسیم

$$P_{\text{avg}}=\frac{I^{۲}R}{۲}=\left(\frac{I}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}R \qquad (۲۷–۶۹)$$

کمیت $I/\sqrt{۲}$ را **ریشهٔ میانگین مربعی** یا **rms** مقدار جریان i می‌نامند

root-mean-square

$$I_{\text{rms}}=\frac{I}{\sqrt{۲}} \quad \text{(ریشهٔ میانگین مربعی جریان)} \qquad (۲۷–۷۰)$$

اکنون می‌توانیم معادلهٔ ۲۷–۶۹ را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$P_{\text{avg}}=I_{\text{rms}}^{۲}R \quad \text{(توان میانگین)} \qquad (۲۷–۷۱)$$

معادلهٔ ۲۷–۷۱ خیلی شبیه به معادلهٔ ۲۷–۲۲ $(P=i^{۲}R)$ است؛

این شباهت بیانگر این است که اگر از جریان ریشهٔ میانگین مربعی استفاده کنیم می‌توانیم آهنگ میانگین اتلاف انرژی برای مدارهای جریان متناوب را درست همانند مدارهای جریان مستقیم محاسبه کنیم.

همچنین می‌توانیم مقدارهای rms ولتاژ و نیروی محرکهٔ الکتریکی را برای مدارهای جریان متناوب تعریف کنیم

$$V_{\text{rms}}=\frac{V}{\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad \mathscr{E}_{\text{rms}}=\frac{\mathscr{E}_m}{\sqrt{۲}} \qquad \text{(ولتاژ rms و emf rms)} \qquad (۲۷-۷۲)$$

وسایل جریان متناوب مانند آمپرسنجها و ولت سنجها، معمولاً طوری واسنجی می‌شوند تا I_{rms} ، V_{rms} و $\mathscr{E}_{\text{rms}}$ را نشان دهند. به این ترتیب، اگر یک ولت سنج جریان متناوب را به پریز برق خانگی بزنیم و ۲۲۰V را نشان دهد، این ولتاژ $\mathscr{E}_{\text{rms}}$ اندازه

گرفته شده است. مقدار بیشینهٔ اختلاف پتانسیل خروجی برابر $(۲۲۰\,V)\sqrt{۲}$ یا $۳۱۰\,V$ است.

چون ضریب تناسب $۱/\sqrt{۲}$ در معادله‌های ۲۷–۷۰ و ۲۷–۷۲ برای هر سه متغیر یکسان است، می‌توانیم معادله‌های ۲۷–۶۲ و ۲۷–۶۰ را به صورت زیر بنویسیم

$$I_{\text{rms}}=\frac{\mathscr{E}_{\text{rms}}}{Z}=\frac{\mathscr{E}_{\text{rms}}}{\sqrt{R^{۲}+(X_L-X_C)^{۲}}} \qquad (۲۷\text{–}۷۳)$$

و در واقع، این همان شکلی است که ما تقریباً همیشه به کار می‌بریم.

می‌توانیم رابطهٔ $I_{\text{rms}}=\mathscr{E}_{\text{rms}}/Z$ را برای طرح دوبارهٔ معادلهٔ ۲۷–۲۱ به صورت معادلهٔ مفیدی به کاربریم. می‌نویسیم

$$P_{\text{avg}}=\frac{\mathscr{E}_{\text{rms}}}{Z}I_{\text{rms}}R=\mathscr{E}_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\frac{R}{Z} \qquad (۲۷\text{–}۷۴)$$

ولی، از شکل ۲۷–۱۴ ت، جدول ۲۷–۲ و معادلهٔ ۲۷–۶۲

می‌بینیم که R/Z درست کسینوس ثابت فاز ϕ است

$$\cos\phi = \frac{V_R}{\mathscr{E}_m} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z} \qquad (۷۵-۲۷)$$

پس، معادلهٔ ۲۷-۷۴ به صورت زیر درمی‌آید

$$P_{\text{avg}} = \mathscr{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos\phi \quad \text{(توان میانگین)} \qquad (۷۶-۲۷)$$

که در آن $\cos\phi$ **ضریب توان** نامیده می‌شود. چون، $\cos\phi = \cos(-\phi)$ ، معادلهٔ ۲۷-۷۶ مستقل از علامت ثابت فاز ϕ است.

برای بیشینه کردن آهنگ انرژی داده شده به یک بار مقاومتی در مدار RLC ، باید ضریب توان $\cos\phi$ را تا جایی که ممکن است به یک نزدیک کنیم. این معادل با این است که ثابت فاز ϕ در معادلهٔ ۲۷-۲۹ را تا حدامکان به صفر نزدیک کنیم. برای مثال، اگر مدار شدیداً القایی باشد، می‌توان آن را با اضافه کردن ظرفیت بیشتر به طور متوالی به مدار کم کرد. (یادآوری می‌شود ⇩

که افزودن ظرفیت بیشتر به طور متوالی به ظرفیتهای دیگر موجب کاهش ظرفیت معادل C_{eq} در مدار می‌شود.) بنابراین، کاهش در C_{eq} موجب کاهش ثابت فاز و افزایش ضریب توان در معادلهٔ ۲۷-۷۶ می‌شود. در نیروگاهها برای انجام این عمل خازنهایی به طور متوالی در سامانه‌های انتقال قرار داده می‌شود.