فصل ۱

منیفلد

۱.۱ تعریف و خواص اولیهٔ منیفلد

n–**فضای اقلیدسی** $\mathbb{R}^n$ جورترین مثال از فضای متری است، که از n–تایی‌های مرتب $x = (x^1, \cdots, x^n)$ با $x^i \in \mathbb{R}$ تشکیل می‌گردد و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است. هر گاه $\mathbb{R}^n$ را به عنوان فضای متری تلقی کنیم، فرض بر این است که **متر معمولی**

$$d(x,y) := \Big(\sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)^2 \Big)^{1/2}$$

بر آن وجود دارد، مگر اینکه خلاف آن را تصریح کنیم. در حالت $n = 0$، فضای $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ را مجموعهٔ تک عضوی از $0 \in \mathbb{R}$ تعبیر می‌کنیم.

منیفلد شی‌ای است که موضعاً با این فضاهای متریِ نمونه شبیه است. به بیان دقیقتر، **منیفلد** فضایی است متری M با ویژگی:

> اگر $x \in M$، آنگاه یک همسایگی U از x و یک عدد صحیح $n \geq 0$ چنان وجود دارند که U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است.

ساده‌ترین مثال از منیفلد، البته که خود $\mathbb{R}^n$ است؛ کافی است به ازاء هر $x \in \mathbb{R}^n$ ای مجموعهٔ U را خود $\mathbb{R}^n$ بگیریم. روشن است که $\mathbb{R}^n$ با هر متر معادل دلخواه (یعنی معادل با متر استاندارد) نیز یک منیفلد است. در حقیقت، از تعریف این گونه برداشت می‌شود که هر فضایی که با یک منیفلد همیومورف باشد، خودش منیفلد است. در

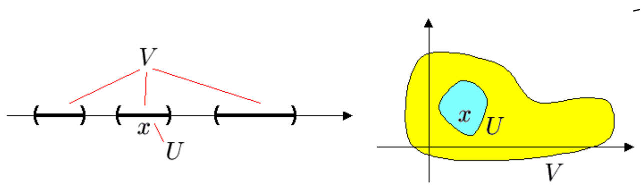
نتیجه، متری که برای M مطرح می‌شود نقش مهمی را ایفاء نمی‌کند، بلکه همهٔ مترهای معادل یکسانند. به همین دلیل است که اغلب آن را ذکر نمی‌کنیم.

چنانچه چیزی در خصوص فضاهای توپولوژی می‌دانید، می‌توانید در تعریف بالا از فضای توپولوژی به جای فضای متری استفاده کنید؛ این تعریف باعث طرح مواردی می‌شود که اساساً مترپذیر نیستند و لذا چنین فضاهایی ممکن است خواص مناسبی که می‌خواهیم فراهم باشد را ندارند. در ضمیمهٔ الف مباحثی در خصوص منیفلدهای متر ناپذیر وجود دارد.

گوی باز در $\mathbb{R}^n$ دومین مثال ساده از منیفلد است؛ در این حالت U را می‌توانیم کل گوی باز بگیریم، زیرا هر گوی باز در $\mathbb{R}^n$ با خود $\mathbb{R}^n$ همیومورف است:

$$f : B_r(x_\circ) \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_\circ}{r\|x - x_\circ\|} & \text{اگر } x \neq x_\circ \\ \circ & \text{اگر } x = x_\circ \end{cases}$$

از این مثال، بی‌درنگ نتیجه می‌گردد که هر زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$، منیفلد است؛ زیرا اگر $V \subseteq \mathbb{R}^n$ باز باشد و $x_\circ \in V$، آنگاه یک گوی باز U وجود دارد که $x \in U \subseteq V$. اما U با $\mathbb{R}^n$ همیومورف است. به شکل ۱.۱ توجه شود.



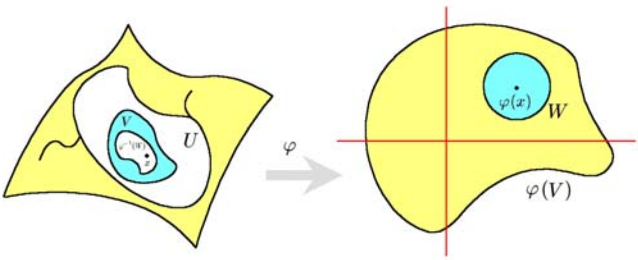
شکل ۱.۱: هر زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$ منیفلد است.

سؤالی که با آن می‌توان هر ریاضیدانی را به چالش کشید، چنین است: چگونه هر زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد، خود نیز منیفلد است؟ (طبیعی است، که در این حالت آن را یک **زیر منیفلد باز** از منیفلد اولیه بنامیم.)

زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^n$ مثالهای متنوعی از منیفلدها را فراهم می‌سازند (این موضوع تمرین ۲۴ است) اما همهٔ منیفلدها نیستند. پیش از طرح مثالهای دیگر، لازم است موضوعاتی را مطرح کنیم که در خلال این فصل به کار می‌آیند.

اگر x نقطه‌ای از منیفلد M و U همسایگی‌ای از x باشد که با همیومورفیسمی چون $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ با $\varphi(V)$ همیومورف است، که $\varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ و شامل $\varphi(x)$ می‌باشد. (توجه شود که همسایگی V از x، یعنی یک همسایگی باز V

از x که $x \in V \subseteq U$) در این صورت، یک گوی باز W با $\varphi(x) \in W \subseteq \varphi(V)$ وجود دارد. در نتیجه $x \in \varphi^{-1}(W) \subseteq V \subseteq U$. چون $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ پیوسته است، مجموعهٔ $\varphi^{-1}(W)$ در V باز است، و لذا در M نیز باز می‌باشد؛ روشن است. به این ترتیب $\varphi^{-1}(W)$ با W همیومورف است و لذا با خود $\mathbb{R}^n$ همیومورف می‌باشد. این استدلال کمی پیچیده، نشان می‌دهد که در تعریف منیفلد می‌توان به جای همسایگی U، از همسایگی باز استفاده کرد. به شکل ۲.۱ توجه شود.



شکل ۲.۱: هر زیر مجموعهٔ باز از یک منیفلد، منیفلد است.

با کمی فکر روشن می‌شود که بایستی U باز باشد. اما، برای اثبات آن به قضیهٔ زیر نیاز است که صورت آن را بدون استدلال مطرح می‌کنیم. [۱]

۱.۱.۱ قضیه. اگر $U \subseteq M$ باز و $f : U \to \mathbb{R}^n$ یک به یک و پیوسته باشد، آنگاه $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ باز است. (نتیجه اینکه به ازاء هر باز $V \subseteq U$، مجموعهٔ $f(V)$ باز است و بنابراین f^{-1} پیوسته است. در نتیجه، f همیومورفیسم است.)

قضیهٔ ۱.۱.۱ را می‌توان **ناوردایی دامنه** نامید، زیرا اساس آن این خاصیت است که «**دامنه** بودن (یعنی، مجموعهٔ باز همبند بودن) نسبت به نگاشتهای یکبیک پیوسته و بتوی $\mathbb{R}^n$ ناوردا می‌ماند». اثبات اینکه همسایگی U در تعریف ما باید باز باشد، نتیجه‌ای بلافصل از قضیهٔ ناوردایی دامنه است و آن را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. (به علاوه، به سادگی ملاحظه می‌شود که قضیهٔ ۱.۱.۱ غلط باشد، آنگاه مثالی از U وجود دارد که در تعریف مذکور می‌گنجد ولی باز نیست.)

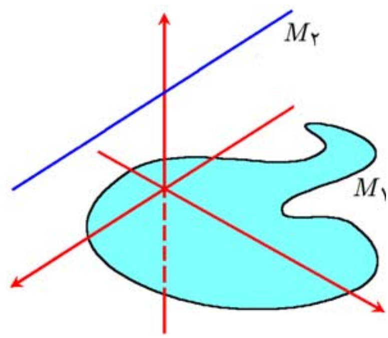
حال توجهمان را به عدد n در تعریف منیفلد معطوف می‌کنیم. توجه شود که n ممکن است به x بستگی داشته باشد. اگر $M \subseteq \mathbb{R}^3$ عبارت از اجتماع $M = M_1 \cup M_2$

[۱] اثبات این حکم خیلی طولانی است و مثلاً در [?]، [?]، [?] و یا [?] می‌توان آن را یافت.

با باشد (به شکل ۳.۱ توجه شود) که در آن

$$M_۱ := \{(x,y,z) \,|\, z = ۰\}, \quad M_۲ = \{(x,y,z) \,|\, z = ۱\ ,\ x = ۰\}.$$

در این صورت، برای نقاط در $M_۱$ می‌توانیم n را ۲ و برای نقاط در $M_۲$ آنرا یک بگیریم. این مثال نشان می‌دهد که عمل اجتماع منیفلدها، عملی نامناسب است، زیرا در پی خود باعث مشکلات غیر لازم در بحث می‌گردد.



شکل ۳.۱: منیفلدی با بخشهایی که بعد مختلف دارند.

در کل، اگر $M_۱$ و $M_۲$ به ترتیب دارای متر $d_۱$ و $d_۲$ باشند، هر یک از مترهای $d_۱$ و $d_۲$ را با متری می‌توانیم عوض کنیم که اولاً با آن معادل است و در ثانی مقدارش همیشه کمتر از یک است: $\forall x,y \in M_j : \bar{d}_i(x,y) < ۱$. مثلاً می‌توان تعریف کرد $\bar{d}_i = \min(d_i, ۱)$ یا $\bar{d}_i = d_i/(۱ + d_i)$. اکنون بر $M = M_۱ \cup M_۲$ متری به شرح زیر می‌توان تعریف نمود. (در اینجا فرض شده است که $M_۱$ و $M_۲$ مجزا هستند، در غیر این صورت آنها را با کپی‌هایی از آنها که مجزا هستند، معاوضه می‌کنیم.)

$$d(x,y) := \begin{cases} \bar{d}_i(x,y) & x,y \in M_i \text{ اگر } i \text{ ای باشد که } \\ ۱ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$M_۱$ و $M_۲$ در این فضای جدید، باز هستند. پس، اگر $M_۱$ و $M_۲$ منیفلد باشند، آنگاه M نیز هست. این ساختار را برای هر تعدادی از فضاها (حتی، ناشمارا) می‌توان تعمیم داد. فضاهای متری حاصل را **اجتماع مجزای** فضاهای M_i می‌نامیم. اجتماع مجزای منیفلدها، منیفلد است. به ویژه، چون فضای با تنها یک نقطه، منیفلد است پس هر مجموعهٔ گسسته‌ای، منیفلد است. کافی است بر آن از متر گسسته استفاده شود:

$$d(x,y) := \begin{cases} ۰ & x = y \text{ اگر } \\ ۱ & x \neq y \text{ اگر } \end{cases}$$

با اینکه ممکن است در نقاط مختلف یک منیفلد M، n های مختلفی وجود داشته باشد، در یک نقطهٔ خاص $x \in M$ امکان کارکرد بیش از یک n نیست. برای اثبات این دیدگاه شهودی باز هم به قضیهٔ ناوردایی بعد متوصل می‌شویم. به عنوان اولین قدم توجه می‌کنیم که هرگاه $m \neq n$، آنگاه $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^m$ همیومورف نیست، زیرا اگر $m < n$، آنگاه نگاشتی پیوسته و یک به یک بتوی زیر مجموعه‌ای غیر باز از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد. ادامهٔ استدلال که منجر به اثبات یکتایی n در تعریف می‌گردد را به خواننده می‌سپاریم. این عدد n یکتا را **بعد** M **در** x می‌نامیم. در صورتی می‌گوییم یک منیفلد مفروض با **بعد** n است و یا n–بعدی است و یا به اختصار n–**منیفلد** است، که بعد آن در همهٔ نقاط n باشد. معمولاً وقتی می‌نویسیم M^n یعنی بعد منیفلد M برابر n است.

یک بار دیگر، فضایی گسسته را در نظر بگیرید، که منیفلدی ۰–بعدی. تنها زیر مجموعه‌های فشردهٔ این فضا زیر مجموعه‌های متناهی هستند. نتیجتاً، هر فضای گسستهٔ عملاً غیر σ–فشرده است (یعنی به صورت اجتماعی شمارا از زیر مجموعه‌های فشرده قابل نوشتن نیست.) با در نظر گرفتن اجتماعی مجزا از تعداد ناشمارا منیفلد همیومورف با $\mathbb{R}^n$، حکم مشابهی در مورد منیفلدهای با بعد بالاتر می‌توان طرح نمود. البته چنین مثالهایی، غیر همبند هستند. اغلب لازم است مطمئن شویم که این تنها حالتی است که برای آن σ–فشردگی رخ دهد.

۲.۱.۱ قضیه. اگر X فضایی متری، موضعاً فشرده و همبند باشد، آنگاه X فضایی σ–فشرده است.

اثبات: به ازاء هر $x \in X$، اعدادی $r > ۰$ ای را در نظر می‌گیریم که گوی بستهٔ $\{y \in X \,|\, d(x,y) \leq r\}$ زیر مجموعه‌ای فشرده باشد (چون X موضعاً فشرده است، حداقل یک r با این ویژگی وجود دارد.) مجموعهٔ همهٔ چنین $r > ۰$ هایی یک بازه است. زیرا اگر به ازاء یک x ای همهٔ $r > ۰$ ها دارای خاصیت بالا باشند، آنگاه X فضایی σ–فشرده است، زیرا

$$X = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \{y \in X \,|\, (x,y) \leq n\}$$

پس اگر هیچ x ای با شرط بالا یافت نشود، به ازاء هر $x \in M$ ای $r(x)$ را نصف سوپریموم همهٔ r ها تعریف می‌کنیم. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌گردد که

$$\{y \in X \,|\, d(x_۱,y) \leq r\} \subseteq \{y \in X \,|\, d(x_۲,y) \leq r + d(x_۱,x_۲)\}$$

بنابراین

$$\{y \in X \,|\, d(x_1, y) \leq r - d(x_1, x_2)\} \subset \{y \in X \,|\, d(x_2, y) \leq r\}$$

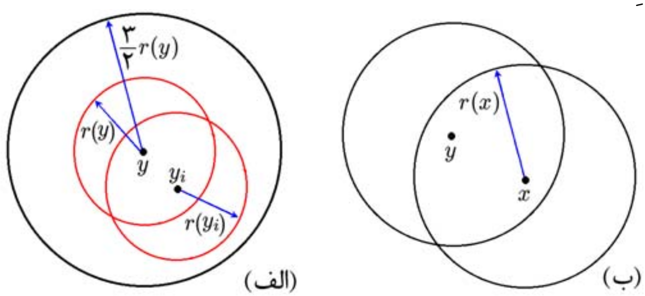
در نتیجه

$$r(x_1) \geq r(x_2) - \frac{1}{2} d(x_1, x_2) \qquad (۱.۱)$$

با تعویض x_1 و x_2 در استدلال بالا، نتیجه می‌گیریم

$$|r(x_1) - r(x_2)| \leq \frac{1}{2} d(x_1, x_2) \qquad (۲.۱)$$

در نتیجه، تابع $r : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است. این استدلال نتیجهٔ مهم زیر را دارد:



شکل ۴.۱

فرض کنید $A \subset X$ فشرده باشد. گیریم A' اجتماع همهٔ گوی‌های بستهٔ به شعاع $r(y)$ و به مرکز y باشد، که $y \in A$ دلخواه است. در این صورت A' نیز فشرده است. اثبات به شرح ذیل است:

گیریم $z_1, z_2, \cdots$ دنباله‌ای در A' باشد. اگر به ازاء هر i یک $y_i \in A$ ای وجود داشته باشد که z_i در گوی به مرکز y_i و شعاع $r(y_i)$ است، چون A فشرده است، زیر دنباله‌ای از y_i ها وجود دارد، که خودش هم یک دنباله به شمار می‌آید، و به نقطه‌ای $y \in A$ همگرا است. حال گوی بستهٔ B به شعاع $\frac{3}{2}r(y)$ و مرکز y فشرده است. چون $y_i \to y$ و تابع r پیوسته است، گویهای بستهٔ $\{y \in X \,|\, d(y, y_i) \leq r(y_i)\}$ عاقبت مشمول در B هستند. به قسمت (الف) از شکل ۴.۱ توجه شود. بنابراین، دنبالهٔ z_i عاقبت در مجموعهٔ فشردهٔ B قرار دارد، پ نتیجتاً، زیر دنباله‌ای همگرا دارد. به علاوه، نقطهٔ حدی این زیر دنباله عملاً در یک گوی بستهٔ به مرکز y و شعاع $r(y)$ قرار دارد

(مسألهٔ ۱۰). بنابراین، A' فشرده است. حال فرض کنیم $X \ni x_\circ$ و مجموعه‌های فشردهٔ $A_\text{۱} = \{x_\circ\}$ و $A_{n+\text{۱}} = A'_n$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح، اجتماع آنها باز است. بسته نیز هست. برای مشاهدهٔ این مطلب فرض می‌کنیم x نقطه‌ای در بستار A باشد. در این صورت، $y \in A$ ای وجود دارد که به ازای آن $d(x,y) < \frac{\text{۲}}{\text{۳}}r(x)$. اکنون بنا به (۱.۱)، داریم

$$
\begin{aligned}
r(y) &\geq r(x) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}d(x,y) > r(x) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{۲}}{\text{۳}}r(x) \\
&= \frac{\text{۲}}{\text{۳}}r(x) > d(x,y)
\end{aligned}
$$

به قسمت (ب) از شکل ۴.۱ توجه شود. این نشان می‌دهد که اگر $y \in A_n$، آنگاه $x \in A'_n$ و لذا $x \in A$.

چون X همبند است و $A \neq \emptyset$ هم باز است و هم بسته، لذا بایستی $X = A$ که σ فشرده است. □

پس از این بحث مفصل در خصوص توپولوژی مجموعهٔ نقاط، زنجیره‌ای از مثالهای از منفلیدها مطرح می‌کنیم.

۲.۱ مثالهایی از منیفلدها

تنها ۱−منیفلدهای همبند $\mathbb{R}$، دایره، یا کرهٔ ۱−بعدی $\mathbb{S}^\text{۱}$ است، که مطابق تعریف عبارت است از $\mathbb{S}^\text{۱} := \{x \in \mathbb{R}^\text{۲} \,|\, d(x,\circ) = \text{۱}\}$. تابع $f : (\circ, \text{۲}\pi) \longrightarrow \mathbb{S}^\text{۱}$ با ضابطهٔ $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ همیومورفیسم است؛ حتی پیوسته نیز هست، در حالی که بر $[\circ, \text{۲}\pi]$ یک به یک نیست. اغلب نقطهٔ $(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^\text{۱}$ را با نماد $\theta \in [\circ, \text{۲}\pi]$ نشان می‌دهیم. تابع $g : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{S}^\text{۱}$ که با همان ضابطه تعریف می‌شود نیز همیومورفیسم است؛ پس f و g توئمان نشان می‌دهند که $\mathbb{S}^\text{۱}$ منیفلد است.

روش دیگری برای اثبات این مطلب وجود دارد، که برای تعمیم مناسبتر است. نگاشت تصویر از نقطهٔ $(\circ, \text{۱})$ به روی خط $\mathbb{R} \times \{-\text{۱}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به صورتی که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است، همیومورفیسمی از $\mathbb{S}^\text{۱} - \{(\circ, \text{۱})\}$ به روی $\mathbb{R} \times \{-\text{۱}\}$ تعریف می‌کند؛ این مطلب را خیلی ساده با محاسبهٔ ضابطهٔ نگاشت

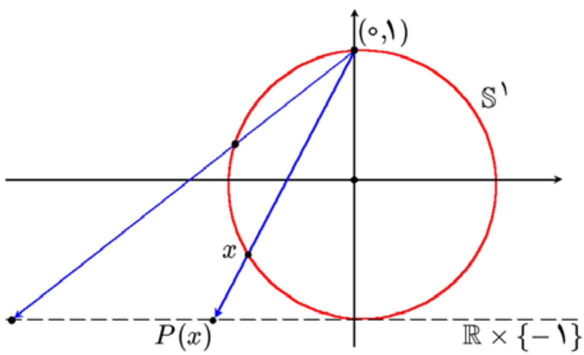
$$p : \mathbb{S}^\text{۱} - \{(\circ, \text{۱})\} \to \mathbb{R} \times \{-\text{۱}\}$$

می‌توان نشان داد. با تعویض نقطهٔ $(\circ, \text{۱})$ با $(\text{۱}, \circ)$ و تصویر بر خط $\mathbb{R} \times \{\text{۱}\}$ می‌توان نقطهٔ $(\circ, \text{۱})$ را هم وارد تصاویر کرد. این کار را با توجه به اینکه $\mathbb{S}^\text{۱}$ همگن نیز هست،

می‌توان ملاحظه نمود. (یعنی دورانی مناسب از $\mathbb{R}^{2}$ را اختیار کرد). به شکل ۵.۱ توجه شود. حال، به صورت مشابه، n–کره را در نظر می‌گیریم

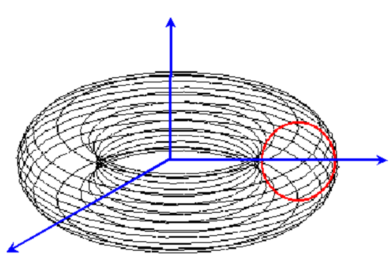
$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, d(x, 0) = 1\}$$

که یک n–منیفلد است. معمولاً ۲–کره را به طور ساده «کره» می‌نامند. این اولین مثال ما از یک ۲–منیفلد فشرده یا رویهٔ فشرده است.



شکل ۵.۱: نگاشت تصویر از نقطهٔ $(0, 1)$

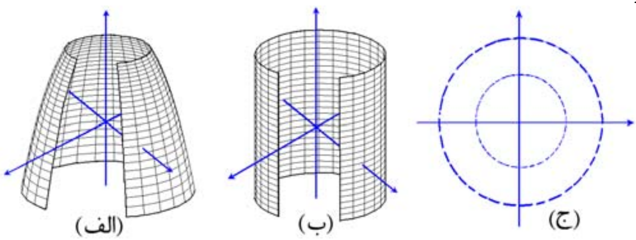
با توجه به اینکه اگر μ_i که $i = 1, 2$ دارای بعد n_i باشد، آنگاه $\mu_1 \times \mu_2$ منیفلدی $(n_1 + n_2)$–بعدی است، از این منیفلدها می‌توان منیفلدهای جدیدی را تولید نمود. به ویژه $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (n بار) که آنرا n–تیوب می‌نامیم. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ را معمولاً تیوب می‌نامند. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ را معمولاً تیوب می‌نامند. به شکل ٦.۱ توجه شود.



شکل ٦.۱: ۲–تیوب

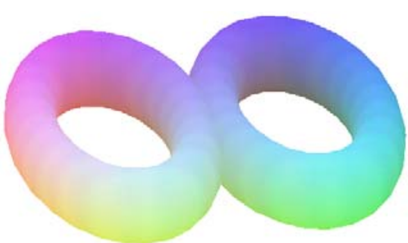
این منیفلد با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{4}$ همیومورف است. به علاوه، با زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^{3}$ نیز همیومورف است که آن را نیز مردم تیوب می‌نامند؛ این زیر مجموعه را دوران

می‌توان به‌دست آورد. یعنی، با دوران $\{(0,y,z)\,|\,(y-1)^2+z^2=\frac{1}{4}\}$ حول z–محود. همین کار را با هر ۱–منیفلد جزْ در $\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,y>0\}$ می‌توان انجام داد. رویهٔ حاصل را **رویهٔ دورانی** می‌نامند. حاصل یا با تیوب همیومورف است و یا اینکه با استوانهٔ $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$، که آن هم با حلقهٔ توپر همیومورف است. یعنی با ناحیهٔ بین دو دایرهٔ متحدالمرکز. به شکل ۷.۱ توجه شود.

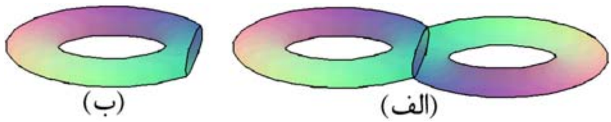


شکل ۷.۱: رویه‌های دورانی

ساده‌ترین مثال بعدی از یک ۲–منیفلد فشرده، تیوب ۲–حلقه‌ای است. به شکل ۸.۱ توجه شود. برای ساخت صریح تیوب ۲–حلقه‌ای کافی است با یک «دسته» آغاز کنیم که با تیوبِ منهی یک قرس از سطحش همیومورف است. به بیان دقیق‌تر ابتدا یک دایره که کاملاً بر سطح تیوب قرار دارد را در نظر گرفته و سپس خود دایره و تمام داخلش از سطح جدا می‌کنیم. این دایره را مرزک حلقه می‌نامیم. اکنون از به هم پیوستن دو دستهٔ با هم، یک تیوب ۲–حلقه‌ای نتیجه می‌گردد؛ یعنی مرز آن دو را یکی می‌گیریم. به شکل ۹.۱ توجه شود.

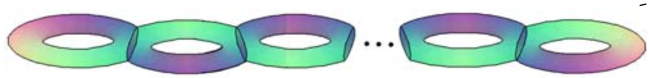


شکل ۸.۱: تیوب ۲–حلقه‌ای

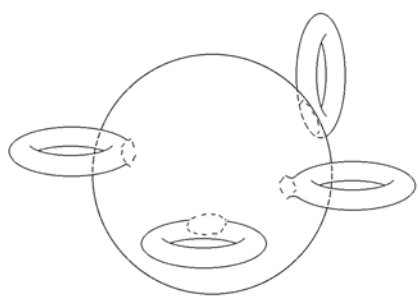


شکل ۹.۱: ساخت صریح تیوب ۲−حلقه‌ای

با تکرار این روند، می‌توان **تیوب** n−**حلقه‌ای** را ساخت. چنین فضایی با اجتماع مجرای n دسته و یک کرهٔ با n حفره که در آن مرز دستهٔ i ام را با نقاط مرزی حفرهٔ i ام بر سطح کره یکی گرفته‌ایم، همیومورف است. به شکلهای ۱۰.۱ و ۱۱.۱ توجه شود.



شکل ۱۰.۱: تیوب n−حلقه‌ای



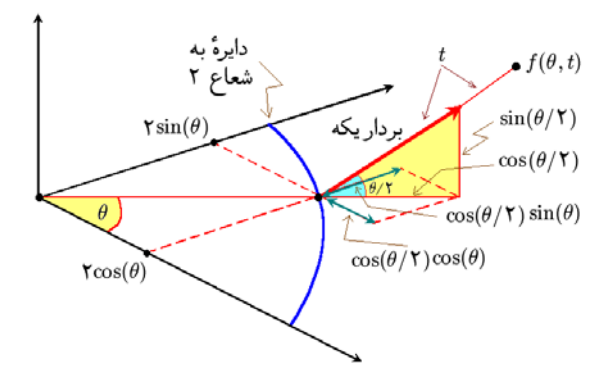
شکل ۱۱.۱: طرز ساخت تیوب n−حلقه‌ای

شکل ۱۲.۱: طرز ساخت نوار موبیوس

۲−منیفلدی وجود دارد که ریاضی‌دانان از زمانی که تنها با کاغذ و مواد آشنا بودند، روش ساخت آنرا می‌دانستند و نیازی به دانستن فضای متری نداشتند. یعنی، نوار

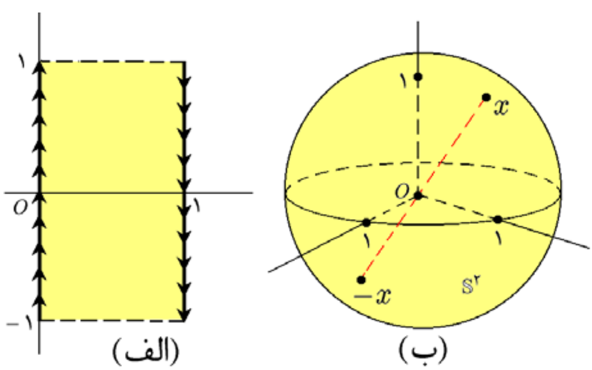
موبیوس که آنرا به کمک یک تکه نوار کاغذی می‌توان ساخت. به این ترتیب که، ابتدا آنرا یک نیم دور می‌چرخانیم و سپس دو سر آنرا بهم می‌چسبانیم. به شکل ۱۲.۱ توجه شود. این کار را به کمک تابع $f:[0,2\pi]\times(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ با ضابطهٔ

$$f(\theta,t)=\Big(2\cos\theta+t\cos(\theta/2)\cos\theta,\, 2\sin\theta+t\cos(\theta/2)\sin\theta,\, t\sin(\theta/2)\Big)$$



شکل ۱۳.۱

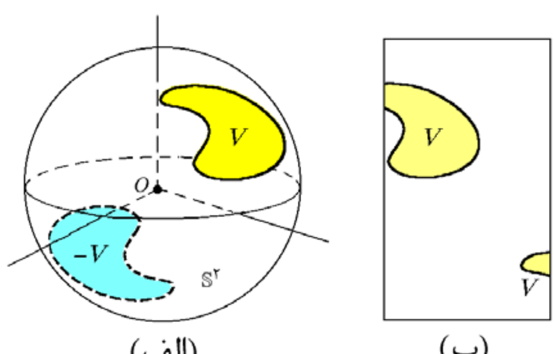
می‌توان توضیح داد. چنانچه f را بر کل $[0,2\pi]\times[-1,1]$ تعریف کنیم، به یک نوار موبیوس همراه با مرزش می‌رسیم؛ همان طوری که از روش ساخت به کمک کاغذ مشاهده می‌گردد، این مرز با یک دایره همیومورف است، نه با دو دایرهٔ از هم جدا! با اصطلاحاتی که اخیراً مطرح کردیم، **نوار موبیوس** را این طور نیز می‌توان ساخت که نقاط $(0,t)$ و $(1,-t)$ از فضای حاصلضربی $(-1,1)\times[0,1]$ را یکی بگیریم. به شکل ۱۳.۱ توجه شود. البته فعلاً قادر به توصیف دقیق روند یکی گیری نیستیم. با این حال مثال بعدی را هم به این روش معرفی می‌کنیم.



شکل ۱۴.۱: الف) روشی برای ساخت تیوب. ب) طرز ساخت $\mathbb{P}^2$

می‌خواهیم که هر نقطهٔ $x \in \mathbb{S}^2$ را با نقطهٔ متقاطرش، یعنی $-x \in \mathbb{S}^2$ یکی بگیریم. فضای حاصل که **صفحهٔ تصویری** نامیده می‌شود $\mathbb{P}^2$، از آن دسته مثالهایی است که کمی سخت به شهود در می‌آیند. زیرا هیچ زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ نیست که عملاً با آن همیومورف باشد. به قسمت (الف) از شکل ۱۴.۱ توجه شود.

تعریف دقیق $\mathbb{P}^2$ نیز همین سرنوشت را دارد، زیرا در آن لازم است از چیزهای غیر برابر را برابر بدانیم! **نقاط** در $\mathbb{P}^2$ را مجموعه‌های $\{-p, p\}$ با $p \in \mathbb{S}^2$ تلقی می‌کنیم. به قسمت (ب) از شکل ۱۴.۱ توجه شود. این مجموعه را با نماد $[p] \in \mathbb{P}^2$ نشان می‌دهیم، بنابراین $[p] = [-p]$. پس نگاشتی $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ با ضابطهٔ $f(p) = [p]$ داریم، که از $f(p) = f(q)$ نتیجه می‌گردد $p = \pm q$. تا مدتی تعریف ساختار متری بر $\mathbb{P}^2$ با معرفی فاصلهٔ بین نقاط $[p]$ و $[q]$ بر آن را به تعویق می‌اندازیم و به این بسنده می‌کنیم که زیر مجموعه‌های باز آن کدام هستند (این عملاً همهٔ آن چیزی است که نیاز داریم.) زیر مجموعهٔ $U \subseteq \mathbb{P}^2$ وقتی و تنها وقتی باز است که زیر مجموعهٔ $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{S}^2$ باز باشد. این خود بدین معنی است که مجموعه‌های باز در $\mathbb{P}^2$ به شکل $f(V)$ هستند که $V \subseteq \mathbb{S}^2$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{S}^2$ است، البته با این ویژگی که اگر $p \in V$، آنگاه بایستی $-p \in V$. به شکل ۱۵.۱ توجه شود.



شکل ۱۵.۱: مجموعه‌ای باز در $\mathbb{P}^2$

این کار را به صورت دیگری، شبیه به حالت نوار موبیوس می‌توان انجام داد. فرض کنید در نوار موبیوس M نقاط $(0, t)$ و $(1, -t)$ را یکی بگیریم. به این ترتیب اگر نقاط $\{(0, t), (1, -t)\}$ را با $[(0, t)]$ یا $[(1, -t)]$ نمایش بدهیم، به یک نگاشت

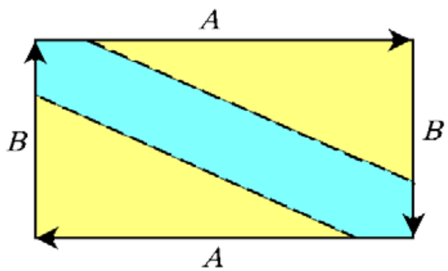
$$f : [0, 1] \times (-1, 1) \to M$$

$$f(s,t) = \begin{cases} (s,t) & \text{اگر } s \neq ۰, ۱ \\ [(s,t)] & \text{اگر } s = ۰ \text{ یا } ۱ \end{cases}$$

می‌رسیم و $U \subseteq M$ وقتی و تنها وقتی باز است که

$$f^{-۱}(U) \subseteq [۰, ۱] \times (-۱, ۱)$$

باز باشد. یعنی، مجموعه‌های باز در M به شکل $f(V)$ هستند که V باز است، مشروط به اینکه اگر $(s,-t)$ به V متعلق باشد، آنگاه (s,t) نیز به V متعلق باشد، که $s = ۰$ یا $s = ۱$.



شکل ۱.۱۶: طرز ساخت $\mathbb{P}^۲$

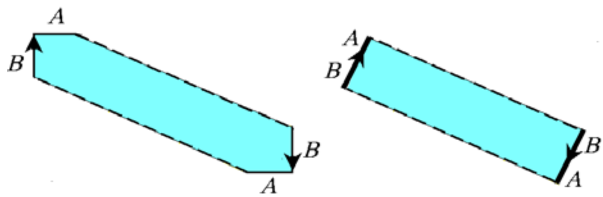
برای اینکه تصوری از ظاهر $\mathbb{P}^۲$ به دست بیاوریم، با حذف تمام نقاط زیر $xy-$صفحه در $\mathbb{S}^۲$ آغاز می‌کنیم. چرا که همهٔ آنها با نقاطی از نیمهٔ بالایی کره یکی گرفته می‌شوند. نتیجه یک نیم کره به همراه لبهٔ آن است، که با قرس بسته

$$D^۲ = \{x \in \mathbb{R}^۲ \,|\, d(x, ۰) \leq ۱\}$$

همیومورف است. اکنون بایستی $p \in \mathbb{S}^۱$ را با $-p \in \mathbb{S}^{-۱}$ یکی بگیریم.

این مطلب را با مربع نیز می‌توان توضیح داد. این یکی گیری معادل است با یکی گیری اضلاع مربع به شیوه‌ای که در شکل ۱.۱۶ نشان داده شده است. (نقاط بر اضلاع مقابل، با جهت برعکس بر هم منطبق می‌شوند.) خطوط نقطه چین کلید فهم $\mathbb{P}^۲$ هستند. با کمی دگردیس در دو انتهای این نوار ملاحظه می‌کنیم که بخش انتهایی B با جهت وارون به همین بخش در انتهای دیگر متناظر می‌گردد؛ یعنی A در گوشهٔ بالا سمت راست به A در گوشهٔ پائین سمت چپ یکی گرفته می‌شود. به این ترتیب به یک نوار موبیوس مرزدار می‌رسیم (یعنی، خطوط خط‌چین مرز آن هستند که یک دایرهٔ واحد تشکیل می‌دهند). چنانچه این نوار موبیوس را از مربع اولیه حذف کنیم، به دو قطعهٔ مثلث شکل می‌رسیم که همراه هم با یک دیسک همیومورف هستند. بنابراین، صفحهٔ

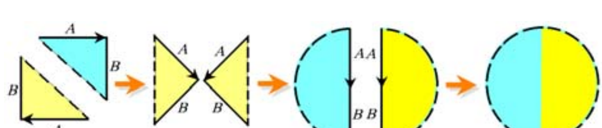
تصویری را می‌توان از اجتماعی مجزا از یک دیسک و یک نوار موبیوس به دست آورد، به این ترتیب که مرز نوار موبیوس را با مرز دیسک و با جهت سازگار، یکی گرفت. به شکل ۱۷.۱ توجه شود.



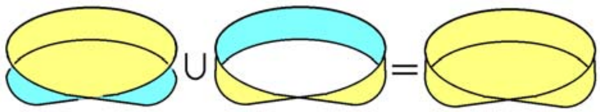
شکل ۱۷.۱: $\mathbb{P}^2$ از یک نوار موبیوس و یک دیسک ساخته شده است.

بنابراین می‌توان یک لباس به شکل دیسک که لبهٔ آن زیپ است و یک نوار موبیوس که لبهٔ آن زیپ است را تهیه کرد و سپس این دو تکه لباس را در امتداد زیپ به هم چسباند و به مدلی برای $\mathbb{P}^2$ رسید. متأسفانه آزمایش نشان می‌دهد که این مطلب محال است، مگر آنکه این دو تکه لباس بتوانند از لای هم رد شوند.

زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ که اجتماع نوار موبیوس و دیسک است، با $\mathbb{P}^2$ همیومورف نیست. با این حال با یک مفهوم ریاضی مناسب می‌توان آن را به $\mathbb{P}^2$ ربط داد. به وضوح تابعی پیوسته مانند $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ وجود دارد که برد آن برابر همین مجموعه است؛ به علاوه، اگر توجه شود، f یک به یک نیست، بلکه **موضعاً یکبیک** است. بدین معنی که هر نقطه $p \in \mathbb{P}^2$ همسایگی‌ای U دارد که f بر آن یک به یک است. چنین تابعی را **ایمرشن توپولوژیک** می‌نامند (البته تا فصل ۲ که نوع دیگری از ایمرشن تعریف می‌شود، می‌توان به آن تنها ایمرشن گفت.) به این ترتیب می‌توان گفت که $\mathbb{P}^2$ را از نظر توپولوژی به طور ایمرز در $\mathbb{R}^3$ می‌توان قرار داد، اما به طور نشانده شده خیر (یعنی، همیومورفیسمی از $\mathbb{P}^2$ بروی زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ وجود ندارد).

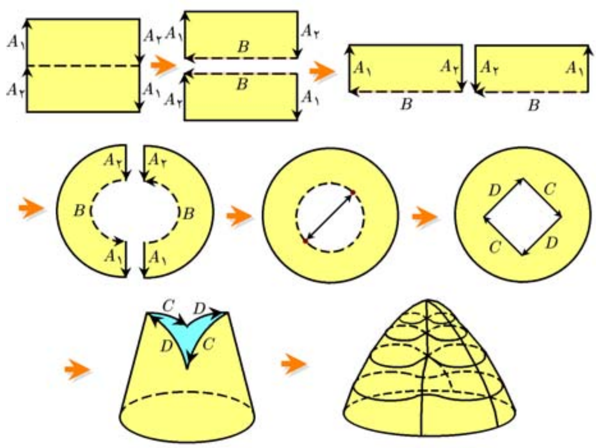


شکل ۱۸.۱



شکل ۱۹.۱: $\mathbb{P}^2$ از یک نوار موبیوس و یک دیسک ساخته شده است.

دومین ایمرشن توپولوژیک $\mathbb{P}^2$ در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان با ایمرز کردن نوار موبیوس در $\mathbb{R}^3$ طوری که لبهٔ آن دایره‌ای در یک صفحه شود، به ترتیب زیر آغاز نمود. شکل ۲۰.۱ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان نوار موبیوس را از روی حلقه (ناحیهٔ بین دو دایرهٔ متحدالمرکز) به دست آورد. یعنی کافی است در حلقهٔ ساخته شدهٔ آخر، اضلاع مقابل را با جهات مختلف بر هم منطبق نمود. (این عملاً همان بیان مجدد برای این واقعیت است که نوار موبیوس عبارت است از صفحهٔ تصویری منهی یک دیسک.) دایرهٔ درونی را با یک چها ضاعی می‌توان معاوضه نمود. چنانچه شکل حاصل را بتوی فضای $\mathbb{R}^3$ ببریم و یکی گیریهای لازم را انجام دهیم، به یک کلاه متقاطع می‌رسیم. به شکل زیر توجه شود. توجه شود که کلاه متقاطع به همراه دیسکی که بتواند لبهٔ پائین آن را پر کند، یک مجموعهٔ ایمرز توپولوژیک با $\mathbb{P}^2$ خواهد شد.



شکل ۲۰.۱: چگونگی بدست آوردن نوار موبیوس از روی حلقه

موضوعی که در بحث بالا جا ماند، تعریف متر بر $\mathbb{P}^2$ است. فقدان متر را با روند مشروح در تمرینات می‌توان مرتفع نمود. موضوعی که بعداً به دفعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. این بحث قبل از اینکه در فصل ۳ تشریح شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بخش بالا نشان می‌دهد که در $\mathbb{R}^3$ چیزهایی شبیه $\mathbb{P}^2$ وجود دارند که منیفلد نیستند. البته فعلاً می‌توانیم با نشاندن $\mathbb{P}^2$ در $\mathbb{R}^4$، یک متر بر آن معرفی کنیم. تابع

$$f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}^4 \qquad f(x,y,z)=\Big(yz,xz,xy,x^2+2y^2+3z^2\Big)$$

را در نظر بگیرید. به وضوح $f(p)=f(-p)$. به علاوه می‌توان نشان داد که از $f(p)=f(q)$ نتیجه می‌شود $p=\pm q$. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم که $f(x,y,z)=f(a,b,c)$. اول از همه ملاحظه می‌کنیم که

$$yz=bc \quad , \quad xz=ac \quad , \quad xy=ab \tag{3.1}$$

اگر $a,b,c\neq 0$، نتیجه می‌گیریم که

$$y=bx/a \qquad , \qquad z=cx/a \tag{4.1}$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\\ &= 1+2(xy+xz+yz)\end{aligned}$$

به علاوه، از (۳.۱) نتیجه می‌توان گرفت که به این ترتیب

$$(x+y+z)^2=(a+b+c)^2$$

بنابراین

$$a+b+c=\pm(x+y+z) \tag{5.1}$$

اکنون به کمک (۴.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$a+b+c=\pm x(1+b/a+c/a)=\pm(a+b+c)/a$$

بنابراین $x=\pm a$. به صورت مشابه، داریم $y=\pm b$ و $z=\pm c$ (که البته در هر سه علامت یکسان است، چرا که هر سه از (۵.۱) نتیجه می‌شوند). در حالت منفی، کافی است با حفظ محور چهارم، جهت سه محور اول را عوض کنیم. حال فرض کنیم $a=0$. اگر $x\neq 0$، آنگاه از (۳.۱) نتیجه می‌گردد که $y=z=0$ و بنابراین $(x,y,z)=(\pm1,0,0)$. اما $y=z=0$ با به کارگیری مجدد از (۳.۱) نتیجه می‌دهد که $bc=0$

لذا $b=0$ یا $c=0$. در نتیجه $(a,b,c)=(0,\pm1,0)$ یا $(a,b,c)=(0,0,\pm1)$. به وضوح این معادلات متناقض هستند:

$$x^2+2y^2+3z^2=a^2+2b^2+3c^2$$

پس $x=0$ و لذا داریم

$$yz = bc \qquad (6.1)$$
$$2y^2+3z^2 = 2b^2+3c^2 \qquad (7.1)$$
$$y^2+z^2 = b^2+c^2=1 \qquad (8.1)$$

از (۸.۱) نتیجه می‌گردد که

$$2y^2+3z^2=2y^2+3(1-y^2)=3-y^2$$

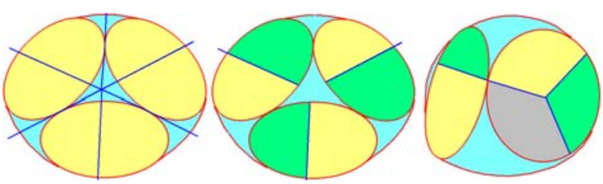
به مشابهاً در مورد b و c. اکنون از (۷.۱) نتیجه می‌شود که

$$3-y^2=3-b^2 \quad \Longrightarrow \quad y=\pm b \qquad (9.1)$$

حال از (۶.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$z=\pm c \qquad (10.1)$$

(این حتی اگر که $y=b=0$ نیز برقرار است، زیرا در این صورت $z,c=\pm1$). به وضوح (۶.۱) نیز نشان می‌دهد که همین موضوع در مورد (۹.۱) و (۱۰.۱) درست است و برهان تمام است.



شکل ۲۱.۱: رویهٔ رومن منتسب به استاینر

چون $f(p)=f(q)$ به معنی $p=\pm q$ است، می‌توانیم تعریف کنیم

$$\bar{f}:\mathbb{P}^2\longrightarrow\mathbb{R}^4 \qquad \bar{f}([p]):=f(p)$$

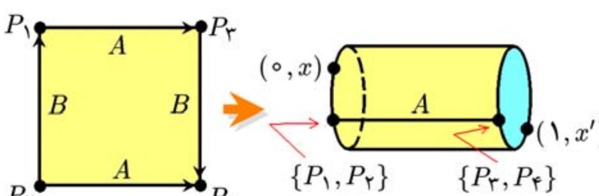
این نگاشت یک به یک است و از آن برای تعریف متر در $\mathbb{P}^۲$ می‌توان استفاده کرد:

$$\bar{d}([p],[q]) := d(\bar{f}[p]), (\bar{f}[q]) = d(f(p), f(q))$$

می‌توان نشان داد که زیر مجموعه‌های باز آن، درست همانهایی هستند که قبلاً تشریح کردیم.

جالب است بدانید که نگاشت $g : \mathbb{P}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ حاصل از سه مختص اول f یک ایمرشن توپولوژیک از $\mathbb{P}^۲$ در $\mathbb{R}^۳$ است: $g([x,y,z]) = (yz, xz, xy)$. تصویر g در $\mathbb{R}^۳$ را **رویهٔ رومن** منتسب به استاینر نامیده می‌شود[۲].

با در دست داشتن رویهٔ $\mathbb{P}^۲$ همچون روند ساخت تیوپ $n-$حفره‌ای، می‌توان رویه‌های جدیدی را تولید نمود. مثلاً با افزودن یک دسته به صفحهٔ تصویری آغاز می‌کنیم. برای این منظور ابتدا یک دیسک از صفحهٔ تصویری جدا می‌کنیم و به روی حاصل (که یک نوار موبیوس است) دسته‌ای که آن هم از برداشتن دیسکی بر سطح یک تیوپ حاصل شده است، به آن می‌افزاییم. نزدیک‌ترین راه برای تجسم این رویه، ترسیم یک کلاه متقاطع و یک دسته به پائین آن است. به علاوه، دو صفحهٔ تصویری را به یکدیگر می‌توانیم بدوزیم، برای این منظور کافی است دو نوار موبیوس را در امتداد لبه‌هایشان به هم بچسبانیم این کار را با به هم چسباندن دو کلاه متقاطع از سمت قاعدهٔ خود می‌توان انجام داد. این کار تمیزتر و شکل حاصل ملموستر است. به شکل ۲۳.۱ توجه شود.

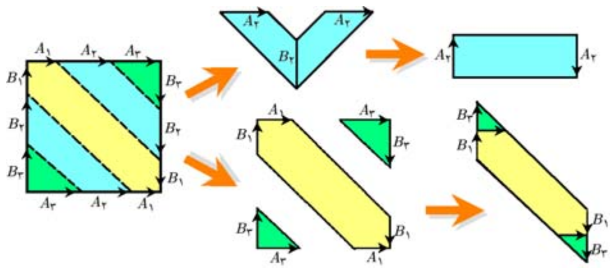


شکل ۲۲.۱

مربعی را در نظر بگیرید که لبه‌های آن را به شرح زیر یکی گرفته‌ایم؛ این شیء را از روی استوانهٔ $\mathbb{S}^۱ \times [\circ, ۱]$ نیز می‌توان نتیجه گرفت. برای این منظور نقطهٔ $(\circ, x) \in \mathbb{S}^۱ \times [\circ, ۱]$ را با $(۱, x')$ یکی بگیریم که x' نقطهٔ متقاطر x در $\mathbb{S}^۱$ است، یعنی x را به مرکز وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا $\mathbb{S}^۱$ را در x' قطع کند. توجه شود که در این یکی‌گیری نقاط $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$ و $p_۴$ بر هم منطبق می‌شوند، و لذا چهارتایی $\{p_۱, p_۲, p_۳, p_۴\}$ یک نقطه از فضای جدید ما خواهد بود.

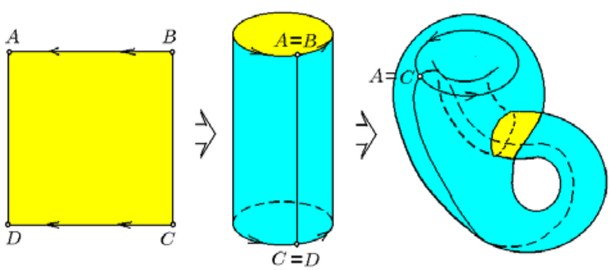
[۲] Steinev's Roman Surface

خطوط خطچین در مستطیل در شکل ۲۳.۱، آن را به دو تکه تقسیم می کنند. یکی از این نواحی را حاشور زده‌ایم و دیگری ساده است. ناحیهٔ حاشور خورده نوار موبیوس است که خطوط خطچین دایرهٔ لبهٔ آن است. با تجدید ترتیب این قطعات ملاحظه می‌گردد که به این ترتیب، رویهٔ مورد مطالعه به دو نوار موبیوس تقسیم شده است، که در امتداد لبه به هم متصل شده‌اند.



شکل ۲۳.۱

با اعمال این ساخت بر $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ به یک ایمرشن از رویهٔ مورد نظر می‌رسیم. برای این منظور کافی است نقطهٔ $(0, x)$ از انتهی سمت چپ استوانه را به نقطهٔ $(1, x')$ از سوی دیگر استوانه متصل نمود، که این کار با چرخیدن این استوانه به گونه‌ای است که لبهٔ سمت چپ از پائین بر لبهٔ دیگر منطبق گردد. رویهٔ حاصل، **بطری کلاین** نامیده می‌شود. به شکل ۲۴.۱ توجه شود.



شکل ۲۴.۱: بطری کلاین

دقیقاً با همین روش نمی‌توان منیفلدهای با بعد بالا را مطرح کرد. البته صرف نظر از n−منیفلدهای $\mathbb{S}^n$، خانوادهٔ فضاهای تصویری را نیز می‌توان مطرح نمود. n−**فضای تصویری** $\mathbb{P}^n$ را به صورت خانواده همهٔ هجموعه‌های به شکل $\{p, -p\}$ تعریف می‌کنیم که $p \in \mathbb{S}^n$. وضعیت مجموعه‌های باز در $\mathbb{P}^n$ کاملاً شبیه به حالت $\mathbb{P}^2$ است. البته

فضاهای تصویری شبیه خانوادهٔ $\mathbb{S}^2$ ها نیست و تا آن حد خوش رفتار نیستند. بعداً خواهید دید که فضاهای $\mathbb{P}^n$ با n زوج کاملاً متفاوت از فضاهای $\mathbb{P}^n$ با n فرد هستند.
برای تکمیل این مقدمه از منیفلدها، به تعریف دیگری نیاز داریم. می‌خواهیم منیفلدهایی را معرفی کنیم که «مرز» دارند، نظیر نوار موبیوس و یا دیسک. نقاط روی مرز دارای همسایگیهای باز هیمومورف با $\mathbb{R}^n$ نیستند، اما با زیر مجموعه‌ای مشخص از $\mathbb{R}^n$ هیمومورف هستند. نیم فضای بستهٔ $\mathbb{H}^n$ را به صورت

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \cdots, x^n) \,|\, x^i \in \mathbb{R}, x^n \geq 0\}$$

تعریف می‌کنیم. منظور از **منیفلد مرزدار**، فضایی است متری M با خاصیت زیر:

اگر $x \in M$، یک همسایگی باز U از x و یک عدد صحیح $n \geq 0$ چنان یافت می‌شود که U یا با $\mathbb{R}^n$ هیمومورف است و یا با $\mathbb{H}^n$.

هیچ نقطه‌ای از یک منیفلد لبه‌دار یا مرزدار، همسایگی‌ای ندارد که هم با $\mathbb{R}^n$ هیمومورف باشد و هم با $\mathbb{H}^n$ (ناوردایی بعد)؛ نقاطی $x \in M$ که دارای همسایگی هیمومورف با $\mathbb{H}^n$ هستند، را از سایر نقاط مجزا می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ چنین نقاطی را **مرز** یا **لبهٔ** M نامیده و با نماد ∂M نشان می‌دهیم. چنانچه منیفلدی M به مفهوم قبلی منیفلد باشد، آنگاه داریم $\partial M = \emptyset$. توجه شود که اگر M زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه مرز M به عنوان یک منیفلد لبه‌دار در حالت کلی با مرز M به عنوان زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژی $\mathbb{R}^n$ متفاوت است؛ چرا که اگر مثلاً M منیفلدی لبه‌دار با بعد $< n$ باشد، آنگاه تمام نقاط M نقاط مرزی (به معنی توپولوژی) هستند.

چنانچه بخواهیم بحث در خصوص بحث در خصوص منیفلدها و نیز منیفلدهای مرزدار متناوباً دنبال کنیم، بحث به درازا می‌کشد. اغلب اصطلاح «منیفلد» به معنی منیفلد مرزدار است. منیفلد بدون مرز فشرده را اصطلاحاً منیفلد بسته می‌نامند. برای اشاره به منیفلد مرزدار، ترجیه می‌دهیم از اصطلاح منیفلد — با مرز استفاده نکنیم.

۳.۱ تمرینات

۱. نشان دهید که اگر d یک متر بر X باشد، در این صورت $d/(1+d)$ و $\min\{1, d\}$ نیز متر هستند. به علاوه، این مترها با d هم‌ارزند (به بیان دیگر، نگاشت همانی $\mathrm{Id} : (X, d) \to (X, \bar{d})$ هیمومورفیسم است).

۲. نشان دهید که اگر به ازاء هر $i \in I$ ای (X_i, d_i) فضایی متری با $d_i < ۱$ باشد و به ازاء هر $i \neq j$ ای $X_i \cap X_j = \emptyset$ آنگاه (X, d) یک فضای متری است، که در آن $X := \bigcup_i X_i$ و اگر به ازاء یک $i \in I$ ای $x, y \in X_i$، آنگاه $d(x, y) = d_i(x, y)$ و در غیر این صورت $d(x, y) = ۱$. هر یک از X_i ها زیر مجموعه‌ای باز از X است و $Y \subseteq X$ وقتی و تنها وقتی با X همیومورف است که $Y = \bigcup_i Y_i$ که مجموعه‌های مجزای Y_i با X_i همیومورفند $(i \in I)$. فضای (X, d) و با هر فضای همیومورف با آن را اجتماع مجزای فضاهای X_i می‌نامیم.

۳. الف) نشان دهید که هر منیفلدی موضعاً فشرده است.

ب) نشان دهید که هر منیفلدی موضعاً همبند راهی است و هر منیفلد همبندی، موضعاً همبند است.

ج) نشان دهید که هر منیفلد همبند، همبند قوسی است. (راه عبارت است از تصویر پیوستهٔ $[۰, ۱]$، اما قوس تصویر پیوسته و یک به یک است. حکم مشکلتر این است که هر راهی یک قوس بین دو انتهایش دارد، اما اثبات همبند راهی بودن در مورد منیفلدها کار دشواری نیست.)

۴. فضای X را در صورتی موضعاً همبند گویند که به ازاء هر $x \in X$ ای، هر همسایگی از x یک همسایگی همبند در برداشته باشد. ثابت کنید:

الف) همبندی، همبندی موضعی را نتیجه نمی‌دهد.

ب) هر زیر مجموعهٔ باز از یک فضای همبند موضعی، همبند موضعی است.

ج) X وقتی و تنها وقتی همبند موضعی است که مؤلفه‌های باز آن، باز باشند. در نتیجه، هر همسایگی از هر نقطه از یک فضای همبند موضعی، یک همسایگی همبند باز در بر دارد.

د) هر فضای همبند موضعی با اجتماعی مجزا از مؤلفه‌ها همیومورف است.

ه) هر منیفلدی همبند موضعی است، و لذا با اجتماعی مجزا از مؤلفه‌هایش همیومورف است، که هر یک از آنها یک زیر منیفلد باز هستند.

۵. الف) نشان دهید که همسایگی U در تعریف ما از منیفلد، باز است.

ب) نشان دهید که عدد صحیح n در تعریف ما از منیفلد، به ازاء هر $x \in M$ ای منحصر به فرد است.

۶. الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه زیر مجموعه‌ای از یک n−منیفلد، n−منیفلد باشد، این است که باز باشد.

ب) نشان دهید که اگر M همبند باشد، آنگاه بعد M در کلیهٔ نقاطش $x \in M$ ثابت است.

۷. الف) نشان دهید که اگر $U \subseteq \mathbb{R}$ بازه بوده و $f : U \to \mathbb{R}$ پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه یا f صعودی است و یا اینکه f نزولی است.

ب) نشان دهید که تصویر $f(U)$ باز است.

ج) نشان دهید که نگاشت f همیومورفیسم است.

۸. در مورد این مسأله فرض کنید که

۱. (تعمیم قضیهٔ منحنی ژردان). اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ با $\mathbb{S}^{n-1}$ همیمورف باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - A$ دو مؤلفه دارد، و A مرز هر دو مؤلفهٔ آن است.

۲. اگر $B \subset \mathbb{R}^n$ با دیسک $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x, 0) \leq 1\}$ همیومورف باشد، آنگاه $\mathbb{R}^n - B$ همبند است. به این ترتیب، ثابت کنید:

الف) یکی از مؤلفه‌های $\mathbb{R}^n - A$ (خارج A با نماد $\mathrm{Ext}(A)$) نامحدود است و دیگری (درون A با نماد $\mathrm{Int}(A)$) محدود است.

ب) اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، $A \subset U$ با $\mathbb{S}^{n-1}$ همیومورف باشد و $f : U \to A$ یک به یک و پیوسته باشد (و لذا f همیومورفیسمی بر A است)، در این صورت $f(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int} f(A)$.

ج) ناوردایی دامنه را ثابت کنید. **راهنمایی:** ابتدا (ج) را ثابت کنید.

۹. الف) اثباتی مقدماتی برای این حکم بیاورید که $\mathbb{R}^1$ با $\mathbb{R}^n$ که $n > 1$ همیومورف نیست.

ب) مستقیماً از تعمیم قضیهٔ منحنی ژردان ثابت کنید که اگر $m \neq n$ آنگاه $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ غیر همیومورفند.

۱۰. در اثبات قضیهٔ ۲.۱.۱، لازم است نشان دهید که حد هر زیر دنبالهٔ همگرا از z_i ها عملاً در گوی بستهٔ به مرکز y و شعاع $r(y)$ قرار دارد.

۱۱. نشان دهید که هر منیفلد همبند (که فضایی متری است) پایه‌ای شمارا برای توپولوژی‌اش دارد و لذا زیر مجموعه‌ای چگال و شمارا دارد.

۱۲. تابع مرکب $f = \mathbb{S}^1 - \{(0,1)\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^1 \times \{-1\} \to \mathbb{R}^1$ را صراحتاً بیان کرده، و نشان دهید که یک هیمومورفیم است.

کار مشابهی در مورد تابع $f : \mathbb{S}^{n-1} - \{(0,\cdots,0,1)\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ انجام دهید.

۱۳. الف) در متن آمده است که زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{P}^2$، مجموعه‌هایی به شکل $f(V)$ هستند که $V \subset \mathbb{S}^2$ باز است و اگر $p \in V$ آنگاه $-p \in V$. نشان دهید، شرط آخر لازم نیست.

ب) در مورد نوار موبیوس شرط مشابهی وجود دارد که ذکر آن الزامی است. توضیح دهید که تفاوت از کجا است.

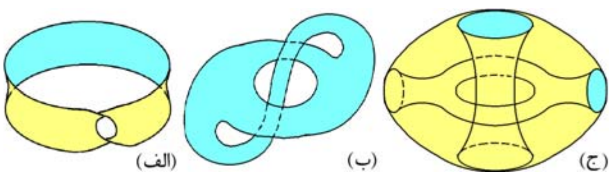
۱۴. الف) نشان دهید که متر تعریف شده در متن برای $\mathbb{P}^2$، مجموعه‌های باز معرفی شده را می‌سازد.

ب) نشان دهید $\mathbb{P}^2$ یک رویه است.

۱۵. الف) نشان دهید $\mathbb{P}^2$ با $\mathbb{S}^1$ همیومورف است.

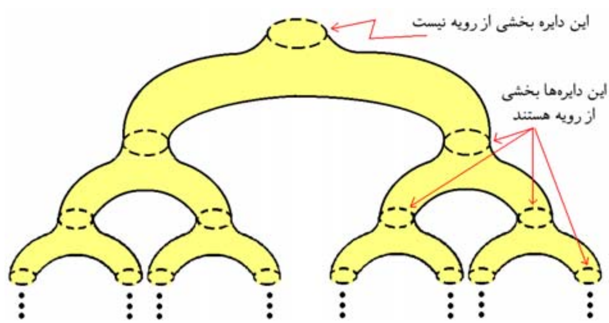
ب) چون می‌توانیم $\mathbb{S}^{n-1}$ را زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{S}^n$ قلمداد کنیم و چون در این یکی گیری، نقاط متقاطر در $\mathbb{S}^{n-1}$ به نقاط متقاطر در $\mathbb{S}^n$ برده می‌شوند، پس به طور طبیعی می‌توان $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ را در نظر گرفت. نشان دهید که در این صورت $\mathbb{P}^n - \mathbb{P}^{n-1}$ با درون دیسک D^n (به عبارت دیگر $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,0) < 1\}$) همیومورف است.

۱۶. قضیه‌ای کلاسیک از توپولوژی اذعان می‌دارد که هر رویهٔ فشردهٔ در $\mathbb{R}^3$ به جز $\mathbb{S}^2$ با فضایی حاصل از متصل نمودن تعدادی دسته به تیوپ با فضای تصویری همیومورف است و به علاوه هر فضایی که رویه‌ای مرزدار و فشرده باشد، با فضایی همیومورف است که از برداشتن داخل تعدادی متناهی دیسک از سطح این خانواده حاصل شده است. این فضاها را استاندارد می‌نامند. فضاهای زیر با کدام فضای استاندارد همیومورفند؟



شکل ۲۵.۱

۱۷. فرض کنید $C \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^۲$ مجموعهٔ کانتور است. نشان دهید $\mathbb{R}^۲ - C$ با رویهٔ زیرهمیومورف است.



شکل ۲٦.۱

۱۸. در صورتی می‌گوییم یک فضای توپولوژیک موضعاً فشردهٔ غیر فشرده X **انتهی دارد** که به ازاء هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ $C \subseteq X$، مجموعهٔ فشرده‌ای K چنان یافت گردد که $C \subset K \subset X$ و $X - K$ همبند باشد.

الف) نشان دهید که اگر $n > ۱$ آنگاه $\mathbb{R}^n$ انتهی دارد، ولی $\mathbb{R}^۱$ خیر.

ب) $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ انتها ندارد، لذا $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ با $\mathbb{R}^m$ که $n \neq m$ یا حتی $m = n$ همیومورف نیست.

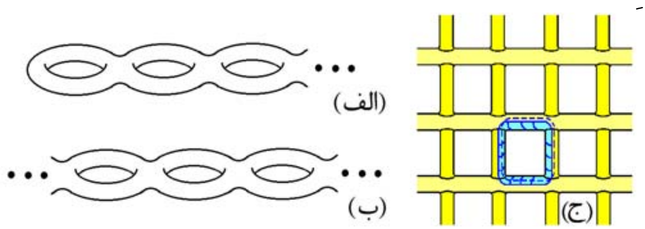
۱۹. این مسأله، نتیجه‌ای از مسألهٔ قبل است؛ در مسألهٔ ۲۴ از آن استفاده می‌شود. انتهی فضای توپولوژی X تابعی ε است که به هر زیر مجموعهٔ فشرده $C \subseteq X$ یک مؤلفهٔ غیر تهی $\epsilon(C)$ از $X - C$ را نسبت می‌دهد، به طریقی که از $C_۱ \subseteq C_۲$ نتیجه می‌شود $\epsilon(C_۲) \subseteq \epsilon(C_۱)$.

الف) اگر $\mathbb{R} - C$ فشرده باشد، آنگاه $\mathbb{R} - C$ دقیقاً دو مؤلفهٔ بی‌کران دارد، مؤلفهٔ سمت چپ که از همهٔ اعداد کوچکتر از یک N ای تشکیل می‌شود و مؤلفهٔ سمت راست که از همهٔ اعداد بزرگتر از M ای تشکیل می‌گردد. پس $\mathbb{R}$ دو انتهی دارد.

ب) نشان دهید که به ازاء هر $n > ۱$ ای، $\mathbb{R}^n$ تنها یک انتهی ϵ دارد. به طور کلی، شرط لازم و کافی برای اینکه فضایی تنها یک انتهی داشته باشد این است که به تعبیر مسألهٔ ۱۸ انتهی داشته باشد.

ج) این قسمت به اطلاعاتی از فضاهای توپولوژی نیاز دارد. گیریم $\mathcal{E}(X)$ مجموعهٔ همهٔ انتهی‌های یک فضای موضعاً فشردهٔ همبند X است. توپولوژی‌ای بر $X \cup$

$\mathcal{E}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: همسایگیهای $N_C(\epsilon_0)$ یک انتها ϵ_0 و همهٔ مجموعه‌های به شکل $X - C \cup \{\epsilon$ انتهاهای $| \, \epsilon(C) = \epsilon_0(C)\}$ که $C \subset X$ فشرده است را مجموعه‌های باز آن می‌گیریم. نشان دهید $X \cup \epsilon(X)$ فشرده است. به ازاء $n > 1$، فضاهای $\mathbb{R} \cup \mathcal{E}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^n \cup \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ کدامند؟



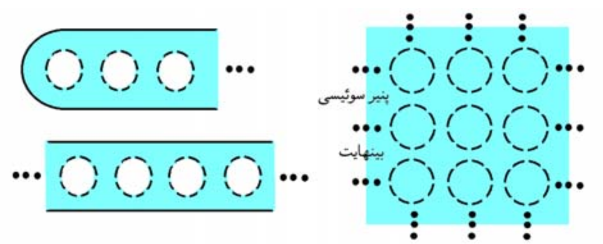
شکل ۲۷.۱

۲۰. سه رویهٔ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

الف) رویه‌های (الف) و (ب) انتها دارند، ولی رویه (ج) خیر.

ب) رویه‌های (الف) و (ج) همیومورفند! **راهنمایی:** ناحیهٔ برش خورده در شکل (ج) یک استوانه است، این استوانه در منتهی‌الیه سمت چپ (الف) ظاهر شده است. اکنون برشهایی مشابه در حفره‌های مجاور انجام دهید و ناحیه‌های نظیر به آنها در رویهٔ (الف) را بیابید.

۲۱. الف) سه زیر مجموعهٔ به شرح زیر از $\mathbb{R}^2$ را در نظر گرفته و نشان دهید که همیومورفند:



شکل ۲۸.۱

ب) ثابت کنید نقاط داخلی هر سه رویه با هم همیومورفند.

۲۲. الف) ثابت کنید که هر زیر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}$ با اجتماعی مجزا از بازه‌ها همیومورف است.

ب) تنها به تعدا شمارا زیر مجموعهٔ باز غیر همیومورف در $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۲۳. برای این مسأله به نتیجه‌ای از قضیهٔ متری سازی اوریزن نیاز داریم که می‌گوید به ازاء هر منیفلد همبند M، یک همیومورفیسم f از M به زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب شمارای $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ وجود دارد. نشان دهید:

الف) اگر M منیفلدی همبند و غیر فشرده باشد، آنگاه تابعی پیوسته $f : M \to \mathbb{R}$ وجود دارد که f در ∞ به ∞ می‌رود. به عبارت دیگر، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که عاقبت در متمم هر مجموعهٔ فشرده قرار می‌گیرد، در این صورت $f(x_n) \to \infty$ با مسألهٔ ۲—۳۰ مقایسه شود.

ب) با داشتن همیومورفیسم $f : M \to \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots)$ و همچنین $g : M \to \mathbb{R}$ که در ∞ به ∞ می‌رود، تابع جدید $\bar{f} : M \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots)$ را با ضابطهٔ $\bar{f}(x) = (g(x), f(x))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\bar{f}(M)$ بسته است.

ج) حداکثر X_p تا منیفلد همبند غیر همیومورف وجود دارد (X_1 کارد دینالیتی $\mathbb{R}$ است).

۲۴. الف) نشان دهید که حتی اگر A و B دو زیر مجموعهٔ بستهٔ غیر همیومورف باشند، باز هم امکان دارد که $\mathbb{R}^n - A$ و $\mathbb{R}^n - B$ همیومورف باشند.

ب) اگر $A \subset \mathbb{R}^2$ بسته و کاملاً ناهمبند باشد (تنها مؤلفه‌های همبندی آن، نقاط باشند)، آنگاه $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2 - A)$ با A همیومورف است. در نتیجه $\mathbb{R}^2 - A$ و $\mathbb{R}^2 - B$ در صورتی که A و B دو مجموعهٔ کاملاً غیر همبند بستهٔ غیر همیومورف باشند، غیر همیومورفند.

ج) مجموعهٔ مشتق A' مجموعهٔ مفروض A عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط غیر تنها در A. مجموعه‌های $A^{(n)}$ را به صورت استقرایی $A^{(1)} = A'$ و $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ تعریف می‌کنیم. به ازاء هر n ای یک زیر مجموعه A_n از $\mathbb{R}$ وجود دارد به گونه‌ای که $A_n^{(n)}$ تک نقطه‌ای است.

*د) X_1 زیر مجموعهٔ کاملاً غیر همبند بستهٔ همیومورف در $\mathbb{R}^2$ وجود دارد.
راهنمایی: گیریم C مجموعهٔ کانتور است و $\cdots < C_3 < C_2 < C_1$ دنباله‌ای از نقاط در C است. به ازاء هر دنباله $\cdots < n_3 < n_2 < n_1$ از اعداد طبیعی، مجموعه‌ای A_{n_i} می‌توانیم بسازیم که مشتق n_i ام آن دقیقاً $\{c_i\}$ باشد.

ه) X_i تا زیر مجموعهٔ باز همبند غیر همیومورف در $\mathbb{R}^2$ وجود دارد.

۲۵. الف) منیفلد مرزدار را می‌توان فضایی متری M تعریف کرد که به ازاء هر $x \in M$ ای یک همسایگی U از x و یک عدد طبیعی $n \leq 0$ چنان وجود دارد که U باز زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{H}^n$ همیومورف است.
ب) اگر M منیفلدی مرزدار باشد، آنگاه ∂M زیر مجموعه‌ای بسته از M است و ∂M و $M - \partial M$ منیفلد هستند.
ج) اگر به ازاء هر $i \in I$ ای C_i ها مؤلفه‌های ∂M باشند و $I' \subseteq I$، در این صورت $M - \bigcup_{i \in I} C_i$ منیفلدی مرزدار است.

۲۶. اگر $\mathbb{R}^n \supset M$ مجموعه‌ای بسته بوده و همزمان یک منیفلد مرزدار $n-$بعدی باشد، آنگاه مرز (توپولوژیک) M برابر ∂M است. چنانچه M زیر مجموعهٔ بسته نباشد، این حکم ممکن است درست نباشد.

۲۷. الف) هر نقطهٔ (a, b, c) واقع بر رویهٔ استانیر در رابطهٔ $b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2$ صدق می‌کند.
ب) اگر (a, b, c) در این معادله صدق کند و بعلاوه فرض کنیم $D \neq 0$ برابر $\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$ است، در این صورت نقطهٔ (a, b, c) بر رویهٔ استانیر قرار دارد. **راهنمایی:** فرض کنید $x = bc/D$ و . . .
ج) مجموعهٔ $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = abc\}$ اجتماع رویهٔ استانیر و بازه‌های باز $(-\infty, -1/2)$ و $(1/2, \infty)$ از هر یک از سه کوز در $\mathbb{R}^3$ است.