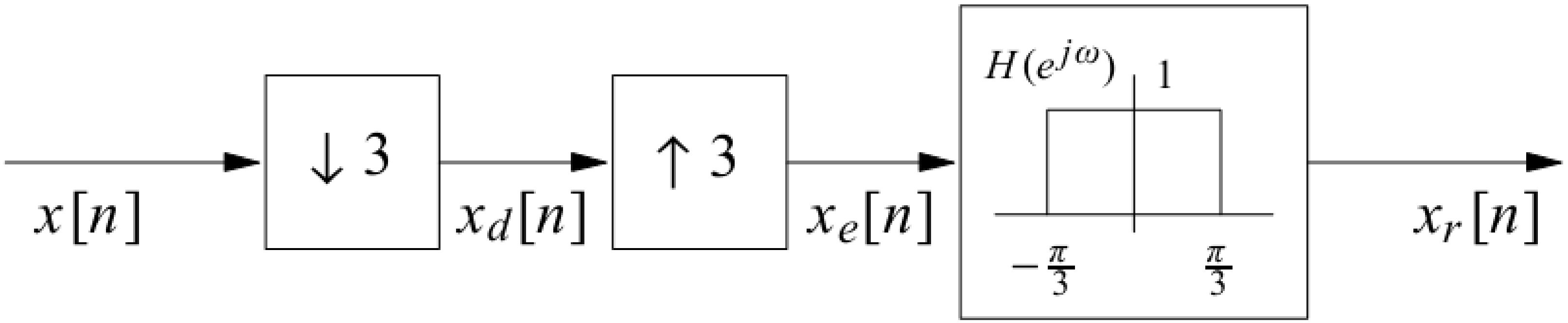
Signals & Systems

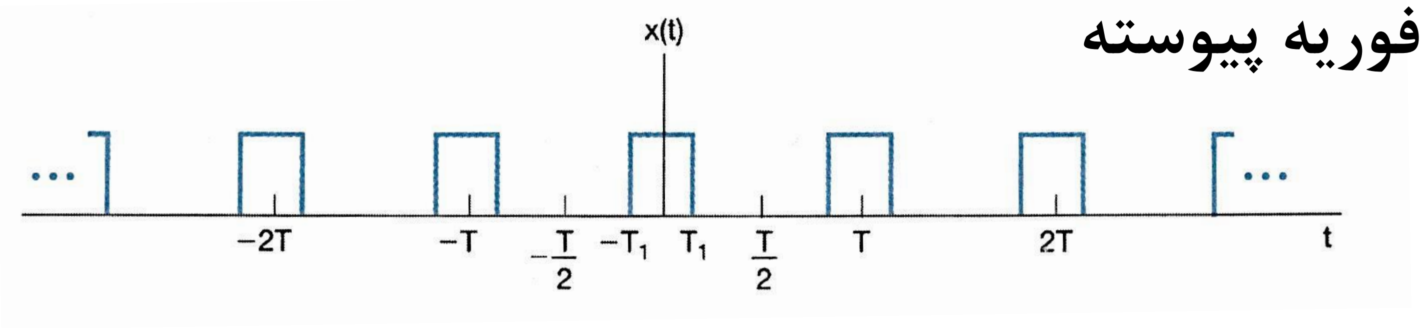
By: M. Shahraki



University of Sistan & Baluchestan
Faculty of Electrical and Computer Engineering
Department of Electrical & Electronics Engineering

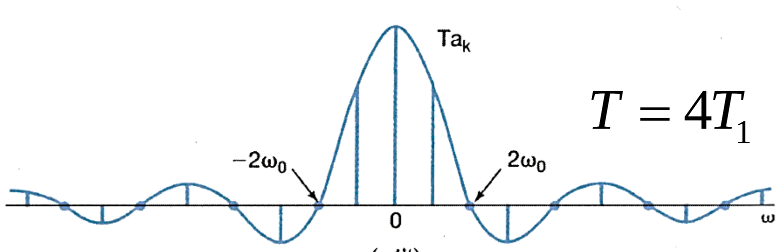
Continuous Fourier Transform

رابطه بین سری فوریه و تبدیل فوریه پیوسته



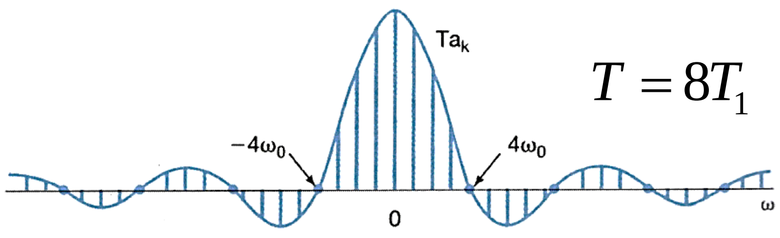
$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

$T=4T_1$



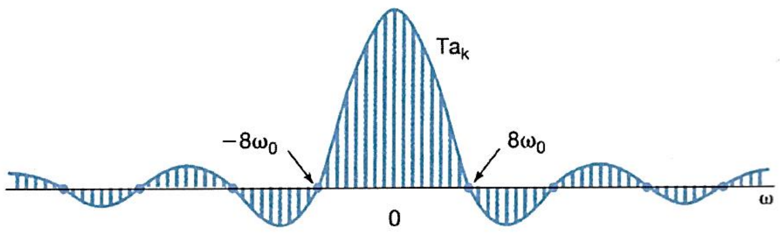
(الف)

$T=8T_1$



(ب)

$T=16T_1$



(پ)

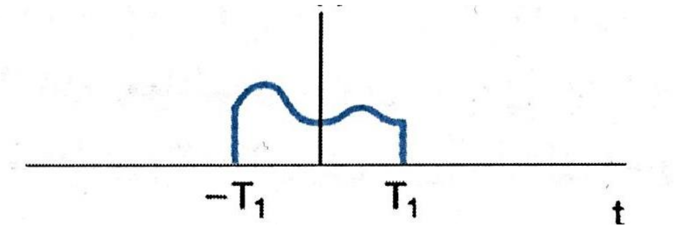
$$a_k=\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$Ta_k=\left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$

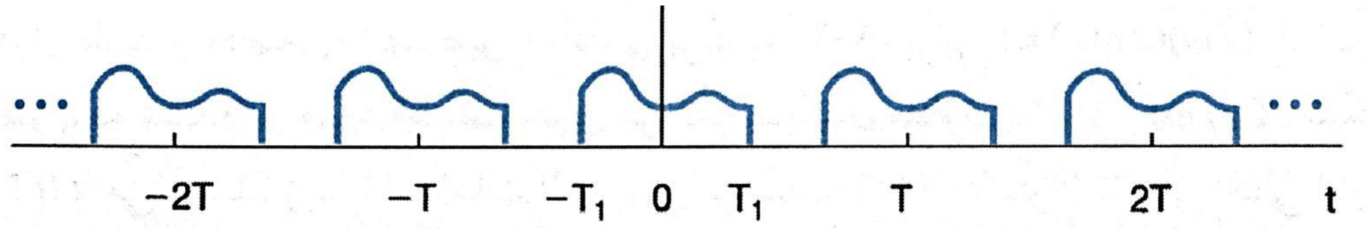
Continuous Fourier Transform

رابطه بین سری فوریه و تبدیل فوریه پیوسته

$x(t)$



$\tilde{x}(t)$



$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k T = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

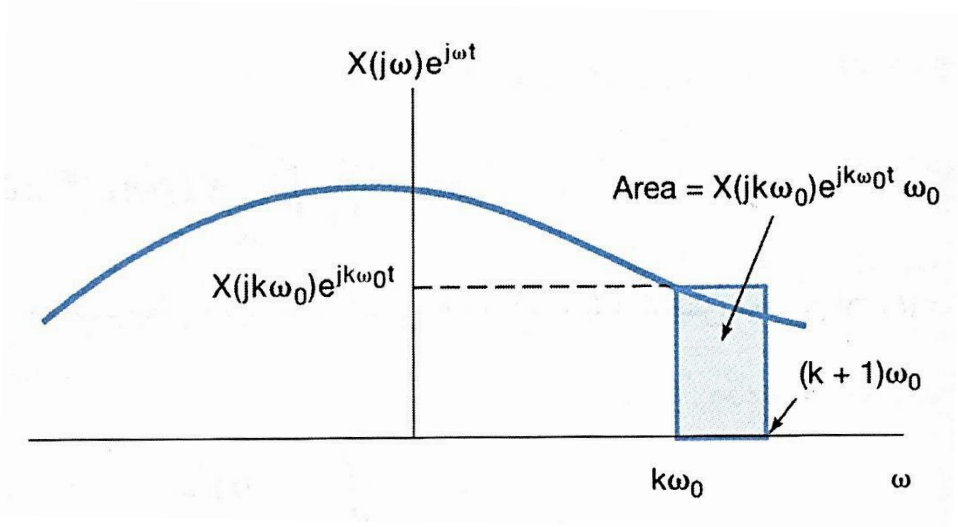
$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

Continuous Fourier Transform

رابطه بین سری فوریه و تبدیل فوریه پیوسته

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$



$$x(t) = \tilde{x}(t)\Big|_{T\to\infty(\omega_0\to 0)}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

Continuous Fourier Transform

شرایط همگرایی تبدیل فوریه پیوسته

۱- مطلقا انتگرال پذیر باشد. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$

۲- در هر بازه محدود تعداد ماکزیمم ها و مینیمم ها محدود باشد

۳- در هر بازه محدود تعداد ناپیوستگی ها محدود باشد.

برای برخی توابع متناوب نیز می توان تبدیل فوریه تعریف کرد

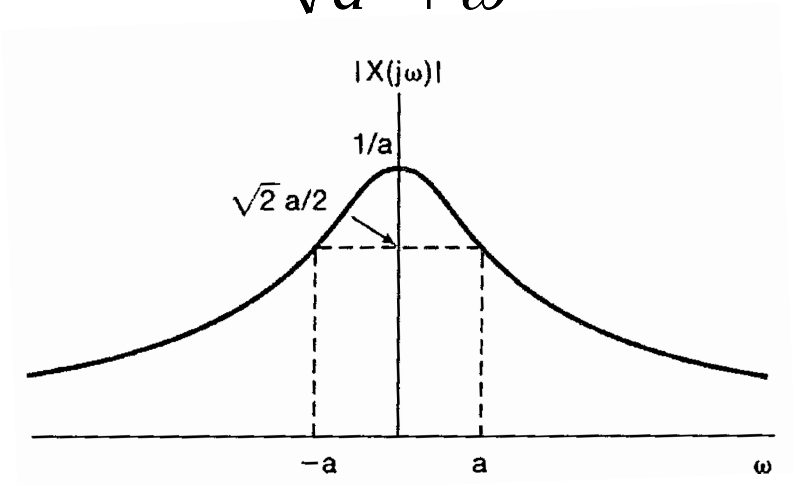
Continuous Fourier Transform

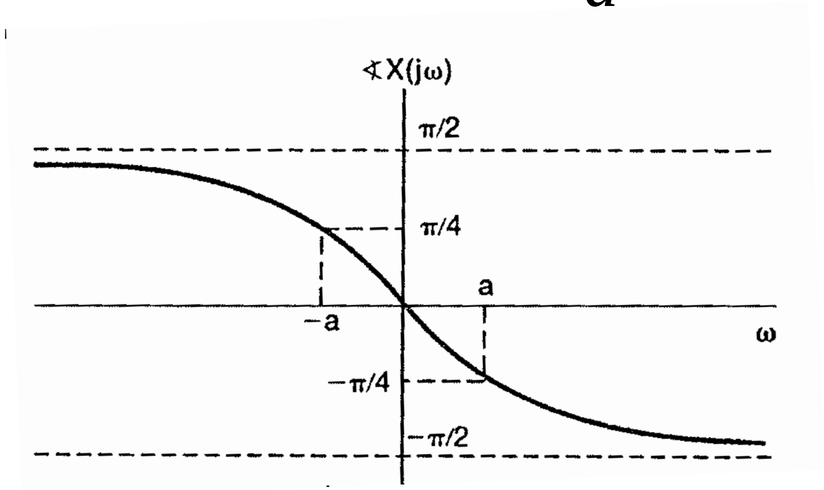
تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} \qquad X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \ a > 0$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$





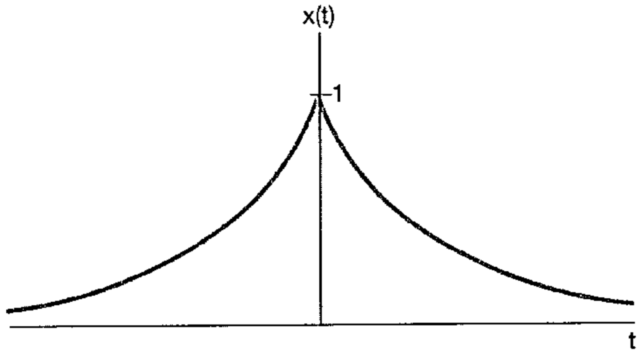
Continuous Fourier Transform

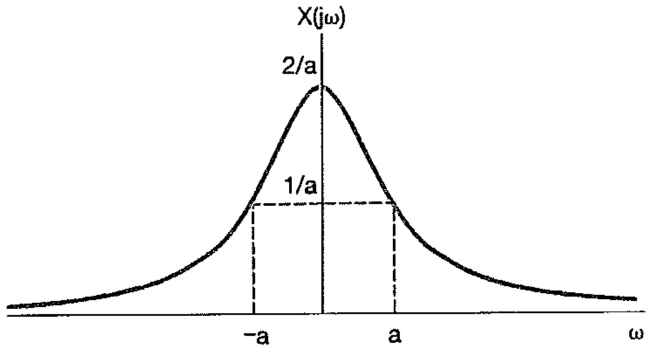
تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad |X(j\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad \angle X(j\omega) = 0$$





Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

فیلتر تمام گذر

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

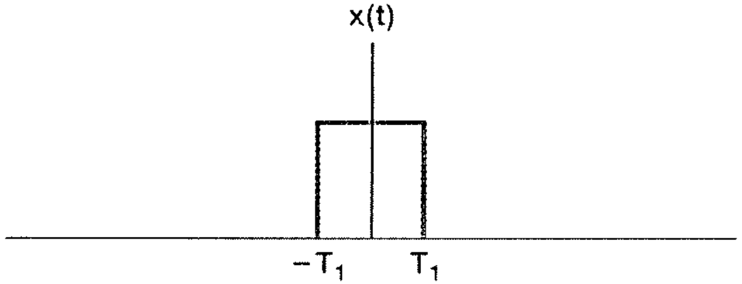
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

$$|X(j\omega)| = 1 \qquad \angle X(j\omega) = -\omega t_0$$

Continuous Fourier Transform

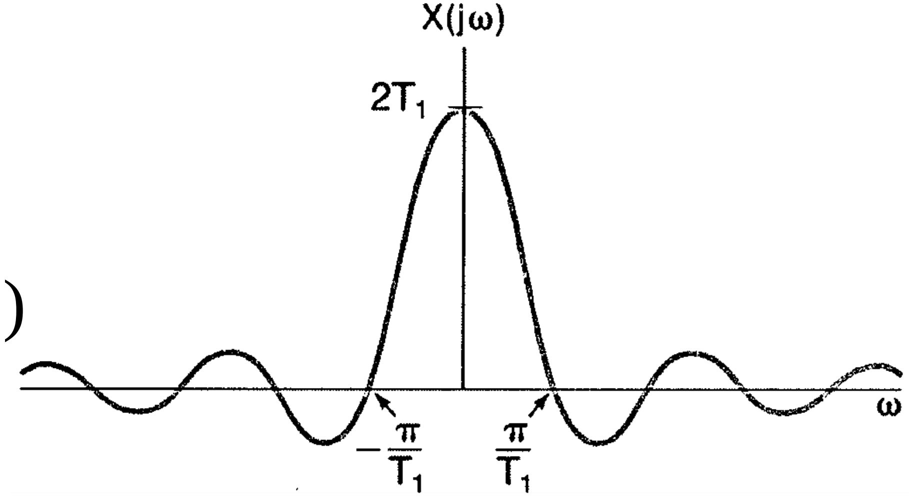
تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{2T_1}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

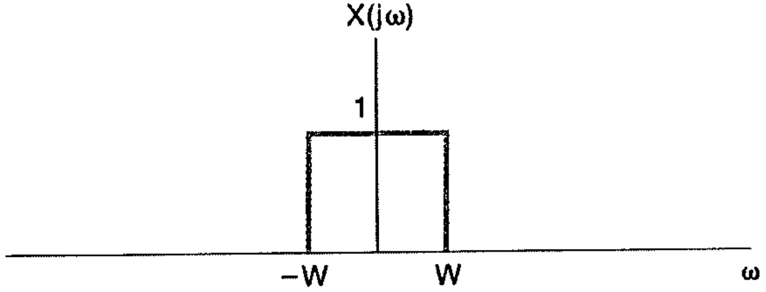
$$X(j\omega) = \frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{j\omega} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \times sinc\left(\frac{\omega}{\pi} T_1\right)$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

Continuous Fourier Transform

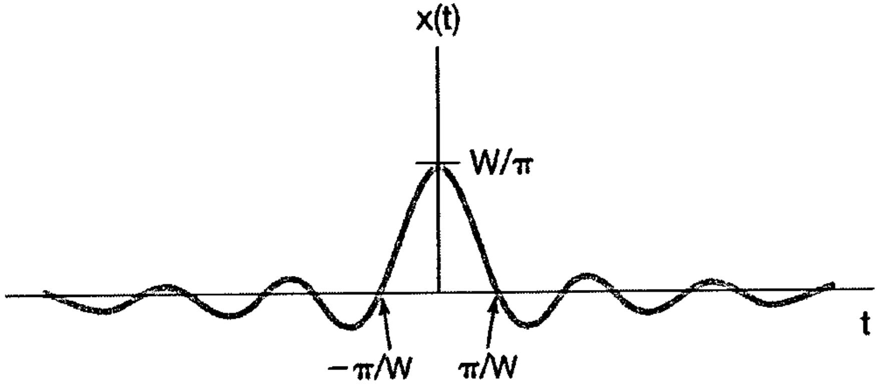
$$X(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<W_1\\ 0 & |\omega|>W_1\end{cases}$$



عکس تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\ =\frac{1}{2\pi}\int_{-W_1}^{W_1}e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t)=\frac{1}{j2\pi t}e^{j\omega t}\Big|_{-W_1}^{W_1}=\frac{e^{jW_1t}-e^{-jW_1t}}{j2\pi t}=\frac{\sin(W_1t)}{\pi t}$$

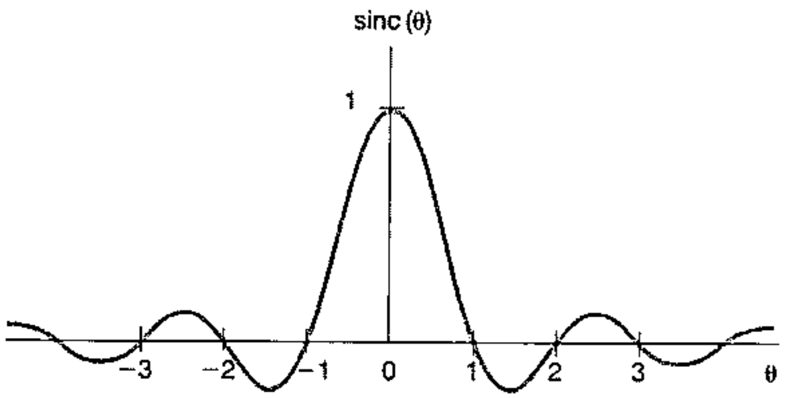


$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(W_1t)}{\pi t}e^{-j\omega t}dt$$

Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته

$$sinc(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$$



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 sinc(\frac{\omega T_1}{\pi})$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_1 \\ 0 & |\omega| > W_1 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{\sin(W_1 t)}{\pi t} = \frac{W_1}{\pi} sinc(\frac{W_1 t}{\pi})$$

Continuous Fourier Transform

همزادی در تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$X(-t) \xrightarrow{F} 2\pi x(j\omega) \qquad \frac{X(-t)}{2\pi} \xrightarrow{F} x(j\omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \qquad g(t) = \frac{2\sin(W_1 t)}{t} \qquad f(t) = \frac{2\sin(W_1 t)}{t}\frac{1}{2\pi} = \frac{\sin(W_1 t)}{\pi t}$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} \qquad G(j\omega) = \begin{cases} 2\pi & |\omega| < W_1 \\ 0 & |\omega| > W_1 \end{cases} \qquad F(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_1 \\ 0 & |\omega| > W_1 \end{cases}$$

Continuous Fourier Transform

همزادی در تبدیل فوریه پیوسته

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$X(-t) \xrightarrow{F} 2\pi x(j\omega)$$

$$x(t) = \delta(t) \qquad x(t) = \delta(t - t_0) \qquad x(t) = 1 \qquad x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 1 \qquad X(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \qquad X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \qquad X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته سیگنالهای متناوب

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \qquad X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

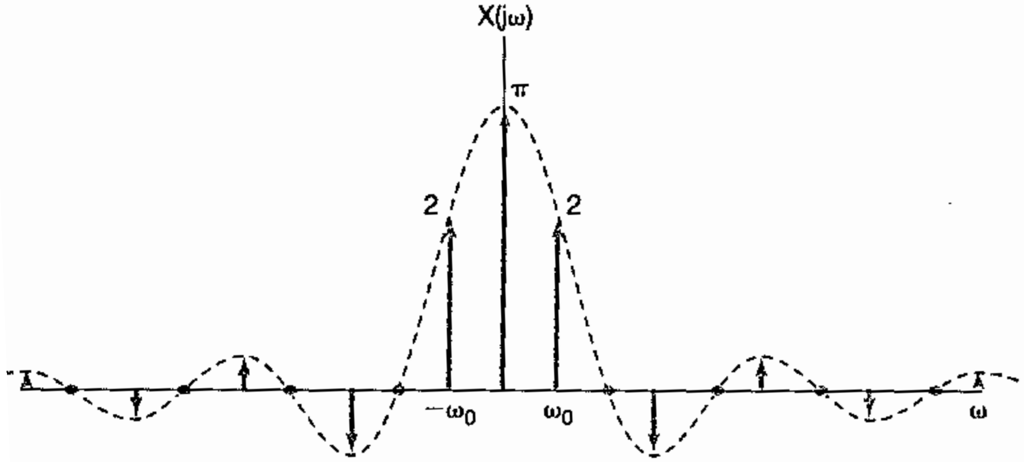
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته سیگنالهای متناوب

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k} \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \qquad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k} \delta(\omega - k\omega_0)$$



Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته سیگنالهای متناوب

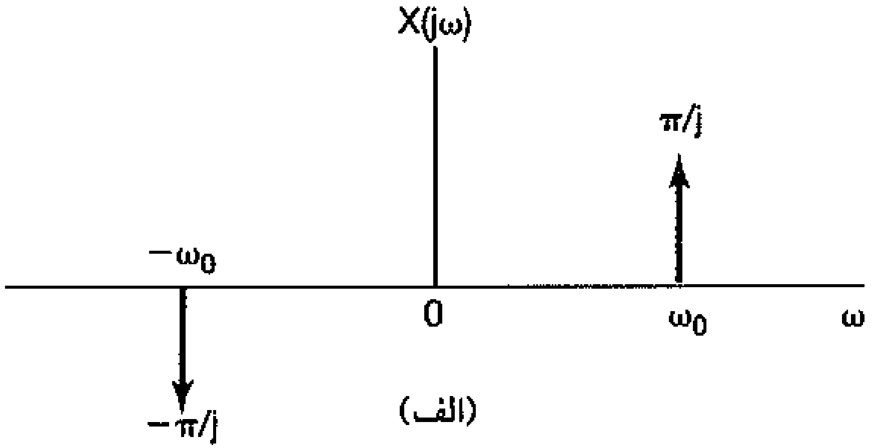
$$x(t) = \sin \omega_0 t \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{2j} \qquad a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(j\omega) = 2\pi\left[\frac{-1}{2j}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2j}\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$X(j\omega) = \left[\frac{-\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)\right]$$



(الف)

Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته سیگنالهای متناوب

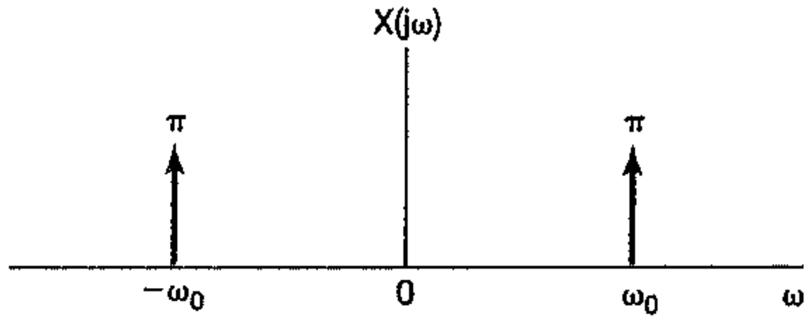
$$x(t) = \cos \omega_0 t \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2} \qquad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(j\omega) = 2\pi\left[\frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$X(j\omega) = \left[\pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

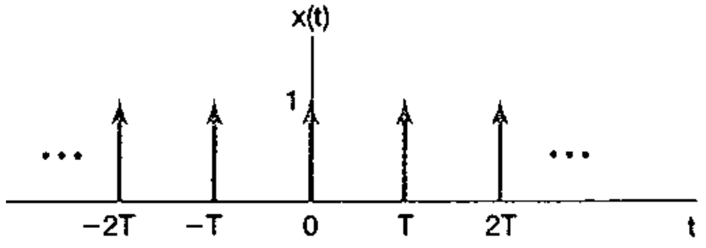


(ب)

Continuous Fourier Transform

تبدیل فوریه پیوسته سیگنالهای متناوب

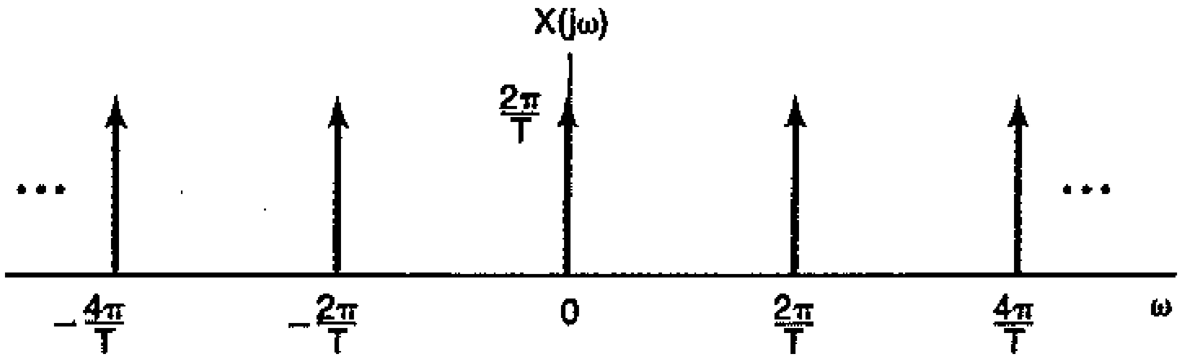
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \qquad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$



$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}=\frac{1}{T}$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi k}{T})$$



Continuous Fourier Transform

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱- خاصیت خطی بودن

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{F} Z(j\omega) = AX(j\omega) + BY(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

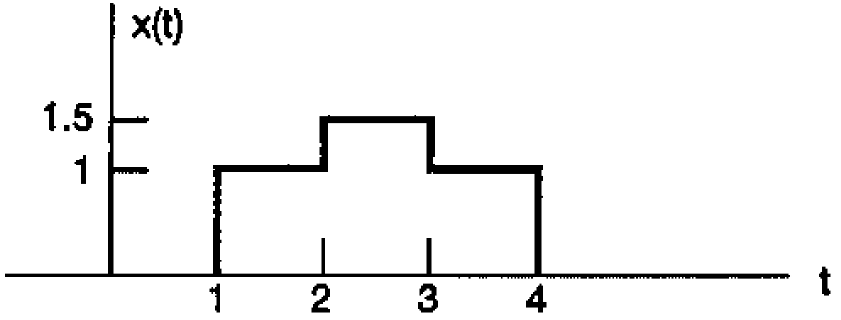
خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۲- جابجایی زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

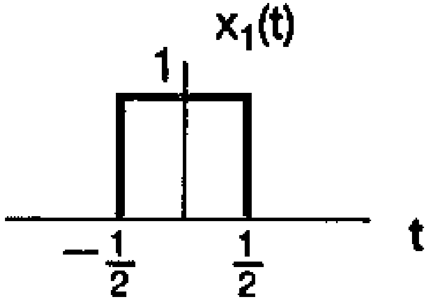
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

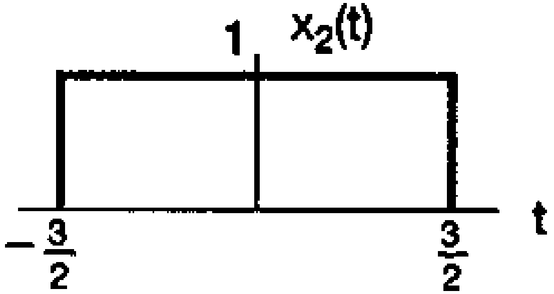
Continuous Fourier Transform



خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۲- جابجایی زمانی





$$x(t) = 0.5x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

$$X(j\omega) = e^{-2.5j\omega}\{0.5X_1(j\omega) + X_2(j\omega)\}$$

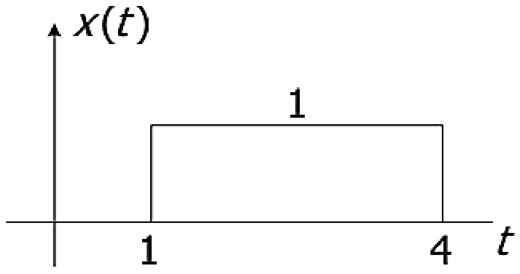
$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin(0.5\omega)}{\omega} \qquad X_2(j\omega) = \frac{2\sin(1.5\omega)}{\omega} \qquad X(j\omega) = e^{-2.5j\omega}\{\frac{\sin(0.5\omega) + 2\sin(1.5\omega)}{\omega}\}$$

Continuous Fourier Transform

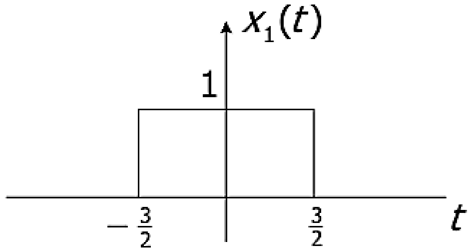
خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۲– جابجایی زمانی

$$x(t) = rect\left(\frac{t-2.5}{3}\right)$$



$$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{3}\right) \Rightarrow X_1(j\omega) = 3\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right)$$



$$x(t) = x_1(t-2.5) \Rightarrow X(j\omega) = e^{-j2.5\omega} \cdot X_1(j\omega) = e^{-j2.5\omega} \times 3\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۳- جابجایی فرکانسی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

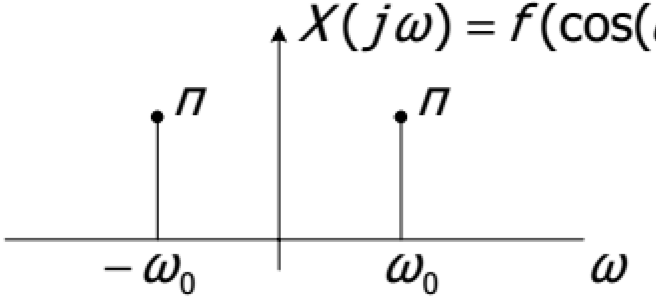
۳- جابجایی فرکانسی

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = 1$$

$$\begin{cases} \delta(t) \leftrightarrow 1 \\ 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 t} \times 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) \\ e^{-j\omega_0 t} \times 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{f} \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$



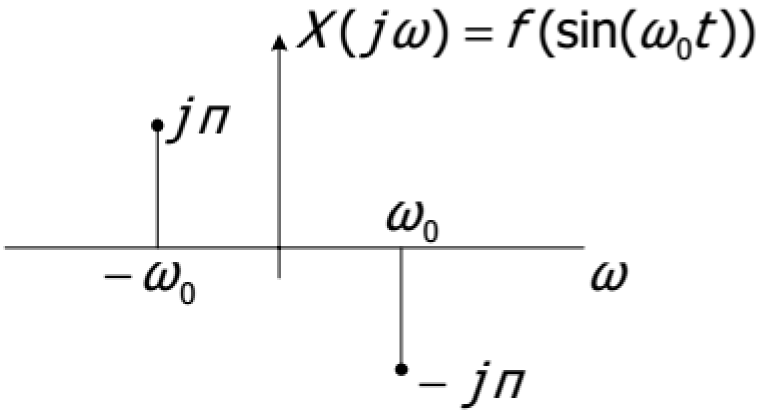
خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$

۳- جابجایی فرکانسی

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$$

$$= -\pi j\, \delta(\omega - \omega_0) + \pi j\, \delta(\omega + \omega_0)$$



تابع سینوس حقیقی و فرد است،
پس تبدیل فوریه آن موهومی و فرد است

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۴- مزدوج و تقارن مزدوج

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$

$x(t)$ حقیقی

$x(t) = x^*(t)$

$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

$X^*(-j\omega) = X(j\omega)$

$x(t)$ حقیقی و فرد

تبدیل فوریه موهومی و فرد

$X(-j\omega) = -X(j\omega)$

$x(t)$ حقیقی و زوج

تبدیل فوریه حقیقی و زوج

$X(-j\omega) = X(j\omega)$

$x(t)$ حقیقی

$\mathrm{Re}\{X^*(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$

$\mathrm{Im}\{X^*(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

۴- مزدوج و تقارن مزدوج

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

$$x(t) = Ev(x(t)) + Od(x(t))$$

$x(t)$ حقیقی

$$Ev(x(t)) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$\mathrm{Re}\{X^*(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

$$Od(x(t)) \xleftrightarrow{F} \mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

$$\mathrm{Im}\{X^*(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۴- مزدوج و تقارن مزدوج

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

$$g(t) = e^{-at}u(t)$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = 2\left(\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right) = 2Ev(g(t))$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$X(j\omega) = 2\,\mathrm{Re}(G(j\omega))$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۵-۱- مشتق گیری فرکانسی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$tx(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega} \qquad -jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$t^n x(t) \xleftrightarrow{F} j^n \frac{dX(j\omega)}{d\omega} \qquad (-jt)^n x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۵-۲- مشتق گیری زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۶-انتگرالگیری

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \underbrace{\pi X(0)\delta(\omega)}_{\text{مقدار DC حاصل از انتگرال}}$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$g(t) = \delta(t) \qquad G(j\omega) = 1$$

مشتق و انتگرالگیری

$$x(t) = u(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau \qquad X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

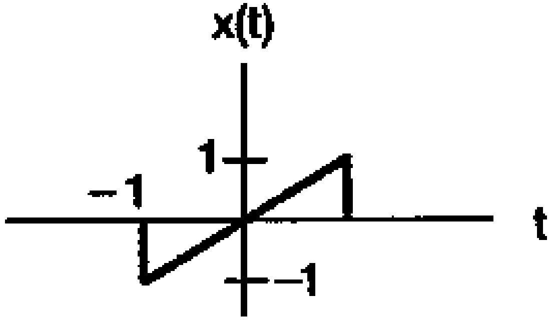
$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

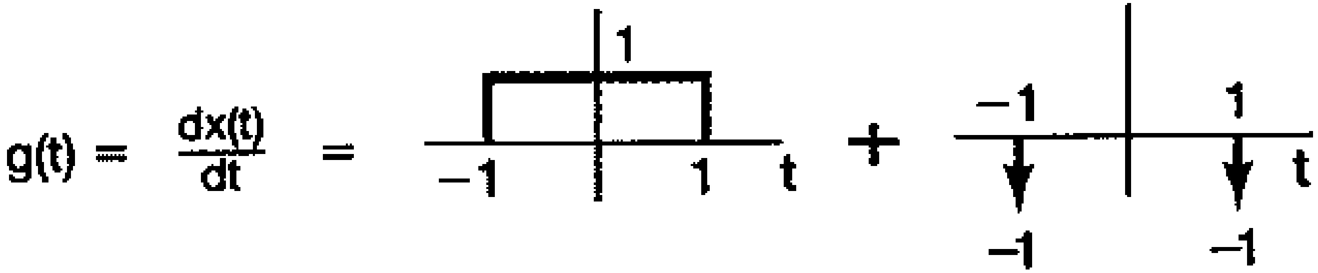
$$g(t) = \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad G(j\omega) = j\omega X(j\omega) = j\omega\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = 1$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

مشتق و انتگرالگیری





$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$G(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}-e^{-j\omega}-e^{j\omega}=\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\cos\omega$$

$$X(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{j\omega}+\pi G(0)\delta(\omega) \qquad X(j\omega)=\frac{2\sin\omega}{j\omega^2}-\frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۷- تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$

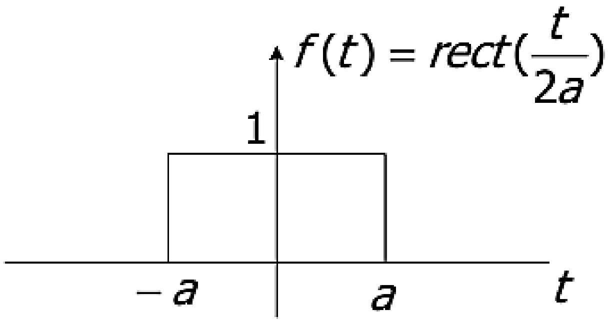
$$|a|\, x(at) \xleftrightarrow{F} X(\frac{j\omega}{a})$$

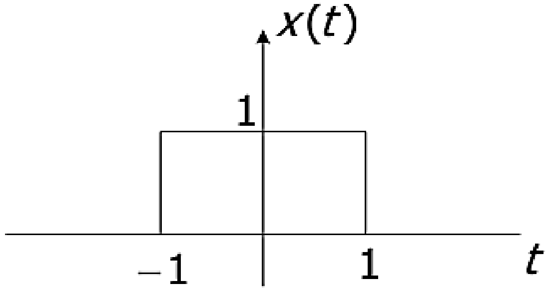
Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۷- تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$





$$x(t) = f(at)$$

$$F(j\omega) = 2a \times \mathrm{sinc}(\frac{\omega a}{\pi})$$

$$x(t) = f(at) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{|a|} F(j\frac{\omega}{a}) = \frac{2a}{|a|} \mathrm{sinc}(\frac{\frac{\omega}{a}}{\pi} \cdot a) = 2\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۸- وارونگی زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۹- همزادی (۱)

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$X(-t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۹- همزادی (۱)

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

$$x(t) = e^{-|t|} \qquad X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad G(j\omega) = 2\pi x(-j\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

۱۰- همزادی (۲)

$$tx(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(j(\omega-\omega_0))$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$-\frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)d\eta$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

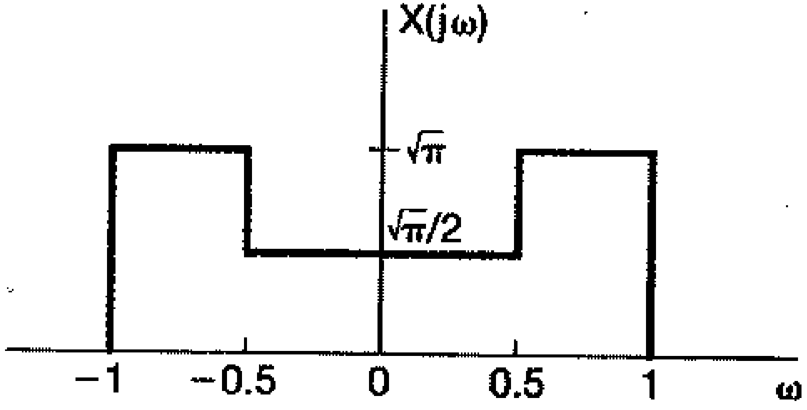
۱۱- رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۱- رابطه پارسوال



$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{5}{8}$$

$$\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0} \qquad g(t) = \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{F} G(j\omega) = j\omega X(j\omega) \qquad g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)d\omega = 0$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$Y(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$h(t) = u(t)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان $a,b>0$ $x(t)=e^{-bt}u(t)$ $h(t)=e^{-at}u(t)$

۱۲- کانولوشن

$$y(t)=x(t)*h(t) \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega} \qquad X(j\omega)=\frac{1}{b+j\omega} \qquad Y(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}\cdot\frac{1}{b+j\omega}$$

$a\neq b$

$$Y(j\omega)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+j\omega}-\frac{1}{b+j\omega}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{b-a}\left[e^{-at}u(t)-e^{-bt}u(t)\right]$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$h(t)=e^{-at}u(t) \qquad x(t)=e^{-bt}u(t)$$

۱۲- کانولوشن

$$a=b \qquad Y(j\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}=j\frac{d}{d\omega}\frac{1}{(a+j\omega)}=j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

$$y(t)=tx(t)$$

$$y(t)=te^{-at}u(t)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۲- کانولوشن

$$h(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \qquad x(t)=\frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}$$

$$H(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|<\omega_c\end{cases} \qquad X(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_i\\ 0 & |\omega|<\omega_i\end{cases} \qquad Y(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_0\\ 0 & |\omega|<\omega_0\end{cases}$$

$$y(t)=\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} \qquad \omega_0=\min(\omega_i,\omega_c)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۳- ضرب

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$$

$$r(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۳- ضرب

$$p(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$r(t) = p(t)s(t)$$

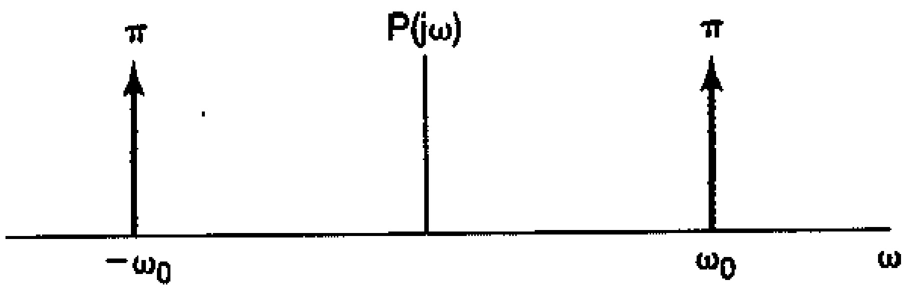
$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0))$$

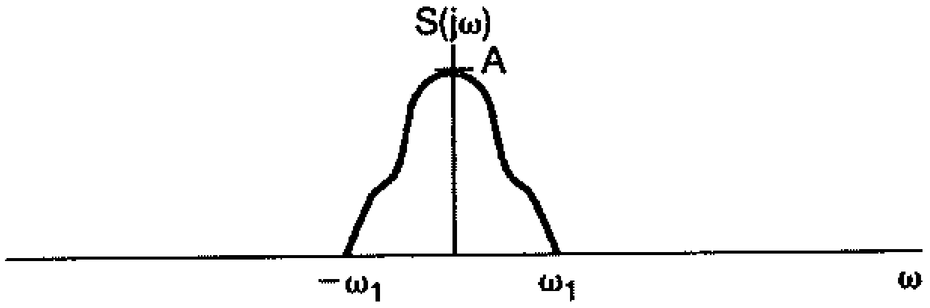
Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

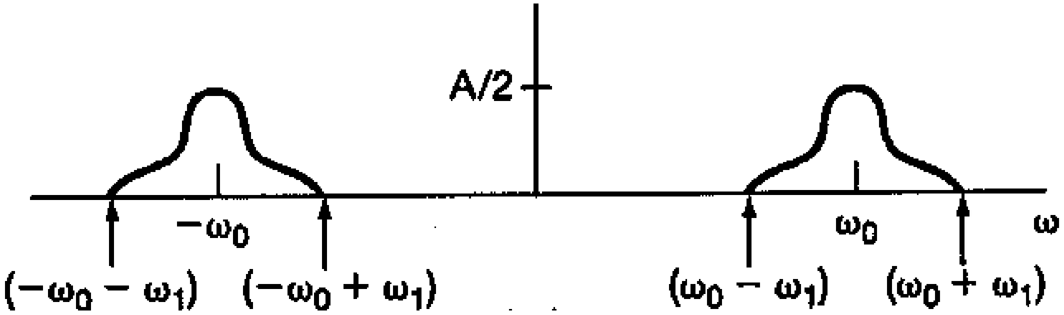
۱۳- ضرب

$$p(t) = \cos(\omega_0 t)$$





$$R(j\omega) = \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0))$$



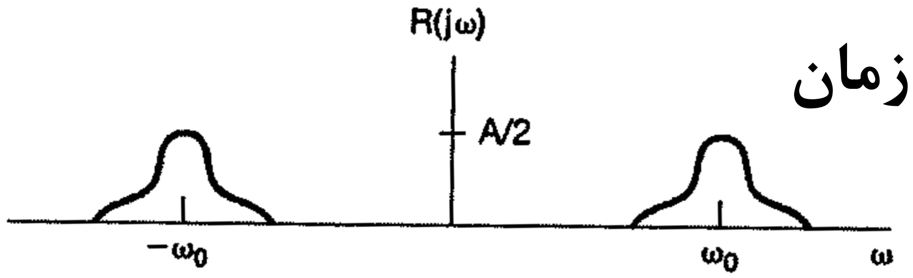
Continuous Fourier Transform

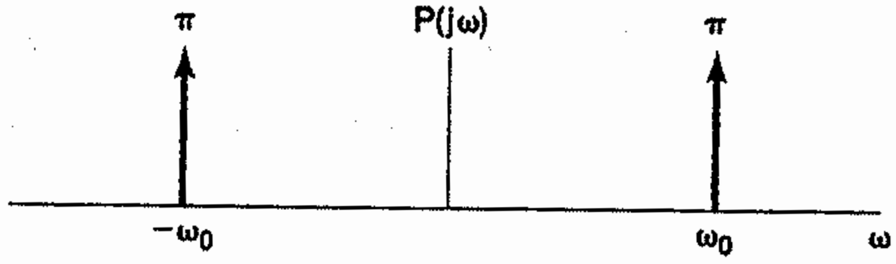
خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

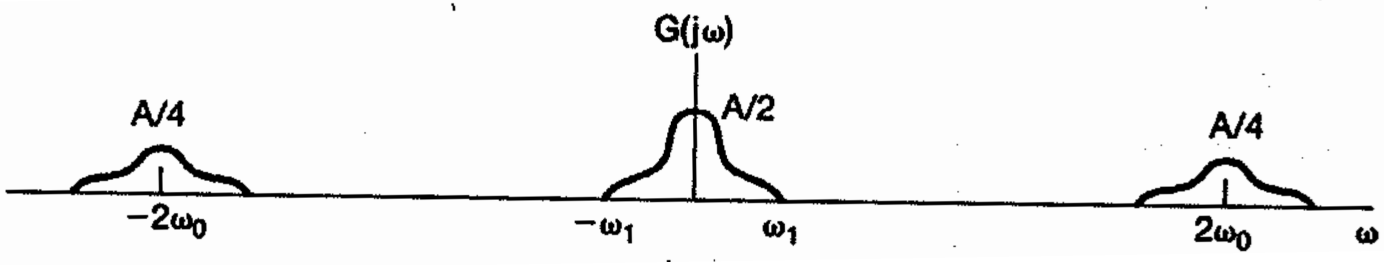
۱۳- ضرب

$$g(t) = r(t)\,p(t)$$

$$p(t) = \cos(\omega_0 t)$$







Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

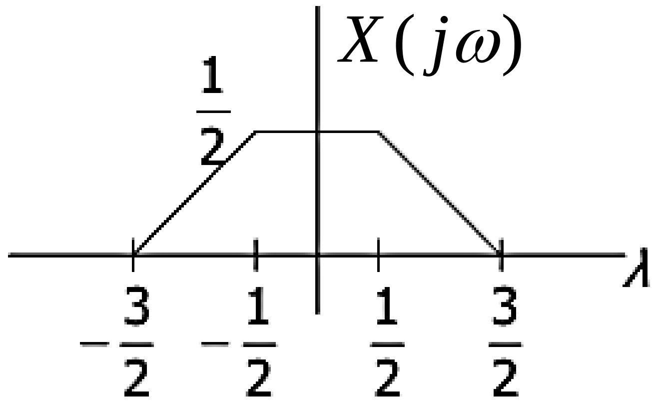
۱۳- ضرب

$$x(t)=\frac{\sin(t)\sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}=\pi(\frac{\sin(t)}{\pi t})(\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t})$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t}\xleftrightarrow{F}F(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}=\Pi(\frac{\omega}{W})=rect(\frac{\omega}{W})$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}.\pi.\Pi(\frac{\omega}{1})*\Pi(\frac{\omega}{2})$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{2}\Pi(\frac{\omega}{1})*\Pi(\frac{\omega}{2})$$



Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۳- مدولاسیون

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega+\omega_0))$$

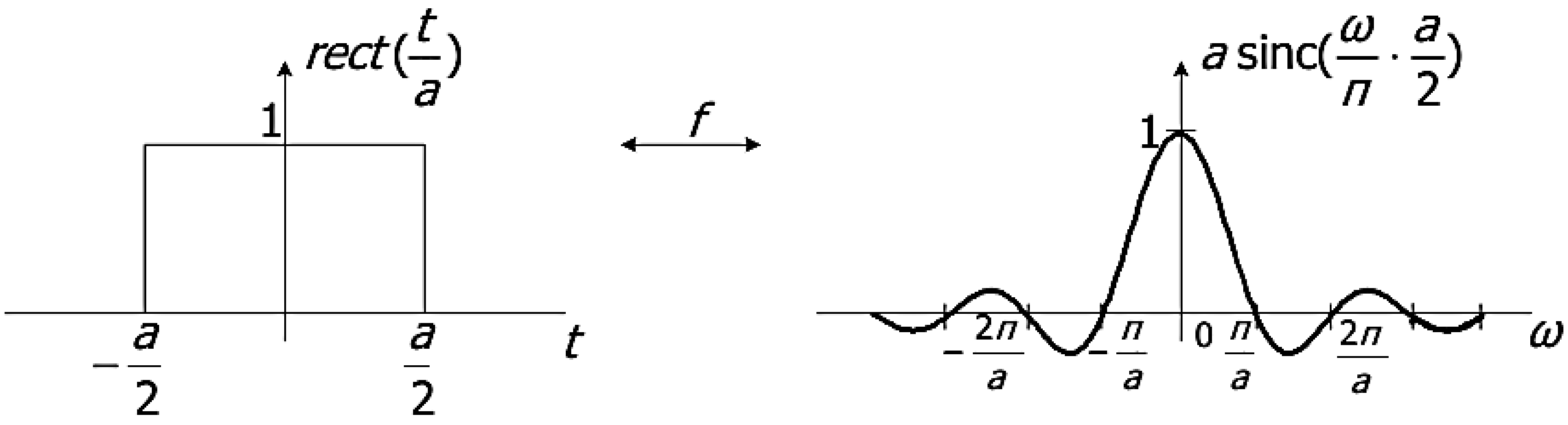
$$f(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega+\omega_0))$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow ? \qquad rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow a\,\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$

۱۳- مدولاسیون



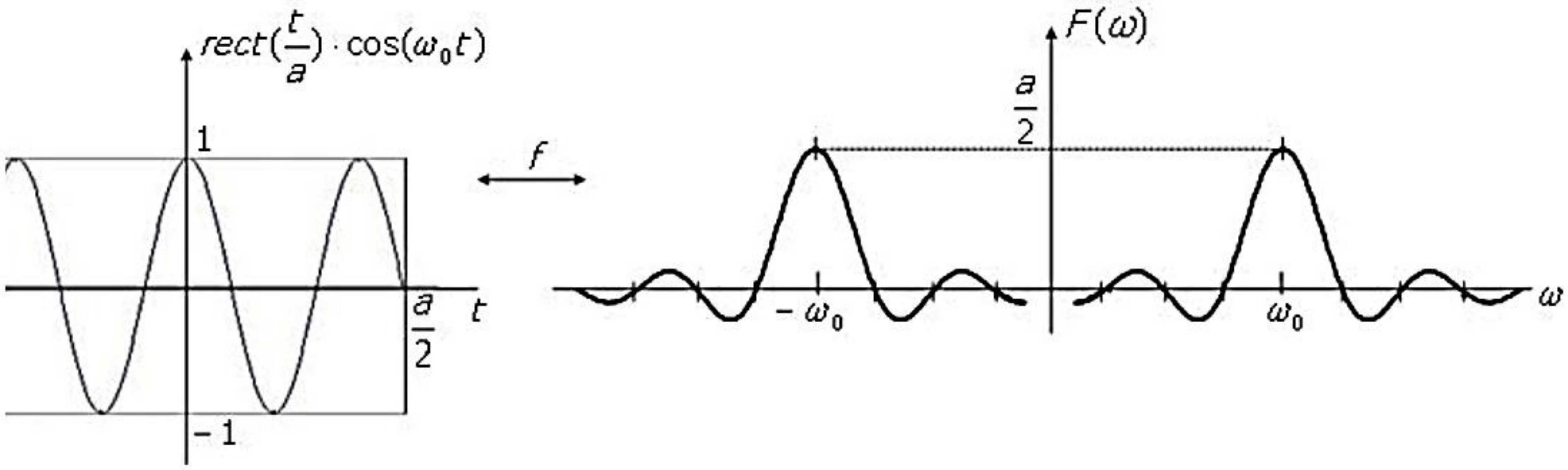
$$rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{a}{2}\text{sinc}(\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) + \frac{a}{2}\text{sinc}(\frac{\omega+\omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۳– مدولاسیون

$$rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{a}{2}\text{sinc}(\frac{\omega - \omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) + \frac{a}{2}\text{sinc}(\frac{\omega + \omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$

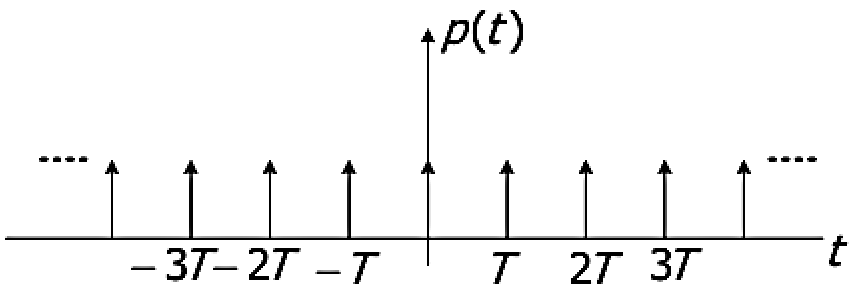


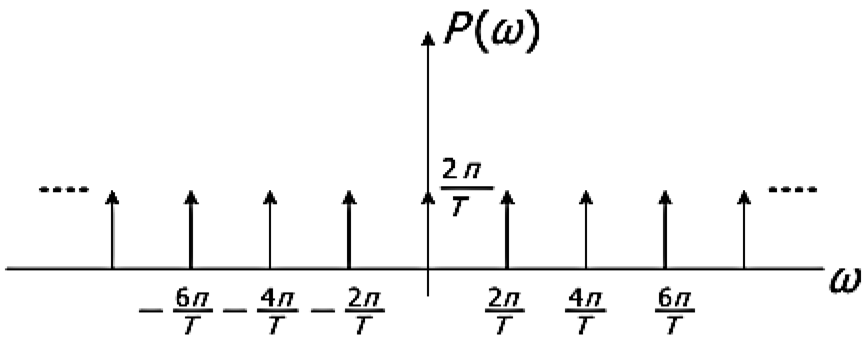
Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۴- نمونه برداری

بررسی تبدیل فوریه قطار ضربه



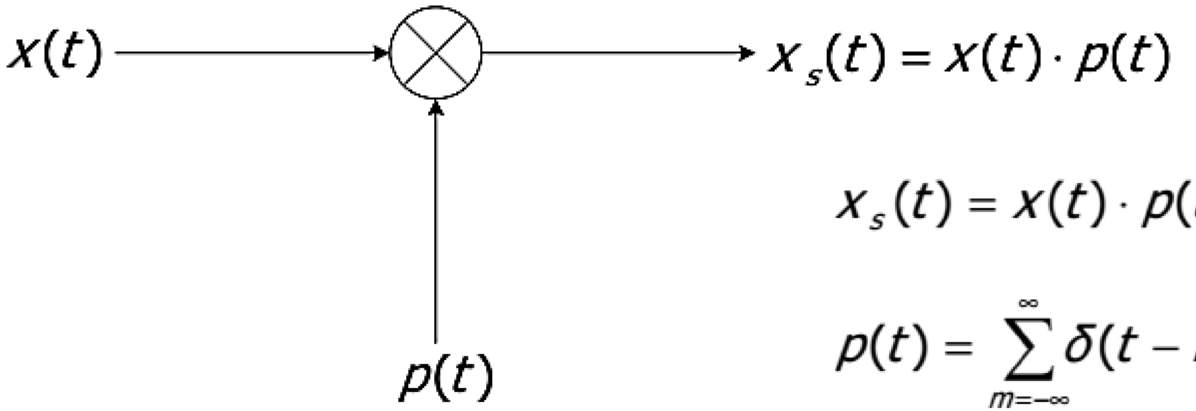


خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۴– نمونه برداری

در این روش سیگنال $x(t)$ در قطار ضربه ضرب می شود

طبق خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه حاصلضرب دو سیگنال برابر با کانولوشن آن ها است.



$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \leftrightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * (\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۴- نمونه برداری

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

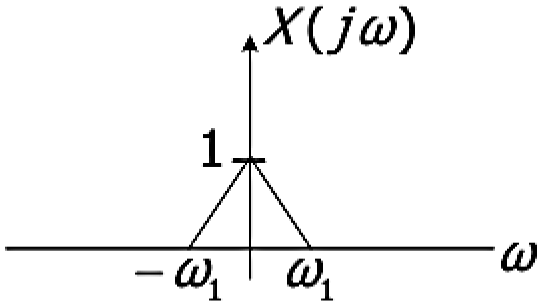
$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

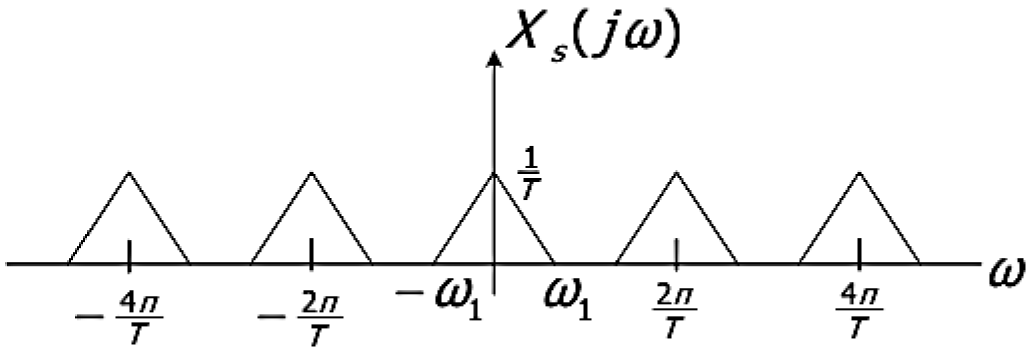
Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۴– نمونه برداری

بنابراین تبدیل فوریه سیگنال نمونه برداری شده، برابر با تبدیل فوریه سیگنال اولیه است، با این تفاوت که در فواصل $\frac{2\pi}{T}$ تکرار می شود.



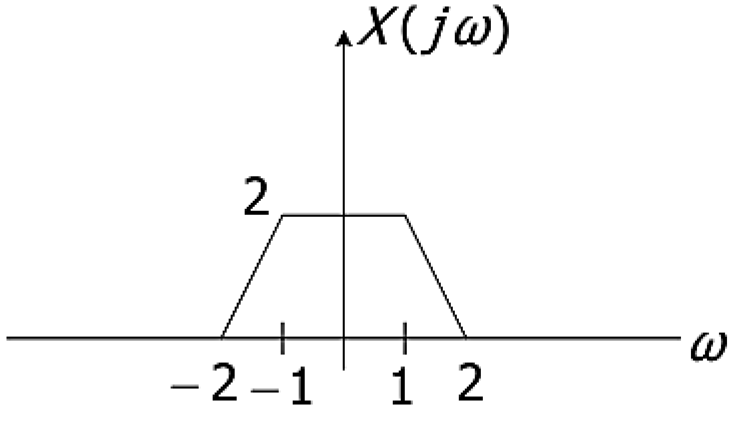


Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

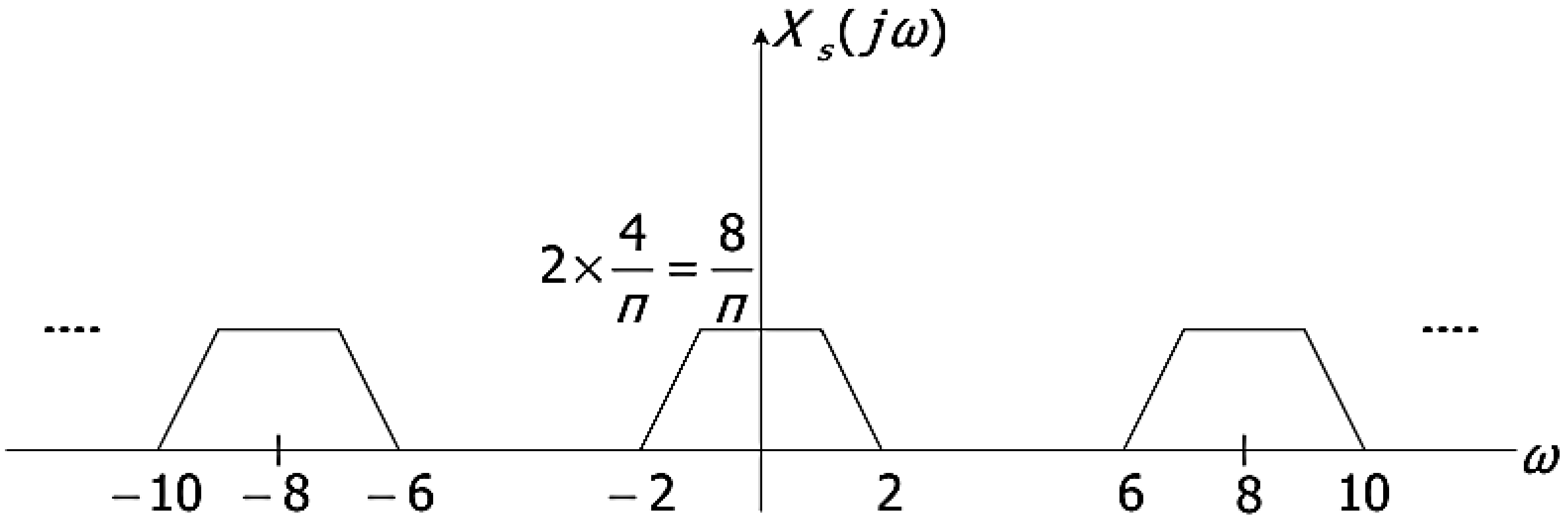
۱۴- نمونه برداری

مثال ۱:



$T = \frac{\pi}{4}$

$\frac{2\pi}{T} = 8$

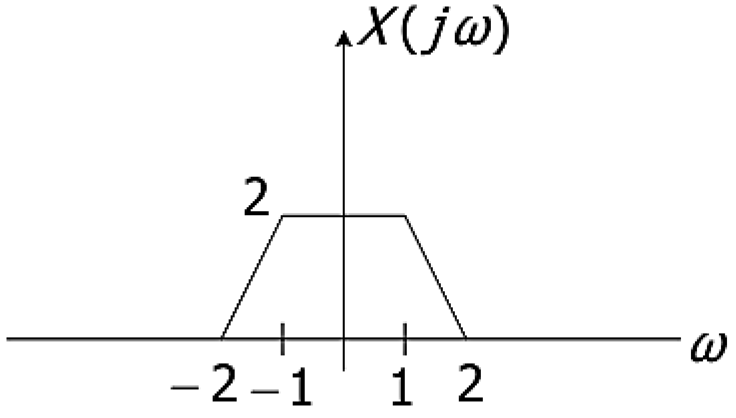


Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

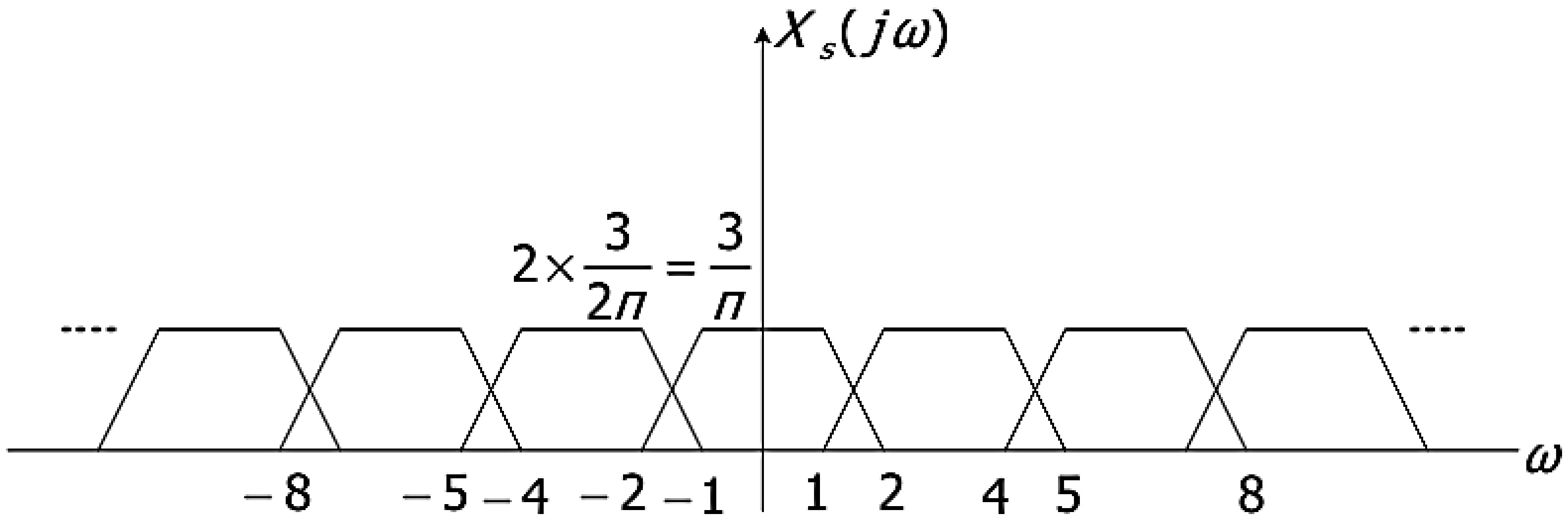
۱۴– نمونه برداری

مثال ۱:



$$T = \frac{2\pi}{3}$$

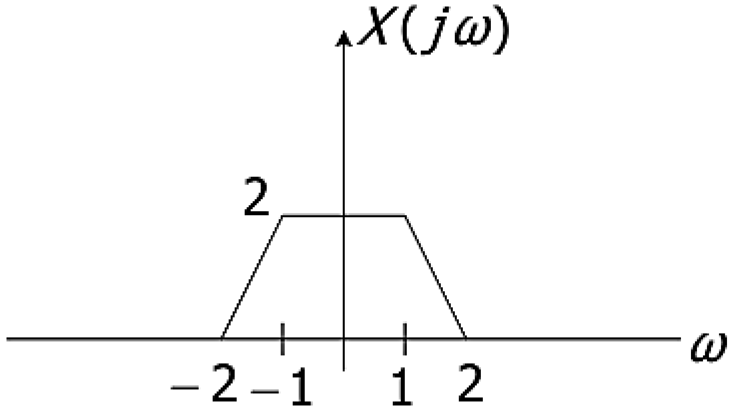
$$\frac{2\pi}{T} = 3$$



خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

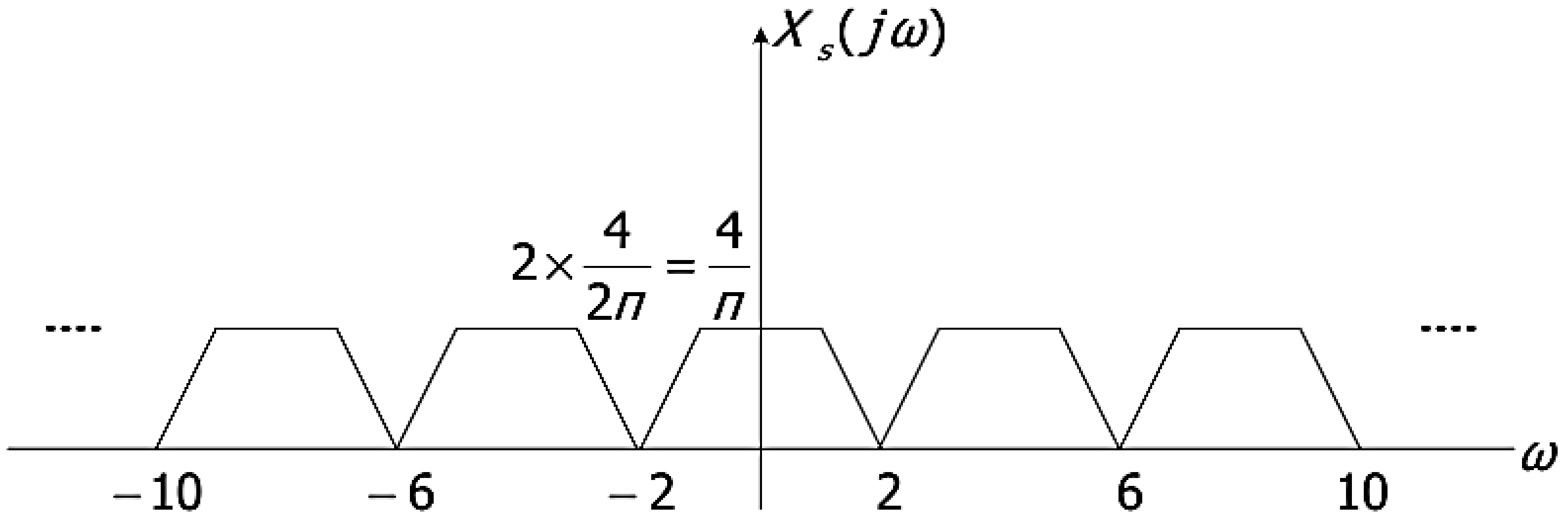
۱۴- نمونه برداری

مثال ۱:



$$T = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 4$$



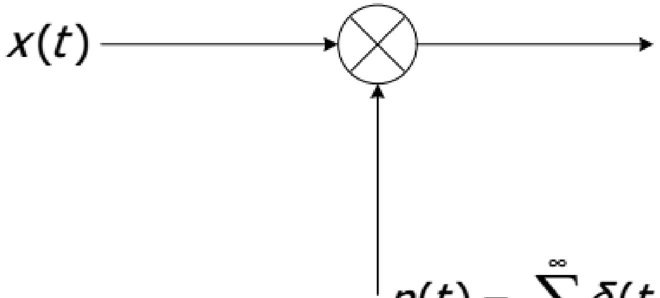
Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

۱۴- نمونه برداری

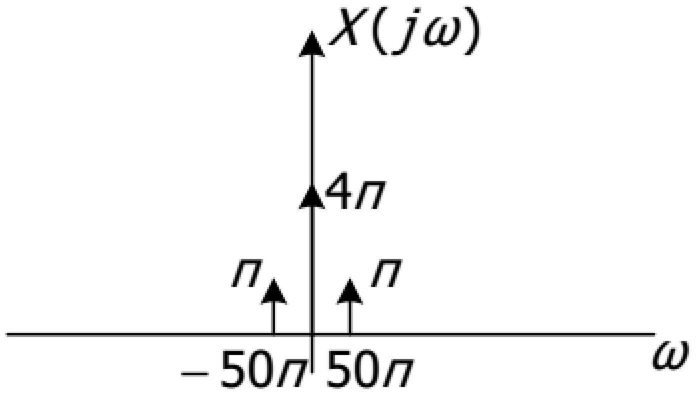
مثال ۲:

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$$



$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t) \Rightarrow X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$



$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 50\pi) + \pi\delta(\omega - 50\pi)$$

Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

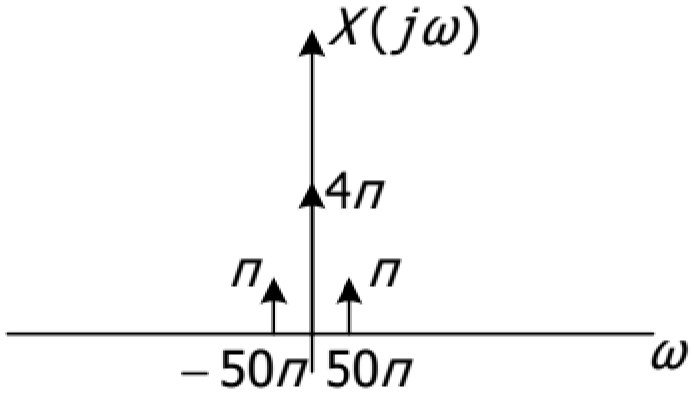
۱۴– نمونه برداری

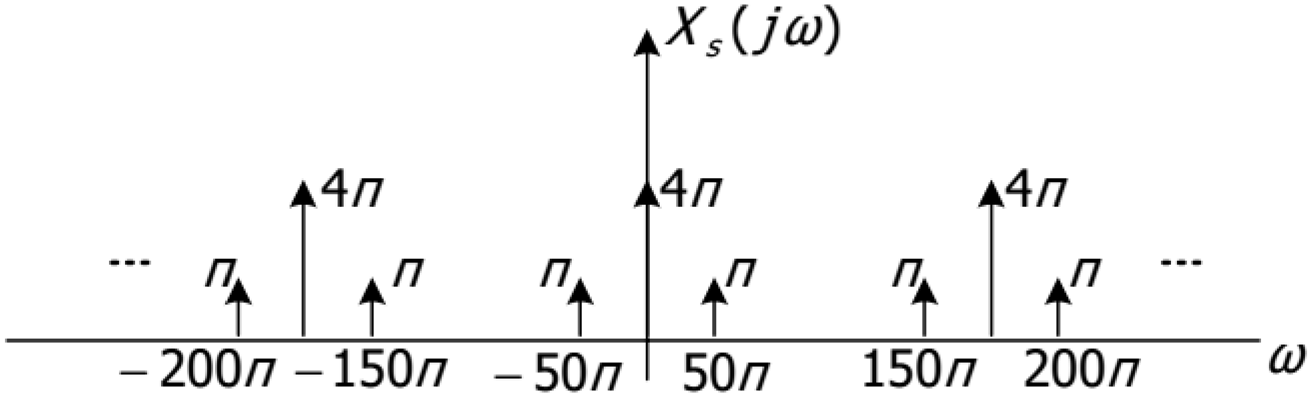
مثال ۲:

$x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$

$T = \dfrac{1}{100}$

$\dfrac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$





Continuous Fourier Transform

خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

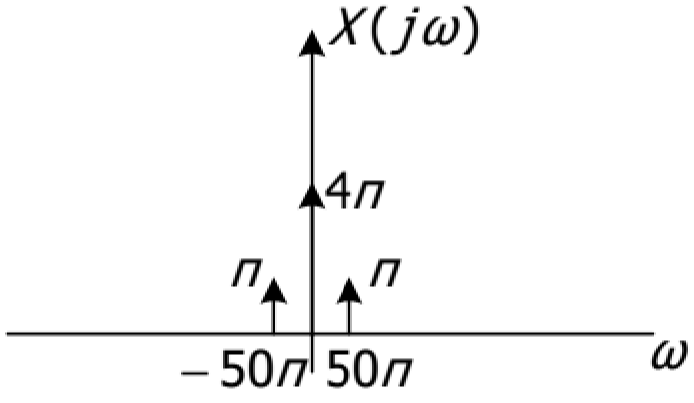
۱۴– نمونه برداری

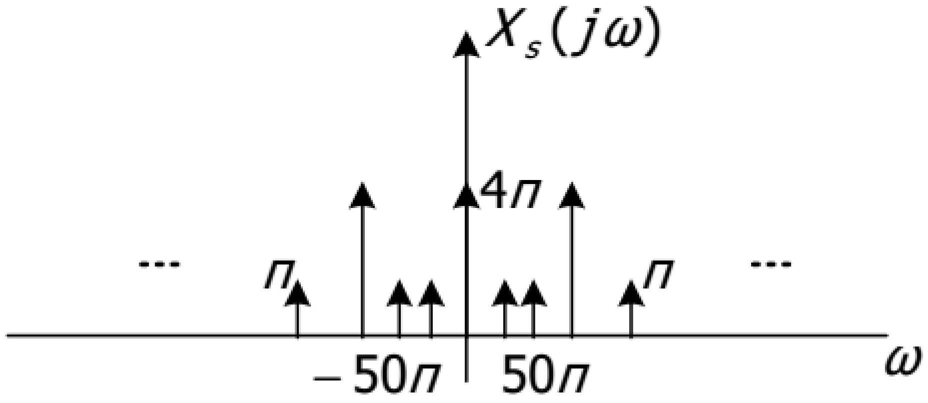
مثال ۲:

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$$

$$T = \frac{1}{40}$$

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$





Continuous Fourier Transform

جدول های ۴-۱ و ۴-۲

خواص تبدیل فوریه پیوسته و زوج های اساسی تبدیل فوریه پیوسته

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

۱) ابتدا h(t) را بدست آورده و سپس $H(j\omega)$ که تبدیل فوریه h(t) است را بدست مي‌آوریم.

۲) ابتدا $H(j\omega)$ را بدست آورده و سپس h(t) را با عکس تبدیل فوریه گرفتن از $H(j\omega)$ بدست مي‌آوریم.

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

$$j\omega Y(j\omega) + aY(j\omega) = X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+4j\omega+3}=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}=\frac{0.5}{(j\omega+1)}+\frac{0.5}{(j\omega+3)}$$

$$h(t)=0.5e^{-t}u(t)+0.5e^{-3t}u(t)$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t) \qquad y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} \qquad Y(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2\left(\frac{3}{(1+j\omega)(4+j\omega)}\right)}{\frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{\frac{3}{2}}{2+j\omega} + \frac{\frac{3}{2}}{4+j\omega}$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$H(j\omega)=\frac{\frac{3}{2}}{2+j\omega}+\frac{\frac{3}{2}}{4+j\omega}\Rightarrow h(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{9+3(j\omega)}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=9X(j\omega)+3(j\omega)X(j\omega)$$

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=3x'(t)+9x(t)$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2x(t)$$

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \frac{1}{(j\omega+2)} + \frac{-1}{(j\omega+4)}$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2x(t)$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t)$$

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2 + j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2 + j\omega}\right) = \frac{-j}{(2 + j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)^2} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)^2}\left(\frac{2}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)}\right) = \cdots$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

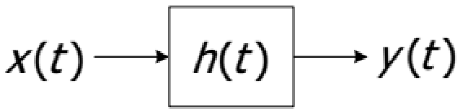
$$H(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega} \qquad y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega} - \frac{1}{4 + j\omega} = \frac{1}{(3 + j\omega)(4 + j\omega)} \qquad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\dfrac{1}{(3 + j\omega)(4 + j\omega)}}{\dfrac{1}{(3 + j\omega)}} = \frac{1}{(4 + j\omega)} \leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

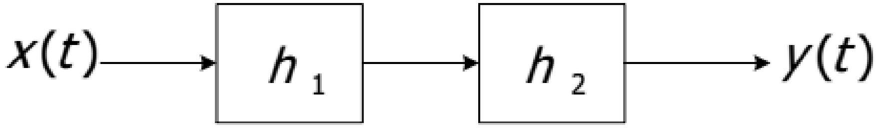
Continuous Fourier Transform

سیستم های LTI و تبدیل فوریه پیوسته



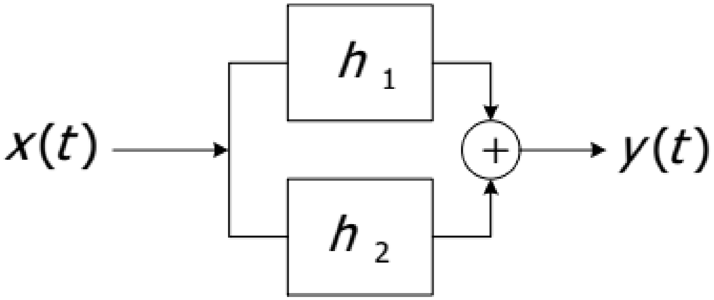
$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

:اتصال سري



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

:اتصال موازي



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

سیستم های LTI و تبدیل فوریه پیوسته
مثال ۱

$$h(t)=\frac{\sin(t)\cdot\sin(\frac{t}{2})}{\pi t^{2}}$$

$$h(t)=\frac{\sin(t)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(\frac{t}{2})}{t}=\frac{\sin(\frac{t}{\pi}\cdot\pi)}{\pi\cdot\frac{t}{\pi}\cdot\pi}\cdot\frac{\sin(\frac{t}{2\pi}\cdot\pi)}{\frac{t}{2\pi}\cdot 2\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi})\cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})$$

$$\begin{cases}\mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})\leftrightarrow \tau\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{\tau}{2})\\ \tau\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\frac{\tau}{2})\leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{\tau})\end{cases}$$

$$\tau=2\Rightarrow 2\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi})\rightarrow 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2})$$

$$\tau=1\Rightarrow 1\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})\rightarrow 2\pi\, rect(\frac{\omega}{1})$$

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$$

Continuous Fourier Transform

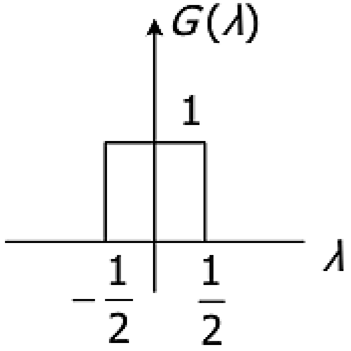
سیستم های LTI و تبدیل فوریه پیوسته

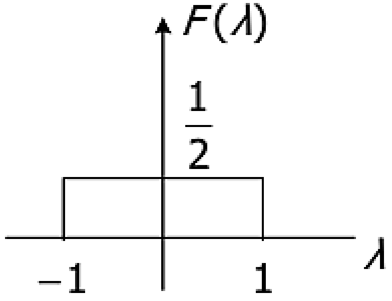
مثال ۱

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)\,2}\left(\pi\, rect\left(\frac{\omega}{2}\right) * 2\pi\, rect\left(\frac{\omega}{1}\right)\right) = \underbrace{\frac{1}{2} rect\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{F(\omega)} * \underbrace{rect\left(\frac{\omega}{1}\right)}_{G(\omega)}$$

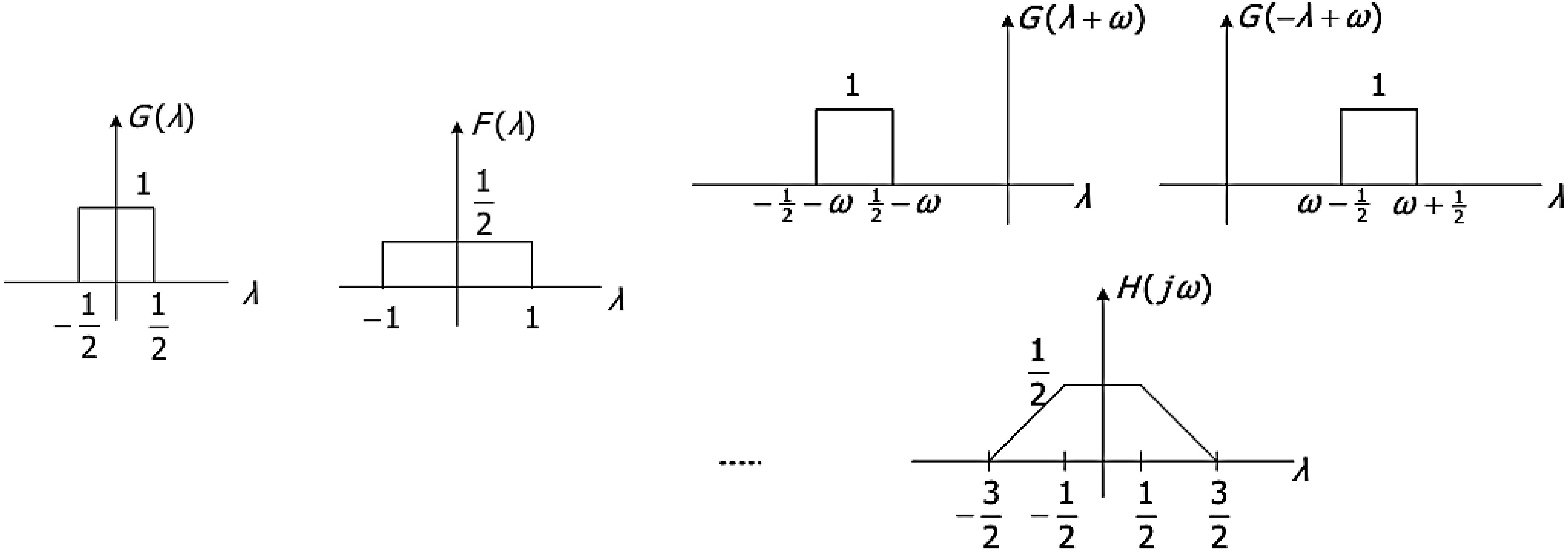
$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\omega-\lambda)\,d\lambda$$





Continuous Fourier Transform

سیستم های LTI و تبدیل فوریه پیوسته
مثال ۱



Continuous Fourier Transform

سیستم های LTI و تبدیل فوریه پیوسته
مثال ۲

$$x(t)=\frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}\quad,\quad h(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t)=\frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}=\frac{\omega_i}{\pi}\,\text{sinc}(\frac{\text{t}}{\pi}\cdot\omega_i)\quad,\quad h(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}=\frac{\omega_c}{\pi}\,\text{sinc}(\frac{\text{t}}{\pi}\cdot\omega_c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tau=2\omega_i\Rightarrow 2\omega_i\text{sinc}(\frac{\text{t}}{\pi}\cdot\omega_i)\xrightarrow{f}2\pi\,rect(\frac{\omega}{2\omega_i})\\ \tau=2\omega_c\Rightarrow 2\omega_c\text{sinc}(\frac{\text{t}}{\pi}\cdot\omega_c)\xrightarrow{f}2\pi\,rect(\frac{\omega}{2\omega_c})\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)=rect(\frac{\omega}{2\omega_i})\cdot rect(\frac{\omega}{2\omega_c})$$

$$Y(j\omega)=\begin{cases}rect(\frac{\omega}{2\omega_i})\quad;\quad\omega_i<\omega_c\Rightarrow y(t)=\frac{\omega_i}{\pi}\text{sinc}(\frac{\text{t}}{\pi}\cdot\omega_i)\\ rect(\frac{\omega}{2\omega_c})\quad;\quad\omega_i>\omega_c\Rightarrow y(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}(\frac{\text{t}}{\pi}\cdot\omega_c)\end{cases}$$