



چاپ بیست و چهارم

کتاب برگزیده در رشته ریاضی (۱۳۶۲)



کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

اصول آنالیز ریاضی

نوشته

والتر رودین

ترجمه

دکتر علی اکبر عالمزاده



کتاب برگزیده در رشته ریاضی (۱۳۶۲)

کتاب سال هجری اسلامی ایران

اصول آنالیز ریاضی

نوشته

والتر رودین

ترجمه

علی اکبر عالم زاده

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجم

کتاب "اصول آنالیز ریاضی" والتر رودین شهره آفاق است. هر کجا دانشگاهی هست و ریاضیاتی، این کتاب و مؤلف آن مطرحند. اهل فن کتاب را بهترین کتاب آنالیز می دانند، و الحق که در این باب نظر صواب دارند.

کتاب عاری از لفاظی است. آنچه در آن است ریاضیات است. مؤلف از سخن پردازیه‌ها و توصیف‌های نا ضرور سخت حذر داشته است. این سبک و سیاق مؤلف آن است که بهترین زبان برای بیان ریاضیات در این سطح خود ریاضیات می باشد.

کتاب را به مشتاقانش، به ویژه آنانی که والاترین ارج را بر آن نهاده اند، تقدیم می دارم.

علی اکبر عالم زاده

گروه ریاضی

دانشگاه تربیت معلم

پیشگفتار مؤلف

این کتاب متنی است برای درس آنالیزی که معمولا" به دانشجویان پیشرفته دوره لیسانس و یا دانشجویان سال اول فوق لیسانس ریاضی داده می شود . چاپ حاضر اساسا " همان چاپ دوم است جز اینکه بر آن چیزهایی افزوده شده ، در آن حذفیات مختصری صورت گرفته ، و به نحو قابل ملاحظه ای تجدید آرایش یافته است . امیدوارم این تغییرات کتاب را برای شاگردان این درس قابل حصولتر و جذابتر کرده باشند .

تجربه مرا قانع کرده که شروع درس با ساختن اعداد حقیقی از اعداد گویا (با - آنکه منطقا " درست است) از نظر آموزشی صحیح نیست . در آغاز ، اغلب شاگردان لزوم این کار را حس نمی کنند . از اینروست که دستگاه اعداد حقیقی به عنوان یک میدان مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی معرفی می شود ، و بسرعت چند کاربرد جالب این خاصیت عرضه خواهند شد . لکن ساختن ددکیند حذف نشده است . در اینجا این ساختن در ضمیمه فصل ۱ آمده ، که هر لحظه اقتضا کرد می توان آن را مطالعه نمود و از آن بهره گرفت .

مطالب مربوط به توابع چند متغیره تقریبا " به طور کامل ، با توضیحات بیشتر ، مثالهای افزونتر ، و انگیزه زیادتر ، بازنویسی شده اند . برهان قضیه تابع معکوس - مطلب مشکل گشای فصل ۹ - به وسیله قضیه نقطه ثابت در باره نگاشتهای انقباض ساده گشته است . فرمهای دیفرانسیل به طرز مبسوطتری مورد بحث قرار گرفته اند . چند کاربرد قضیه

استوکس سیز گنجانده شده‌اند .

و اما تغییرات دیگر ، فصل مربوط به انتگرال ریمان - اشتیل پس زینت مختصری یافته ، بخش کوتاه تمرین مانندی در باب تابع گاما به فصل ۸ افزوده شده ، و تعداد زیادی تمرین جدید آمده که برای اکثر آنها راهنماییهای نسبتاً " مبسوطی شده است .

همچنین ، به چند مقاله که در *American Mathematical Monthly* و *Mathematics Magazine* آمده‌اند اشاره کرده‌ام ، به این امید که خوی مراجعه به مجلات را در دانشجویان تقویت کرده باشم . اکثر این مآخذ را بورکل (R. B. Burckel) لطف کرده تهیه نموده است .

در طی سالها ، افراد بسیاری ، چه دانشجو چه استاد ، اصلاحات ، انتقادات ، و نظرات دیگر را در ارتباط با چاپهای قبلی کتاب برای من فرستاده‌اند . اینها را ارج نهاده‌ام ، و فرصت را غنیمت دانسته مراتب امتنان خالصانه خود را نسبت به همه افرادی که نامه نوشته‌اند ابراز می‌دارم .

والتر رودین

فهرست مطالب

	فصل ۱ دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط
۱	مقدمه
۱	مجموعه‌های مرتب
۳	میدانها
۶	میدان حقیقی
۱۰	دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی
۱۳	میدان مختلط
۱۴	فضاهای اقلیدسی
۱۹	ضمیمه
۲۰	تمرین
۲۷	
	فصل ۲ توپولوژی پایه
۳۰	مجموعه‌های متناهی، شمارشپذیر، و شمارش ناپذیر
۳۰	فضاهای متری
۳۸	مجموعه‌های فشرده
۴۵	مجموعه‌های کامل
۵۲	مجموعه‌های همبند
۵۴	

فصل ۳ دنباله‌ها و سریهای عددی

۶۰	دنباله‌های همگرا
۶۵	زیر دنباله‌ها
۶۶	دنباله‌های کشی
۷۰	حدود بالایی و پایینی
۷۲	چند دنباله خاص
۷۳	سریها
۷۶	سریها با جملات نامنفی
۷۹	عدد e
۸۱	آزمونهای ریشه و نسبت
۸۵	سریهای توانی
۸۶	جمع‌بندی به طریقه جزء به جزء
۸۸	همگرایی مطلق
۸۹	جمع و ضرب سریها
۹۳	تجدید آرایشها
۹۶	تمرین

فصل ۴ پیوستگی

۱۰۳	حدود توابع
۱۰۳	توابع پیوسته
۱۰۶	پیوستگی و فشردگی
۱۱۰	پیوستگی و همبندی
۱۱۵	ناپیوستگیها
۱۱۶	توابع یکنوا
۱۱۸	حدود نامتناهی و حدود در بی نهایت
۱۲۱	تمرین
۱۲۲	

فصل ۵ مشتقگیری

۱۲۸	مشتق یک تابع حقیقی
۱۳۱	قضایای مقدار میانگین
۱۳۳	پیوستگی مشتقها
۱۳۴	قاعده هوییتال
۱۳۶	مشتقات مراتب بالاتر
۱۳۶	قضیه تیلور
۱۳۷	مشتقگیری از توابع برداری
۱۴۰	تمرین

۱۴۸	فصل ۶ انتگرال ریمان - اشتیل یس
۱۴۸	تعریف و وجود انتگرال
۱۵۷	خواص انتگرال
۱۶۳	انتگرالگیری و مشتقگیری
۱۶۵	انتگرالگیری از توابع برداری
۱۶۶	منحنیهای با طول متناهی
۱۶۸	تمرین

۱۷۴	فصل ۷ دنباله‌ها و سریهای توابع
۱۷۴	بحث درباره مسئله اصلی
۱۷۸	همگرایی یکنواخت
۱۸۰	همگرایی یکنواخت و پیوستگی
۱۸۳	همگرایی یکنواخت و انتگرالگیری
۱۸۴	همگرایی یکنواخت و مشتقگیری
۱۸۷	خانواده‌های همپیوسته از توابع
۱۹۲	قضیه استون - وایراشتراس
۲۰۰	تمرین

۲۰۸	فصل ۸ چند تابع خاص
۲۰۸	سریهای توانی

۲۱۵	توابع نمایی و لگاریتمی
۲۱۹	توابع مثلثاتی
۲۲۲	تمامیت جبری میدان مختلط
۲۲۴	سریهای فوریه
۲۳۲	تابع گاما
۲۳۷	تمرین

۲۴۶	فصل ۹ توابع چند متغیره
۲۴۶	تبدیلات خطی
۲۵۵	مشتگیری
۲۶۶	اصل انقباض
۲۶۷	قضیهٔ تابع معکوس
۲۷۰	قضیهٔ تابع ضمنی
۲۷۵	قضیهٔ رتبه
۲۸۰	دترمینانها
۲۸۴	مشتقات مراتب بالاتر
۲۸۶	مشتگیری از انتگرالها
۲۸۹	تمرین

۲۹۷	فصل ۱۰ انتگرالگیری از فرمهای دیفرانسیل
۲۹۷	انتگرالگیری
۳۰۱	نگاشتهای اولیه
۳۰۴	افرازهای واحد
۳۰۵	تغییر متغیرها
۳۰۷	فرمهای دیفرانسیل
۳۲۲	سادکها و زنجیرها
۳۳۰	قضیهٔ استوکس
۳۳۳	فرمهای بسته و فرمهای کامل
۳۴۰	آنالیز برداری

فصل ۱۱ نظریه لبک

۳۶۳

توابع مجموعهای

۳۶۳

ساختن اندازه لبک

۳۶۵

فضاهای اندازه

۳۷۴

تابعهای اندازه پذیر

۳۷۵

توابع ساده

۳۷۸

انتگرالگیری

۳۷۹

مقایسه با انتگرال ریمان

۳۸۸

انتگرالگیری از توابع مختلط

۳۹۱

توابع از رده $2^{\text{و}}$

۳۹۲

تمرین

۴۰۰

کتابنامه

۴۰۳

فهرست علامات خاص

۴۰۵

واژه نامه فارسی به انگلیسی

۴۰۷

واژه نامه انگلیسی به فارسی

۴۲۳

فهرست راهنما

۴۳۹

دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط

مقدمه

هر بحث رضایتبخشی از مفاهیم اساسی آنالیز (نظیر همگرایی، پیوستگی، مشقگیری و انتگرالگیری) باید بر مفهوم عدد که بدقت تعریف شده است، بنا شود. با این حال، ما در هیچ بحثی از اصول موضوع حساب اعداد صحیح وارد نمی‌شویم، و نیز فرض می‌کنیم خواننده با اعداد گویا (یعنی، اعدادی به شکل m/n که در آن m و n صحیح هستند و $n \neq 0$) آشنا باشد.

دستگاه اعداد گویا، خواه به شکل یک میدان و خواه به صورت مجموعه‌ای مرتب، برای بسیاری از اهداف نارساست. (این اصطلاحات در بخشهای ۶.۱ و ۱۲.۱ تعریف خواهند شد.) مثلاً، عددگویایی چون p نیست که $p^2 = 2$. (این مطلب را بزودی ثابت خواهیم کرد.) این وضع به معرفی "اعداد به اصطلاح گنگ" منجر می‌شود، که اغلب به صورت بسطهای اعشاری نامتناهی نوشته و به وسیله بسطهای اعشاری متناهی مربوط به خود "تقریب" می‌شوند. مثلاً، دنباله

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

"به $\sqrt{2}$ میل می‌کند." اما، تا وقتی عدد گنگ $\sqrt{2}$ بوضوح تعریف نشده، باید این سؤال مطرح باشد که "آن چیست که این دنباله به آن می‌گراید؟" به این نوع سؤال می‌توان به محض ساخته شدن "دستگاه اعداد حقیقی" پاسخ گفت.

۱.۱ مثال. حال نشان می‌دهیم که معادله

$$p^2 = 2$$

به ازای هیچ p ی گویا صادق نیست. گوییم اگر چنین p ای وجود می داشت، می شد بنویسیم $p = m/n$ که در آن m و n صحیح بوده و هر دو زوج نباشند. فرض کنیم چنین شده باشد. در این صورت، (۱) ایجاب خواهد کرد که

$$(2) \quad m^2 = 2n^2.$$

این نشان می دهد که m^2 زوج است. پس m زوج است (چه اگر m فرد می بود، m^2 فرد می شد)، و لذا m^2 بر ۴ بخش پذیر می باشد. از این نتیجه می شود که سمت راست (۲) بر ۴ بخش پذیر است. در نتیجه، n^2 زوج می باشد، که زوج بودن n را ایجاب می نماید. بدین ترتیب، فرض برقراری (۱) به زوج بودن هم m و هم n منجر می شود، که با انتخاب ما از m و n مغایر است. بنابراین، (۱) به ازای p های گویا ناممکن می باشد. حال این وضع را کمی دقیقتر بررسی می کنیم. فرض کنیم A مجموعه تمام اعداد گویای مثبت p باشد که $p^2 < 2$ ، و B از کلیه اعداد گویای مثبت p که $p^2 > 2$ تشکیل شده باشد. نشان می دهیم که A حاوی بزرگترین عدد و B شامل کوچکترین عدد نیست. صریحتر بگوییم، به ازای هر p در A می توان عدد گویای q در A را طوری یافت که $q < p$ ، و برای هر p در B ، می شود عدد گویای q در B را قسمی یافت که $q < p$. بدین منظور، به هر عدد گویای $p > 0$ عدد

$$(3) \quad q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}$$

را مربوط می کنیم. در این صورت،

$$(4) \quad q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}.$$

گوییم هرگاه p در A باشد، $p^2 - 2 < 0$ ؛ (۳) نشان می دهد که $q > p$ ؛ و (۴) مبین آن است که $q^2 < 2$ ، پس، q در A می باشد. هرگاه p در B باشد، $p^2 - 2 > 0$ ؛ (۳) نشان می دهد که $0 < q < p$ ؛ و (۴) بیانگر آن است که $q^2 > 2$. بنابراین، q در B خواهد بود.

۲۰۱. تبصره. هدف از بحث بالا این بود که نشان دهیم دستگاه اعداد گویا، علیرغم اینکه بین هر دو عدد گویا عدد گویای دیگری هست (هرگاه $r < s$ ، آنکه $r < (r + s)/2 < s$)، رخنه دارد. دستگاه اعداد حقیقی این رخنه ها را پر خواهد کرد. این گواه اصلی است دال بر نقش اساسی که دستگاه اخیر در آنالیز ایفا می کند.

برای توضیح نهاد این دستگاه، و نیز نهاد دستگاه اعداد مختلط، مطلب را با بحث کوتاهی در باب مفاهیم کلی مجموعه مرتب و میدان آغاز می‌کنیم.

ابتدا چند اصطلاح متعارف نظریه مجموعه‌ها را که در سراسر این کتاب به کار خواهند رفت ذکر می‌نماییم.

۳۰۱ چند تعریف. هر گاه A یک مجموعه باشد (عنصرهایش ممکن است عدد باشند و یا چیزهایی دیگر)، می‌نویسیم $x \in A$ تا نشان دهیم x یک عضو (یا یک عنصر) A است. چنانچه x عضو A نباشد، خواهیم نوشت $x \notin A$.

مجموعه‌ای که شامل هیچ عنصر نیست مجموعه تهی نام دارد. اگر مجموعه‌ای دست کم یک عنصر داشته باشد، ناتهی خوانده می‌شود.

هرگاه A و B مجموعه‌هایی باشند و هر عنصر A یک عنصر B باشد، می‌گوییم A یک زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A \subset B$ یا $B \supset A$. هرگاه، علاوه بر این، عنصری از B باشد که در A نباشد، A را یک زیرمجموعهٔ حقیقی B خواهیم گفت. توجه دارید که به ازای هر مجموعه مانند A ، $A \subset A$.

هرگاه $A \subset B$ و $A \subset B$ ، می نویسیم $A = B$. در غیر این صورت، خواهیم نوشت $A \neq B$.

۴.۱ تعریف. در سراسر فصل ۱، مجموعه تمام اعداد گویا با Q نشان داده می‌شود.

مجموعه های مرتب

۵۰۱. تعریف. فرض کنیم $\mathcal{Y}$ یک مجموعه باشد. یک ترتیب بر $\mathcal{Y}$ رابطه‌ای است که با $\leq$ نموده می‌شود و از دو خاصیت زیر برخوردار است:

(یک) هر گاه $x \in S$ و $y \in S$ ، $\neg$ نگاه یکی و فقط یکی از گزاره‌های

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

راست است؛

(دو) هرگاه $x, y, z \in S$ ، $x < y$ ، و $y < z$ ، آنگاه $x < z$.

عبارت " $x < y$ " را می‌توان این‌طور خواند: x کمتر از y است، یا x کوچکتر از y است، و یا x پیش از y است.

اغلب شایسته است به جای $x < y$ بنویسیم $y > x$.

نماد $x \leq y$ حاکی از آن است که $x < y$ یا $x = y$ ، بی آنکه تصریح کند کدام یک از

این دو برقرار است. به عبارت دیگر، $x \leq y$ نقیض $x > y$ می باشد.

۶۰۱. تعریف. یک مجموعه مرتب مجموعه‌ای است مانند S که در آن ترتیبی مقرر شده باشد.

مثلاً، در Q ، اگر $r < s$ به این معنی تعریف شود که $s - r$ عدد گویای مثبتی است، Q مجموعه‌ای مرتب خواهد بود.

۷۰۱. تعریف. فرض کنیم S یک مجموعه مرتب باشد و $E \subset S$. هرگاه عنصری مانند $\beta \in S$ باشد بطوری که به ازای هر $x \in E$ ، $x \leq \beta$ ، می‌گوییم E از بالا کراندار است، و β را یک کران بالایی E می‌نامیم. کرانهای پایینی به همین نحو (با $\geq$ به جای $\leq$) تعریف می‌شوند.

۸۰۱. تعریف. فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد مرتب، $E \subset S$ ، و E از بالا کراندار باشد. همچنین، عنصری مانند $\alpha \in S$ با خواص زیر وجود داشته باشد:

(یک) α یک کران بالایی E باشد؛

(دو) هرگاه $\gamma < \alpha$ ، آنگاه γ یک کران بالایی E نباشد.

در این صورت، α را کوچکترین کران بالایی E [پس از این α ها حداکثر یکی وجود دارد از (دو) واضح است] یا سوپرمم E می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\alpha = \sup E.$$

بزرگترین کران پایینی، یا اینفیمم، مجموعه E که از پایین کراندار است به همین نحو تعریف می‌شود: عبارت

$$\alpha = \inf E$$

یعنی α یک کران پایینی E است و هیچ β با شرط $\beta > \alpha$ یک کران پایینی E نمی باشد.

۹۰۱ چند مثال

(A) مجموعه‌های A و B مثال ۱۰۱ را سه عنوان زیر مجموعه‌های مجموعه مرتب Q در نظر می‌گیریم. مجموعه A از بالا کراندار است. در واقع، کرانهای بالایی A دقیقاً اعضای B هستند. چون B شامل کوچکترین عضو نیست، A در Q کوچکترین کران بالایی ندارد.

بهین نحو، B از پایین کراندار است. مجموعه تمام کرانهای پایینی B از اعضای A و کلیه $r \in Q$ هایی که $r \leq 0$ تشکیل شده است. از آنجا که A بزرگترین عضو ندارد، B در Q بزرگترین کران پایینی نخواهد داشت.

(ب) در صورت وجود $\alpha = \sup E$ ، این امکان که α عضو E باشد یا نه هست. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم E_1 مجموعه تمام $r \in Q$ هایی باشد که $r < 0$ ، و E_2 را مجموعه تمام $r \in Q$ هایی می‌انگاریم که $r \leq 0$. در این صورت،

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0,$$

و $0 \notin E_1$ ولی $0 \in E_2$.

(پ) فرض کنیم E از تمام اعداد $1/n$ که در آنها $n = 1, 2, 3, \dots$ تشکیل شده باشد. در این صورت، $\sup E = 1$ که در E است، و $\inf E = 0$ ، که در E نیست.

۱۰.۱ تعریف. می‌گوییم مجموعه مرتب S خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد اگر که مطلب زیر درست باشد:

هرگاه $E \subset S$ ، تهی نباشد، و E از بالا کراندار باشد، آنگاه $\sup E$ در S وجود داشته باشد.

مثال ۹.۱ ($\bar{\mathbb{Q}}$) نشان می‌دهد که Q از خاصیت کوچکترین کران بالایی برخوردار نیست.

حال نشان می‌دهیم که میان بزرگترین کرانهای پایینی و کوچکترین کرانهای بالایی رابطه‌ای نزدیک وجود دارد، و هر مجموعه مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی از خاصیت بزرگترین کران پایینی نیز بهره‌مند است.

۱۱.۱ قضیه. فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی، $B \subset S$ تهی نباشد، و B از پایین کراندار باشد. همچنین، L را مجموعه تمام کرانهای پایینی B می‌انگاریم. در این صورت،

$$\alpha = \sup L$$

در S موجود است و $\alpha = \inf B$.

بخصوص، $\inf B$ در S وجود دارد.

برهان. چون B از پایین کراندار است، پس L تهی نیست. و چون L درست از y هایی در S تشکیل شده که در نامساوی $y \leq x$ به ازای هر $x \in B$ صدق می‌کنند، می‌بینیم

که هر $x \in B$ یک کران بالایی L می باشد. از اینرو، L از بالا کراندار است. بنابراین، فرض ما در باب S ایجاب می کند که L در S سوپرمم داشته باشد. این سوپرمم را α می نامیم.

هرگاه $\alpha < \gamma$ ، آنگاه (ر.ک. تعریف ۸۰۱) γ یک کران بالایی L نیست. پس

$\gamma \notin B$. از این نتیجه می شود که به ازای هر $x \in B$ ، $\alpha \leq x$. بنابراین، $\alpha \in L$.

هرگاه $\alpha < \beta$ ، آنگاه $\beta \notin L$ ، چرا که α یک کران بالایی L است.

یعنی، نشان داده ایم که $\alpha \in L$ ولی، اگر $\alpha > \beta$ ، $\beta \notin L$. به عبارت دیگر، α یک کران پایینی B است ولی β ، در صورتی که $\beta > \alpha$ ، این وضع را ندارد. این بدان معنی است که $\alpha = \inf B$.

میدانها

۱۲۰۱ تعریف. یک میدان مجموعه ای است مانند F با دو عمل، به نامهای جمع و ضرب، که در "اصول موضوع میدان" (ج)، (ض)، و (پ) زیر صدق می کنند:

(ج) اصول موضوع جمع

(ج ۱) هرگاه $x \in F$ و $y \in F$ ، آنگاه مجموع آنها $x + y$ در F است.

(ج ۲) جمع تعویض پذیر است: به ازای هر $x, y \in F$ ، $x + y = y + x$.

(ج ۳) جمع شرکت پذیر است: به ازای هر $x, y, z \in F$ ، $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(ج ۴) F حاوی عنصری است مانند 0 بطوری که به ازای هر $x \in F$ ، $0 + x = x$.

(ج ۵) به هر $x \in F$ ، عنصری مانند $-x \in F$ مربوط است بقسمی که

$$x + (-x) = 0.$$

(ض) اصول موضوع ضرب

(ض ۱) هرگاه $x \in F$ و $y \in F$ ، آنگاه حاصل ضرب آنها xy در F است.

(ض ۲) ضرب تعویض پذیر است: به ازای هر $x, y \in F$ ، $xy = yx$.

(ض ۳) ضرب شرکت پذیر است: به ازای هر $x, y, z \in F$ ، $(xy)z = x(yz)$.

(ض ۴) F شامل عنصری است چون $1 \neq 0$ بقسمی که به ازای هر $x \in F$ ، $1x = x$.

(ض ۵) هرگاه $x \in F$ و $x \neq 0$ ، آنگاه عنصری مثل $1/x \in F$ هست بطوری که

$$x \cdot (1/x) = 1.$$

(پ) قانون پخشپذیری
رابطه^۶

$$x(y+z) = xy + xz$$

به ازای هر $x, y, z \in F$ برقرار است.

۱۳.۱ چند تبصره

(آ) معمولاً " (در هر میدان) به جای

$$x + (-y), x \cdot \left(\frac{1}{y}\right), (x+y)+z, (xy)z, xx, xxx, x+x, x+x+x, \dots$$

می نویسند

$$x - y, \frac{x}{y}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \dots$$

(ب) هرگاه در Q ، یعنی مجموعه^۷ تمام اعداد گویا، جمع و ضرب معنی عادی خود را داشته باشند، اصول موضوع میدان بوضوح در آن برقرارند. لذا، Q یک میدان می باشد. (پ) با آنکه قصد ما این نیست که میدانها (و یا نهادهای جبری دیگر) را مشروح بررسی کنیم، ولی اثبات اینکه بعضی از خواص آشنای Q نتایج اصول موضوع میدان هستند سودمند است. یک بار که این کار صورت گرفت، نیازی به تکرار آن برای اعداد حقیقی و اعداد مختلط نخواهیم داشت.

۱۴.۱ حکم. اصول موضوع جمع گزاره‌های زیر را ایجاب می کنند:

$$(آ) \text{ هرگاه } x+y = x+z \text{ آنگاه } y=z ;$$

$$(ب) \text{ هرگاه } x+y = x \text{ آنگاه } y=0 ;$$

$$(پ) \text{ هرگاه } x+y=0 \text{ آنگاه } y=-x ;$$

$$(ت) -(x) = -(-x) = x$$

گزاره^۸ (آ) یک قانون حذف است. توجه کنید که (ب) یکتایی عنصری را که وجودش در (ج ۴) فرض شده ثابت می کند، و (پ) همین کار را در مورد (ج ۵) خواهد کرد.

برهان. هرگاه $x+y = x+z$ اصول موضوع (ج) نتیجه می دهند که

$$\begin{aligned} y &= 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) \\ &= -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z. \end{aligned}$$

این (ت) را ثابت می‌کند. با فرض $z=0$ در (ت) حکم (ب) به دست می‌آید. و با اختیار $z=-x$ در (ت) حکم (پ) حاصل می‌شود. چون $-x+x=0$ ، (پ) با $-x$ به جای x حکم (ت) را نتیجه خواهد داد.

۱۵.۱ حکم. اصول موضوع ضرب گزاره‌های زیر را ایجاب می‌کنند:

(ت) هرگاه $x \neq 0$ و $xy = xz$ ، آنگاه $y = z$ ؛

(ب) هرگاه $x \neq 0$ و $xy = x$ ، آنگاه $y = 1$ ؛

(پ) هرگاه $x \neq 0$ و $xy = 1$ ، آنگاه $y = 1/x$ ؛

(ت) هرگاه $x \neq 0$ ، آنگاه $1/(1/x) = x$.

برهان این حکم را چون خیلی شبیه برهان حکم ۱۴.۱ است حذف می‌کنیم.

۱۶.۱ حکم. اصول موضوع میدان گزاره‌های زیر را به ازای هر $x, y, z \in F$ نتیجه می‌دهند:

(ت) $0x = 0$ ؛

(ب) هرگاه $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ، آنگاه $xy \neq 0$ ؛

(پ) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ ؛

(ت) $(-x)(-y) = xy$.

برهان $0x = 0$. پس ۱۴.۱ (ب) ایجاب می‌کند که $0x = 0$ ، و (ت) برقرار است.

حال فرض می‌کنیم $x \neq 0$ ، $y \neq 0$ ولی $xy = 0$. در این صورت، (ت) این طور نتیجه می‌دهد:

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 0,$$

که یک تناقض است. پس (ب) برقرار می‌باشد.

اولین تساوی در (پ) از تلفیق

$$(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0$$

با ۱۴.۱ (پ) به دست می‌آید. نیمه دیگر (پ) به همین نحو ثابت خواهد شد.

بالاخره، بنابر (پ) و ۱۴.۱ (ت)،

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy.$$

۱۷.۱ تعریف. یک میدان مرتب میدانی است مانند F که یک مجموعه مرتب نیز هست، و چنان است که

(یک) اگر $x, y, z \in F$ و $y < z$ داریم $x + y < x + z$ ، و

(دو) اگر $x \in F, y \in F$ ، $x > 0$ ، و $y > 0$ ، خواهیم داشت $xy > 0$.

هرگاه $x > 0$ ، x را مثبت می‌گوییم؛ چنانچه $x < 0$ ، آن را منفی خواهیم نامید. به عنوان مثال، $\mathbb{Q}$ یک میدان مرتب می‌باشد.

تمام قواعد آشنای کار با نامساویها در هر میدان مرتب قابل اجرا هستند: ضرب در مقادیر مثبت (منفی) جهت نامساویها را حفظ می‌کند (بر می‌گرداند)؛ هیچ مربعی منفی نیست؛ و از این قبیل. در حکم زیر بعضی از این قاعده‌ها ذکر شده‌اند.

۱۸.۱ حکم. گزاره‌های زیر در هر میدان مرتب راست‌اند:

(آ) هرگاه $x > 0$ ، آنگاه $-x < 0$ ، و بالعکس؛

(ب) هرگاه $x > 0$ و $y < z$ ، آنگاه $xy < xz$ ؛

(پ) هرگاه $x < 0$ و $y < z$ ، آنگاه $xy > xz$ ؛

(ت) هرگاه $x \neq 0$ ، آنگاه $x^2 > 0$ ؛ بویژه، $1 > 0$ ؛

(ث) هرگاه $0 < x < y$ ، آنگاه $0 < 1/y < 1/x$.

برهان

(آ) هرگاه $x > 0$ ، آنگاه $-x + 0 = -x + x > -x + 0 = 0$ پس $-x < 0$. هرگاه $x < 0$ ، آنگاه

$-x + x < -x + 0 = 0$ در نتیجه، $-x > 0$. این استدلال (آ) را ثابت می‌کند.

(ب) چون $z > y$ ، داریم $0 = y - y < z - y = 0$ پس $z - y > 0$ ، لذا،

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy.$$

(پ) بنابر (آ)، (ب)، و حکم ۱۶.۱ (پ)

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0.$$

پس $x(z - y) < 0$ در نتیجه، $xz < xy$.

(ت) هرگاه $x > 0$ ، قسمت (دو) تعریف ۱۷.۱ نتیجه می‌دهد که $x^2 > 0$. چنانچه

$x < 0$ ، $-x > 0$ ، از اینرو، $(-x)^2 > 0$. اما، بنابر حکم ۱۶.۱ (ت)، $x^2 = (-x)^2$.

چون $1 = 1^2$ ، پس $1 > 0$.

(ث) هرگاه $y > 0$ و $v \leq 0$ ، آنگاه $yv \leq 0$. اما ، $(1/y) = 1 > 0$. بنا بر-
این ، $1/y > 0$. بهمین نحو ، $1/x > 0$. اگر دو طرف نامساوی $x < y$ را در مقدار مثبت
 $(1/x)(1/y)$ ضرب کنیم ، خواهیم داشت $1/y < 1/x$.

میدان حقیقی

حال قضیه وجودی را که قلب و اساس این فصل است بیان می داریم .

۱۹.۱ قضیه . یک میدان مرتب مانند R هست که خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد .

بعلاوه ، Q ، R را به عنوان یک زیرمیدان در برخواهد داشت .

حکم دوم به این معنی است که $Q \subset R$ و اعمال جمع و ضرب در R ، وقتی در مورد
اعضای Q به کار می روند ، با اعمال معمولی اعداد گویا یکی می شوند . همچنین ، اعداد
گویای مثبت عنصرهای مثبتی از R می باشند .

اعضای R را اعداد حقیقی نام داده اند .

برهان قضیه ۱۹.۱ نسبتاً طولانی و کمی خسته کننده است ، و از اینروست که آن

را در ضمیمه فصل یک آورده ایم . در این برهان ، R عملاً "از Q ساخته می شود .

از این ساختن می شد قضیه بعدی را با اندکی تلاش به دست آورد . لکن ما ترجیح

دادیم آن را از قضیه ۱۹.۱ نتیجه بگیریم ، زیرا این کار تصویر روشنی از آنچه شخص
می تواند با خاصیت کوچکترین کران بالایی بکند به دست خواهد داد .

۲۰.۱ قضیه

(آ) هرگاه $x \in R$ ، $y \in R$ ، و $x > 0$ ، آنگاه عدد صحیح مثبتی مانند n هست

بطوری که

$$nx > y .$$

(ب) هرگاه $x \in R$ ، $y \in R$ ، و $x < y$ ، آنگاه عددی مانند $p \in Q$ هست بقسمی

که

$$x < p < y .$$

قسمت (آ) را معمولاً "خاصیت ارشمیدسی" R می نامند . قسمت (ب) را می توان

این طور گفت که Q در R چگال است : بین هر دو عدد حقیقی عدد گویایی وجود دارد .

برهان

($\bar{T}$) فرض کنیم A مجموعه تمام nx هایی باشد که در آنها n اعداد صحیح مثبت را می گیرد. گوییم هرگاه ($\bar{T}$) غلط می بود، y یک کران بالایی A می شد. اما، در این حال، A در R کوچکترین کران بالایی خواهد داشت. قرار می دهیم $\alpha = \sup A$. چون $x > 0$ ، پس $\alpha - x < \alpha$ و $\alpha - x$ یک کران بالایی A نیست. از اینرو، به ازای عدد صحیح مثبتی چون m ، $\alpha - x < mx$ ، اما، در این صورت، $\alpha < (m+1)x \in A$ که ناممکن است، زیرا α یک کران بالایی A می باشد.

($\bar{b}$) چون $x < y$ ، داریم $y - x > 0$ ، و ($\bar{T}$) عدد صحیح و مثبت n را با این خاصیت که

$$n(y - x) > 1$$

به ما می دهد. مجدداً ($\bar{T}$) را به کار برده اعداد صحیح و مثبت m_1 و m_2 را که $m_1 > nx$ و $m_2 > -nx$ به دست می آوریم. در این صورت،
 $-m_2 < nx < m_1$.

پس عدد صحیحی مانند m (با شرط $-m_2 \leq m \leq m_1$) هست بطوری که

$$m - 1 \leq nx < m.$$

اگر این نامساویها را با هم تلفیق کنیم، خواهیم داشت

$$nx < m \leq 1 + nx < ny.$$

چون $n > 0$ ، نتیجه می شود که

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

این، با فرض $p = m/n$ ، ($\bar{b}$) را ثابت خواهد کرد.

حال وجود ریشه های n م اعداد حقیقی مثبت را ثابت می کنیم. این برهان نشان خواهد داد که چگونه می توان در R بر مشکلی که در مقدمه ذکر شد (گنگ بودن $\sqrt{2}$) فائق آمد.

۲۱۰۱ قضیه. به ازای هر عدد حقیقی $x > 0$ و هر عدد صحیح $n > 0$ یک و فقط یک y حقیقی هست که $y^n = x$.

این y به صورت $\sqrt[n]{x}$ یا $x^{1/n}$ نوشته می شود.

برهان. اینکه از این y ها حداکثر یکی وجود دارد واضح است، زیرا $0 < y_1 < y_2$ ایجاب

خواهد کرد که $y_1^n < y_2^n$.

فرض کنیم E مجموعه تمام اعداد حقیقی و مثبت t که $t^n < x$ باشد. گوییم هرگاه $t = x/(1+x)$ ، آنگاه $0 < t < 1$ پس $t^n < t < x$ ، لذا $t \in E$ و E تهی نیست. هرگاه $t > 1+x$ ، آنگاه $t^n > t > x$ ، در نتیجه، $t \notin E$ ، لذا $1+x$ یک کران بالایی E می باشد. بنابراین، قضیه ۱۹.۱ وجود

$$y = \sup E$$

را ایجاب خواهد کرد.

برای اثبات $x = y^n$ نشان می دهیم که هر یک از نامساویهای $y^n < x$ و $y^n > x$ به تناقض منجر می شود.

ابتدا می بینیم که اتحاد $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$

وقتی $0 < a < b$ نامساوی

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

را نتیجه می دهد.

حال فرض می کنیم $y^n < x$ را طوری می گیریم که $0 < h < 1$ و

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

قرار می دهیم $a = y$ ، $b = y + h$ در این صورت،

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n.$$

لذا، $(y+h)^n < x$ ، و $y+h \in E$ ، چون $y+h > y$ ، این با کران بالایی E بودن y متناقض می باشد.

فرض کنیم $y^n > x$ قرار می دهیم

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

در این صورت، $0 < k < y$ ، هرگاه $t \geq y - k$ ، نتیجه می گیریم که

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x.$$

پس $t^n > x$ و $t \notin E$. از اینجا نتیجه می شود که $y - k$ یک کران بالایی E است.

اما $y - k < y$ ، که با کوچکترین کران بالایی E بودن y تعارض دارد.

بنابر این، $y^n = x$ ، و برهان تمام خواهد بود.

نتیجه. هرگاه a و b حقیقی و مثبت باشند و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}.$$

برهان. قرار می دهیم $\alpha = a^{1/n}$, $\beta = b^{1/n}$. در این صورت، چون ضرب تعویض پذیر است [اصل موضوع (ض ۲) در تعریف ۱۲.۱]،

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n.$$

لذا، یکتایی ریشه که در قضیه ۲۱.۱ ثابت شد نشان می دهد که

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n} b^{1/n}.$$

۲۲.۱ اعداد اعشاری. این بخش را با اشاره‌ای به رابطه بین اعداد حقیقی و اعداد اعشاری خاتمه می دهیم.

فرض کنیم x حقیقی و مثبت باشد، n_0 را بزرگترین عدد صحیحی می انگاریم که $n_0 \leq x$ (توجه دارید که وجود n_0 به خاصیت ارمیدسی R وابسته است.) با فرض اختیار شدن $n_0, n_1, \dots, n_{k-1}$ ، n_k را بزرگترین عدد صحیحی می گیریم که

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

فرض کنیم E مجموعه اعداد به صورت

$$(5) \quad n_0 + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_k}{10^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

باشد. در این صورت، $x = \sup E$. بسط اعشاری x عبارت خواهد بود از

$$(6) \quad n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \dots$$

بعکس، به ازای هر عدد اعشاری و نامتناهی (۶)، مجموعه E مرکب از اعداد (۵) از بالا کراندار است، و (۶) بسط اعشاری $\sup E$ می باشد. چون ما هرگز از اعشاریها استفاده نمی کنیم، وارد بحث تفصیلی آنها نخواهیم شد.

دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی

۲۳.۱ تعریف. دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی عبارت است از میدان حقیقی R و دو علامت $+\infty$ و $-\infty$. ماتریب اصلی R را حفظ و به ازای هر $x \in R$ تعریف

می‌کنیم

$$-\infty < x < +\infty.$$

در این صورت، واضح است که $+\infty$ یک کران بالایی هر زیرمجموعه از دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی است، و هر زیرمجموعهٔ ناتهی کوچکترین کران بالایی دارد. هرگاه، مثلاً، E یک مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی باشد که در R از بالا کراندار نباشد، آنگاه، در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی، $\sup E = +\infty$.

همین نکات عیناً "در مورد کرانهای پایینی قابل ذکراند."

دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی میدان تشکیل نمی‌دهد، اما معمولاً "در آن

قراردادهای زیر را می‌پذیرند:

(τ) هرگاه x حقیقی باشد، آنگاه

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

(β) هرگاه $x > 0$ ، آنگاه $x \cdot (+\infty) = +\infty$ و $x \cdot (-\infty) = -\infty$ ؛

(γ) هرگاه $x < 0$ ، آنگاه $x \cdot (+\infty) = -\infty$ و $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

وقتی بخواهیم میان اعداد حقیقی از یک سو و علامات $+\infty$ و $-\infty$ از سوی دیگر فرق بگذاریم، اعداد حقیقی را متناهی خواهیم نامید.

میدان مختلط

۲۴.۱ تعریف. هر عدد مختلط جفت مرتبی است از اعداد حقیقی مانند (a, b) .

"مرتب" یعنی، هرگاه $a \neq b$ ، (a, b) و (b, a) متمایز گرفته می‌شوند.

فرض کنیم $x = (a, b)$ ، $y = (c, d)$ دو عدد مختلط باشند. می‌نویسیم $x = y$

اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$. (توجه کنید که این تعریف بکلی بی‌ارزش نیست؛ تساوی

اعداد گویا را که به صورت خارج قسمتهای اعداد صحیح نموده شده‌اند در نظر بیاورید.)

تعریف می‌کنیم

$$x + y = (a + c, b + d),$$

$$xy = (ac - bd, ad + bc).$$

۲۵.۱ قضیه. این تعریفهای جمع و ضرب، مجموعهٔ تمام اعداد مختلط را به یک میدان

بدل می‌کنند، که در آن $(0, 0)$ و $(1, 0)$ در نقش ۰ و ۱ ظاهر می‌شوند.

برهان. اصول موضوع میدان را، بصورتی که در تعریف ۱۲.۱ آمده، تحقیق می‌کنیم. (البته، از میدان بودن R سود خواهیم جست.)

فرض کنیم $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, $z = (e, f)$ (ج ۱) واضح است.

$$x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x \quad (\text{ج } 2)$$

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = x + (y + z). \end{aligned} \quad (\text{ج } 3)$$

$$x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x \quad (\text{ج } 4)$$

(ج ۵) قرار می‌دهیم $-x = (-a, -b)$ ، در این صورت، $x + (-x) = (0, 0) = 0$ (ض ۱) واضح است.

$$xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx \quad (\text{ض } 2)$$

$$\begin{aligned} (xy)z &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) = x(yz). \end{aligned} \quad (\text{ض } 3)$$

$$1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x \quad (\text{ض } 4)$$

(ض ۵) هرگاه $x \neq 0$ ، آنگاه $(a, b) \neq (0, 0)$ ، که به این معنی است که دست کم یکی از اعداد حقیقی a, b مخالف ۰ است. لذا، بنابر حکم ۱۸.۱ (ت)، $a^2 + b^2 > 0$ ، و می‌توانیم تعریف کنیم

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

در این صورت،

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1.$$

(پ)

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

۲۶.۱ قضیه. به ازای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).$$

اثبات بدیهی است.

قضیه ۲۶۰۱ نشان می‌دهد که اعداد مختلط به شکل $(a, 0)$ همان خواص حسابی a های حقیقی نظیرشان را دارند. از اینروست که می‌توانیم $(a, 0)$ را بر a منطبق کنیم. این انطباق میدان حقیقی را به صورت زیرمیدانی از میدان مختلط به ما می‌دهد.

خواننده احتمالا "متوجه شده است که ما اعداد مختلط را بی‌توسل به جذر مبهم -1 تعریف کرده‌ایم. حال نشان می‌دهیم که نماد (a, b) با نماد متداولتر $a + bi$ معادل است.

$$270.1 \quad \text{تعریف.} \quad i = (0, 1).$$

$$280.1 \quad \text{قضیه.} \quad i^2 = -1.$$

$$\text{برهان.} \quad i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$290.1 \quad \text{قضیه. هرگاه } a \text{ و } b \text{ حقیقی باشند، آنگاه } (a, b) = a + bi.$$

برهان

$$\begin{aligned} a + bi &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= (a, 0) + (0, b) = (a, b). \end{aligned}$$

۳۰۰۱ تعریف. هرگاه a, b حقیقی باشند و $z = a + bi$ ، آنگاه عدد مختلط $\bar{z} = a - bi$ مزدوج z نام دارد. اعداد a و b به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی z می‌باشند.

گاهی اوقات خواهیم نوشت

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

$$310.1 \quad \text{قضیه. هرگاه } z \text{ و } w \text{ مختلط باشند، آنگاه}$$

$$(\bar{\bar{z}} = z) \quad (\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w})$$

- (ب) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ؛
 (پ) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ ؛
 (ت) $z\bar{z}$ (جز وقتی $z = 0$) حقیقی و مثبت است .

برهان . (ت) و (ب) و (پ) کاملاً " بدیهی اند . برای اثبات (ت) می نویسیم $z = a + bi$ و توجه می کنیم که $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

۳۲۰۱ تعریف . هرگاه z عددی مختلط باشد ، قدر مطلق آن $|z|$ جذر نامنفی $z\bar{z}$ خواهد بود ؛ یعنی ، $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.
 وجود (و یکتایی) $|z|$ از قضیه ۲۱۰۱ و قسمت (ت) قضیه ۳۱۰۱ نتیجه می شود .

توجه کنید که وقتی x حقیقی است ، $\bar{x} = x$. در نتیجه ، $|x| = \sqrt{x^2}$. بنابراین -
 این ، $|x| = x$ هرگاه $x \geq 0$ و $|x| = -x$ هرگاه $x < 0$.

۳۳۰۱ قضیه . فرض کنیم z و w اعدادی مختلط باشند . در این صورت ،

$$(ت) \quad |z| > 0 \text{ مگر آنکه } z = 0 \text{ و } |0| = 0 ؛$$

$$(ب) \quad |\bar{z}| = |z| ؛$$

$$(پ) \quad |zw| = |z| |w| ؛$$

$$(ت) \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z| ؛$$

$$(ث) \quad |z + w| \leq |z| + |w| .$$

برهان . (ت) و (ب) بدیهی اند . قرار می دهیم $z = a + bi$ و $w = c + di$ با این شرط که a, b, c, d حقیقی می باشند . در این صورت ،

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2 |w|^2$$

یا $|zw|^2 = (|z| |w|)^2$. حال (پ) از یکتایی ریشه که در قضیه ۲۱۰۱ ثابت شد نتیجه می شود .

برای اثبات (ت) توجه می کنیم که $a^2 \leq a^2 + b^2$. پس

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} .$$

برای اثبات (ث) دقت می کنیم که $\bar{z}w$ مزدوج $z\bar{w}$ است . در نتیجه ،

$$z\bar{w} + \bar{z}w = 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$$

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

حال (ث) با جذر گرفتن به دست خواهد آمد.

۳۴.۱ نمادگذاری. هرگاه $x_1, \dots, x_n$ اعدادی مختلط باشند، می‌نویسیم

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j.$$

این بخش را با نامساوی مهمی، که عموماً "به نامساوی شوارتز^۱ معروف است، به پایان می‌بریم.

۳۵.۱ قضیه. هرگاه $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ اعدادی مختلط باشند، آنگاه

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2.$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = \sum |a_j|^2$ ، $B = \sum |b_j|^2$ و $C = \sum a_j \bar{b}_j$ (در همه مجموعه‌های این برهان، j مقادیر $1, \dots, n$ را به خود می‌گیرد). گوییم هرگاه $B = 0$ ، آنگاه $b_1 = \dots = b_n = 0$ و حکم واضح است. پس فرض می‌کنیم $B > 0$. بنابراین قضیه ۳۱.۱ داریم

$$\begin{aligned} \sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)(\overline{Ba_j - Cb_j}) \\ &= B^2 \sum |a_j|^2 - B\bar{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2). \end{aligned}$$

چون هر جمله در مجموع اول نامنفی است، ملاحظه می‌کنیم که

$$B(AB - |C|^2) \geq 0.$$

و چون $B > 0$ ، نتیجه می شود که $AB - |C|^2 \geq 0$. این همان نامساوی مطلوب می باشد.

فضاهای اقلیدسی

۳۶۰۱ چند تعریف. فرض کنیم R^k (به ازای هر عدد صحیح و مثبت k) مجموعه تمام k تاییهای مرتب

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$$

است که در آنها $x_1, \dots, x_k$ اعدادی حقیقی، موسوم به مختصات $\mathbf{x}$ ، می باشند. عنصرهای R^k را، بویژه وقتی $k > 1$ ، نقطه یا بردار می نامیم. بردارها را با حروف سیاه نشان خواهیم داد. هرگاه $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$ و α عددی حقیقی باشد، قرار می دهیم

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k),$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k).$$

در نتیجه، $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R^k$ و $\alpha \mathbf{x} \in R^k$. اینها جمع بردارها و نیز ضرب یک بردار در یک عدد حقیقی (اسکالر) را تعریف می کنند. این دو عمل از قوانین تعویض پذیری، شرکت پذیری، و پخش پذیری تبعیت کرده (اثبات، در پرتو قوانین مشابه برای اعداد حقیقی، واضح است) R^k را به یک فضای برداری روی میدان حقیقی بدل می سازند. عنصر صفر R^k (که گاهی مبدا یا بردار پوچ خوانده می شود) نقطه $\mathbf{0}$ است که تمام مختصاتش 0 می باشند.

همچنین، حاصل ضرب داخلی (یا حاصل ضرب اسکالر) $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را با

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

و نرم $\mathbf{x}$ را با

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^{1/2}$$

تعریف می کنیم.

نهادی که هم اکنون تعریف شد (فضای برداری R^k با ضرب داخلی و نرم بالا) فضای اقلیدسی k بعدی نام یافته است.

۳۷.۱ قضیه. فرض کنیم $x, y, z \in R^k$ و α حقیقی باشد. در این صورت،

$$(1) \quad |x| \geq 0$$

$$(2) \quad |x| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0.$$

$$(3) \quad |\alpha x| = |\alpha| |x|$$

$$(4) \quad |x \cdot y| \leq |x| |y|$$

$$(5) \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(6) \quad |x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

برهان. (1) و (2) واضح اند، و (3) نتیجه مستقیم نامساوی شوارتز می باشد. بنابر (4) داریم

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \\ &\leq |x|^2 + 2|x| |y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

در نتیجه، (5) ثابت می شود. بالاخره، (6) از (5)، در صورت تعویض x با $x - y$ و y با $y - z$ ، به دست خواهد آمد.

۳۸.۱ چند تبصره. قسمتهای (1)، (2)، و (3) قضیه ۳۷.۱ به ما این رخصت را می دهند (ر.ک. فصل ۲) که R^k را به عنوان یک فضای متری در نظر بگیریم. R^1 (مجموعه تمام اعداد حقیقی) را معمولاً "خط" یا "خط حقیقی" می نامند. و نیز، R^2 را صفحه یا صفحه مختلط نام داده اند (تعریفهای ۲۴.۱ و ۳۶.۱ را با هم مقایسه کنید). در این دو حالت، نرم همان قدر مطلق عدد حقیقی یا عدد مختلط مربوطه خواهد بود.

ضمیمه

در این ضمیمه، قضیه ۱۹.۱ با ساختن R از Q ثابت می شود. نحوه ساختن را به چند مرحله تقسیم می کنیم.

مرحله ۱. اعضای R زیرمجموعه های معینی از Q هستند به نام بریدگی. یک بریدگی،

بنابه تعریف، مجموعه‌ای است مانند $Q \subset \alpha$ با سه خاصیت زیر:

(یک) α تهی نیست و $\alpha \neq Q$ ؛

(دو) هرگاه $p \in \alpha$ ، $q \in Q$ ، و $q < p$ ، آنگاه $q \in \alpha$ ؛

(سه) هرگاه $p \in \alpha$ ، آنگاه، به ازای $r \in \alpha$ ، $p < r$ ،

حروف p ، q ، r ، ... همیشه نشانگر اعدادی گویا، و α ، β ، γ ، ... نمایشگر بریدگی خواهند بود.

توجه کنید که (سه) فقط این را می‌گوید که α بزرگترین عضو ندارد. (دو) موجب دو مطلب می‌شود که آزادانه به کار خواهند رفت:

هرگاه $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$ ، آنگاه $p < q$ ؛

هرگاه $r \notin \alpha$ و $r < s$ ، آنگاه $s \notin \alpha$.

مرحله ۲. " $\alpha < \beta$ " را به این معنی می‌گیریم که " α یک زیرمجموعه حقیقی β است".

حال ببینیم این نیازهای تعریف ۵.۱ را برمی‌آورد یا نه. گوییم هرگاه $\alpha < \beta$ و $\beta < \gamma$ ، واضح است که $\alpha < \gamma$. (هر زیرمجموعه حقیقی یک زیرمجموعه حقیقی زیر - مجموعه‌ای حقیقی است.) همچنین، واضح است که به ازای هر جفت α و β حداکثر یکی از سه رابطه

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

برقرار است. برای اثبات برقراری دست کم یکی، فرض کنیم دوتای اول درست نباشند. در این صورت، α زیرمجموعه β نخواهد بود. از اینرو، $p \in \alpha$ ای هست که $p \notin \beta$. هرگاه $q \in \beta$ ، نتیجه می‌شود که $q < p$ (زیرا $p \notin \beta$). در نتیجه، بنا بر (دو)، $q \in \alpha$. لذا، $\beta \subset \alpha$ ، چون $\beta \neq \alpha$ ، نتیجه می‌گیریم که $\beta < \alpha$. بنا بر این، R تا اینجا یک مجموعه مرتب است.

مرحله ۳. مجموعه مرتب R دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی است.

برای اثبات این مطلب، فرض کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی R و $\beta \in R$ یک کران بالایی آن باشد. γ را اجتماع تمام $\alpha \in A$ ها می‌گیریم. به عبارت دیگر، $p \in \gamma$ اگر و فقط اگر به ازای $\alpha \in A$ ای $p \in \alpha$ ثابت می‌کنیم $\gamma \in R$ و $\gamma = \sup A$. گوییم چون A تهی نیست، عنصری مانند $\alpha_0 \in A$ وجود دارد. این α_0 تهی نیست.

و چون $\alpha_0 \in \gamma$ ، تهی نمی‌باشد. دیگر آنکه، $\gamma \subset \beta$ (زیرا، به‌ازای هر $\alpha \in A$ ، $\alpha \subset \beta$) در نتیجه، $\gamma \neq Q$. بنابراین، γ از خاصیت (یک) برخوردار است. برای اثبات (دو) و (سه)، عنصری مانند $p \in \gamma$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، به‌ازای $\alpha_1 \in A$ ، $p \in \alpha_1$. هرگاه $q < p$ ، آنگاه $q \in \alpha_1$ در نتیجه، $q \in \gamma$. این امر خاصیت (دو) را تأیید می‌کند. هرگاه $r \in \alpha_1$ طوری اختیار شود که $r > p$ ، خواهیم دید که $r \in \gamma$ (زیرا $\alpha_1 \subset \gamma$) و در نتیجه، γ از خاصیت (سه) نیز بهره‌مند است. بنابراین، $\gamma \in R$.

واضح است که به‌ازای هر $\alpha \in A$ ، $\alpha \leq \gamma$.

فرض کنیم $\delta < \gamma$. در این صورت، عنصری مثل $s \in \gamma$ هست که $s \notin \delta$. چون $s \in \gamma$ ، به‌ازای $\alpha \in A$ ای $s \in \alpha$. از اینرو، $\delta < \alpha$ ، و δ یک کران بالایی A نیست. این امر نتیجه مطلوب، یعنی $\gamma = \sup A$ ، را به‌دست خواهد داد.

مرحله ۴. هرگاه $\alpha \in R$ و $\beta \in R$ ، $\alpha + \beta$ را مجموعه تمام مجموعه‌های $r + s$ که $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ تعریف می‌کنیم.

0^* را مجموعه تمام اعداد گویای منفی می‌گیریم. واضح است که 0^* یک بریدگی است. تحقیق می‌کنیم که اصول موضوع جمع (ر.گ. تعریف (۱۳۰)) در R ، در حالی که 0^* نقش ۰ را دارد، برقرارند.

(ج ۱) باید نشان دهیم که $\alpha + \beta$ یک بریدگی است. واضح است که $\alpha + \beta$ یک زیر-مجموعه ناتهی Q هست. فرض کنیم $r' \notin \alpha$ و $s' \notin \beta$. پس، به‌ازای هر $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ ، $r' + s' > r + s$. بنابراین، $r' + s' \notin \alpha + \beta$. از این نتیجه می‌شود که $\alpha + \beta$ از خاصیت (یک) برخوردار است.

p را در $\alpha + \beta$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، $p = r + s$ که در آن $r \in \alpha$ و $s \in \beta$. گوییم هرگاه $q < p$ ، آنگاه $q - s < r - s$. در نتیجه $q - s \in \alpha + \beta$ و $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$. پس (دو) برقرار می‌باشد. $t \in \alpha$ را طوری می‌گیریم که $t > r$. در این صورت، $p < t + s$ و $t + s \in \alpha + \beta$. لذا، شرط (سه) نیز برقرار می‌باشد.

(ج ۲) $\alpha + \beta$ مجموعه تمام $r + s$ هایی است که $r \in \alpha$ و $s \in \beta$. با همان تعریف، $\alpha + \beta$ مجموعه کلیه $s + r$ ها می‌باشد. چون به‌ازای هر $s \in \beta$ ، $r + s = s + r$ ، پس خواهیم داشت $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(ج ۳) این، مانند فوق، از قانون شرکتپذیری در Q نتیجه می‌شود.

(ج ۴) هرگاه $r \in \alpha$ و $s \in 0^*$ ، آنگاه $r + s < \alpha$. در نتیجه، $r + s \in \alpha$. لذا،
 $\alpha + 0^* \subset \alpha$. برای رسیدن به شمول در جهت دیگر، فرض می‌کنیم $p \in \alpha$ و $r \in \alpha$ بطوری
 که $r > p$. در این صورت، $p - r \in 0^*$ و $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^*$. لذا، $\alpha \subset \alpha + 0^*$.
 بنابراین، نتیجه خواهیم گرفت که $\alpha + 0^* = \alpha$.

(ج ۵) $\alpha \in R$ را ثابت گرفته فرض می‌کنیم β مجموعه تمام p ها با خاصیت زیر باشد:

عددی مانند $r > 0$ وجود دارد بطوری که $-p - r \notin \alpha$.

به عبارت دیگر، عدد گویایی کوچکتر از $-p$ هست که در α نیست.

نشان می‌دهیم که $\beta \in R$ و $\alpha + \beta = 0^*$.

گوییم هرگاه $s \notin \alpha$ و $p = -s - 1$ ، آنگاه $-p - 1 \notin \alpha$. در نتیجه، $p \in \beta$. پس β
 تهی نیست. هرگاه $q \in \alpha$ ، آنگاه $-q \notin \beta$. در نتیجه، $q \neq 0$. پس β در (یک) صدق
 می‌کند.

$p \in \beta$ را اختیار کرده $r > 0$ را طوری می‌گیریم که $-p - r \notin \alpha$. در این صورت،
 هرگاه $q < p$ ، آنگاه $-q - r > -p - r \notin \alpha$. در نتیجه، $-q - r \notin \alpha$. لذا، $q \in \beta$ ، و شرط
 (دو) برقرار می‌باشد. قرار می‌دهیم $t = p + (r/2)$. در این صورت، $t > p$ و
 $-t - (r/2) = -p - r \notin \alpha$. در نتیجه، $t \in \beta$. از اینرو، β در شرط (سه) نیز صدق
 می‌نماید.

یعنی، ثابت کرده‌ایم $\beta \in R$.

هرگاه $r \in \alpha$ و $s \in \beta$ ، آنگاه $-s \notin \alpha$. در نتیجه، $r < -s$ یا $r + s < 0$. لذا،
 $\alpha + \beta \subset 0^*$.

برای اثبات شمول در جهت دیگر، $v \in 0^*$ را اختیار کرده قرار می‌دهیم $w = -v/2$.
 در این صورت، $w > 0$ ، و عددی صحیح مانند n هست بطوری که $nw \in \alpha$ ولی $(n+1)w \notin \alpha$.
 (توجه دارید که این بخاطر خاصیت ارشمیدسی Q است!) قرار می‌دهیم
 $p = -(n+2)w$. در این صورت، $p \in \beta$ ، زیرا $-p - w \notin \alpha$ ، و

$$v = nw + p \in \alpha + \beta.$$

بنابراین، $0^* \subset \alpha + \beta$.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\alpha + \beta = 0^*$.

این β البته با $-\alpha$ نموده خواهد شد.

مرحله ۵. از این اثبات که جمع تعریف شده در مرحله ۴ در اصول موضوع (ج) تعریف

۱۲۰۱. صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که حکم ۱۴۰۱ در R معتبر است، و می‌توان یکی از ملزومات تعریف ۱۷۰۱ را ثابت کرد:

هرگاه $\alpha, \beta, \gamma \in R$ و $\beta < \gamma$ ، آنگاه $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

درواقع، از تعریف + در R واضح است که $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. چنانچه می‌داشتیم

$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ ، قانون حذف (حکم ۱۴۰۱) ایجاب می‌کرد که $\beta = \gamma$.

همچنین، نتیجه می‌شود که $\alpha > 0^*$ اگر و فقط اگر $-\alpha < 0^*$.

مرحله ۶. در وضع موجود، ضرب از جمع قدری پیر زحمت‌تر است، زیرا حاصل ضربهای اعداد گویای منفی مثبت هستند. به این دلیل، ما ابتدا خود را به R^+ ، یعنی مجموعه تمام $\alpha \in R$ هایی که $\alpha > 0^*$ ، محدود می‌کنیم.

هرگاه $\alpha \in R^+$ و $\beta \in R^+$ ، $\alpha\beta$ را مجموعه تمام p هایی تعریف می‌کنیم که به ازای

$r \in \beta$ و $s \in \alpha$ که $r > 0$ و $s > 0$ ، $p \leq rs$.

ما 1^* را مجموعه تمام q هایی می‌گیریم که $q < 1$.

در این صورت، اصول موضوع (ض) و (پ) تعریف ۱۲۰۱، که در آنها R^+ به جای

F نشسته و 1^* نقش ۱ را دارد، برقرار خواهند بود.

برهانها را چون خیلی شبیه برهانهای تفصیلی مرحله ۴ هستند حذف می‌کنیم.

بخصوص، توجه کنید که شرط دوم تعریف ۱۷۰۱ برقرار است: هرگاه $\alpha > 0^*$ و

$\beta > 0^*$ ، آنگاه $\alpha\beta > 0^*$.

مرحله ۷. تعریف ضرب را با قرار $0^*\alpha = 0^* = \alpha 0^*$ و روابط زیر کامل می‌کنیم:

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{هرگاه } \alpha < 0^* \text{ و } \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{هرگاه } \alpha < 0^* \text{ و } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] & \text{هرگاه } \alpha > 0^* \text{ و } \beta < 0^* \end{cases}$$

حاصل ضربهای سمت راست در مرحله ۶ تعریف شده بودند.

حال که ثابت شده (در مرحله ۶) که اصول موضوع (ض) در R^+ برقرارند، می‌توان

آنها را در R ، با چند بار استفاده از اتحاد $\gamma = -(-\gamma)$ که بخشی از حکم ۱۴۰۱ است،

در کمال سهولت اثبات کرد. (ر.ک. مرحله ۰۵)

برهان قانون پخشپذیری

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

به حالات تقسیم می شود. به عنوان مثال، فرض می کنیم $\alpha > 0^*$ ، $\beta < 0^*$ ، و $\beta + \gamma > 0^*$. در این صورت، $\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$ ، و (چون از قبل به برقراری قانون پخش پذیری در R^+ واقفیم)

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha \cdot (-\beta).$$

$$\text{اما } \alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha\beta)$$

$$\alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha(\beta + \gamma)$$

حالات دیگر به همین نحو ثابت می شوند.

در اینجا اثبات اینکه R میدانی است مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی به

اتمام می رسد.

مرحله ۸. به هر $r \in Q$ مجموعه r^* را مربوط می کنیم که از تمام $p \in Q$ هایی تشکیل شده که $p < r$. واضح است که هر r^* یک بریدگی است؛ یعنی، $r^* \in R$. این بریدگیها در روابط زیر صدق می نمایند:

$$(T) \quad r^* + s^* = (r + s)^* ;$$

$$(B) \quad r^* s^* = (rs)^* ;$$

$$(P) \quad r^* < s^* \text{ اگر و فقط اگر } r < s .$$

برای اثبات (T)، p را در $r^* + s^*$ اختیار می کنیم. در این صورت، $p = u + v$

که در آن $u < r$ و $v < s$. پس $p < r + s$ ، که می گوید $p \in (r + s)^*$.

بعکس، فرض می کنیم $p \in (r + s)^*$. در این صورت، $p < r + s$. t را طوری می گیریم

که $2t = r + s - p$ ، و قرار می دهیم

$$r' = r - t, s' = s - t.$$

پس، $r' \in r^*$ ، $s' \in s^*$ ، و $p = r' + s'$ ؛ در نتیجه، $p \in r^* + s^*$.

این (T) را ثابت می کند. اثبات (B) به همین سیاق خواهد بود.

هرگاه $r < s$ ، آنگاه $r \in s^*$ ولی $r \notin r^*$. در نتیجه، $r^* < s^*$.

هرگاه $r^* < s^*$ ، آنگاه p ای در s^* هست که $p \notin r^*$. لذا، $r \leq p < s$. در-

نتیجه، $r < s$.

این (P) را ثابت خواهد کرد.

مرحله ۹. در مرحله ۸ دیدیم که در تعویض اعداد گویای r با "بریدگیهای گویا" نظیرشان $r^* \in R$ ، مجموعه‌ها، حاصل ضربها، و ترتیب حفظ می‌شوند. این را می‌شود به این ترتیب گفت که میدان مرتب Q با میدان مرتب Q^* که عنصرهایش بریدگیهای گویا هستند یگاریخت است. البته، r^* بهیچوجه همان r نیست، لکن خواص مورد نظر ما (خواص حسابی و ترتیب) در هر دو میدان یکی هستند.

بخاطر این انطباق Q با Q^* است که اجازه داریم Q را یک زیرمیدان R بدانیم. قسمت دوم قضیه ۱۹۰۱ باید بر حسب این انطباق فهمیده شود. توجه کنید که همین وضع وقتی مجموعه اعداد حقیقی را زیرمیدانی از میدان مختلط می‌گیریم، و حتی در سطح خیلی ابتدایی‌تر، یعنی وقتی مجموعه اعداد صحیح را بر زیر مجموعه معینی از Q منطبق می‌کنیم، نیز پیش خواهد آمد.

حقیقت آن است (در اینجا آن را ثابت نمی‌کنیم) که هر دو میدان مرتب با خاصیت کوچکترین کران بالایی یگاریخت هستند. از اینرو، قسمت اول قضیه ۱۹۰۱ میدان حقیقی R را کاملاً مشخص خواهد کرد.

کتابهای لاندو^۱ و ترستن^۲، که در کتابنامه آمده‌اند، کلاً به دستگامهای اعداد اختصاص دارند. فصل یک کتاب کنوپ^۳ شرح مبسوطتری از اینکه چطور می‌شود R را از Q ساخت به دست می‌دهد. شیوه‌ای دیگر برای ساختن، که در آن هر عدد حقیقی مساوی رده‌ای هم-ارزی از دنباله‌های کشی^۴ از اعداد گویا (ر. ک. فصل ۳) تعریف شده، در بخش ۵ کتاب هیویت^۵ و اشترومبرگ^۶ مطرح شده است.

بریدگیهای در Q را که در اینجا مورد استفاده ماقرار گرفتند ددکیند^۷ ابداع کرده بود. ساختن R از Q توسط دنباله‌های کشی از آن کانتور^۸ است. هم کانتور و هم ددکیند روشهای ساختن خود را در ۱۸۷۲ منتشر کردند.

1. Landau

2. Thurston

3. Knopp

4. Cauchy

5. Hewitt

6. Stromberg

7. Dedekind

8. Cantor

تمرین

جميع اعداد ذکر شده در این تمرینها را حقیقی بگیرید مگر آنکه خلافش تصریح شده باشد.

۱. هرگاه $r (\neq 0)$ گویا و x گنگ باشد، ثابت کنید $r+x$ و rx گنگاند.
۲. ثابت کنید عدد گویایی نیست که مربعش ۱۲ باشد.
۳. حکم ۱۵.۱ را ثابت نمایید.
۴. E را یک زیر مجموعهٔ ناتهی مجموعه‌ای مرتب انگاشته، فرض کنید α یک کران پایینی و β یک کران بالایی آن باشد. ثابت کنید $\alpha \leq \beta$.
۵. A را مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی بگیرید که از پایین کراندار باشد. همچنین، $-A$ را مجموعهٔ تمام $-x$ هایی بینگارید که $x \in A$. ثابت کنید

$$\inf A = -\sup(-A).$$

۶. $b > 1$ را ثابت نگهدارید.

(آ) هرگاه m, n, p, q اعدادی صحیح باشند، $n > 0$ ، $q > 0$ ، و $r = m/n = p/q$ ، ثابت کنید

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

لذا، تعریف $b^r = (b^m)^{1/n}$ معنی دارد.

(ب) ثابت کنید هرگاه r و s گویا باشند، $b^{r+s} = b^r b^s$.

(پ) در صورت حقیقی بودن x ، $B(x)$ را مجموعهٔ تمام اعدادی چون b^r تعریف کنید که در آنها t گویاست و $t \leq x$. ثابت کنید، وقتی r گویا باشد،

$$b^r = \sup B(r).$$

بنابراین، تعریف

$$b^x = \sup B(x)$$

به ازای هر x حقیقی معنی خواهد داشت.

(ت) ثابت کنید به ازای هر x و y حقیقی $b^{x+y} = b^x b^y$.

۷. $b > 1$ و $y > 0$ را ثابت گرفته، با تکمیل شرح مجمل زیر، ثابت کنید x حقیقی منحصر بفردی هست بطوری که $b^x = y$. (این x لگاریتم y در پایه b نام دارد.)

(آ) به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $b^n - 1 \geq n(b - 1)$.

(ب) بنابراین، $b - 1 \geq n(b^{1/n} - 1)$.

(پ) هرگاه $t > 1$ و $n > (b - 1)/(t - 1)$ ، آنگاه $b^{1/n} < t$.

(ت) هرگاه w چنان باشد که $b^w < y$ ، آنگاه، به ازای n به قدر کافی بزرگ،
 $b^{w+(1/n)} < y$. برای اثبات این مطلب، از قسمت (پ) با فرض $t = y \cdot b^{-w}$ استفاده کنید.

(ث) هرگاه $b^w > y$ ، آنگاه به ازای n به قدر کافی بزرگ، $b^{w-(1/n)} > y$.
 (ج) فرض کنید A مجموعه تمام w هایی باشد که $b^w < y$ ، و نشان دهید که
 $x = \sup A$ در $b^x = y$ صدق می کند.
 (چ) ثابت کنید این x منحصر بفرد است.

۸. ثابت کنید در میدان مختلط هیچ ترتیبی که آن را به یک میدان مرتب بدل کند قابل تعریف نیست. راهنمایی: ۱- یک مربع است.

۹. فرض کنید $z = a + bi$ و $w = c + di$. هرگاه $a < c$ و نیز هرگاه $a = c$ ولی $b < d$ ،
 تعریف کنید $z < w$. ثابت کنید این تعریف مجموعه تمام اعداد مختلط را به یک
 مجموعه مرتب بدل می کند. (به دلایل مشهود، این نوع رابطه ترتیبی را یک
 ترتیب لغت نامه ای یا ترتیب قاموسی می نامند.) آیا این مجموعه مرتب خاصیت
 کوچکترین کران بالایی دارد؟

۱۰. فرض کنید $z = a + bi$ ، $w = u + iv$ ، و

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2} \right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{|w| - u}{2} \right)^{1/2}.$$

ثابت کنید هرگاه $v \geq 0$ ، $z^2 = w$ ، و هرگاه $v \leq 0$ ، $(\bar{z})^2 = w$. نتیجه بگیرید
 که هر عدد مختلط (جز در یک مورد!) دارای دو جذر مختلط است.

۱۱. هرگاه z عددی مختلط باشد، ثابت کنید عددی چون $r \geq 0$ و عددی مختلط مثل
 w با شرط $|w| = 1$ وجود دارند بطوری که $z = rw$. آیا w و r همواره منحصر "به
 وسیله z معین می شوند؟

۱۲. هرگاه $z_1, \dots, z_n$ مختلط باشند، ثابت کنید

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

۱۳. هرگاه x و y مختلط باشند، ثابت کنید

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

۱۴. هرگاه z یک عدد مختلط باشد بطوری که $|z| = 1$ ، یعنی $z\bar{z} = 1$ ، عبارت

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

را محاسبه نمایید.

۱۵. تحت چه شرایطی در نامساوی شوارتز تساوی برقرار است؟

۱۶. فرض کنید $k \geq 3$ ، $x, y \in R^k$ ، $|x - y| = d > 0$ و $r > 0$. ثابت کنید:

(آ) هرگاه $d > 2r$ ، بی‌نهایت $z \in R^k$ هست که

$$|z - x| = |z - y| = r;$$

(ب) اگر $d = 2r$ ، دقیقاً یک z با این خاصیت وجود دارد؛

(پ) چنانچه $d < 2r$ ، چنین z وجود نخواهد داشت.

هرگاه k مساوی ۲ یا ۱ باشد، این احکام چطور باید اصلاح شوند؟

۱۷. ثابت کنید که اگر $x \in R^k$ و $y \in R^k$ ،

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

این رابطه را به صورت حکمی در باب متوازی الاضلاعها تعبیر هندسی نمایید.

۱۸. هرگاه $k \geq 2$ و $x \in R^k$ ، ثابت کنید y ی در R^k هست بطوری که $y \neq 0$ ولی

$$x \cdot y = 0.$$

آیا این مطلب اگر $k = 1$ نیز درست است؟

۱۹. فرض کنید $a \in R^k$ و $b \in R^k$ و $c \in R^k$ و $r > 0$ را طوری بیابید که

$$|x - a| = 2|x - b|$$

اگر و فقط اگر $|x - c| = r$. (حل: $3c = 4b - a$ و $3r = 2|b - a|$)

۲۰. با اشاره به ضمیمه، فرض کنید خاصیت (سه) از تعریف بریدگی حذف شده باشد.

تعریفهای ترتیب و جمع را همانطور که هست نگهدارید. نشان دهید که مجموعه

مرتب حاصل خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد، جمع در اصول موضوع (ج ۱)

تا (ج ۴) (با عنصر صفر اندکی متفاوت!) ضدق می‌کند، لیکن (ج ۵) برقرار

نخواهد بود.

توپولوژی پایه

مجموعه های متناهی، شمارشپذیر، و شمارش ناپذیر
این بخش را با تعریفی از مفهوم تابع آغاز می کنیم .

۱.۲ تعریف. دو مجموعه A و B را که عناصرشان اشیاء دلخواهی هستند در نظر می گیریم، و فرض می کنیم به هر عنصر x از A عنصری از B ، که آن را به $f(x)$ نشان می دهیم، بنوعی مربوط شده باشد. در این صورت، گوییم f یک تابع از A به B (یا یک نگاشت از A بتوی B) است. مجموعه A را قلمرو f می نامیم (همچنین، می گوییم f بر A تعریف شده است)، و $f(x)$ ها را مقدارهای f می خوانیم. مجموعه تمام مقادیر f برد f نام دارد.

۲.۲ تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه بوده، و f یک نگاشت از A بتوی B باشد. هرگاه $E \subset A$ ، $f(E)$ مجموعه تمام $f(x)$ هایی تعریف می شود که $x \in E$. $f(E)$ را نقش E تحت f می نامیم. با این نمادگذاری، $f(A)$ برد f خواهد بود. واضح است که $f(A) \subset B$. هرگاه $f(A) = B$ ، می گوییم f ، A را بروی B می نگارد. (توجه کنید که، بر طبق این قرار، نگاشت بروخاستر از نگاشت بتو است.)

هرگاه $E \subset B$ ، $f^{-1}(E)$ مجموعه تمام x هایی در A است که $f(x) \in E$. $f^{-1}(E)$ را نقش معکوس E تحت f می نامیم. چنانچه $y \in B$ ، $f^{-1}(y)$ مجموعه تمام x هایی در A است که $f(x) = y$. هرگاه، به ازای هر $y \in B$ ، $f^{-1}(y)$ حداکثر شامل یک عنصر از A باشد، آنگاه f یک نگاشت 1-1 (یک به یک) از A بتوی B نام دارد. این را می شود به این صورت نیز بیان کرد: f در صورتی یک نگاشت 1-1 از A بتوی B است که هر وقت $x_1, x_2 \in A$ و $x_1 \neq x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(نماد $x_1 \neq x_2$ یعنی x_1 و x_2 عنصرهایی متمایزند. در غیر این صورت، می نویسیم $x_1 = x_2$)

۳.۲ تعریف. هرگاه یک نگاشت 1-1 از A بروی B موجود باشد، می گوییم A و B را می توان در تناظر 1-1 قرار داد، یا اینکه A و B دارای یک عدد اصلی هستند، یا، مختصراً، " A و B هم ارز هستند"، و می نویسیم $A \sim B$. این رابطه آشکاراً از خواص زیر بهره مند است:

منعکس است: $A \sim A$ ؛

متقارن است: هرگاه $A \sim B$ ، آنگاه $B \sim A$ ؛

متعدی است: هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$ ، آنگاه $A \sim C$.

هر رابطه با این سه خاصیت یک رابطه هم ارزی نام خواهد داشت.

۴.۲ تعریف. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، فرض می کنیم J_n مجموعه ای باشد که عنصرهایش اعداد صحیح $1, 2, \dots, n$ اند. همچنین، J را مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت می انگاریم. برای هر مجموعه مانند A ، می گوییم:

(آ) A متناهی است هرگاه، به ازای n ی، $A \sim J_n$ (مجموعه تهی را نیز متناهی می گیریم)؛

(ب) A نامتناهی است هرگاه متناهی نباشد؛

(پ) A شمارش پذیر است هرگاه $A \sim J$ ؛

(ت) A شمارش ناپذیر است هرگاه نه A متناهی باشد و نه شمارش پذیر؛

(ث) A حداکثر شمارش پذیر است هرگاه A متناهی یا شمارش پذیر باشد.

مجموعه های شمارش پذیر را گاهی قابل شمارش یا شمارا می گویند.

واضح است که به ازای دو مجموعه متناهی A و B ، $A \sim B$ اگر و فقط اگر A و B یک تعداد عنصر داشته باشند. اما، در مورد مجموعه های نامتناهی، ایده "یک تعداد عنصر داشتن" بکلی مبهم است، در حالی که مفهوم تناظر 1-1 روشنی خود را حفظ خواهد کرد.

۵.۲ مثال. فرض کنیم A مجموعه تمام اعداد صحیح باشد. پس A شمارش پذیر است. زیرا، مجموعه های A و J را با آرایشهای زیر در نظر بگیرید:

$$A: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

$$J: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

حتی در این مثال می‌توان برای تابع f از J به A که تناظری 1-1 برقرار می‌کند فرمول صریحی ارائه داد:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ زوج}), \\ -\frac{n-1}{2} & (n \text{ فرد}). \end{cases}$$

۶.۲ تبصره. یک مجموعه متناهی نمی‌تواند با هیچیک از زیرمجموعه‌های حقیقی خود هم‌ارز باشد. اما اینکه این امر برای مجموعه‌های نامتناهی میسر است در مثال ۵.۲ نشان داده شده، که در آن J یک زیرمجموعه حقیقی A می‌باشد.

درواقع، تعریف ۴.۲ (ب) را می‌توانستیم با این عبارت عوض کنیم: A نامتناهی است اگر که با یکی از زیرمجموعه‌های حقیقی خود هم‌ارز باشد.

۷.۲ تعریف. منظور از یک دنباله یعنی تابعی مانند f که بر مجموعه تمام اعداد صحیح و مثبت J تعریف شده است. هرگاه به ازای هر $n \in J$ ، $f(n) = x_n$ ، معمول شده که دنباله f را با علامت $\{x_n\}$ ، یا گاهی با $x_1, x_2, x_3, \dots$ ، نشان می‌دهند. مقادیر f ، یعنی عنصرهای x_n ، را جمله‌های دنباله می‌نامند. چنانچه A یک مجموعه باشد و به ازای هر $n \in J$ ، $x_n \in A$ ، $\{x_n\}$ یک دنباله در A ، یا یک دنباله از عناصر A ، خوانده خواهد شد.

توجه دارید که جملات $x_1, x_2, x_3, \dots$ یک دنباله لزوماً از هم متمایز نیستند. چون هر مجموعه شمارشپذیر برد یک تابع 1-1 تعریف شده بر J است، لذا هر مجموعه شمارشپذیر را می‌توان برد یک دنباله با جملات متمایز انگاشت. اندکی بی‌پروا تر، می‌شود گفت که عنصرهای هر مجموعه شمارشپذیر را می‌توان "به شکل یک دنباله آراست".

گاهی در این تعریف شایسته است J را با مجموعه تمام اعداد صحیح نامنفی عوض کنیم؛ یعنی، به جای 1 از 0 شروع نماییم.

۸.۲ قضیه. هر زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه شمارشپذیر A شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم $E \subset A$ و E نامتناهی باشد. عنصرهای x از A را به شکل دنباله

$\{x_n\}$ از عناصر متمایز می‌آراییم. دنباله $\{n_k\}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

فرض کنیم n_1 کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $x_{n_1} \in E$. پس از انتخاب

$n_1, \dots, n_{k-1}$ ($k = 2, 3, 4, \dots$)، n_k را کوچکترین عدد صحیح بزرگتر

از n_{k-1} که $x_{n_k} \in E$ می‌گیریم.

با قرار $f(k) = x_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)، یک تناظر ۱-۱ بین E و J به

دست خواهیم آورد.

قضیه فوق نشان می‌دهد که مجموعه‌های شمارشپذیر، با بیان نادقیق، نمایشگر

"کوچکترین" بی‌نهایت هستند: هیچ مجموعه شمارش ناپذیری نمی‌تواند زیر مجموعه

مجموعه‌ای شمارشپذیر باشد.

۹.۲ تعریف. فرض کنیم A و Ω مجموعه باشند، و به هر عنصر α از A زیر مجموعه‌ای از

Ω ، که با E_α نشان می‌دهیم، مربوط شده باشد.

مجموعه‌ای که عناصرش مجموعه‌های E_α باشند با $\{E_\alpha\}$ نموده خواهد شد. گاهی

به جای آنکه بگوییم مجموعه‌ای از مجموعه‌ها می‌گوییم گردآیه‌ای از مجموعه‌ها، یا خانواده‌ای

از مجموعه‌ها.

اجتماع مجموعه‌های E_α مساوی مجموعه‌ای چون S تعریف می‌شود به این صورت که

$x \in S$ اگر و فقط اگر به ازای دست کم یک $\alpha \in A$ ، $x \in E_\alpha$. ما نماد

$$(1) \quad S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

را برای آن به کار می‌بریم. چنانچه A از اعداد صحیح $1, 2, \dots, n$ تشکیل شده باشد،

معمولاً می‌نویسند

$$(2) \quad S = \bigcup_{m=1}^n E_m$$

$$(3) \quad S = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n.$$

یا

هرگاه A مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت باشد، نماد متداول چنین خواهد بود:

$$(4) \quad S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

علامت ∞ در (۴) فقط نشان می‌دهد که اجتماع گرد آیه‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌ها اختیار شده است، و نباید آن را با علامات $+\infty$ و $-\infty$ مذکور در تعریف ۲۳.۱ خلط کرد.

اشتراک مجموعه‌های E_α برابر مجموعه‌ای چون P تعریف می‌شود به این نحو که $x \in P$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\alpha \in A$ ، $x \in E_\alpha$ ، مثل حالت اجتماع، از نماد

$$(5) \quad P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha,$$

یا

$$(6) \quad P = \bigcap_{m=1}^n E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n,$$

یا

$$(7) \quad P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$$

استفاده خواهیم کرد. هرگاه $A \cap B$ تهی نباشد، می‌گوییم A و B یکدیگر را قطع می‌کنند. در غیر این صورت، آنها را از هم جدا خواهیم نامید.

۱۰.۲ چند مثال

(آ) فرض کنیم E_1 از ۱، ۲، ۳ و E_2 از ۲، ۳، ۴ تشکیل شده باشد. در این صورت، $E_1 \cup E_2$ از ۱، ۲، ۳، ۴ ترکیب یافته، حال آنکه $E_1 \cap E_2$ از ۲، ۳ متشکل می‌باشد.

(ب) فرض کنیم A مجموعه اعداد حقیقی x که $0 < x \leq 1$ باشد. به ازای هر $x \in A$ ، E_x را مجموعه اعداد حقیقی y که $0 < y < x$ می‌انگاریم. در این صورت،

(یک) $E_x \subset E_z$ اگر و فقط اگر $0 < x \leq z \leq 1$ ؛

(دو) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$ ؛

(سه) $\bigcap_{x \in A} E_x$ تهی است.

حکمهای (یک) و (دو) واضح هستند. برای اثبات (سه)، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر $y > 0$ ، اگر $x < y$ ، $y \notin E_x$ پس $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

۱۱.۲ چند تبصره. بسیاری از خواص اجتماعها و اشتراکها کاملاً "شبيه به خواص مجموعهها و حاصل ضربها هستند. درواقع، گاهی واژه‌های مجموع و حاصل ضرب در این مورد به کار می‌رفته، و علامات Σ و Π به جای $\cup$ و $\cap$ نوشته می‌شدند. قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری بدیهی‌اند:

$$(8) \quad A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

(9) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
لذا، حذف پرانتزها در (۳) و (۶) مجاز می‌باشد.
قانون پخشپذیری نیز برقرار است:

$$(10) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

برای اثبات این رابطه، طرفهای چپ و راست آن را بترتیب با E و F نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $x \in E$. در این صورت، $x \in A$ ، $x \in B \cup C$ ؛ یعنی، $x \in B$ یا $x \in C$ (یا احتمالاً "به هر دو"). از اینرو، $x \in A \cap B$ یا $x \in A \cap C$. در نتیجه، $x \in F$. لذا، $E \subset F$.

حال فرض می‌کنیم $x \in F$. در این صورت، $x \in A \cap B$ یا $x \in A \cap C$. یعنی $x \in A$ و $x \in B \cup C$ پس $x \in A \cap (B \cup C)$. لذا، $F \subset E$.
از اینجا نتیجه می‌شود که $E = F$.

چند رابطه دیگر را که صحتشان به آسانی قابل تحقیق است ذکر می‌نماییم:

$$(11) \quad A \subset A \cup B,$$

$$(12) \quad A \cap B \subset A.$$

هرگاه 0 مجموعه تهی باشد، آنگاه

$$(13) \quad A \cup 0 = A, \quad A \cap 0 = 0.$$

هرگاه $A \subset B$ ، آنگاه

$$(14) \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

۱۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) دنباله‌ای از مجموعه‌های شمارشپذیر باشد و قرار داده باشیم

$$(15) \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

در این صورت، S شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم هر E_n به صورت دنباله $\{x_{nk}\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) آراسته شده باشد، و آرایه نامتناهی

$$(16) \quad \begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن عنصرهای E_n سطر n م را تشکیل می‌دهند. این آرایه شامل کلیه عناصر S است. همانطور که سهمنا نشان می‌دهند، این عناصر را می‌توان به صورت دنباله

$$(17) \quad x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \dots$$

آراسته. هرگاه دوتا از مجموعه‌های E_n عنصر مشترک داشته باشند، این عناصر بیش از یک بار در (۱۷) ظاهر می‌شوند. لذا، زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت مانند T هست که $T \sim S$ ، که نشان می‌دهد S حداکثر شمارشپذیر است (قضیه ۸۰۲). چون $E_1 \subset S$ و E_1 نامتناهی است، S نامتناهی بوده، در نتیجه، شمارشپذیر خواهد بود.

نتیجه. فرض کنیم A حداکثر شمارشپذیر و به ازای هر $\alpha \in A$ ، B_α حداکثر شمارشپذیر باشد. قرار می‌دهیم

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

در این صورت، T حداکثر شمارشپذیر خواهد بود. زیرا T با زیر مجموعه‌ای از (۱۵) هم ارز است.

۱۳۰۲ قضیه. فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارشپذیر، و B_n مجموعه تمام n تاییهای مرتب $(a_1, \dots, a_n)$ باشد که در آنها $a_k \in A$ ($k = 1, \dots, n$)، و عناصر $a_1, \dots, a_n$ لزوماً متمایز نیستند. در این صورت، B_n شمارشپذیر خواهد بود.

برهان. شمارشپذیری B_1 واضح است، چرا که $B_1 = A$. فرض کنیم B_{n-1} ($n = 2, 3, 4, \dots$) شمارشپذیر باشد. عنصرهای B_n به شکل

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1} \text{ و } a \in A) \quad \text{اند.} \quad (18)$$

به ازای هر b ثابت، مجموعه جفتهای (b, a) هم ارز A است، و از اینرو شمارشپذیر است. لذا، B_n اجتماع مجموعه‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر می‌باشد. پس، بنابر قضیه ۱۲۰۲، B_n شمارشپذیر است. حال قضیه به استقرا نتیجه می‌شود.

نتیجه. مجموعه تمام اعداد گویا شمارشپذیر است.

برهان. با توجه به اینکه هر عدد گویای r به شکل b/a است که در آن a و b صحیح‌اند، قضیه ۱۳۰۲ را با فرض $n = 2$ به کار می‌بریم. بدین ترتیب، مجموعه جفتهای (a, b) ، و در نتیجه، مجموعه کسره‌های b/a شمارشپذیر خواهد بود.

درواقع، حتی مجموعه تمام اعداد جبری شمارشپذیر است (ر.ک. تمرین ۲). اما این مطلب را که همه مجموعه‌های نامتناهی شمارشپذیر نیستند، قضیه بعدی نشان خواهد داد.

۱۴۰۲ قضیه. فرض کنیم A مجموعه تمام دنباله‌هایی باشد که عنصرهایشان ارقام ۰ و ۱ هستند. این A شمارش‌ناپذیر می‌باشد.

عنصرهای A دنباله‌هایی هستند مثل $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots$.

برهان. فرض کنیم E یک زیرمجموعه شمارشپذیر A و مرکب از دنباله‌های $s_1, s_2, s_3, \dots$ باشد. دنباله s را این طور می‌سازیم: اگر جمله n م s_n مساوی ۱ باشد، جمله n م s را ۰ اختیار می‌کنیم، و بالعکس. در این صورت، دنباله s با هر عضو E دست‌کم در یک جا فرق دارد. بنابراین، $s \notin E$. اما واضح است که $s \in A$ ؛ در نتیجه، E یک

زیر مجموعه حقیقی A می باشد.

نشان داده ایم که هر زیر مجموعه شمارش پذیر A یک زیر مجموعه حقیقی A است. از اینجا نتیجه می شود که A شمارش ناپذیر است (زیرا، در غیر این صورت، A زیر مجموعه حقیقی خود می شود، که بی معنی است).

ایده اثبات فوق اول بار مورد استفاده کانتور قرار گرفت، و فرایند قطری کانتور نام یافته است، چرا که، اگر دنباله های $s_1, s_2, s_3, \dots$ را در آرایه ای مثل (۱۶) قرار دهیم، این عناصر روی قطر هستند که دنباله جدید را می سازند.

خوانندگانی که با نمایش دودویی اعداد حقیقی (پایه ۲ به جای ۱۰) آشناهستند توجه خواهند داشت که قضیه ۱۴.۲ شمارش ناپذیری مجموعه تمام اعداد حقیقی را ایجاب می کند. برهان دیگری از این مطلب در قضیه ۴۳.۲ داده خواهد شد.

فضاهای متر

۱۵.۲ تعریف. مجموعه X ، که عنصرهایش را نقاط خواهیم نامید، در صورتی یک فضای متر است که به هر دو نقطه p و q از X عدد حقیقی $d(p, q)$ ، به نام فاصله از p تا q ، طوری مربوط شده باشد که

$$(A) \quad d(p, q) > 0 \quad \text{هر گاه } p \neq q, \quad \text{و} \quad d(p, p) = 0;$$

$$(B) \quad d(p, q) = d(q, p);$$

$$(C) \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q), \quad r \in X.$$

هر تابع برخوردار از این سه خاصیت یک تابع فاصله یا یک متر نام دارد.

۱۶.۲ چند مثال. مهمترین مثالهای فضاهای متر، از دیدگاه ما، عبارتند از فضاهای اقلیدسی R^k ، بویژه R^1 (خط حقیقی) و R^2 (صفحه مختلط)؛ فاصله در R^k این طور تعریف می شود:

$$(19) \quad d(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in R^k).$$

بنابر قضیه ۳۷.۱، d ی رابطه (۱۹) در شرطهای تعریف ۱۵.۲ صدق می کند. توجه به این امر مهم است که هر زیر مجموعه $\dot{Y}$ از فضای متر X خود فضایی متر، با همان تابع فاصله، می باشد. زیرا واضح است که اگر شرطهای (A) تا (C) تعریف ۱۵.۲ برای $p, q, r \in X$ برقرار باشند، این شرطها در صورت مقید شدن p و q به Y نیز برقرار خواهند بود.

بنابراین، هر زیر مجموعه از یک فضای اقلیدسی فضایی متری است. مثالهایی دیگر عبارت خواهند بود از فضاها $\mathcal{B}(K)$ و $\mathcal{L}^2(\mu)$ ، که بترتیب در فصلهای ۷ و ۱۱ مطرح خواهند شد.

۱۷.۲ تعریف. منظور از قطعه (a, b) یعنی مجموعه تمام x های حقیقی که $a < x < b$. منظور از بازه $[a, b]$ یعنی مجموعه تمام x های حقیقی که $a \leq x \leq b$. گاهی اوقات با "بازه‌های نیم باز" $[a, b)$ و $(a, b]$ نیز مواجه می‌شویم. اولی عبارت است از تمام x هایی که $a \leq x < b$ ، و دومی مرکب است از کلیه x هایی که $a < x \leq b$.

هرگاه به ازای هر $i = 1, \dots, k$ ، $a_i < b_i$ ، مجموعه تمام نقاطی چون $x = (x_1, \dots, x_k)$ در R^k که مختصاتشان در نامساویهای $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($1 \leq i \leq k$) صدق کنند یک حجره k بعدی نام دارد. مثلاً، هر حجره یک بعدی یک بازه است، هر حجره دو بعدی یک مستطیل است، و مانند اینها. هرگاه $x \in R^k$ و $r > 0$ ، گوی باز (یا بسته) B به مرکز x و شعاع r عبارت است از مجموعه تمام $y \in R^k$ هایی که $|y - x| < r$ (یا $|y - x| \leq r$). مجموعه $E \subset R^k$ را محدب خوانیم هرگاه، هر وقت $x \in E, y \in E$ ، و $0 < \lambda < 1$ ، داشته باشیم

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in E.$$

به عنوان مثال، گویها مجموعه‌هایی محدب‌اند. چرا که اگر $|y - x| < r$ ، $|z - x| < r$ ، و $0 < \lambda < 1$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |\lambda y + (1 - \lambda)z - x| &= |\lambda(y - x) + (1 - \lambda)(z - x)| \\ &\leq \lambda|y - x| + (1 - \lambda)|z - x| \\ &< \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \end{aligned}$$

همین برهان در مورد گویهای بسته قابل بیان است. همچنین، به آسانی دیده می‌شود که حجره‌های k بعدی محدب می‌باشند.

۱۸.۲ تعریف. فرض کنیم X یک فضای متری باشد. تمام نقاط و مجموعه‌های یاد شده در زیر، عناصرها و زیر مجموعه‌های X فرض می‌شوند. (آ) یک همسایگی نقطه p مجموعه‌ای است مثل $N_r(p)$ مرکب از تمام نقاطی

چون q که $d(p, q) < r$. عدد r شعاع $N_r(p)$ نامیده می شود .

(ب) نقطه p یک نقطه^{*} حدی مجموعه^{*} E است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه ای چون $q \in E$ غیر از p باشد .

(پ) هرگاه $p \in E$ و p نقطه^{*} حدی E نباشد ، آنگاه p یک نقطه^{*} تنهای E نام دارد .

(ت) E بسته است هرگاه هر نقطه^{*} حدی E یک نقطه از E باشد .

(ث) نقطه^{*} p یک نقطه^{*} درونی E است هرگاه یک همسایگی از p مانند N باشد بطوری که $N \subset E$.

(ج) E باز است هرگاه هر نقطه^{*} E یک نقطه^{*} درونی اش باشد .

(چ) متمم E (که با E^c نموده می شود) عبارت است از مجموعه^{*} تمام نقاطی چون $p \in X$ که $p \notin E$.

(ح) E کامل است هرگاه E بسته و هر نقطه^{*} E یک نقطه^{*} حدی آن باشد .

(خ) E گراندار است هرگاه عددی حقیقی چون M و نقطه ای مثل $q \in X$ باشند بطوری که به ازای هر $p \in E$ ، $d(p, q) < M$.

(د) E در X چگال است هرگاه هر نقطه^{*} X یک نقطه^{*} حدی E یا یک نقطه^{*} E (و یا هر دو) باشد .

ملاحظه می کنیم که در R^1 همسایگیها قطعه ها هستند ، حال آنکه در R^2 درون دوایر خواهند بود .

۱۹.۲ قضیه . هر همسایگی یک مجموعه^{*} باز است .

برهان . همسایگی $E = N_r(p)$ را در نظر گرفته ، فرض می کنیم q نقطه^{*} دلخواهی از آن باشد . در این صورت ، عددی حقیقی و مثبت مثل h هست بطوری که

$$d(p, q) = r - h.$$

پس ، به ازای هر نقطه^{*} s که $d(q, s) < h$ ، داریم

$$d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, s) < r - h + h = r.$$

در نتیجه ، $s \in E$. لذا ، q یک نقطه^{*} درونی E می باشد .

۲۰.۲ قضیه . هرگاه p یک نقطه^{*} حدی مجموعه^{*} E باشد ، هر همسایگی p بی نهایت نقطه از E را دارد .

برهان. فرض کنیم همسایگی N از p چنان باشد که فقط تعدادی متناهی نقطه از E را داشته باشد. همچنین، $q_1, \dots, q_n$ را آن نقاطی از $E \cap N$ می‌انگاریم که از p متمایزند، و قرار می‌دهیم

$$r = \min_{1 \leq m \leq n} d(p, q_m).$$

[از این نماد برای نمایش مینیمم اعداد $d(p, q_1), \dots, d(p, q_n)$ استفاده می‌کنیم]. واضح است که مینیمم هر مجموعه متناهی از اعداد مثبت مثبت است. پس $r > 0$. همسایگی $N_r(p)$ شامل هیچ نقطه q از E که $q \neq p$ نیست. در نتیجه، p یک نقطه حدى E نمی‌باشد. این تناقض قضیه را به اثبات می‌رساند.

نتیجه. هر مجموعه متناهی از نقاط نقطه حدى ندارد.

۲۱.۲ چند مثال. زیر مجموعه‌های زیر از R^2 را در نظر می‌گیریم:

(آ) مجموعه تمام z های مختلطی که $|z| < 1$ ؛

(ب) مجموعه تمام z های مختلطی که $|z| \leq 1$ ؛

(پ) یک مجموعه متناهی؛

(ت) مجموعه تمام اعداد صحیح؛

(ث) مجموعه مرکب از اعداد $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). ملاحظه می‌کنیم

که این مجموعه E یک نقطه حدى (یعنی، $z = 0$) را دارد، اما هیچ نقطه E نقطه حدى آن نیست؛ مایلیم تأکید کنیم که فرق است میان نقطه حدى داشتن و حاوی یکی از آنها بودن؛

(ج) مجموعه تمام اعداد مختلط (یعنی، R^2)؛

(چ) قطعه (a, b) .

توجه داریم که (ت)، (ث)، و (چ) را می‌توان به عنوان زیر مجموعه‌هایی از

R^1 نیز در نظر گرفت. بعضی از خواص این مجموعه‌ها در زیر به جدول آمده‌اند:

بسته	باز	کامل	گراوندار
(آ)	خیر	خیر	بلی
(ب)	بلی	خیر	بلی
(پ)	بلی	خیر	بلی

(ت)	بلی	خیر	خیر	خیر
(ث)	خیر	خیر	خیر	بلی
(ج)	بلی	بلی	بلی	خیر
(چ)	خیر	خیر	خیر	بلی

در (چ)، در ستون دوم جای خالی گذاشته ایم. دلیلش این است که قطعه (a, b) به عنوان زیر مجموعه‌ای از R^2 باز نیست، اما زیر مجموعه‌ای از R^1 خواهد بود.

۲۲.۲ قضیه. فرض کنیم $\{E_\alpha\}$ گرد آیه‌ای (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های E_α باشد. در این صورت،

$$(20) \quad \left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} (E_{\alpha}^c).$$

برهان. فرض کنیم A و B طرفهای چپ و راست (۲۰) باشند. هرگاه $x \in A$ ، آنگاه $x \notin \bigcup_{\alpha} E_{\alpha}$. از اینرو، به ازای هر α ، $x \notin E_{\alpha}$. در نتیجه، به ازای هر α ، $x \in E_{\alpha}^c$. پس $x \in \bigcap_{\alpha} E_{\alpha}^c$. لذا، $A \subset B$.

بعکس، هرگاه $x \in B$ ، آنگاه، به ازای هر α ، $x \in E_{\alpha}^c$. از اینرو، به ازای هر α ، $x \notin E_{\alpha}$. در نتیجه، $x \notin \bigcup_{\alpha} E_{\alpha}$. پس $x \in \left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}\right)^c$. لذا، $B \subset A$. بنابراین، نتیجه می‌شود که $A = B$.

۲۳.۲ قضیه. مجموعه‌ای E باز است اگر و فقط اگر متمم آن بسته باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم E^c بسته باشد. x ی در E اختیار می‌نماییم. پس $x \notin E^c$ ، و x یک نقطه‌ی حدی E^c نیست. لذا، یک همسایگی از x مانند N هست بطوری که $N \cap E^c$ تهی می‌باشد، یعنی که $N \subset E$. بنابراین، x یک نقطه‌ی درونی E است، و E باز می‌باشد.

اینک فرض می‌کنیم E باز باشد. x را یک نقطه‌ی حدی E^c می‌گیریم. در این صورت، هر همسایگی x نقطه‌ای از E^c را دارد. در نتیجه، x یک نقطه‌ی درونی E نیست. چون E باز است، این یعنی که $x \in E^c$. از اینجا نتیجه می‌شود که E^c بسته می‌باشد.

نتیجه، مجموعه F بسته است اگر و فقط اگر متمم آن باز باشد.

۲۴.۲ قضیه

(آ) به ازای هر گردآیه $\{G_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز، $\bigcup_\alpha G_\alpha$ باز است.

(ب) به ازای هر گردآیه $\{F_\alpha\}$ از مجموعه‌های بسته، $\bigcap_\alpha F_\alpha$ بسته است.

(پ) به ازای هر گردآیه متناهی $G_1, \dots, G_n$ از مجموعه‌های باز، $\bigcap_{i=1}^n G_i$

باز است

(ت) به ازای هر گردآیه متناهی $F_1, \dots, F_n$ از مجموعه‌های بسته، $\bigcap_{i=1}^n F_i$

بسته خواهد بود.

برهان. قرار می‌دهیم $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. گوئیم هرگاه $x \in G$ ، آنگاه به ازای α ای $x \in G_\alpha$. چون x یک نقطه درونی G_α است، پس x یک نقطه درونی G نیز هست، و G باز می‌باشد. این (آ) را ثابت خواهد کرد.

بنابر قضیه ۲۲.۲،

$$(21) \quad \left(\bigcap_\alpha F_\alpha \right)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c),$$

و F_α^c ، مطابق قضیه ۲۳.۲، باز است. پس (آ) ایجاب می‌کند که (۲۱) باز باشد. در نتیجه $\bigcap_\alpha F_\alpha$ بسته خواهد بود.

حال قرار می‌دهیم $H = \bigcap_{i=1}^n G_i$. به ازای هر $x \in H$ همسایگی‌هایی از x مانند N_i با شعاعهای r_i وجود دارند بطوری که $N_i \subset G_i$ ($i = 1, \dots, n$). قرار می‌دهیم

$$r = \min(r_1, \dots, r_n),$$

و N را همسایگی x به شعاع r می‌انگاریم. در این صورت، به ازای هر $i = 1, \dots, n$

خواهیم داشت $N \subset G_i$. در نتیجه $N \subset H$ ، و H باز می‌باشد.

با متممگیری، حکم (ت) از (پ) به دست خواهد آمد:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n (F_i^c).$$

۲۵.۲ چند مثال. در قسمتهای (پ) و (ت) قضیه پیش، متناهی بودن گردآیه‌ها ضروری است. چرا که فرض کنیم G_n قطعه $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) باشد. در این صورت، G_n زیر مجموعه باز از R^1 است. قرار می‌دهیم $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$.

G از یک نقطه (یعنی، $x=0$) تشکیل شده، و لذا، یک زیر مجموعهٔ باز R^1 نمی باشد. بنابراین، اشتراک هر گردآیه نامتناهی از مجموعه های باز الزاما" باز نیست. به همین نحو، اجتماع هر گردآیه نامتناهی از مجموعه های بسته لزوما" بسته نخواهد بود.

۲۶.۲ تعریف. هرگاه X یک فضای متری بوده، $E \subset X$ ، و E' مجموعه تمام نقاط حدی E در X باشد، آنگاه بست E عبارت خواهد بود از مجموعه $\bar{E} = E \cup E'$.

۲۷.۲ قضیه. هرگاه X یک فضای متری و $E \subset X$ ، آنگاه

(۱) $\bar{E}$ بسته است؛

(ب) $E = \bar{E}$ اگر و فقط اگر E بسته باشد؛

(پ) به ازای هر مجموعه بسته $E \subset X$ که $F \subset E$ داریم $\bar{E} \subset F$.

بنابر (۱) و (پ)، $\bar{E}$ ، کوچکترین زیر مجموعه بسته X است که حاوی E می باشد.

برهان

(۱) هرگاه $p \in X$ و $p \notin \bar{E}$ ، p نه نقطه ای است از E و نه نقطه حدی آن است. پس p همسایگی دارد که E را قطع نمی کند. بنابراین، متمم $\bar{E}$ باز است. در نتیجه، $\bar{E}$ بسته خواهد بود.

(ب) هرگاه $E = \bar{E}$ ، (۱) ایجاب می کند که E بسته باشد. چنانچه E بسته باشد، [بنابر تعریفهای ۱۸.۲ (ت) و ۲۶.۲] $E' \subset E$ ؛ در نتیجه، $\bar{E} = E$.

(پ) هرگاه F بسته باشد و $F \supset E$ ، آنگاه $F \supset E'$ ، پس $F \supset \bar{E}$. بنابراین، $\bar{E} \subset F$.

۲۸.۲ قضیه. فرض کنیم E مجموعه ای باشد ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار است. قرار می دهیم $y = \sup E$. در این صورت، $y \in \bar{E}$. لذا، اگر E بسته باشد، $y \in E$.

این قضیه را با مثالهای بخش ۹.۱ مقایسه کنید.

برهان. هرگاه $y \in E$ ، آنگاه $y \in \bar{E}$. فرض کنیم $y \notin E$. در این صورت، به ازای هر $h > 0$ نقطه ای مانند $x \in E$ هست که $y - h < x < y$. زیرا، در غیر این صورت، $y - h$ یک کران بالایی E خواهد بود. لذا، y یک نقطه حدی E می باشد. بنابراین، $y \in \bar{E}$.

۲۹.۲ تبصره. فرض کنیم $E \subset Y \subset X$ که در آن X یک فضای متری است. اینکه می‌گوییم E یک زیر مجموعهٔ باز X است یعنی که به هر نقطهٔ $p \in E$ عدد مثبتی مانند r چنان مربوط شده که شرطهای $d(p, q) < r$ و $q \in X$ عضویت q در E را ایجاب می‌کنند. اما قبلاً دیده‌ایم (بخش ۱۶.۲) که Y نیز یک فضای متری است. پس تعریفهای ما در Y نیز قابل بیان هستند. با صراحت کامل، می‌گوییم E نسبت به Y باز است اگر که به هر $p \in E$ عددی مانند $r > 0$ بقسمی مربوط شده باشد که هرگاه $d(p, q) < r$ و $q \in Y$ ، آنگاه $q \in E$. مثال ۲۱.۲ (چ) نشان داد که یک مجموعه ممکن است، بی آنکه زیر مجموعهٔ بازی از X باشد، نسبت به Y باز شود. با اینحال، بین این مفاهیم رابطهٔ ساده‌ای وجود دارد که اینک به بیان آن می‌پردازیم.

۳۰.۲ قضیه. فرض کنیم $Y \subset X$. زیر مجموعهٔ E از Y نسبت به Y باز است اگر و فقط اگر به ازای زیر مجموعهٔ بازی چون G از $E = Y \cap G$.

برهان. فرض کنیم E نسبت به Y باز باشد. به ازای هر $p \in E$ عدد مثبتی مانند r_p هست بطوری که شرطهای $d(p, q) < r_p$ و $q \in Y$ عضویت q در E را ایجاب می‌کنند. فرض کنیم V_p مجموعهٔ تمام $q \in X$ هایی باشد که $d(p, q) < r_p$ ، و تعریف می‌کنیم

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

در این صورت، بنا بر قضایای ۱۹.۲ و ۲۴.۲، G زیر مجموعهٔ بازی از X می‌باشد.

چون به ازای هر $p \in E$ ، $p \in V_p$ ، پس واضح است که $E \subset G \cap Y$.

بنابر انتخاب ما از V_p ، به ازای هر $p \in E$ داریم $V_p \cap Y \subset E$ در نتیجه،

$G \cap Y \subset E$. لذا $E = G \cap Y$ ، و نیمی از قضیه ثابت می‌شود.

بعکس، هرگاه G در X باز باشد و $E = G \cap Y$ ، هر $p \in E$ یک همسایگی مانند $V_p \subset G$ خواهد داشت.

پس $V_p \cap Y \subset E$ در نتیجه، E نسبت به Y باز می‌باشد.

مجموعه‌های فشرده

۳۱.۲ تعریف. منظور از یک پوشش باز مجموعهٔ E در فضای متری X یعنی گردآیه‌ای از

زیر مجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ که $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

۳۲.۲ تعریف. زیر مجموعه K از فضای متری X را فشرده نامند هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوششی متناهی باشد.

صریحتر بگوییم، شرط فشردگی آن است که هرگاه $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی از K باشد، چند اندیس مانند $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود دارد بطوری که

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

مفهوم فشردگی در آنالیز، بخصوص در ارتباط با پیوستگی (فصل ۴)، از اهمیت بسیار برخوردار است.

واضح است که هر مجموعه متناهی فشرده می باشد. وجود رده بزرگی از مجموعه های فشرده نامتناهی در R^k از قضیه ۴۱.۲ نتیجه خواهد شد.

پیشتر دیدیم (در بخش ۲۹.۲) که، هرگاه $E \subset Y \subset X$ ممکن است E بدون باز بودنش نسبت به X نسبت به Y باز باشد. لذا، خاصیت باز بودن E به فضایی که E در آن نشانیده شده بستگی دارد. همین مطلب در مورد بسته بودن نیز صادق است.

اما، همانطور که اینک خواهیم دید، فشردگی رفتار بهتری دارد. برای تنظیم قضیه بعدی، موقتاً "می گوییم: K در صورتی نسبت به X فشرده است که نیازهای تعریف ۳۲.۲ برآورده شوند.

۳۳.۲ قضیه. فرض کنیم $K \subset Y \subset X$ در این صورت، K نسبت به X فشرده است اگر و فقط اگر K نسبت به Y فشرده باشد.

در پرتو این قضیه است که در بسیاری مواقع می توان مجموعه های فشرده را خود فضاهایی متری گرفته، به فضایی که این مجموعه ها در آن نشانیده شده اند واقعی نگذاشت. بویژه، با آنکه سخن از فضاهای باز یا فضاهای بسته معنی چندانی ندارد (هر فضای متری X زیر مجموعه باز و زیر مجموعه بسته خویش است)، اما صحبت از فضاهای متری فشرده با معنی خواهد بود.

برهان. فرض کنیم K نسبت به X فشرده باشد، و $\{V_\alpha\}$ یک گردآیه از مجموعه هایی باشد که نسبت به Y بازند با این خاصیت که $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. بنا بر قضیه ۳۵.۲، مجموعه هایی چون G_α هستند که نسبت به X بازند و به ازای هر α ، $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$ و چون K نسبت به

X فشرده است، به ازای تعدادی متناهی اندیس مانند $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داریم

$$(22) \quad K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

از آنجا که $K \subset Y$ از (۲۲) نتیجه می شود که

$$(23) \quad K \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

این ثابت می کند که K نسبت به Y فشرده می باشد.

بعکس، فرض کنیم K نسبت به Y فشرده بوده، $\{G_\alpha\}$ گردآیه ای از زیر مجموعه های باز X باشد که K را می پوشانند، و قرار می دهیم $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$. در این صورت، به ازای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ی (۲۳)، $V_\alpha \subset G_\alpha$ و چون (۲۳) رابطه (۲۲) را ایجاب می نماید. این برهان را تمام خواهد کرد.

۳۴.۲ قضیه. زیر مجموعه های فشرده فضای متریک بسته اند.

برهان. فرض کنیم K یک زیر مجموعه فشرده فضای متریک X باشد. ثابت می کنیم متمم K زیر مجموعه باز از X است.

فرض کنیم $p \in X$ و $p \notin K$. چنانچه $q \in V_q$ و W_q را بترتیب همسایگی های از p و q می انگاریم که شعاعشان از $\frac{1}{2}d(p, q)$ کمتر است [ر. ک. تعریف ۱۸.۲ (آ)]. چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه در K مانند $q_1, \dots, q_n$ وجود دارند بطوری که

$$K \subset W_{q_1} \cup \dots \cup W_{q_n} = W.$$

هرگاه $V = V_{q_1} \cap \dots \cap V_{q_n}$ ، V نگاه یک همسایگی p است که W را قطع نمی کند. بنابراین، این، $V \subset K^c$ در نتیجه، p یک نقطه درونی K^c می باشد. از این قضیه نتیجه خواهد شد.

۳۵.۲ قضیه. زیر مجموعه های بسته مجموعه های فشرده اند.

برهان. فرض کنیم $F, F \subset K \subset X$ بسته (نسبت به X)، و K فشرده باشد. همچنین، $\{V_\alpha\}$ را یک پوشش باز F می انگاریم. با الحاق F^c به $\{V_\alpha\}$ ، به پوشش باز Ω از K دست می یابیم. چون K فشرده است، زیر گردآیه ای متناهی از Ω مانند Φ هست که K ، و در نتیجه F را می پوشاند. هرگاه F^c عضوی از Φ باشد، با حذف آن هنوز

Φ می تواند یک پوشش باز F بماند. پس نشان داده ایم که یک زیرگردآیه متناهی از $\{V_\alpha\}$ را خواهد پوشاند.

نتیجه. هرگاه F بسته و K فشرده باشد، آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

برهان. قضایای ۲۴.۲ (ب) و ۳۴.۲ نشان می دهند که $F \cap K$ بسته است. چون $F \cap K \subset K$ ، قضیه ۳۵.۲ نشان خواهد داد که $F \cap K$ فشرده می باشد.

۳۶.۲ قضیه. هرگاه $\{K_\alpha\}$ گردآیه ای از زیرمجموعه های فشرده فضای متری X باشد بطوری که اشتراک هر زیرگردآیه متناهی آن ناتهی باشد، آنگاه $K_\alpha \cap$ ناتهی خواهد بود.

برهان. عضو K_1 از $\{K_\alpha\}$ را ثابت گرفته قرار می دهیم $G_\alpha = K_\alpha^c$. فرض کنیم هیچ نقطه ای از K_1 متعلق به هر K_α نباشد. در این صورت، مجموعه های G_α یک پوشش باز K_1 را می سازند. و چون K_1 فشرده است، تعدادی متناهی اندیس مانند $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ هستند بطوری که $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$. اما این یعنی

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_n}$$

تهی است، که با فرض ما تعارض دارد.

نتیجه. هرگاه $\{K_n\}$ چنان دنباله ای از مجموعه های فشرده و ناتهی باشد که $K_n \supset K_{n+1}$ ، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ تهی نخواهد بود.

۳۷.۲ قضیه. هرگاه E یک زیرمجموعه نامتناهی از مجموعه فشرده K باشد، آنگاه E یک نقطه حدی در K دارد.

برهان. اگر هیچ نقطه از K نقطه حدی E نمی بود، هر $q \in K$ همسایگی چون V_q می داشت که شامل حداکثر یک نقطه از E (یعنی q ، اگر $q \in E$) باشد. واضح است که هیچ زیرگردآیه متناهی از $\{V_q\}$ قادر به پوشاندن E نیست، و همین مطلب، به دلیل اینکه $E \subset K$ ، برای K صادق است. این ناقض فشردگی K می باشد.

۳۸.۲ قضیه. هرگاه $\{I_n\}$ دنباله‌ای از بازه‌ها در R^1 باشد بطوری که $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$ تهی نخواهد بود.

برهان. در صورت $I_n = [a_n, b_n]$ ، E را مجموعه تمام a_n ها می‌انگاریم. پس E ناتهی و از بالا کراندار (به b_1) است. فرض کنیم x سوپریم E باشد. هرگاه m و n اعداد صحیح مثبتی باشند، آنگاه

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m.$$

در نتیجه، به ازای هر m ، $x \leq b_m$. چون واضح است که $a_m \leq x$ ، ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر $m = 1, 2, 3, \dots$ ، $x \in I_m$.

۳۹.۲ قضیه. فرض کنیم k عدد صحیح مثبتی باشد. هرگاه $\{I_n\}$ دنباله‌ای از حجره‌های k بعدی باشد بطوری که $I_n \supset I_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$ تهی نخواهد بود.

برهان. فرض کنیم I_n از تمام نقاطی چون $x = (x_1, \dots, x_k)$ تشکیل شده که

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \dots),$$

و قرار می‌دهیم $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. به ازای هر j ، دنباله $\{I_{n,j}\}$ در مفروضات قضیه ۳۸.۲ صدق می‌کند. پس اعدادی حقیقی مانند $x_j^* (1 \leq j \leq k)$ هستند بقسمی که

$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \dots).$$

باقرار $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$ ، می‌بینیم که به ازای $x^* \in I_n$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$. از این، قضیه نتیجه خواهد شد.

۴۰.۲ قضیه. هر حجره k بعدی فشرده است.

برهان. فرض کنیم I حجره‌ای k بعدی مرکب از تمام نقاطی چون $x = (x_1, \dots, x_k)$ باشد که $a_j \leq x_j \leq b_j (1 \leq j \leq k)$ قرار می‌دهیم

$$\delta = \left\{ \sum_1^k (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}$$

در این صورت، اگر $x \in I$ و $y \in I$ ، $|x - y| \leq \delta$.

فرض کنیم (برای به دست آوردن تناقض) پوشش بازی چون $\{G_\alpha\}$ از I وجود دارد که حاوی زیرپوششی متناهی از I نیست. قرار می‌دهیم $c_j = (a_j + b_j)/2$. در این صورت، بازه‌های $[a_j, c_j]$ و $[c_j, b_j]$ ، 2^k حجره k بعدی Q_i را مشخص می‌کنند که اجتماعشان I است. دست کم یکی از این Q_i ها (I_1 را می‌نامیم) با هیچ زیرگردآیه‌ای متناهی از $\{G_\alpha\}$ پوشیده نمی‌شود (در غیر این صورت، I را نیز می‌شد به همین نحو پوشانید). بعد I_1 را تقسیم کرده عمل را ادامه می‌دهیم. با این کار، دنباله‌ای مانند $\{I_n\}$ با خواص زیر خواهیم داشت:

$$(A) \quad I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

(ب) I_n با هیچیک از زیرگردآیه‌های متناهی $\{G_\alpha\}$ پوشیده نمی‌شود.

(پ) هرگاه $x \in I_n$ و $y \in I_n$ ، آنگاه $|x - y| \leq 2^{-n} \delta$.

بنابر (A) و قضیه ۳۹۰۲، نقطه‌ای مانند x^* هست که در هر I_n جای دارد. به ازای α ای $x^* \in G_\alpha$. چون G_α باز است، عددی مانند $r > 0$ وجود دارد که $|y - x^*| < r$ عضویت y در G_α را ایجاب می‌کند. هرگاه n آنقدر بزرگ باشد که $2^{-n} \delta < r$ (چنین n وجود دارد، زیرا در غیر این صورت، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $2^{-n} \delta \geq r$ ، که بخاطر ارشمیدسی بودن R بی‌معنی است)، آنگاه (پ) رابطه $I_n \subset G_\alpha$ را ایجاب می‌کند، که ناقض (ب) می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

معادل بودن (A) و (ب) در قضیه بعدی به قضیه هاینه-برل^۱ معروف شده است.

۴۱۰۲ قضیه. هرگاه مجموعه E در R^k یکی از سه خاصیت زیر را داشته باشد، آنگاه از دو خاصیت دیگر نیز بهره‌مند است:

(A) E بسته و کراندار است؛

(ب) E فشرده است؛(پ) هر زیرمجموعه نامتناهی E یک نقطه حدى در E دارد.

برهان. هرگاه (آ) برقرار باشد، آنگاه به ازای حبره‌ای k بعدی چون I ، $E \subset I$ ، و (ب) از قضایای ۴۰.۲ و ۳۵.۲ نتیجه خواهد شد. قضیه ۳۷.۲ نشان می‌دهد که (ب) شرط (پ) را ایجاب می‌کند. باقی می‌ماند نشان دادن اینکه (آ) از (پ) نتیجه می‌شود. گوییم هرگاه E کراندار نباشد، E حاوی نقاطی است چون x_n با خاصیت

$$|x_n| > n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

مجموعه S متشکل از این x_n ها نامتناهی است، و بوضوح نقطه‌ای حدى در R^k ، و در نتیجه، در E ندارد. لذا، (پ) ایجاب می‌کند که E کراندار باشد.

هرگاه E بسته نباشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $x_0 \in R^k$ هست که نقطه حدى E بوده ولی نقطه‌ای از E نمی‌باشد. به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، نقاطی چون $x_n \in E$ وجود دارند بطوری که $|x_n - x_0| < 1/n$. فرض کنیم S مجموعه این x_n ها باشد. پس S نامتناهی است (در غیر این صورت، $|x_n - x_0|$ به ازای بی‌نهایت n مقدار ثابت مثبتی خواهد داشت)، x_0 نقطه حدى S است، و S نقطه حدى دیگری در R^k ندارد. زیرا، هرگاه $y \in R^k$ و $y \neq x_0$ ، آنگاه به ازای کلیه n ها جز تعدادی متناهی

$$\begin{aligned} |x_n - y| &\geq |x_0 - y| - |x_n - x_0| \\ &\geq |x_0 - y| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} |x_0 - y|. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که y یک نقطه حدى S نیست (قضیه ۲۰.۲).

بنابراین، S در E نقطه حدى ندارد. در نتیجه، E در صورت برقرار بودن (پ) باید بسته باشد.

در این مرحله باید قید کنیم که (ب) و (پ) در هر فضای مترى معادلند (تمرین ۲۶)، لکن (آ) در حالت کلی (ب) و (پ) را ایجاب نخواهد کرد. تمرین ۱۶ فضای $\mathbb{R}^2$ (که در فصل ۱۱ مطرح شده) نمونه‌هایی را به دست می‌دهند.

۴۲.۲ قضیه (وایراشتراس^۱). هر زیرمجموعه نامتناهی و کراندار R^k یک نقطه

حدی در R^k دارد.

برهان. مجموعه E^* ی مورد بحث، به دلیل کراندار بودنش، زیر مجموعه‌ای از یک حجره k بعدی مانند $I \subset R^k$ است. بنابر قضیه ۴۰.۲، I فشرده است، و از اینرو، بنابر قضیه ۳۷.۲، یک نقطه حدی در I خواهد داشت.

مجموعه های کامل

۴۳.۲ قضیه. فرض کنیم P یک مجموعه کامل ناتهی در R^k باشد. در این صورت، P شمارش ناپذیر است.

برهان. چون P نقاط حدی دارد، پس باید نامتناهی باشد. فرض کنیم P شمارش پذیر باشد، و نقاطش را با $x_1, x_2, x_3, \dots$ می نمایانیم. دنباله $\{V_n\}$ از همسایگیها را به صورت زیر می سازیم:

فرض می کنیم V_1 یکی از همسایگیهای x_1 باشد. هرگاه V_1 از تمام $y \in R^k$ هایی متشکل باشد که $|y - x_1| < r$ ، بست $\bar{V}_1$ از V_1 مجموعه تمام y هایی از R^k است که $|y - x_1| \leq r$.

فرض می کنیم V_n ساخته شده است بطوری که $V_n \cap P$ تهی نمی باشد. چون هر نقطه P یک نقطه حدی P است، همسایگی چون V_{n+1} وجود دارد که (یک) $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$ ، (دو) $x_{n+1} \notin \bar{V}_{n+1}$ ، و (سه) $V_{n+1} \cap P$ تهی نیست. بنابر (سه)، V_{n+1} در فرض استقرار ما صدق می کند، و این ساختن می تواند ادامه یابد.

قرار می دهیم $K_n = \bar{V}_n \cap P$ چون $\bar{V}_n$ بسته و کراندار است، $\bar{V}_n$ فشرده می باشد. و از آنجا که $x_n \notin K_{n+1}$ ، هیچ نقطه P در $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ قرار ندارد. این، بخاطر $K_n \subset P$ ، ایجاب می کند که $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ تهی باشد. اما، بنابر (سه)، هر K_n ناتهی است و، طبق (یک)، $K_n \supset K_{n+1}$. این با نتیجه قضیه ۳۶.۲ تعارض خواهد داشت.

نتیجه. هر بازه $[a, b]$ ($a < b$) شمارش ناپذیر است. (بخصوص، مجموعه تمام اعداد حقیقی شمارش ناپذیر می باشد).

۴۴.۲ مجموعه کانتور. مجموعه‌ای که هم اینک خواهیم ساخت نشان می دهد که مجموعه

های کاملی در R^1 هستند که شامل هیچ قطعه‌ای نمی‌باشند.

فرض کنیم E_0 بازه $[0, 1]$ باشد. از آن قطعه $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ را برداشته، E_1 را اجتماع بازه‌های

$$[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$$

می‌گیریم. یکسوم میانی این بازه‌ها را برداشته، E_2 را اجتماع بازه‌های

$$[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}], [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$$

می‌انگاریم. با ادامه این کار، دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده E_n خواهیم داشت بطوری که

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots \quad (1)$$

(ب) E_n اجتماع 2^n بازه است هر یک به طول 3^{-n} .

مجموعه

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

مجموعه گانتور نام دارد. P بوضوح فشرده است، و قضیه ۳۶.۲ نشان می‌دهد که P تهی نیست.

هیچ قطعه‌ای به شکل

$$(24) \quad \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right),$$

که در آن k و m اعداد صحیح مثبتی باشند، با P نقطه مشترک ندارد. چون هر قطعه (α, β) حاوی قطعه‌ای به شکل (۲۴) است، اگر

$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

P هیچ قطعه‌ای را در بر نخواهد داشت.

برای اثبات کامل بودن P کافی است نشان دهیم که P شامل نقطه تنها نیست. فرض کنیم $x \in P$ ، و S قطعه دلخواهی شامل x باشد. همچنین، I_n آن بازه از E_n باشد که x را در بردارد. n را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $I_n \subset S$. فرض کنیم x_n یک نقطه انتهایی I_n باشد بطوری که $x_n \neq x$.

از نحوه ساختن P معلوم می‌شود که $x_n \in P$. لذا، x یک نقطه حدی P است، و P کامل خواهد بود.

یکی از جالبترین خواص مجموعه کانتور این است که نمونه‌ای از یک مجموعه شمارش-ناپذیر از اندازه صفر (مفهوم اندازه در فصل ۱۱ مطرح می‌شود) را به ما می‌دهد.

مجموعه‌های همبند

۴۵.۲ تعریف. دو زیرمجموعه A و B از فضای متریک X را از هم جدا شده نامند هرگاه $A \cap \bar{B}$ تهی باشد و هم $\bar{A} \cap B$ ؛ یعنی، هیچ نقطه A در بست B و هیچ نقطه B در بست A قرار نگیرد.

مجموعه $E \subset X$ همبند گفته می‌شود هرگاه E اجتماع دو مجموعه از هم جدا شده نباشد.

۴۶.۲ تبصره. شکی نیست که مجموعه‌های از هم جدا شده از هم جدا هستند، لیکن مجموعه‌های از هم جدا لزوماً از هم جدا شده نمی‌باشند. مثلاً، بازه $[0, 1]$ و قطعه $(1, 2)$ ، به این دلیل که ۱ نقطه حدی $(1, 2)$ است، از هم جدا شده نیستند. اما قطعه‌های $(0, 1)$ و $(1, 2)$ از هم جدا شده می‌باشند.

زیرمجموعه‌های همبند خط از نهاد ساده خاصی برخوردارند:

۴۷.۲ قضیه. زیرمجموعه E از خط حقیقی R^1 همبند است اگر و فقط اگر این خاصیت را داشته باشد: هرگاه $x \in E$ ، $y \in E$ ، و $x < z < y$ ، آنگاه $z \in E$.

برهان. هرگاه $x \in E$ ، $y \in E$ ، و z در (x, y) وجود داشته باشد بطوری که $z \notin E$ ، آنگاه $E = A_z \cup B_z$ که در آن

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \quad B_z = E \cap (z, \infty).$$

چون $x \in A_z$ و $y \in B_z$ ، A_z و B_z ناتهی هستند. و از آنجا که $A_z \subset (-\infty, z)$ و $B_z \subset (z, \infty)$ ، اینها از هم جدا شده می‌باشند. پس E همبند نمی‌باشد.

برای اثبات عکس، فرض می‌کنیم E همبند نباشد. در این صورت، مجموعه‌هایی از هم جدا شده و ناتهی مانند A و B هستند بطوری که $A \cup B = E$ ، $x \in A$ و $y \in B$ در اختیار، و (بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود) فرض می‌کنیم $x < y$. تعریف می‌کنیم

$$z = \sup (A \cap [x, y]).$$

بنابر قضیه ۲۸.۰۲، $z \in \bar{A}$ پس $z \notin B$ ، بخصوص، $x \leq z < y$.

هرگاه $z \notin A$ ، نتیجه می شود که $x < z < y$ و $z \notin E$.

هرگاه $z \in A$ ، آنگاه $z \notin \bar{B}$ ، در نتیجه، z_1 ی هست که $z < z_1 < y$ و $z_1 \notin B$.

پس $x < z_1 < y$ و $z_1 \notin E$.

تمرین

۱. ثابت کنید مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه است.

۲. عدد مختلط z را جبری نامند هرگاه اعداد صحیحی چون $a_0, \dots, a_n$ ، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

ثابت کنید مجموعه تمام اعداد جبری شمارشپذیر است. راهنمایی: به ازای هر عدد صحیح و مثبت N ، فقط تعدادی متناهی معادله هست که در آنها

$$n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = N.$$

۳. ثابت کنید اعدادی حقیقی وجود دارند که جبری نیستند.

۴. آیا مجموعه تمام اعداد حقیقی گنگ شمارشپذیر است؟

۵. مجموعه ای کراندار از اعداد حقیقی بسازید که درست سه نقطه حدی داشته باشد.

۶. فرض کنید E' مجموعه تمام نقاط حدی مجموعه E باشد. ثابت کنید E' بسته است.

ثابت کنید نقاط حدی E و E' یکی است. (به یاد بیاورید که $\bar{E} = E \cup E'$)

آیا نقاط حدی E و E' همیشه یکی است؟

۷. فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots$ زیر مجموعه هایی از یک فضای متری باشند.

(آ) هرگاه $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ، ثابت کنید به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

(ب) چنانچه $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، ثابت کنید $\bar{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$.

با یک مثال نشان دهید که این شمول می تواند حقیقی باشد.

۸. آیا هر نقطه از مجموعه باز $E \subset \mathbb{R}^2$ یک نقطه حدی آن است؟ به همین سوال در

مورد مجموعه های بسته در $\mathbb{R}^2$ پاسخ دهید.

۹. فرض کنید E° مجموعه تمام نقاط درونی E باشد. [ر.ک. تعریف ۱۸.۰۲ (ث)]:

E° را درون E نام داده اند.

(آ) ثابت کنید E° همیشه باز است :

(ب) ثابت کنید E باز است اگر و فقط اگر $E = E^\circ$:

(پ) هرگاه $G \subset E$ و G باز باشد، ثابت کنید $G^\circ \subset E^\circ$.

(ت) ثابت کنید متمم E° بست متمم E است .

(ث) آیا درون E و E° همیشه یکی است ؟

(ج) آیا بست E و E° همواره یکی است ؟

۱۰ . فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد . $d(p, q)$ را ، به ازای $p \in X$ و $q \in X$ ، این طور تعریف کنید :

$$d(p, q) = \begin{cases} 1 & (\text{اگر } p \neq q) \\ 0 & (\text{اگر } p = q) \end{cases} .$$

ثابت کنید این یک متر است . چه زیر مجموعه‌هایی از فضای متری حاصل بازند ؟

کدامها بسته‌اند ؟ چه مجموعه‌هایی فشرده می‌باشند ؟

۱۱ . به ازای $x \in \mathbb{R}^1$ و $y \in \mathbb{R}^1$ ، تعریف کنید

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= (x - y)^2, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{|x - y|}, \\ d_3(x, y) &= |x^2 - y^2|, \\ d_4(x, y) &= |x - 2y|, \\ d_5(x, y) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}. \end{aligned}$$

در مورد هر یک از اینها مشخص کنید آیا یک متر هست یا نه .

۱۲ . فرض کنید $K \subset \mathbb{R}^1$ از ۰ و عددهای $1/n$ ، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، تشکیل شده باشد . مستقیماً "از تعریف (بدون استفاده از قضیه هاینه - برل) ثابت کنید که K فشرده است .

۱۳ . مجموعه فشرده‌ای از اعداد حقیقی بسازید که نقاط حدی آن مجموعه شمارشپذیری تشکیل دهند .

۱۴ . پوشش بازی از قطعه $(0, 1)$ مثال بزنید که زیرپوششی متناهی نداشته باشد .

۱۵ . نشان دهید که اگر واژه "فشرده" را با "بسته" یا "کراندار" عوض کنیم ، قضیه

۳۶.۲ و نتیجه آن (مثلاً، در R^1) درست نخواهند بود.

۱۶. Q ، یعنی مجموعه تمام اعداد گویا، را به عنوان یک فضای متری با متر $d(p, q) = |p - q|$ در نظر بگیرید. فرض کنید E مجموعه تمام p هایی در Q باشد که $2 < p^2 < 3$. نشان دهید که E در Q بسته و کراندار است، ولی فشرده نیست. آیا E در Q باز است؟

۱۷. فرض کنید E مجموعه تمام x هایی در $[0, 1]$ باشد که بسط اعشاری آنها فقط شامل ارقام ۴ و ۷ است. آیا E شمارشپذیر است؟ آیا E در $[0, 1]$ چگال است؟ آیا E فشرده است؟ آیا E کامل است؟

۱۸. آیا در R^1 مجموعه ای کامل و ناتهی که شامل عدد گویایی نباشد وجود دارد؟

۱۹. (آ) هرگاه A و B مجموعه های بسته و از هم جدایی در فضای متری X باشند، ثابت کنید این مجموعه ها از هم جدا شده اند.

(ب) همین مطلب را در مورد مجموعه های باز از هم جدا اثبات کنید.

(پ) $p \in X$ و $\delta > 0$ را ثابت گرفته، A را مجموعه تمام q هایی در X تعریف کنید که به ازای آنها $d(p, q) < \delta$ را به همین نحو، با گذاردن $>$ به جای $<$ ، تعریف نمایید. ثابت کنید A و B از هم جدا شده اند.

(ت) ثابت کنید هر فضای متری همبند با حداقل دو نقطه شمارش ناپذیر است. راهنمایی: قسمت (پ) را به کار ببرید.

۲۰. آیا بست و درون مجموعه های همبند همیشه همبنداند؟ (زیر مجموعه های R^2 را نظاره کنید.)

۲۱. فرض کنید A و B زیر مجموعه های از هم جدا شده R^k ای باشند. همچنین،

$a \in A, b \in B$ و به ازای $t \in R^1$ تعریف کنید

$$p(t) = (1-t)a + tb.$$

قرار دهید $A_0 = p^{-1}(A)$ و $B_0 = p^{-1}(B)$. [پس $t \in A_0$ اگر و فقط اگر $p(t) \in A$]

(آ) ثابت کنید A_0 و B_0 زیر مجموعه های از هم جدا شده R^1 اند.

(ب) ثابت کنید t_0 ی در $(0, 1)$ هست بطوری که $p(t_0) \notin A \cup B$.

(پ) ثابت کنید هر زیر مجموعه محدب R^k همبند است.

۲۲. یک فضای متری را جدایی پذیر نامند هرگاه شامل زیر مجموعه چگال شمارشپذیری

باشد. نشان دهید که R^* جدایی پذیر است. **راهنمایی:** مجموعه نقاطی را در نظر بگیرید که فقط مختصات گویا داشته باشند.

۲۳. گردآیه $\{V_\alpha\}$ از زیر مجموعه های باز X را یک پایه برای X نامند هرگاه گزاره زیر راست باشد: برای هر $x \in X$ و هر مجموعه G باز $G \subset X$ که $x \in G$ ، $\alpha \in I$ باشد که به ازای آن داشته باشیم $x \in V_\alpha \subset G$. به عبارت دیگر، هر مجموعه G باز در X اجتماع زیرگردآیه ای از $\{V_\alpha\}$ باشد.

ثابت کنید هر فضای متری جدایی پذیر پایه ای شمارش پذیر دارد. **راهنمایی:** تمام همسایگی هایی را اختیار کنید که شعاع هر یک گویا و مرکزش در یکی از زیر مجموعه های چگال شمارش پذیر X باشد.

۲۴. فرض کنید X یک فضای متری باشد که در آن هر زیر مجموعه نامتناهی نقطه ای حدی دارد. ثابت کنید X جدایی پذیر است. **راهنمایی:** $\delta > 0$ را ثابت گرفته x_1 در X اختیار کنید. با اختیار $x_1, \dots, x_j \in X$ ، x_{j+1} را در X در صورت امکان، طوری بگیرید که به ازای هر $i = 1, \dots, j$ ، $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$. نشان دهید که این عمل باید پس از چند مرحله متوقف شود، و از اینرو X را می توان با تعدادی متناهی همسایگی به شعاع δ پوشانید. δ را مساوی $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) اختیار کرده مراکز همسایگی های متناظر را در نظر بگیرید.

۲۵. ثابت کنید هر فضای متری فشرده K پایه ای شمارش پذیر داشته، در نتیجه، جدایی پذیر است. **راهنمایی:** به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، تعدادی متناهی همسایگی به شعاع $1/n$ هست که اجتماع آنها K را می پوشاند.

۲۶. فرض کنید X فضایی متری باشد که در آن هر زیر مجموعه نامتناهی نقطه ای حدی دارد. ثابت کنید X فشرده است. **راهنمایی:** بنابر تمرینهای ۲۳ و ۲۴، X پایه ای شمارش پذیر دارد. از این نتیجه می شود که هر پوشش باز X یک زیرپوشش شمارش پذیر مانند $\{G_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ ، خواهد داشت. هرگاه هیچ زیرگردآیه متناهی $\{G_n\}$ را نیوشاند، آنگاه متمم $G_1 \cup \dots \cup G_n$ (به نام F_n) به ازای هر n ناتمامی است، لیکن $F_n \cap F_{n+1} \neq \emptyset$ می باشد. هرگاه مجموعه E از هر F_n نقطه ای داشته باشد، با توجه به یکی از نقاط حدی E تناقضی به دست آورید.

۲۷. نقطه p در فضای متری X را یک نقطه تراکم مجموعه $E \subset X$ نامند هرگاه هر همسایگی p تعداد شمارش ناپذیری نقطه از E را داشته باشد.

فرض کنید $E \subset R^*$ ، شمارش ناپذیر، و P مجموعه تمام نقاط تراکم E باشد. ثابت

کنید P کامل است، و تعدادی حداکثر شمارشپذیر از نقاط E در P نیست. به عبارت دیگر، نشان دهید که $P^c \cap E$ حداکثر شمارشپذیر می باشد. راهنمایی: $\{V_n\}$ را پایه شمارشپذیری از R^* انگاشته، فرض کنید W اجتماع آن V_n هایی باشد که به ازای آنها $E \cap V_n = P$ ، و نشان دهید که $P = W^c$.

۲۸. ثابت کنید هر مجموعه بسته در یک فضای متریک جدایی پذیر اجتماع مجموعهای کامل (احتمالاً تهی) و مجموعهای حداکثر شمارشپذیر است. (نتیجه: هر مجموعه بسته شمارشپذیر در R^* نقاط تنها دارد) راهنمایی: تمرین ۲۷ را به کار ببرید.

۲۹. ثابت کنید هر مجموعه باز در R^1 اجتماع گردآیهای حداکثر شمارشپذیر از قطعههای از هم جدا است. راهنمایی: از تمرین ۲۲ استفاده نمایید.

۳۰. با تقلید از برهان قضیه ۴۳.۲، نتیجه زیر را به دست آورید:

هرگاه $R^* = \bigcup_i F_n$ ، که در آن هر F_n زیر مجموعه بسته ای از R^* است، آنگاه دست کم یکی از F_n ها درون ناتهی دارد.

حکم معادل: هرگاه G_n ، به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ ، زیر مجموعه باز چگالی از R^* باشد، آنگاه $\bigcap_i G_n$ تهی نیست (در واقع، در R^* چگال است). (این حالت خاصی است از قضیه ۱۰.۱ برای حالت کلی، ر.ک. تمرین ۲۲، فصل ۰۳)

دنباله‌ها و سریهای عددی

چنانکه از عنوان بر می آید، این فصل عمدتاً "به دنباله‌ها و سریهای اعداد مختلط خواهد پرداخت. با اینحال، مطالب اساسی همگرایی به همین سادگی در محدوده کلیتر توضیح داده می‌شوند. بدین لحاظ است که سه بخش اول به دنباله‌ها در فضاهای اقلیدسی یا حتی فضاهای متری اختصاص یافته‌اند.

دنباله‌های همگرا

۱.۳. تعریف. دنباله $\{p_n\}$ در فضای متری X را همگرا نامند هرگاه نقطه‌ای مانند $p \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد: به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی چون N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی $d(p_n, p) < \varepsilon$ را ایجاب کند. (در اینجا d نشانگر فاصله در X است.)

در این وضع همچنین می‌گوییم $\{p_n\}$ همگرا به p است، یا که p حد $\{p_n\}$ می‌باشد [ر. ک. قضیه ۲.۳ (ب)]، و می‌نویسیم $p_n \rightarrow p$ ، یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p.$$

هرگاه $\{p_n\}$ همگرا نباشد، آن را واگرا خواهیم نامید.

خوب است خاطر نشان کنیم که تعریف ما از "دنباله همگرا" نه فقط به $\{p_n\}$ بلکه به X نیز بستگی دارد. مثلاً، دنباله $\{1/n\}$ در R^1 همگراست (به ۰)، لکن در مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت $[d(x, y) = |x - y|]$ همگرا نیست. در حالاتی که امکان ابهام باشد، به جای گفتن "همگرا" می‌توان دقیقتر بود و تصریح کرد

"همگرا در X ".

یادآور شویم که مجموعه تمام نقاط p_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) برد $\{p_n\}$ است. برد یک دنباله ممکن است مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی باشد. دنباله $\{p_n\}$ را در صورتی *گرا* (ند) خوانیم که بردش کراندار باشد.

برای مثال، دنباله‌های زیر از اعداد مختلط (یعنی، $X = \mathbb{R}^2$) را در نظر می‌گیریم:
(آ) هرگاه $s_n = 1/n$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ ، بردش نامتناهی است، و دنباله کراندار می‌باشد؛

(ب) هرگاه $s_n = n^2$ ، دنباله $\{s_n\}$ بی‌کران است، و اگر است، و برد نامتناهی دارد؛
(پ) چنانچه $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$ ، دنباله $\{s_n\}$ همگرا به ۱ است، کراندار است، و برد نامتناهی دارد؛

(ت) هرگاه $s_n = i^n$ ، دنباله $\{s_n\}$ و اگر است، کراندار است، و برد متناهی دارد؛
(ث) هرگاه $s_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)، آنگاه $\{s_n\}$ همگرا به ۱ است، کراندار است، و دارای برد متناهی می‌باشد.

حال بعضی از خواص مهم دنباله‌های همگرا در فضاهای متری را به اجمال ذکر می‌کنیم.

۲۰۳ قضیه. فرض کنیم $\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد.

(آ) $\{p_n\}$ همگرا به $p \in X$ است اگر و فقط اگر هر همسایگی p شامل تمام جملات $\{p_n\}$ جز تعدادی متناهی باشد.

(ب) هرگاه $p \in X$ ، $p' \in X$ ، و $\{p_n\}$ همگرا به p و p' باشد، آنگاه $p' = p$.

(پ) هرگاه $\{p_n\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{p_n\}$ کراندار است.

(ت) هرگاه $E \subset X$ و p یک نقطه حدهی E باشد، دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در E هست بطوری که $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

برهان. (آ) فرض کنیم $p_n \rightarrow p$ ، و V یک همسایگی p باشد. به ازای ε مثبتی شرطهای $d(q, p) < \varepsilon$ و $q \in X$ عضویت q را در V ایجاب می‌کنند. نظیر این ε عدد صحیحی مانند N هست بطوری که $n \geq N$ نامساوی $d(p_n, p) < \varepsilon$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین، این، $n \geq N$ عضویت p_n در V را ایجاب خواهد کرد.

بعکس، فرض کنیم هر همسایگی p شامل تمام p_n ها جز تعدادی متناهی باشد. $\varepsilon < 0$ را ثابت گرفته، فرض می‌کنیم V مجموعه تمام q هایی در X باشد که $d(p, q) < \varepsilon$. بنا به فرض، N ی (متناظر این V) هست بطوری که اگر $n \geq N$ ، $p_n \in V$. لذا، اگر $n \geq N$ ، $d(p_n, p) < \varepsilon$ ، بنابراین، $p_n \rightarrow p$.

(ب) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، N و N' صحیحی هستند بطوری که

$$d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{نامساوی} \quad n \geq N$$

و

$$d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{نامساوی} \quad n \geq N'$$

را ایجاب می‌کند. از اینرو، اگر $n \geq \max(N, N')$ ، خواهیم داشت

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که $d(p, p') = 0$.

(پ) فرض کنیم $p_n \rightarrow p$. پس عدد صحیحی مثل N هست بطوری که $n > N$ نامساوی

$$d(p_n, p) < 1$$

را ایجاب می‌کند. قرار می‌دهیم

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \dots, d(p_N, p)\}.$$

$$d(p_n, p) \leq r \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(ت) به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، نقطه‌ای مانند $p_n \in E$ هست بقسمی که

$$d(p_n, p) < 1/n$$

هرگاه $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، N را طوری می‌گیریم که $N\varepsilon > 1$. چنانچه

$$n > N$$

نتیجه می‌شود که $d(p_n, p) < \varepsilon$. بنابراین، $p_n \rightarrow p$.

این برهان را تمام خواهد کرد.

برای دنباله‌های در R^k می‌توان رابطه بین همگرایی، از یک سو، و اعمال جبری،

از سوی دیگر، را بررسی نمود. ابتدا دنباله‌های اعداد مختلط را در نظر می‌گیریم.

۳.۳ قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دنباله‌هایی مختلط بوده، $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ،

$$\text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t \quad \text{در این صورت،}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = s + t \quad (I)$$

$$(ب) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = cs, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c + s_n) = c + s \quad c \text{ هر عدد}$$

$$(\text{پ}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n t_n = st$$

$$(\text{ت}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s} \quad \text{مشروط بر اینکه } s_n \neq 0 \text{ و } (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ و } s \neq 0$$

برهان

(آ) به ازای $\varepsilon > 0$ معلوم، اعدادی صحیح مانند N_1 و N_2 هستند بطوری که

$$n \geq N_1 \quad \text{نامساوی} \quad |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$n \geq N_2 \quad \text{نامساوی} \quad |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب می‌کند. هرگاه $N = \max(N_1, N_2)$ ، آنگاه $n \geq N$ نتیجه می‌دهد که

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

این (آ) را ثابت خواهد کرد. اثبات (ب) بدیهی می‌باشد.

(پ) از اتحاد

$$(1) \quad s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s)$$

استفاده می‌کنیم. به ازای $\varepsilon > 0$ معلوم، اعداد صحیحی چون N_1 و N_2 هستند بطوری که

$$n \geq N_1 \quad \text{نامساوی} \quad |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$$

و

$$n \geq N_2 \quad \text{نامساوی} \quad |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}$$

را ایجاب می‌کند. هرگاه فرض کنیم $N = \max(N_1, N_2)$ ، $n \geq N$ ایجاب خواهد کرد که

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon.$$

پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0.$$

حال (آ) و (ب) را در (۱) به کار برده نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n - st) = 0.$$

(ت) را طوری می‌گیریم که اگر $n \geq m$ ، $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$ ، و خواهیم دید که

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \quad (n \geq m).$$

به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد صحیحی چون $N > m$ هست بقسمی که $n \geq N$ نامساوی

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2\varepsilon$$

را ایجاب می کند. بنابراین، به ازای $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{s_n - s}{s_n s} \right| < \frac{2}{|s|^2} |s_n - s| < \varepsilon.$$

۴.۳ قضیه

(آ) فرض کنیم $x_n \in R^k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) و

$$x_n = (\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{k,n}).$$

در این صورت، $\{x_n\}$ همگرا به $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ است اگر و فقط اگر

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \quad (1 \leq j \leq k).$$

(ب) فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله هایی در R^k بوده، $\{\beta_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد، و $x_n \rightarrow x$ ، $y_n \rightarrow y$ ، و $\beta_n \rightarrow \beta$ در این صورت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n x_n = \beta x.$$

برهان

(آ) هرگاه $x_n \rightarrow x$ ، نامساویهای

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq |x_n - x|,$$

که فوراً از تعریف نرم در R^k نتیجه می شوند، نشان می دهند که (۲) برقرار است. بعکس، هرگاه (۲) برقرار باشد، آنگاه به هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مثل N چنان نظیر است که $n \geq N$ نامساویهای

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \quad (1 \leq j \leq k)$$

را ایجاب می کند. از اینرو، $n \geq N$ نتیجه می دهد که

$$|x_n - x| = \left\{ \sum_{j=1}^k |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

پس $x_n \rightarrow x$ این (آ) را ثابت می کند.

قسمت (ب) از (T) و قضیه ۳.۳ نتیجه خواهد شد.

زیر دنباله‌ها

۵.۳ تعریف. با معلوم بودن دنباله $\{p_n\}$ ، دنباله $\{n_k\}$ از اعداد صحیح مثبت را که $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، دنباله $\{p_{n_i}\}$ را یک زیر-دنباله $\{p_n\}$ می‌خوانیم. چنانچه $\{p_{n_i}\}$ همگرا باشد، حد آن را یک حد زیر-دنباله‌ای $\{p_n\}$ خواهیم نامید.

واضح است که $\{p_n\}$ همگرا به p است اگر و فقط اگر هر زیر دنباله $\{p_{n_i}\}$ همگرا به p باشد. جزئیات برهان را به خواننده وامی‌گذاریم.

۶.۳ قضیه

(T) هرگاه $\{p_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری فشرده X باشد، آنگاه زیر دنباله‌ای از $\{p_n\}$ به نقطه‌ای از X همگرا می‌باشد.

(ب) هر دنباله $\{p_n\}$ کراندار در R^k حاوی زیر دنباله‌ای همگرا خواهد بود.

برهان

(T) فرض کنیم E برد $\{p_n\}$ باشد. هرگاه E متناهی باشد، نقطه‌ای مانند $p \in E$ و دنباله‌ای چون $\{n_i\}$ با خاصیت $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ هست بطوری که

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \dots = p.$$

واضح است که زیر دنباله $\{p_{n_i}\}$ به این نحو حاصل شده همگرا به p می‌باشد.

هرگاه E نامتناهی باشد، قضیه ۳۷.۲ نشان می‌دهد که E یک نقطه حدی مثل

$p \in X$ دارد. n_1 را قسمی اختیار می‌کنیم که $d(p, p_{n_1}) < 1$ اگر $n_1, \dots, n_{i-1}$

انتخاب شده باشند، از قضیه ۲۰.۲ خواهیم دید که عدد صحیحی مانند $n_i > n_{i-1}$

هست بطوری که $d(p, p_{n_i}) < 1/i$ پس $\{p_{n_i}\}$ همگرا به p می‌باشد.

(ب) این قسمت از (T) نتیجه می‌شود، زیرا قضیه ۴۱.۲ ایجاب می‌کند که هر زیر-مجموعه $\{p_n\}$ کراندار در R^k در زیرمجموعه فشرده‌ای از R^k جای دارد.

۷.۳ قضیه. حدود زیر دنباله‌ای دنباله $\{p_n\}$ در فضای متری X زیرمجموعه بسته‌ای

از X را می‌سازند.

برهان. فرض کنیم E^* مجموعه تمام حدود زیر دنباله‌ای $\{p_n\}$ و q یک نقطه حدی E^* باشد. باید نشان دهیم که $q \in E^*$.

n_1 را طوری می‌گیریم که $p_{n_1} \neq q$. (هرگاه چنین n_1 نباشد، E^* فقط یک نقطه دارد، و چیزی برای اثبات نمی‌ماند.) قرار می‌دهیم $\delta = d(q, p_{n_1})$. فرض کنیم $n_1, \dots, n_{i-1}$ انتخاب شده باشند. چون q یک نقطه حدی E^* است، پس x ی در E^* هست که $d(x, q) < 2^{-i}\delta$. و از آنجاکه $x \in E^*$ ، n_i ی بزرگتر از n_{i-1} هست بقسمی که $d(x, p_{n_i}) < 2^{-i}\delta$. پس، به ازای $i = 1, 2, 3, \dots$

$$d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta.$$

این می‌گوید که $\{p_{n_i}\}$ همگرا به q است. بنابراین، $q \in E^*$.

دنباله‌های کشی

۸.۳ تعریف. دنباله $\{p_n\}$ در فضای متریک X را یک دنباله کشی نامند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N باشد بطوری که اگر $n \geq N$ و $m \geq N$ ، $d(p_n, p_m) < \varepsilon$. مفهوم هندسی زیر در بحث ما از دنباله‌های کشی، و نیز در سایر مواردی که بعداً می‌آیند، مفید خواهد افتاد.

۹.۳ تعریف. فرض کنیم E زیر مجموعه‌ای از فضای متریک X و S مجموعه تمام اعداد حقیقی $d(p, q)$ باشد که $p \in E$ و $q \in E$. در این صورت، سوپرم S قطر E نامیده می‌شود.

چنانچه $\{p_n\}$ دنباله‌ای در X و E_N از نقاط $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \dots$ متشکل باشد، از دو تعریف قبل معلوم می‌شود که $\{p_n\}$ یک دنباله کشی است اگر و فقط اگر

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{diam } E_N = 0.$$

$$\text{diam } \bar{E} = \text{diam } E.$$

(ب) هرگاه K_n دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده در X باشد بطوری که $K_n \supset K_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) و نیز

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } K_n = 0,$$

آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_n$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است.

برهان

(آ) چون $E \subset \bar{E}$ ، پس واضح است که

$$\text{diam } E \leq \text{diam } \bar{E}.$$

$\varepsilon > 0$ را ثابت گرفته، p و q را در $\bar{E}$ اختیار می‌کنیم. بنابر تعریف $\bar{E}$ ، نقاطی مانند p' و q' در E هستند بطوری که $d(p, p') < \varepsilon$ و $d(q, q') < \varepsilon$. از اینرو،

$$d(p, q) \leq d(p, p') + d(p', q') + d(q', q)$$

$$< 2\varepsilon + d(p', q') \leq 2\varepsilon + \text{diam } E.$$

از این نتیجه می‌شود که

$$\text{diam } \bar{E} \leq 2\varepsilon + \text{diam } E.$$

و، چون ε دلخواه بود، (آ) ثابت خواهد شد.

(ب) قرار می‌دهیم $K \cdot K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_n$ ، برطبق قضیه ۳۶۰۲، تهی نیست. هرگاه K بیش از یک نقطه داشته باشد، آنگاه $\text{diam } K > 0$. اما، به ازای هر n ، $K_n \supset K$. پس $\text{diam } K_n \geq \text{diam } K$ این با فرض $\text{diam } K_n \rightarrow 0$ منافات دارد.

۱۱۰۳ قضیه

(آ) در هر فضای متریک X ، هر دنباله همگرا یک دنباله کشی است.

(ب) هرگاه X یک فضای متریک فشرده و $\{p_n\}$ یک دنباله کشی در آن باشد، آنگاه $\{p_n\}$ به نقطه‌ای از X همگرا است.

(پ) در R^k ، هر دنباله کشی همگرا می‌باشد.

توجه: فرق بین تعریف همگرایی یک دنباله و تعریف کشی بودن آن در این است که در اولی صریحاً "حد دخالت دارد در حالی که در دومی چنین نمی‌باشد. از-

اینرو، قضیه ۱۱.۳ (ب) ما را قادر می‌سازد تا در باب همگرا بودن یا نبودن یک دنباله معلوم بدون وقوف بر حد آن تصمیم بگیریم.

این مطلب (منتج از قضیه ۱۱.۳) که "هر دنباله در R^k همگراست اگر و فقط اگر یک دنباله کشی باشد" معمولاً "محک کشی برای همگرایی نام دارد".

برهان

(آ) هرگاه $p_n \rightarrow p$ و $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N هست بطوری که به ازای هر $n \geq N$ ، $d(p, p_n) < \varepsilon$. بدینجهت، به محض اینکه $n \geq N$ و $m \geq N$ ، خواهیم داشت

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon.$$

لذا، $\{p_n\}$ یک دنباله کشی می‌باشد.

(ب) فرض کنیم $\{p_n\}$ یک دنباله کشی در فضای فشرده X باشد. همچنین، به ازای E_N ، $N = 1, 2, 3, \dots$ ، مجموعه مرکب از $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \dots$ می‌انگاریم. در این صورت، بنابر تعریف ۹.۳ و قضیه ۱۰.۳ (آ)،

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{diam } \bar{E}_N = 0.$$

چون هر $\bar{E}_N$ زیرمجموعه بسته‌ای از فضای فشرده X است، پس هر $\bar{E}_N$ فشرده می‌باشد (قضیه ۳۵.۲). همچنین، $E_N \supset E_{N+1}$ ، در نتیجه، $\bar{E}_N \supset \bar{E}_{N+1}$. حال قضیه ۱۰.۳ (ب) نشان می‌دهد که نقطه منحصر بفردی مانند $p \in X$ هست که در هر $\bar{E}_N$ قرار دارد.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر (۳)، عدد صحیحی مثل N_0 هست بطوری که اگر $N \geq N_0$ ، $\text{diam } \bar{E}_N < \varepsilon$ ، چون $p \in \bar{E}_N$ ، معلوم می‌شود که به ازای هر $q \in \bar{E}_N$ (در نتیجه، به ازای هر $q \in E_N$)، $d(p, q) < \varepsilon$. به عبارت دیگر، هرگاه $n \geq N_0$ ، $d(p, p_n) < \varepsilon$. این دقیقاً می‌گوید که $p_n \rightarrow p$.

(پ) فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کشی در R^k باشد. E_N را همانطور که در (ب) تعریف شد، با گذاردن x_i به جای p_i ، تعریف می‌کنیم. به ازای N ی $\text{diam } E_N < 1$ برد $\{x_n\}$ اجتماع E_N و مجموعه متناهی $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ است. پس $\{x_n\}$ کراندار می‌باشد. چون هر زیرمجموعه کراندار R^k بست فشرده در R^k دارد (قضیه ۴۱.۲)، پس (پ) از (ب) نتیجه خواهد شد.

۱۲.۳ تعریف. یک فضای متریک در آن هر دنباله کشی همگرا باشد نام دارد. پس قضیه ۱۱.۳ این را می گوید که تمام فضاهای متریک فشرده و کلیه فضاهای اقلیدسی نام هستند. قضیه ۱۱.۳ همچنین ایجاب می کند که هر زیرمجموعه بسته E از فضای متریک نام X نام است. (هر دنباله کشی در E یک دنباله کشی در X است؛ در نتیجه، به نقطه ای مانند $p \in X$ همگرا می باشد. و چون E بسته است، این p عملاً در E خواهد بود.) یک نمونه از فضاهای متریک غیر نام فضای کلیه اعداد گویا با متریک $d(x, y) = |x - y|$ می باشد.

قضیه ۲۰.۳ (پ) و مثال (ت) تعریف ۱۰.۳ نشان می دهند که دنباله های همگرا کراندارند، لکن دنباله های کراندار در R^* لزوماً همگرا نمی باشند. بهر حال، حالت مهمی هست که در آن همگرایی معادل کراندار است. این وضع در مورد دنباله های یکنوا در R^1 پیش خواهد آمد.

۱۳.۳ تعریف. دنباله $\{s_n\}$ از اعداد حقیقی را
(آ) صعودی نامند هرگاه $s_n \leq s_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)؛
(ب) نزولی خوانند هرگاه $s_n \geq s_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
رده دنباله های یکنوا از دنباله های صعودی و نزولی تشکیل شده است.

۱۴.۳ قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}$ یکنوا باشد. در این صورت، $\{s_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

برهان. فرض کنیم $s_n \leq s_{n+1}$ (اثبات در حالت دیگر به همین نحو است). همچنین، E را برد $\{s_n\}$ می انگاریم. در صورت کراندار بودن $\{s_n\}$ ، s را کوچکترین کران بالایی E فرض می کنیم. در این صورت،

$$s_n \leq s \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مثل N هست بطوری که

$$s - \varepsilon < s_n \leq s;$$

زیرا، در غیر این صورت، $s - \varepsilon$ یک کران بالایی E خواهد بود. در نتیجه، چون $\{s_n\}$ صعودی است، $n \geq N$ ایجاب خواهد کرد که

$$s - \varepsilon < s_n \leq s,$$

که همگرا بودن $\{s_n\}$ (به s) را نشان می دهد .
عکس مطلب از قضیه ۲۰.۳ (پ) نتیجه خواهد شد .

حدود بالایی و پایینی

۱۵.۳ تعریف . فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی با خاصیت زیر باشد : به ازای هر M حقیقی عددی صحیح مانند N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی $s_n \geq M$ را ايجاب کند . در این صورت ، می نویسیم

$$s_n \rightarrow +\infty.$$

به همین نحو ، اگر به ازای هر M حقیقی عددی صحیح مثل N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی $s_n \leq M$ را نتیجه دهد ، خواهیم نوشت

$$s_n \rightarrow -\infty.$$

باید خاطر نشان کنیم که ما اینک علامت $\rightarrow$ را (که در تعریف ۱۰.۳ عرضه شد) برای بعضی از انواع دنباله های واگرا ، همچون دنباله های همگرا به کار می بریم . لکن تعریف های همگرایی و حد آمده در تعریف ۱۰.۳ بهیچوجه تغییر نکرده اند .

۱۶.۳ تعریف . فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد . E را مجموعه اعدادی چون x (در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی) می انگاریم که به ازای زیر دنباله ای مانند $\{s_{n_k}\}$ ، $s_{n_k} \rightarrow x$. این E شامل تمام حدود زیر دنباله ای که در تعریف ۵.۳ معرفی شد ، به انضمام احتمالا " اعداد $+\infty$ و $-\infty$ ، می باشد .

حال تعریف های ۸.۱ و ۲۳.۱ را به یاد آورده قرار می دهیم

$$s^* = \sup E,$$

$$s_* = \inf E.$$

اعداد s^* و s_* را حدود بالایی و پایینی $\{s_n\}$ می نامیم ، و برای آنها نمادهای

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = s^*, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = s_*$$

را به کار خواهیم برد .

۱۷.۳ قضیه . فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد . گیریم E و s^* همان معانی داشته در تعریف ۱۶.۳ را داشته باشند . در این صورت ، s^* از دو خاصیت زیر

بهره‌مند است :

$$s^* \in E(\bar{T})$$

(ب) چنانچه $s^* > x$ ، عددی صحیح مانند N هست بطوری که $n \geq N$ نامساوی $s_n < x$ را ایجاب می‌کند.

بعلاوه، s^* تنها عددی است که از خواص $(\bar{T})$ و $(ب)$ برخوردار است. البته، نتیجه‌ای مشابه برای s_* برقرار می‌باشد.

برهان

($\bar{T}$) هرگاه $s^* = +\infty$ ، آنگاه E از بالا کراندار نیست. در نتیجه، $\{s_n\}$ از بالا کراندار نیست، و زیر دنباله‌ای مانند $\{s_{n_k}\}$ وجود دارد بطوری که $s_{n_k} \rightarrow +\infty$. هرگاه s_* حقیقی باشد، آنگاه E از بالا کراندار است، و دست کم یک حد زیر-دنباله‌ای وجود دارد. پس ($\bar{T}$) از قضایای ۷.۳ و ۲۸.۲ نتیجه خواهد شد. هرگاه $s^* = -\infty$ ، آنگاه E فقط شامل یک عنصر، یعنی $-\infty$ ، است، و حد زیر-دنباله‌ای وجود نخواهد داشت. بنابراین، به ازای هر M حقیقی، نامساوی $s_n > M$ به ازای حداکثر تعدادی متناهی n برقرار می‌شود پس $s_n \rightarrow -\infty$. این ($\bar{T}$) را در جمیع حالات ثابت می‌کند.

(ب) فرض کنیم عددی چون $s^* > x$ باشد بطوری که به ازای بی‌نهایت مقدار از n ، $s_n \geq x$. در این حالت عددی مانند $y \in E$ هست بقسمی که $s^* > x \geq y$ ، که با تعریف s^* در تضاد است.

بنابراین، s^* در ($\bar{T}$) و $(ب)$ صدق خواهد کرد.

برای اثبات منحصر بفرد بودن، فرض می‌کنیم دو عدد مانند p و q باشند که در ($\bar{T}$) و $(ب)$ صدق کنند و $q < x < p$ را طوری می‌گیریم که $q < x < p$. چون p در $(ب)$ صدق می‌کند، پس به ازای هر $n \geq N$ داریم $s_n < x$. اما، در این صورت، q نمی‌تواند در ($\bar{T}$) صدق نماید.

۱۸.۳ چند مثال

($\bar{T}$) فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای شامل تمام اعداد گویا باشد. پس هر عدد حقیقی یک حد زیر دنباله‌ای است، و

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty.$$

(ب) فرض کنیم $s_n = (-1)^n/[1 + (1/n)]$. در این صورت ،

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = -1.$$

(پ) برای دنباله حقیقی $\{s_n\}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ اگر و فقط اگر

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

این بخش را با قضیه‌ای که سودمند است و اثباتش کاملاً بدیهی است ختم می‌کنیم.

۱۹.۳ قضیه. هرگاه به ازای $n \geq N$ ، که N ثابت است ، داشته باشیم $s_n \leq t_n$ ، آنگاه

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} t_n,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

چند دنباله خاص

حال به محاسبه حدود چند دنباله که کرارا " به آنها برمی‌خوریم می‌پردازیم .
برهانها همه بر این نکته استوار خواهند بود : هرگاه به ازای $n \geq N$ ، که در آن N عدد ثابتی است ، داشته باشیم $0 \leq x_n \leq s_n$ و $s_n \rightarrow 0$ ، آنگاه $x_n \rightarrow 0$.

۲۰.۳ قضیه

(آ) هرگاه $p > 0$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(ب) هرگاه $p > 0$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(پ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(ت) هرگاه $p > 0$ و α حقیقی باشد ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(ث) هرگاه $|x| < 1$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

برهان

(آ) n را بزرگتر از $(1/\varepsilon)^{1/p}$ می گیریم. (توجه کنید که در اینجا از خاصیت ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی استفاده شده است.)

(ب) هرگاه $p > 1$ ، قرار می دهیم $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$ ، در این صورت، $x_n > 0$ و، بنابر قضیه دوجمله ای،

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p.$$

پس

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

بنابراین، $x_n \rightarrow 0$. هرگاه $p = 1$ ، (ب) بدیهی است و، چنانچه $0 < p < 1$ ، با معکوس گرفتن نتیجه به دست خواهد آمد.

(پ) قرار می دهیم $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ ، پس $x_n \geq 0$ و، بنابر قضیه دوجمله ای،

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

در نتیجه،

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

(ت) فرض کنیم k عدد صحیح باشد بقسمی که $\alpha > k$ و $k > 0$. به ازای $n > 2k$ ،

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}.$$

از اینرو،

$$0 < \frac{n^k}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} \quad (n > 2k).$$

چون $\alpha - k < 0$ ، بنابر (آ)، $n^{\alpha-k} \rightarrow 0$.

(ث) α را در (ت) صفر اختیار کنید.

سریها

تا پایان این فصل همه دنباله ها و سریهای مورد نظر مختلط اند مگر آنکه خلافش تصریح شود. تعمیم بعضی از قضایای زیر به سریهای با جملات در R^k در تمرین ۱۵ ذکر شده است.

۲۱.۳ تعریف. به فرض معلوم بودن دنباله $\{a_n\}$ ، از نماد

$$\sum_{n=p}^q a_n \quad (p \leq q)$$

برای نمایش مجموع $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ استفاده می‌کنیم. به $\{a_n\}$ دنباله $\{s_n\}$ را، که در آن

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

مربوط می‌سازیم. برای $\{s_n\}$ عبارت علامتی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

یا، خلاصه‌تر از آن،

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

را نیز به‌کار خواهیم برد.

علامت (۴) را یک سری نامتناهی، یا فقط یک سری، می‌نامیم. s_n ها مجموعه‌های جزئی سری خوانده می‌شوند. هرگاه $\{s_n\}$ همگرا به s باشد، می‌گوییم سری همگرا است و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

عدد s را مجموع سری نام داده‌اند، ولی باید بوضوح قید شود که s حد دنباله‌ای از مجموعه‌هاست و تنها با عمل جمع به دست نمی‌آید.

هرگاه $\{s_n\}$ واگرا باشد، سری واگرا گفته خواهد شد.

گاهی، بجهت ساده بودن نماد، سریها را به شکل

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

در نظر می‌گیریم؛ و اغلب، وقتی امکان ابهام در بین نیست و یا اینکه تمایز اهمیتی ندارد، به جای (۴) یا (۵) فقط می‌نویسیم $\sum a_n$.

واضح است که هر قضیه در باب دنباله‌ها را می‌توان بر حسب سریها (باقرار $a_1 = s_1$)

و، به‌ازای $n > 1$ ، $a_n = s_n - s_{n-1}$ بیان کرد، و بالعکس. اما، با اینحال، توجه به هردو مفهوم سودمند است.

محک کشی (قضیه ۱۱.۳) را می توان به شکل زیر مجدداً بیان کرد:

۲۲.۳ قضیه. $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که اگر $m \geq n \geq N$

$$(6) \quad \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \varepsilon.$$

بخصوص، با فرض $m = n$ ، (۶) به صورت

$$|a_n| \leq \varepsilon \quad (n \geq N)$$

در می آید. به عبارت دیگر:

۲۳.۳ قضیه. هرگاه $\sum a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

با اینحال، شرط $a_n \rightarrow 0$ برای تضمین همگرایی $\sum a_n$ کافی نیست. مثلاً، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

واگراست. برای اثبات، خواننده را به قضیه ۲۸.۳ ارجاع می دهیم.

قضیه ۱۴.۳، مربوط به دنباله های یکنوا، همتای سرراستی برای سریها نیز دارد.

۲۴.۳ قضیه. یک سری با جملات نامنفی* همگراست اگر و فقط اگر که مجموعهای جزئی آن یک دنباله کراندار بسازند.

حال به "آزمون مقایسه ای"، که یک آزمون همگرایی با سرشتی متفاوت است، می پردازیم.

۲۵.۳ قضیه

(آ) هرگاه به ازای هر $n \geq N_0$ ، که N_0 عدد صحیح ثابتی است، داشته باشیم

$$|a_n| \leq c_n, \text{ و } \sum c_n \text{ همگرا باشد، آنگاه } \sum a_n \text{ همگرا می باشد.}$$

(ب) هرگاه به ازای هر $n \geq N_0$ ، $a_n \geq d_n \geq 0$ ، و $\sum d_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ واگرا خواهد بود.

* اصطلاح "نامنفی" همیشه اشاره به اعداد حقیقی دارد.

توجه کنید که (ب) فقط در مورد سربهای با جملات نامنفی صحیح است.

برهان. هرگاه $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، بنا به محک کشی، $N \geq N_0$ ی هست بطوری که $m \geq n \geq N$ نامساوی

$$\sum_{k=n}^m c_k \leq \varepsilon$$

را ایجاب می کند. پس

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| \leq \sum_{k=n}^m c_k \leq \varepsilon,$$

و (آ) نتیجه خواهد شد.

و اما بعد، (ب) از (آ) حاصل می شود، زیرا که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، $\sum d_n$ نیز باید چنین باشد [توجه کنید که (ب) از قضیه ۲۴.۳ نیز به دست می آید].
آزمون مقایسه ای آزمون بسیار مفیدی است. برای آنکه به طرز موثری به کار رود، باید با چند سری با جملات نامنفی که همگرایی یا واگرایی آنها معلوم شده آشنا بشویم.

سریها با جملات نامنفی

شاید که ساده ترین همه سری هندسی باشد.

۲۶.۳ قضیه. هرگاه $0 \leq x < 1$ ، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

چنانچه $x \geq 1$ ، سری واگرا می باشد.

برهان. هرگاه $x \neq 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

نتیجه در صورتی که $n \rightarrow \infty$ به دست خواهد آمد. به ازای $x = 1$ داریم

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

که بوضوح واگرا می باشد.

در بسیاری از حالات که در عمل پیش می‌آیند، جملات سری تدریجا "نزول می‌کنند".
 از اینروست که به قضیه زیر از کشی توجه خاصی مبذول می‌شود. کیفیت ممتاز قضیه این
 است که زیر دنباله "نسبتا" "نزاری" از $\{a_n\}$ سرنوشت همگرایی یا واگرایی $\sum a_n$ را
 تعیین می‌کند.

۲۷.۳ قضیه. فرض کنیم $0 \leq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ در این صورت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 همگراست اگر و فقط اگر سری

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

همگرا باشد.

برهان. بنابر قضیه ۲۴.۳، کافی است کرانداري مجموعهای جزئی را در نظر بگیریم. فرض
 کنیم

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}.$$

به ازای $n < 2^k$ داریم

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k, \end{aligned}$$

پس

$$(8) \quad s_n \leq t_k.$$

از سوی دیگر، اگر $n > 2^k$ ،

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}t_k. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(9) \quad 2s_n \geq t_k.$$

بنابر (۸) و (۹)، دنباله‌های $\{s_n\}$ و $\{t_k\}$ یا هر دو کراندارند یا هر دو بی‌کران. این برهان را تمام خواهد کرد.

۲۸.۳ قضیه. $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p > 1$ ، و واگراست اگر $p \leq 1$.

برهان. هرگاه $p \leq 0$ ، واگرایی از قضیه ۲۳.۳ نتیجه می‌شود. چنانچه $p > 0$ ، قضیه ۲۷.۳ قابل استفاده است، و سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

را به ما می‌دهد. حال گوئیم $2^{1-p} < 1$ اگر و فقط اگر $1 - p < 0$ ، و نتیجه از مقایسه با سری هندسی (با اختیار $x = 2^{1-p}$ در قضیه ۲۶.۳) به دست خواهد آمد. به عنوان کاربرد دیگری از قضیه ۲۷.۳ ثابت می‌کنیم:

۲۹.۳ قضیه. هرگاه $p > 1$ ،

$$(10) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

همگراست. چنانچه $p \leq 1$ ، سری واگرا خواهد بود.

تبصره. " $\log n$ " مبین لگاریتم n در پایه e است (قس. تمرین ۷، فصل ۱). عدد e لحظه‌ای دیگر تعریف خواهد شد (ر.ک. تعریف ۳۰.۳). چون $\log 1 = 0$ ، سری فوق را از $n = 2$ شروع می‌کنیم.

برهان. یکنوایی تابع لگاریتمی (که در فصل ۸ با تفصیل بیشتری مطرح می‌شود) صعودی بودن $\{\log n\}$ را ایجاب می‌کند. از اینرو، $\{1/n \log n\}$ نزول می‌کند، و می‌توان قضیه ۲۷.۳ را در مورد (۱۰) به کاربرد. این عمل ما را به سری

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

می‌رساند، و قضیه ۲۹.۳ از قضیه ۲۸.۳ نتیجه خواهد شد.

واضح است که این کار را می‌شود ادامه داد. به عنوان مثال،

$$(12) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n}$$

واگراست، حال آنکه

$$(13) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2}$$

همگرا می‌باشد.

حال دیده می‌شود که جملات سری (۱۲) با جمله‌های (۱۳) تفاوت بسیار کمی دارند. با اینحال، یکی واگراست و دیگری همگرا. هرگاه به عملی که ما را از قضیه ۲۸.۳ به قضیه ۲۹.۳ و بعد به سریهای (۱۲) و (۱۳) رسانید ادامه دهیم، یک جفت سری همگرا و واگرا به دست می‌آوریم که تفاوت جملاتشان حتی از تفاوت جمله‌های (۱۲) و (۱۳) نیز کمتر است. لذا، ممکن است شخص این حدس را بزند که نوعی حالت حدی وجود دارد؛ لااقل تا جایی که به سریهای با ضرایب یکنوا مربوط می‌شود، "مرز"ی هست که در یک سویش تمام سریهای همگرا و در سوی دیگرش تمام سریهای واگرا قرار دارند. البته، مفهوم "مرز" در اینجا کاملاً مبهم است. نکته‌ای را که مایلیم خاطرنشان کنیم این است که "هر طور هم که به این مفهوم دقت ببخشیم، حدس فوق درست نخواهد بود. تعریینهای ۱۱ (ب) و ۱۲ (ب) می‌توانند به عنوان شاهد گرفته شوند.

ما قصد آنکه بیشتر وارد این جنبه از نظریه همگرایی بشویم نداریم، و خواننده را به فصل نه، بویژه بخش ۴۱، کتاب "نظریه و کاربرد سریهای نامتناهی" کنوپ^۱ ارجاع می‌دهیم.

عدد e

$$۳۰.۳ \quad \text{تعریف} \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

در اینجا اگر $n \geq 1$ ، $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ، و $0! = 1$.

چون

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

1. Knopp's "Theory and Application of Infinite Series."

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

پس سری همگراست، و تعریف فوق معنی دارد. درواقع، این سری خیلی سریع همگراست، و امکان محاسبه e را با دقت زیاد به ما می‌دهد.

جالب است توجه کنیم که e را می‌توان با عمل حدی دیگری نیز تعریف کرد. اثبات آن مثال خوبی از اعمال با حدود را به دست می‌دهد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{قضیه ۳۱.۳}.$$

برهان. فرض کنیم

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

بنابر قضیه دوجمله‌ای،

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

ازاینرو، $t_n \leq s_n$ ، پس، بر طبق قضیه ۱۹.۳،

(14)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq e.$$

دیگر آنکه، اگر $n \geq m$ ،

$$t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

m را ثابت می‌گیریم و n را به بی‌نهایت میل می‌دهیم. به دست خواهیم آورد

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}.$$

در نتیجه،

$$s_m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

بالاخره، با فرض $m \rightarrow \infty$ خواهیم داشت

(15)

$$e \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

حال قضیه از (۱۴) و (۱۵) حاصل خواهد شد.

سرعت همگرایی سری $\sum \frac{1}{n!}$ را می‌شود این طور تخمین زد: هرگاه s_n همان معنی بالا را بدهد، خواهیم داشت

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{n!n}.$$

پس

$$(16) \quad 0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

لذا، مثلاً، e, s_{10} را با خطایی کمتر از 10^{-7} تخمین می‌زند. نامساوی (۱۶) از جنبه نظری نیز مورد توجه است، زیرا که با آن می‌توانیم گنگ بودن e را خیلی آسان اثبات کنیم.

۳۲.۳. قضیه. e گنگ است.

برهان. فرض کنیم e گویا باشد. پس $e = p/q$ که در آن p و q اعداد صحیح مثبتی می‌باشند. بنابر (۱۶)،

$$(17) \quad 0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}.$$

$q!e$ ، مطابق فرض ما، عددی صحیح است. چون

$$q!s_q = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right)$$

صحیح است، می‌بینیم که $q!(e - s_q)$ نیز صحیح می‌باشد.

و چون $q \geq 1$ ، نامساویهای (۱۷) وجود عدد صحیحی را بین ۰ و ۱ ایجاب می‌کنند.

بنابراین، به تناقض رسیده‌ایم.

درواقع، e حتی یک عدد جبری هم نیست. برای اثبات ساده‌ای از این، ر.ک.

صفحه ۲۵ کتاب نیون^۱، یا صفحه ۱۷۶ کتاب هراشتاین^۲، که در کتابنامه آمده‌اند.

آزمونهای ریشه و نسبت

۳۳.۳. قضیه (آزمون ریشه). چنانچه $\sum a_n$ مفروض باشد، قرار می‌دهیم $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

در این صورت ،

(آ) هرگاه $\alpha < 1$ ، $\sum a_n$ همگراست ؛

(ب) هرگاه $\alpha > 1$ ، $\sum a_n$ واگراست ؛

(پ) چنانچه $\alpha = 1$ ، این آزمون اطلاعاتی به دست نخواهد داد .

برهان . هرگاه $\alpha < 1$ ، می توان β را طوری اختیار کرد که $1 < \beta < \alpha$ ، و [طبق قضیه

۱۷.۳ (ب)] عدد صحیح N را قسمی اختیار نمود که به ازای $n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta ;$$

یعنی ، $n \geq N$ ایجاب کند که

$$|a_n| < \beta^n .$$

چون $0 < \beta < 1$ ، $\sum \beta^n$ همگراست . حال همگرایی $\sum a_n$ از آزمون مقایسه ای نتیجه

می شود .

هرگاه $\alpha > 1$ ، آنگاه ، باز بنابر قضیه ۱۷.۳ ، دنباله ای مانند $\{n_k\}$ هست بطوری

که

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow \alpha .$$

بنابراین ، به ازای بی نهایت مقدار از n ، $|a_n| > 1$. در نتیجه ، شرط $a_n \rightarrow 0$ ، که

برای همگرایی $\sum a_n$ لازم است ، برقرار نمی باشد (قضیه ۲۳.۳) .

برای اثبات (پ) ، سربهای

$$\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}$$

را در نظر می گیریم . برای هر یک از این سریها ، $\alpha = 1$ ، اما اولی واگراست و دومی

همگرا .

۳۴.۳ قضیه (آزمون نسبت) . سری $\sum a_n$

(آ) همگراست هرگاه

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 ;$$

(ب) واگراست هرگاه به ازای هر $n \geq n_0$ ، که در آن n_0 عدد صحیح ثابتی است ،

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 .$$

برهان . هرگاه شرط (آ) برقرار باشد ، می توان $\beta < 1$ ای و عدد صحیح N را طوری یافت

که به ازای $n \geq N$ ،

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \beta.$$

بخصوص،

$$|a_{N+1}| < \beta |a_N|,$$

$$|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|a_{N+p}| < \beta^p |a_N|.$$

یعنی، به ازای هر $n \geq N$ ،

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \cdot \beta^n.$$

چون $\sum \beta^n$ همگراست، $(\bar{I})$ از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود.

چنانچه به ازای هر $n \geq n_0$ ، $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ ، به آسانی دیده می‌شود که شرط

$a_n \rightarrow 0$ برقرار نیست، و (ب) حاصل می‌باشد.

توجه: دانستن اینکه $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ چیزی در باب همگرایی $\sum a_n$ به ما

نمی‌دهد. سریهای $\sum 1/n$ و $\sum 1/n^2$ مؤید این مطلب خواهند بود.

۳۵.۳ چند مثال

(I) سری

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

را در نظر می‌گیریم، که در مورد آن داریم

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{3^n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\sqrt[2]{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty.$$

آزمون ریشه همگرایی را نشان می‌دهد. آزمون نسبت قابل به کار بردن نیست.

(ب) همین مطلب در مورد سری

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

صادق است، که در آن

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

ولی

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

۳۶.۳ چند تبصره. آزمون نسبت اغلب از آزمون ریشه آسانتر به کار می‌رود، زیرا معمولاً نسبتها ساده‌تر از ریشه‌های n حساب می‌شوند. با اینحال، آزمون ریشه دامنه‌عمل وسیع‌تری دارد. به عبارت دقیق‌تر، هر وقت آزمون نسبت همگرایی را نشان دهد، آزمون ریشه نیز همان می‌کند؛ زمانی که آزمون ریشه بی‌حاصل است، آزمون نسبت نیز چنین خواهد بود. این مطلب نتیجه‌ای است از قضیه ۳۷.۳، و با مثالهای فوق توضیح می‌شود. هیچیک از دو آزمون در مورد واگرایی دقیق نیست. هر دو واگرایی را از این مطلب که "وقتی $a_n \neq 0$ و $n \rightarrow \infty$ به صفر نمی‌گراید" نتیجه می‌گیرند.

۳۷.۳ قضیه. به ازای هر دنباله $\{c_n\}$ از اعداد مثبت،

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

برهان. نامساوی دوم را ثابت می‌کنیم. اثبات اولی کاملاً "به همین نحو است. قرار

می‌دهیم

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

هرگاه $\alpha = +\infty$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. چنانچه α متناهی باشد، β را بزرگتر از α اختیار می‌کنیم. در این صورت، عدد صحیحی مانند N هست بقسمی که به ازای هر

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \beta, \quad n \geq N$$

بخصوص، به ازای هر $p > 0$

$$c_{N+k+1} \leq \beta c_{N+k} \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

با ضرب این نامساویها در هم خواهیم داشت

$$c_{N+p} \leq \beta^p c_N,$$

یا

$$c_n \leq c_N \beta^{-N} \cdot \beta^n \quad (n \geq N).$$

بنابراین،

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \cdot \beta.$$

در نتیجه، بنابر قضیه ۲۰.۳ (ب)،

$$(18) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta.$$

چون (۱۸) به ازای هر $\beta > \alpha$ درست است، خواهیم داشت

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha.$$

سریهای توانی

۳۸.۳ تعریف. سری

$$(19) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

که در آن دنباله $\{c_n\}$ از اعداد مختلط داده شده، یک سری توانی نامیده می شود.

اعداد c_n ضرایب سری نام دارند. در اینجا z یک عدد مختلط است.

سری، در حالت کلی، بسته به انتخاب z ، همگرا یا واگرا می باشد. به عبارت دقیقتر،

به هر سری توانی دایره ای مربوط است، به نام دایره همگرایی، بطوری که (۱۹) همگراست

هرگاه z درون دایره باشد، و واگراست هرگاه z برون آن باشد (برای محسوب بودن جمیع

حالات، اجباراً "صفحه را درون یک دایره به شعاع نامتناهی، و نقطه را دایره ای به شعاع

صفر می گیریم). وضع روی دایره همگرایی خیلی بیشتر در تغییر است، و به این سادگیها

قابل توصیف نخواهد بود.

۳۹.۳ قضیه. چنانچه سری توانی $\sum c_n z^n$ داده شده باشد، قرار می دهیم

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad R = \frac{1}{\alpha}.$$

(اگر $\alpha = 0$ ، $R = +\infty$ ، چنانچه $\alpha = +\infty$ ، $R = 0$) در این صورت، $\sum c_n z^n$ همگراست هرگاه $|z| < R$ ، و واگراست هرگاه $|z| > R$.

برهان. قرار می‌دهیم $a_n = c_n z^n$ ، و آزمون ریشه را به کار می‌گیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

توجه. R شعاع همگرایی $\sum c_n z^n$ خوانده می‌شود.

۴۰.۳ چند مثال

(آ) سری $\sum n^n z^n$ دارای R مساوی ۰ است.

(ب) سری $\sum \frac{z^n}{n!}$ دارای R مساوی $+\infty$ است. (در این حالت، آزمون نسبت از آزمون ریشه آسانتر به کار می‌رود.)

(پ) سری $\sum z^n$ دارای R مساوی یک است. هرگاه $|z| = 1$ ، سری به این دلیل که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\{z^n\}$ به ۰ میل نمی‌کند، واگرا می‌باشد.

(ت) سری $\sum \frac{z^n}{n}$ دارای R مساوی یک است. این سری در صورتی که $z = 1$ واگراست. به ازای کلیه z های دیگری که $|z| = 1$ همگرا می‌باشد. (حکم آخر در قضیه ۴۴.۳ ثابت خواهد شد.)

(ث) سری $\sum \frac{z^n}{n^2}$ دارای $R = 1$ است. این سری، بر طبق آزمون مقایسه‌ای، به این دلیل که $|z^n/n^2| = 1/n^2$ ، به ازای تمام z هایی که $|z| = 1$ همگرا می‌باشد.

جمع‌بندی به طریقه جزء به جزء

۴۱.۳ قضیه. چنانچه دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروض باشند، به ازای $n \geq 0$ قرار می‌دهیم

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

و نیز فرض می‌کنیم $A_{-1} = 0$. در این صورت، اگر $0 \leq p \leq q$ ، خواهیم داشت

$$(20) \quad \sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^q (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1},$$

و آخرین عبارت سمت راست بوضوح مساوی طرف راست (۲۰) خواهد بود.

فرمول (۲۰)، که "فرمول جمع بندی جزئی" نام دارد، در بررسی سربهایی به شکل $\sum a_n b_n$ ، بویژه وقتی $\{b_n\}$ یکنواست، سودمند است. حال به کاربردهای آن می پردازیم.

۴۲.۳ قضیه. فرض کنیم

(۱) مجموعه های جزئی A_n از $\sum a_n$ یک دنباله کراندار بسازند؛

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (۳)$$

در این صورت، $\sum a_n b_n$ همگرا می باشد.

برهان M را طوری اختیار می کنیم که در ازای هر n ، $|A_n| \leq M$ ، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد صحیحی چون N هست بقسمی که $b_N \leq (\varepsilon/2M)$ ، به ازای $N \leq p \leq q$ خواهیم داشت

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \right|$$

$$\leq M \left| \sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p \right|$$

$$= 2M b_p \leq 2M b_N \leq \varepsilon.$$

همگرایی اینک از محک کشی نتیجه می شود. توجه داریم که اولین نامساوی در رشته نامساویهای فوق بی شک به این مطلب که $b_n - b_{n+1} \geq 0$ وابسته است.

۴۳.۳ قضیه. فرض کنیم

$$|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \dots \quad (۱)$$

$$c_{2m} \leq 0 \text{ و } c_{2m-1} \geq 0 \quad (۲) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (\text{پ})$$

در این صورت، $\sum c_n$ همگرا می‌باشد.

سری که برای آن شرط (ب) برقرار باشد "سری متناوب" نام دارد. لایب نیتز بر قضیه فوق واقف بوده است.

برهان. قضیه ۴۲.۳ را با فرض $a_n = (-1)^{n+1}$ و $b_n = |c_n|$ به کار برید.

۴۴.۳ قضیه. فرض کنیم شعاع همگرایی $\sum c_n z^n$ مساوی ۱ بوده، $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. در این صورت، $\sum c_n z^n$ در هر نقطه از دایره $|z| = 1$ ، جز احتمالاً در $z = 1$ ، همگرا می‌باشد.

برهان. قرار می‌دهیم $a_n = z^n$ و $b_n = c_n$. در این صورت، مفروضات قضیه ۴۲.۳ برقرارند، زیرا که هرگاه $|z| = 1$ و $z \neq 1$ ،

$$|A_n| = \left| \sum_{m=0}^n z^m \right| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}.$$

همگرایی مطلق

سری $\sum a_n$ را به طور مطلق همگرا نامند هرگاه سری $\sum |a_n|$ همگرا باشد.

۴۵.۳ قضیه. هرگاه $\sum a_n$ به طور مطلق همگرا باشد، این سری همگرا نیز هست.

برهان. حکم از نامساوی

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k|$$

و محک کشی نتیجه می شود .

۴۶.۳ چند تبصره . در مورد سربهای با جملات مثبت ، همگرایی مطلق همان همگرایی می باشد .

هرگاه $\sum a_n$ همگرا بوده ولی $\sum |a_n|$ واگرا باشد ، می گوئیم $\sum a_n$ به طور نامطلق همگرا است . مثلاً " ، سری

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

به طور نامطلق همگرا می باشد (قضیه ۴۳.۳) .

آزمون مقایسه ای ، همچون آزمونهای ریشه و نسبت ، در واقع آزمونی برای همگرایی مطلق است و ، لذا ، نمی تواند در باب سربهای همگرای نامطلق اطلاعی به دست دهد . گاهی برای پرداختن به سربهای اخیر می توان از جمع بندی به طریقه جزء به جزء استفاده کرد . بخصوص ، سربهای توانی درون دایره همگرایی به طور نامطلق همگرا می باشند .

خواهیم دید که با سربهای همگرای مطلق می توان تا حدود زیادی مثل مجموعهای متناهی عمل کرد . می توانیم ، بی آنکه بر مجموع سربها اثری بگذاریم ، آنها را جمله به جمله در هم ضرب کنیم و ترتیبی را که با آن جمعها صورت می گیرند تغییر دهیم . لکن این اعمال برای سربهای به طور نامطلق همگرا دیگر جایز نیست ، و باید ضمن کار با آنها احتیاط بیشتری به خرج داد .

جمع و ضرب سربها

۴۷.۳ قضیه . هرگاه $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ ، آنگاه $\sum (a_n + b_n) = A + B$ و ، به ازای هر c ثابت ، $\sum ca_n = cA$.

برهان . فرض کنیم

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k,$$

پس

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k).$$

چون $\lim A_n = A$ و $\lim B_n = B$ می بینیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = A + B.$$

اثبات حکم دوم از این هم ساده تر است.

لذا، دو سری همگرا را می توان جمله به جمله بهم افزود، و سری حاصل به مجموع دو سری همگرا می باشد. در مورد ضرب دو سری، وضع از این پیچیده تر است. ابتدا باید حاصل ضرب را تعریف کنیم. این را می توان به طرق مختلف انجام داد. ما "حاصل ضرب کشی" را در نظر خواهیم گرفت.

۴۸.۳ تعریف. هرگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ داده شده باشد، قرار می دهیم

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

و $\sum c_n$ را حاصل ضرب دو سری مفروض می خوانیم.

این تعریف را می شود به این صورت به دست آورد: هرگاه دو سری توانی $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ را گرفته، آنها را جمله به جمله در هم ضرب کرده، و جملات هم توان z را دسته بندی کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \end{aligned}$$

با قرار $z = 1$ به تعریف بالا خواهیم رسید.

۴۹.۳ مثال. هرگاه

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k,$$

و $A_n \rightarrow A$ و $B_n \rightarrow B$ ، آنگاه، چون رابطه $C_n = A_n B_n$ را نداریم، بهیچوجه روشن نیست که $\{C_n\}$ به AB همگرا هست یا خیر. بستگی $\{C_n\}$ به $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ بستگی کاملآ پیچیده ای است (ر. ک. برهان قضیه ۵۰.۳). حال نشان می دهیم که حاصل ضرب دو سری همگرا ممکن است عملاً واگرا شود.

سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

همگراست (قضیه ۴۳.۳). حاصل ضرب این سری را با خودش تشکیل می‌دهیم، و به دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots \end{aligned}$$

پس

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

چون

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

داریم

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

در نتیجه، شرط $c_n \rightarrow 0$ ، که لازمه همگرایی $\sum c_n$ است، برقرار نخواهد بود.

در پرتو قضیه بعدی، که به مرتنس^۱ منسوب است، ملاحظه می‌کنیم که ما در اینجا حاصل ضرب دو سری به طور نامطلق همگرا را در نظر گرفته‌ایم.

۵۰.۳ قضیه. فرض کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (\bar{A}) \quad \text{به طور مطلق همگرا باشد؛}$$

$$; \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \quad (\bar{b})$$

$$; \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B \quad (\bar{p})$$

$$(پ) \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

در این صورت،

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

یعنی، حاصل ضرب دو سری همگرا یک سری همگراست، و، در واقع، اگر دست کم یکی از دو سری به طور مطلق همگرا باشد کافی است.

برهان. قرار می‌دهیم

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k, \quad \beta_n = B_n - B.$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $C_n \rightarrow AB$. گوئیم چون $A_n B \rightarrow AB$ ، کافی است نشان داده شود که

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0.$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

[اینجاست که از (T) استفاده می‌کنیم.] فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر (پ)، $\beta_n \rightarrow 0$. پس می‌توان N را طوری اختیار کرد که به ازای هر $n \geq N$ ، $|\beta_n| \leq \varepsilon$ ،

که در این حالت

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \dots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \dots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \dots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha. \end{aligned}$$

چون وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $a_k \rightarrow 0$ ، با ثابت گرفتن N و فرض $n \rightarrow \infty$ به دست می آوریم که

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon \alpha.$$

از آنجا که ε دلخواه است ، (۲۱) نتیجه خواهد شد .

سؤال دیگری که ممکن است پرسیده شود این است که اگر سری Σc_n همگرا باشد ، آیا باید مجموعی مساوی AB داشته باشد؟ آبل^۱ نشان داد که جواب مثبت است .

۵۱.۳ قضیه. هرگاه... سربهای Σa_n ، Σb_n و Σc_n به A ، B ، و C همگرا باشند و $c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$ ، آنگاه $C = AB$.

در اینجا در ارتباط با همگرایی مطلق هیچ فرضی نشده است . بعد از قضیه ۲۰.۸ برهان ساده ای را (که به پیوستگی سربهای توانی وابسته است) ارائه خواهیم داد .

تجدید آرایشها

۵۲.۳ تعریف. فرض کنیم $\{k_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ ، دنباله ای باشد که در آن هر عدد صحیح مثبت یک بار و فقط یک بار ظاهر می شود (یعنی ، $\{k_n\}$ ، بر طبق نماد — گذاری تعریف ۲۰.۲ ، تابعی ۱-۱ از J به J باشد) . قرار می دهیم

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

و می گوئیم $\Sigma a'_n$ یک تجدید آرایش Σa_n است .

هرگاه $\{s_n\}$ و $\{s'_n\}$ دنباله های مجموعهای جزئی Σa_n و $\Sigma a'_n$ باشند ، بسادگی دیده می شود که این دو دنباله ، در حالت کلی ، از اعداد کاملاً " متفاوتی تشکیل شده اند . لذا ، با این مسئله مواجهیم که معین کنیم تحت چه شرایطی جمیع تجدید آرایشهای یک سری همگرا همگرایند ، و آیا مجموعهای آنها الزاماً " یکی است یا نه .

۵۳.۳ مثال. سری همگرای

$$(22) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

و یکی از تجدید آرایشهای آن

$$(23) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

را، که در آن همیشه پس از دو جمله مثبت یک جمله منفی می آید، در نظر می گیریم. هرگاه s مجموع سری (۲۲) باشد، آنگاه

$$s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{چون به ازای هر } k \geq 1, \quad \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0,$$

ملاحظه می کنیم که $s'_3 < s'_6 < s'_9 < \dots$ ، که در آن s'_n مجموع جزئی n م سری (۲۳) می باشد. از اینرو،

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s'_n > s'_3 = \frac{5}{6}.$$

پس (۲۳) یقیناً "همگرا به s نخواهد بود [حقیق این مطلب که سری (۲۳) بهر حال همگراست به خواننده محول می شود].

این مثال قضیه زیر را، که منسوب به ریمان^۱ است، روشن می سازد.

۵۴.۳ قضیه. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد که همگرا بوده ولی به طور مطلق همگرا نباشد. همچنین، فرض می کنیم

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty.$$

در این صورت، تجدید آرایشی چون $\sum a'_n$ با مجموعهای جزئی s'_n وجود دارد بطوری که

$$(24) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} s'_n = \alpha, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} s'_n = \beta.$$

برهان. قرار می دهیم

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

در این صورت ، $p_n + q_n = |a_n|$ ، $p_n - q_n = a_n$ ، $p_n \geq 0$ ، $q_n \geq 0$.
 سریهای $\sum p_n$ و $\sum q_n$ هر دو باید واگرا باشند . زیرا هرگاه هر دو همگرا می بودند ، آنگاه

$$\Sigma(p_n + q_n) = \Sigma|a_n|$$

همگرا می شد ، که ناقض فرض است . چون

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^N p_n - \sum_{n=1}^N q_n ,$$

واگرایی $\sum p_n$ و همگرایی $\sum q_n$ (یا بعکس) واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می کنند ، که باز ناقض فرض می باشد .

حال فرض کنیم $P_1, P_2, P_3, \dots$ جملات نامنفی $\sum a_n$ ، بترتیبی که در سری می آیند ، و $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ قدر مطلقهای جملات منفی $\sum a_n$ ، باز با همان ترتیب اصلیشان در سری ، باشند .

سریهای $\sum P_n$ و $\sum Q_n$ فقط در جملات صفر با $\sum p_n$ و $\sum q_n$ فرق دارند ، و لذا ، واگرا می باشند .

دنباله های $\{m_n\}$ و $\{k_n\}$ را طوری خواهیم ساخت که سری

$$(25) \quad P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \dots$$

$$+ P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \dots - Q_{k_2} + \dots ,$$

که بوضوح یک تجدید آرایش $\sum a_n$ است ، در (۲۴) صدق کند .

برای این کار دنباله های حقیقی $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ را طوری اختیار می کنیم که

$$\beta_1 > 0 \text{ و } \alpha_n < \beta_n \text{ ، } \beta_n \rightarrow \beta \text{ ، } \alpha_n \rightarrow \alpha$$

فرض کنیم m_1 و k_1 کوچکترین اعداد صحیحی باشند که

$$P_1 + \dots + P_{m_1} > \beta_1 ,$$

$$P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1} < \alpha_1 ;$$

همچنین ، m_2 و k_2 را کوچکترین اعداد صحیحی می انگاریم که

$$P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \dots + P_{m_2} > \beta_2 ,$$

$$P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \dots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \dots - Q_{k_2} < \alpha_2 ;$$

و به همین نحو ادامه می دهیم . این کار ، به دلیل واگرا بودن $\sum P_n$ و $\sum Q_n$ ، سر

است.

هرگاه x_n و y_n آن مجموعه‌های جزئی (۲۵) باشند که جملات آخرشان P_{m_n} و Q_{k_n} -اند، آنگاه

$$|x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}, \quad |y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}.$$

چون وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $P_n \rightarrow 0$ و $Q_n \rightarrow 0$ ، ملاحظه می‌کنیم که $x_n \rightarrow \beta$ و $y_n \rightarrow \alpha$. بالاخره، واضح است که هیچ عدد کمتر از α یا بیشتر از β نمی‌تواند یک حد زیر-دنیا له‌ای مجموعه‌های جزئی (۲۵) باشد.

۵۵.۳ قضیه. هرگاه $\sum a_n$ یک سری از اعداد مختلط به طور مطلق همگرا باشد، آنگاه هر تجدید آرایش $\sum a_n$ همگراست، و همه به یک مجموع همگرا می‌باشند.

برهان. فرض کنیم $\sum a'_n$ تجدید آرایشی با مجموعه‌های جزئی s'_n باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیحی چون N هست بطوری که $m \geq n \geq N$ نامساوی

$$(26) \quad \sum_{i=n}^m |a_i| \leq \varepsilon$$

را ایجاب می‌کند. حال p را طوری می‌گیریم که اعداد صحیح $1, 2, \dots, N$ همه در میان $k_1, k_2, \dots, k_p$ باشند (از نمادگذاری تعریف ۵۲.۳ استفاده می‌کنیم). در این صورت، اگر $n > p$ ، اعداد $a_1, \dots, a_N$ در تفاضل $s_n - s'_n$ حذف می‌شوند. در نتیجه، بنابر (۲۶)، $|s_n - s'_n| \leq \varepsilon$. بنابراین، $\{s'_n\}$ همگرا به همان مجموع $\{s_n\}$ خواهد شد.

تمرین

۱. ثابت کنید همگرایی $\{s_n\}$ همگرایی $\{|s_n|\}$ را ایجاب می‌کند. آیا عکس این هم درست است؟

$$۲. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \quad \text{را حساب کنید.}$$

۳. هرگاه $s_1 = \sqrt{2}$ و

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

ثابت کنید $\{s_n\}$ همگراست و به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ $s_{n+1} < 2$.

۴. حدود بالایی و پایینی دنباله $\{s_n\}$ را که به صورت زیر تعریف شده بیابید:

$$s_1 = 0; s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}; s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$

۵. برای هر دو دنباله حقیقی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ثابت کنید

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

مشروط بر اینکه مجموع سمت راست به شکل $\infty - \infty$ نباشد.

۶. در رفتار (همگرایی یا واگرایی) Σa_n تحقیق کنید هرگاه

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (ا)$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad (ب)$$

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n \quad (پ)$$

$$a_n = \frac{1}{1+z^n}, \quad z \text{ مختلط}$$

۷. ثابت کنید که اگر $a_n \geq 0$ ، همگرایی Σa_n همگرایی $\Sigma \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ را ایجاب می‌کند.

۸. هرگاه Σa_n همگرا و $\{b_n\}$ یکنوا و کراندار باشد، ثابت کنید که $\Sigma a_n b_n$ همگراست.

۹. شعاع همگرایی هر یک از سریهای توانی زیر را بیابید:

$$\sum n^3 z^n \quad (ا) \quad \sum \frac{2^n}{n!} z^n \quad (ب)$$

$$\sum \frac{2^n}{n^2} z^n \quad (پ) \quad \sum \frac{n^3}{3^n} z^n \quad (ت)$$

۱۰. فرض کنید ضرایب سری توانی $\Sigma a_n z^n$ اعداد صحیحی باشند که بی‌نهایت از آنها ناصفرند. ثابت کنید شعاع همگرایی آن حداکثر یک است.

۱۱. فرض کنید $a_n > 0$ ، $s_n = a_1 + \dots + a_n$ و Σa_n واگرا باشد.

$$(ا) \text{ ثابت کنید } \sum \frac{a_n}{1+a_n} \text{ واگراست.}$$

(ب) ثابت کنید

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \dots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{s_n}$ واگرا می‌باشد.

(پ) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n},$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ همگراست.

(ت) درباره

$$\sum \frac{a_n}{1+na_n}, \sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$$

چه می‌توان گفت؟

۱۲. فرض کنید $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگرا باشد. قرار دهید

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

(آ) ثابت کنید که اگر $m < n$

$$\frac{a_m}{r_m} + \dots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m},$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{r_n}$ واگراست.

(ب) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}),$$

و نتیجه بگیرید که $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست.

۱۳. ثابت کنید که حاصل ضرب کشی دو سری به طور مطلق همگرا به طور مطلق همگرا است.

۱۴. چنانچه $\{s_n\}$ دنباله مختلطی باشد، میانگینهای حسابی آن σ_n ها را با

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

تعریف می‌کنیم.

(آ) هرگاه $\lim s_n = s$ ، ثابت کنید $\lim \sigma_n = s$.

(ب) دنباله $\{s_n\}$ را قسمی بسازید که در عین اینکه $\lim \sigma_n = 0$ همگرا نباشد.

(پ) آیا می‌شود به ازای هر n ، $s_n > 0$ و، با اینکه $\lim \sigma_n = 0$ ، داشته باشیم $\limsup s_n = \infty$ ؟

(ت) به ازای هر $n \geq 1$ قرار دهید $a_n = s_n - s_{n-1}$. نشان دهید که

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k a_k.$$

فرض کنید $\lim (na_n) = 0$ و $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد. ثابت کنید $\{s_n\}$ همگرا است. [این عکس قسمت (آ) را به دست می دهد منتها با فرض اضافی $na_n \rightarrow 0$].
(ث) آخرین نتیجه را از این فرض ضعیفتر به دست آورید: فرض کنید $M < \infty$ ، به ازای هر n ، $|na_n| \leq M$ و $\lim \sigma_n = \sigma$. با تکمیل شرح مختصر زیر، ثابت کنید $\lim s_n = \sigma$:
هرگاه $m < n$ ، آنگاه

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n (s_n - s_i).$$

برای این i ها،

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

$\varepsilon > 0$ ثابتی اختیار کرده، به هر n عدد صحیح m را طوری مربوط نمایید که در

$$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1$$

صدق کند. در این صورت، $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ و $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. از اینرو،

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، پس $\lim s_n = \sigma$.

۱۵. تعریف ۲۱.۳ را می توان به حالتی که a_n در R^k ی ثابتی قرار دارد تعمیم داد.

در اینجا همگرایی مطلق همان همگرایی $\sum |a_n|$ تعریف می شود. نشان دهید که

قضایای ۲۲.۳، ۲۳.۳، ۲۵.۳ (آ)، ۲۴.۳، ۲۲.۳، ۴۲.۳، ۴۵.۳، ۴۷.۳ و

۵۵.۳ در این محدوده کلیتر برقرارند. (در هر برهان فقط اصلاحات مختصری

نیاز است.)

۱۶. عدد مثبت α را ثابت نگهدارید. x_1 را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفته، x_2 ، x_3 ،

x_4 ، ... را با فرمول بازگشتی

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$$

تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید $\{x_n\}$ نزول می کند و $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(ب) قرار دهید $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$ ، و نشان دهید که

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}.$$

پس، با فرض $\beta = 2\sqrt{\alpha}$ ، خواهید داشت

$$\varepsilon_{n+1} < \beta \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta} \right)^{2^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

(پ) این دستورالعمل خوبی است برای محاسبه ریشه‌های دوم، زیرا فرمول بازگشتی ساده و همگرایی بی‌نهایت سریع صورت می‌گیرد. به عنوان مثال، اگر $\alpha = 3$ و $x_1 = 2$ ، نشان دهید که $\varepsilon_1/\beta < \frac{1}{10}$ ، و لذا،

$$\varepsilon_5 < 4 \cdot 10^{-16}, \quad \varepsilon_6 < 4 \cdot 10^{-32}.$$

۱۷. $\alpha > 1$ را ثابت نگه دارید. x_1 را بزرگتر از $\sqrt{\alpha}$ گرفته، تعریف کنید

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}.$$

(ا) ثابت کنید $x_1 > x_3 > x_5 > \dots$

(ب) ثابت کنید $x_2 < x_4 < x_6 < \dots$

(پ) ثابت کنید $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$

(ت) سرعت همگرایی این فرایند را با فرایند وصف شده در تمرین ۱۶ مقایسه نمایید.

۱۸. فرمول بازگشتی تمرین ۱۶ را با

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{p+1},$$

که در آن p عدد صحیح مثبت ثابتی است، عوض کرده رفتار دنباله $\{x_n\}$ حاصل را توصیف نمایید.

۱۹. به هر دنباله $\alpha = \{\alpha_n\}$ ، که در آن α_n مساوی ۰ یا ۲ است، عدد حقیقی

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$$

را مربوط نمایید. ثابت کنید مجموعه تمام $x(a)$ ها دقیقاً همان مجموعه کانتور است که در بخش ۴۴.۲ توصیف شد.

۲۰. فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنباله کشی در فضای متریک X ، و زیردنباله‌ای از آن مانند $\{p_{n_i}\}$ به نقطه $p \in X$ همگرا باشد. ثابت کنید تمام دنباله $\{p_n\}$ همگرا به p خواهد بود.

۲۱. قضیه زیر را که مشابه قضیه ۱۰.۳ (ب) است ثابت کنید: هرگاه $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته و کراندار در فضای متریک X باشد، $E_n \supset E_{n+1}$ ، و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } E_n = 0,$$

آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است.

۲۲. فرض کنید X یک فضای متریک تام و $\{G_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های باز و چگال X باشد. قضیهٔ بئیر را ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ تهی نیست. (درواقع، این مجموعه در X چگال است). راهنمایی: دنباله‌ای از همسایگیهای منقبض مانند E_n را بیابید بطوری که $E_n \subset G_n$ و تمرین ۲۱ را به کار ببرید.

۲۳. فرض کنید $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ دنباله‌هایی کشی در فضای متریک X باشند. نشان دهید که دنبالهٔ $\{d(p_n, q_n)\}$ همگراست. راهنمایی: به ازای هر m و n ،

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$$

از این نتیجه می‌شود که اگر m و n بزرگ باشند،

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

کوچک خواهد بود.

۲۴. فرض کنید X یک فضای متریک باشد.

(آ) دو دنبالهٔ کشی $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ در X را هم‌رز نامند هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, q_n) = 0.$$

ثابت کنید این یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(ب) فرض کنید X^* مجموعهٔ تمام رده‌های هم‌ارزی باشد که این طور به دست می‌آیند. چنانچه $p \in X^*$ ، $Q \in X^*$ ، $\{p_n\} \in P$ و $\{q_n\} \in Q$ ، تعریف کنید

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, q_n).$$

این حد، بنابر تمرین ۲۳، وجود دارد. نشان دهید که اگر $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ با دنباله‌هایی هم‌ارز خود عوض شوند، عدد $\Delta(P, Q)$ تغییری نمی‌کند، و لذا، Δ یک تابع فاصله در X^* می‌باشد.

(پ) ثابت کنید فضای متریک X^* حاصل تام است.

(ت) به ازای هر $p \in X$ ، دنباله‌ای کشی هست که تمام جملات آن p اند. فرض کنید P_p آن عنصر از X^* باشد که حاوی این دنباله است. ثابت کنید به ازای

هر $p, q \in X$ ،

$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q).$$

به عبارت دیگر، نگاشت φ که با $\varphi(p) = P_p$ تعریف می شود یک یگمتری (یعنی نگاشتی حافظ فاصله) از X به X^* می باشد.

(ث) ثابت کنید $\varphi(X)$ در X^* چگال است و، در صورت تام بودن X ، $\varphi(X) = X^*$.
 بنابر (ت)، می توان X و $\varphi(X)$ را یکی کرد؛ و در نتیجه، X را به این صورت که در فضای متریک نام X^* نشانیده شده در نظر گرفت. فضای X^* را متمم X می نامیم.

۲۵. فرض کنید X آن فضای متریک باشد که نقاطش اعداد گویا و متر آن

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{است. متمم این فضا چیست؟ (قس. تمرین ۲۴).}$$

پیوستگی

مفهوم تابع و چند اصطلاح مربوط به آن در تعریفهای ۱۰۲ و ۲۰۲ معرفی شدند. با اینکه ما (در فصلهای بعد) عمدتاً "به توابع حقیقی و مختلط (یعنی، تابعهایی که مقادیرشان اعدادی حقیقی یا مختلط اند) نظر داریم، لکن توابع برداری (یعنی، توابعی با مقادیر در R^k) و تابعهایی که مقادیرشان در یک فضای متری دلخواه هستند را نیز مطرح خواهیم کرد. قضایای ما در این محدوده کلی مثلاً "با مقید شدن به توابع حقیقی شکل ساده تری نمی یابند. در واقع، باز کردن مفروضات نادرر و بیان و اثبات قضایا در یک زمینه کلی مناسب است که چهره بحث ساده و روش خواهد شد.

قلمروهای تعریف توابع ما نیز فضاهاهای متری خواهند بود، که در موارد مختلف وضع خاص مناسبی به خود می گیرند.

حدود توابع

۱۰۴ تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهاهایی متری باشند. همچنین $E \subset X$ ، f مجموعه E را بتوی Y بنگارد، و p یک نقطه حدی E باشد. می نویسیم وقتی $x \rightarrow p$ ، $f(x) \rightarrow q$ ، یا

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$$

هرگاه نقطه ای مانند $q \in Y$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد: به ازای هر $\delta > 0$ ، $\varepsilon > 0$ باشد بطوری که رابطه

$$(2) \quad d_Y(f(x), q) < \varepsilon$$

برای هر $x \in E$ که

$$(3) \quad 0 < d_X(x, p) < \delta$$

برقرار گردد.

علامات d_X و d_Y بترتیب اشاره به فاصله‌ها در X و Y دارند.

هرگاه X و Y را با خط حقیقی، صفحه، مختلط، یا فضای اقلیدسی R^k ای عوض کنیم، فاصله‌های d_X و d_Y بی‌شک با قدر مطلقها و یا نرمهای مناسبی عوض می‌شوند (ر.ک. بخش ۱۶.۲).

لازم است قید کنیم که در تعریف بالا $p \in X$ ولی p لزوماً "نقطه‌ای از E نیست".

بعلاوه، حتی اگر $p \in E$ ، باز ممکن است داشته باشیم $f(p) \neq \lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

این تعریف را می‌توان بر حسب حدود دنباله‌ها از نو طرح کرد:

۲.۴ قضیه. فرض کنیم X, Y, E, f ، و p همانهایی باشند که در تعریف ۱.۴ آمده‌اند. در این صورت،

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$$

اگر و فقط اگر رابطه

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = q$$

به‌ازای هر دنباله $\{p_n\}$ در E که

$$(6) \quad p_n \neq p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

برقرار باشد.

برهان. فرض کنیم (۴) برقرار باشد. $\{p_n\}$ را در E طوری اختیار می‌کنیم که در (۶) صدق کند. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، $\delta > 0$ ای وجود دارد بطوری که اگر $x \in E$ و $0 < d_X(x, p) < \delta$ ، داریم $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$. همچنین، N ی هست قسمی که $n > N$ نامساویهای $0 < d_X(p_n, p) < \delta$ را ایجاب می‌کند. بنابراین، به‌ازای

$n > N$ خواهیم داشت $d_f(f(p_n), q) < \varepsilon$ ، که نشانگر برقراری (۵) می‌باشد.
 بعکس، فرض کنیم (۴) درست نباشد. پس $\varepsilon > 0$ هست بطوری که به ازای هر $\delta > 0$ ی نقطه‌ای مانند $x \in E$ (وابسته به δ) وجود دارد که برای آن $d_f(f(x), q) \geq \varepsilon$
 ولی $0 < d_X(x, p) < \delta$. بنابراین، با اختیار $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) به δ_n به دنباله‌ای در E و صادق در (۶) دست می‌یابیم که برای آن رابطه (۵) درست نیست.

نتیجه. هرگاه f در p حد داشته باشد، این حد منحصر بفرد است.
 این مطلب از قضایای ۲۰۳ (ب) و ۲۰۴ به دست خواهد آمد.

۳۰۴ تعریف. فرض کنیم دو تابع مختلط f و g را داریم که هر دو بر E تعریف شده‌اند. منظور ما از $f + g$ یعنی تابعی که به هر نقطه x از E عدد $f(x) + g(x)$ را نسبت می‌دهد. به همین نحو، تفاضل $f - g$ ، حاصل ضرب fg ، و خارج قسمت f/g دو تابع را تعریف می‌کنیم با این فرض که خارج قسمت فقط در آن نقاط x از E تعریف شده که در آنها $g(x) \neq 0$. هرگاه f به هر نقطه x از E عدد c را نسبت دهد، f را یک تابع ثابت، یا فقط یک ثابت، نامیده می‌نویسیم $f = c$. چنانچه f و g توابعی حقیقی باشند و به ازای هر $x \in E$ ، $f(x) \geq g(x)$ ، گاهی جهت اختصار خواهیم نوشت $f \geq g$.

به همین نحو، اگر f و g ، E را بتوی R^k بنگارند، $f + g$ و $f \cdot g$ را با

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

تعریف می‌کنیم، و چنانچه عددی حقیقی باشد، قرار می‌دهیم $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

۴۰۴ قضیه. فرض کنیم $E \subset X$ ، یک فضای متری، p یک نقطه حدى E ، f و g توابع مختلطی بر E باشند، و داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = B.$$

در این صورت،

$$: \lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = A + B \quad (۱)$$

$$: \lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = AB \quad (۲)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0 \quad (۳) \quad \text{هرگاه}$$

برهان. در پرتو قضیه ۲.۴، این احکام فوراً از خواص مشابهشان در مورد دنباله‌ها (قضیه ۳.۳) نتیجه می‌شوند.

تبصره. هرگاه f و g را بتوی R^k بکارند، $(\bar{A})$ به قوت خود باقی است و (ب) به صورت زیر در می‌آید.

$$\lim_{x \rightarrow p} (f \circ g)(x) = A \circ B \quad (\text{ج})$$

(قس. قضیه ۰.۴.۳)

توابع پیوسته

۵.۴ تعریف. فرض کنیم X و Y فضاهایی متری بوده، $E \subset X$ ، $p \in E$ ، و f مجموعه E را بتوی Y بنگارد. در این صورت، f را در p پیوسته نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای باشد بقسمی که به ازای تمام نقاط $x \in E$ که $d_X(x, p) < \delta$ داشته باشیم $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

هرگاه f در هر نقطه E پیوسته باشد، f بر E پیوسته خوانده شود.

باید توجه داشت که برای پیوسته بودن در p ، f باید در این نقطه تعریف شده باشد.

(قس. تبصره بعد از تعریف ۰.۱.۴)

هرگاه p یک نقطه تنهای E باشد، تعریف ما ایجاب خواهد کرد که هر تابع f با قلمرو تعریف E در p پیوسته است، زیرا هر ε مثبتی که اختیار کنیم، می‌توانیم چنان δ مثبتی را برگزینیم که تنها نقطه $x \in E$ که به ازای آن $d_X(x, p) < \delta$ ، $x = p$ باشد. در این صورت،

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

۶.۴ قضیه. در وضعیت تعریف ۵.۴، فرض می‌کنیم p یک نقطه حدی E نیز باشد. در این

صورت، f در p پیوسته است اگر و فقط اگر $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

برهان. اگر تعریفهای ۱.۴ و ۵.۴ را با هم مقایسه کنیم، این مطلب واضح خواهد شد.

حال به ترکیب توابع می‌پردازیم. قضیه زیر خلاصه‌اش این است که هر تابع پیوسته

از یک تابع پیوسته پیوسته است.

۷.۴ قضیه. فرض کنیم X, Y, Z فضاها بی متری باشند، $E \subset X$ ، f مجموعه E را بتوی Y بنگارد، g برد f ، یعنی $f(E)$ ، را بتوی Z بنگارد، و h نگاشتی از E بتوی Z باشد که با

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in E)$$

تعریف شده است. در این صورت، هرگاه f در نقطه $p \in E$ و g در نقطه $f(p)$ پیوسته باشد، آنگاه h در p پیوسته خواهد بود.

این تابع h را ترکیب یا مرکبه f و g می نامند. در این مورد اغلب نماد

$$h = g \circ f$$

به کار برده می شود.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. چون g در $f(p)$ پیوسته است، $\eta > 0$ ای هست قسمی که

$$\text{اگر } d_Y(y, f(p)) < \eta \text{ و } y \in f(E) \text{، داریم } d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$$

و از آنجا که f در p پیوسته است، δ ی مثبتی وجود دارد بطوری که

$$\text{اگر } d_X(x, p) < \delta \text{ و } x \in E \text{، داریم } d_Y(f(x), f(p)) < \eta$$

از اینها نتیجه می شود که اگر $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$ ، خواهیم داشت

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon.$$

بنابراین، h در p پیوسته می باشد.

۸.۴ قضیه. نگاشت f از فضای متری X بتوی فضای متری Y بر X پیوسته است اگر و فقط

اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

(نقشهای معکوس در تعریف ۲.۲ معرفی شده اند.) این قضیه توصیف کننده بسیار

مفیدی از پیوستگی می باشد.

برهان. فرض کنیم f بر X پیوسته و V مجموعه باز Y باشد. باید نشان دهیم که هر

نقطه $f^{-1}(V)$ یک نقطه درونی $f^{-1}(V)$ است. لذا، فرض می کنیم $p \in X$ و $p \in V$ ، $f(p) \in V$.

چون V باز است، ε مثبتی هست قسمی که اگر $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$ ، $y \in V$ ، و از آنجا

که f در p پیوسته است، δ ی مثبتی وجود دارد بطوری که اگر $d_X(x, p) < \delta$ ،

پس، به محض اینکه $d_X(x, p) < \delta$ ، خواهیم داشت $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$.
 $x \in f^{-1}(V)$.

بعکس، فرض کنیم به ازای هر مجموعه V در Y ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد. p ای در X و ε بی مثبت را ثابت گرفته، فرض می‌کنیم V مجموعه تمام y هایی در Y باشد که $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. در این صورت، V باز است. از اینرو، $f^{-1}(V)$ نیز باز خواهد بود. در نتیجه، δ ی مثبتی هست که به محض آنکه $d_X(p, x) < \delta$ داریم $x \in f^{-1}(V)$. اما، هرگاه $x \in f^{-1}(V)$ ، آنگاه $f(x) \in V$. پس $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتیجه. نگاشت f از فضای متریک X بتوی فضای متریک Y پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه بسته C در Y ، $f^{-1}(C)$ در X بسته باشد.

این نتیجه از قضیه بالا حاصل می‌شود، زیرا یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر متمم آن باز باشد، و نیز به ازای هر E ، $E \subset Y$ ، $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$.

حال به توابع مختلط‌برداری و نیز تابعهایی که بر زیر مجموعه‌هایی از R^k تعریف شده‌اند می‌پردازیم.

۹۰۴ قضیه. فرض کنیم f و g توابع مختلط پیوسته‌ای بر فضای متریک X باشند. در این صورت، $f+g$ ، fg ، و $f|g$ بر X پیوسته خواهند بود.

البته، در آخرین حالت، باید فرض کنیم به ازای هر $x \in X$ ، $g(x) \neq 0$.

برهان. در نقاط تنهای X چیزی برای اثبات وجود ندارد. در نقاط حدی، حکم از قضایای ۴۰۴ و ۶۰۴ به دست خواهد آمد.

۱۰۰۴ قضیه

(۱) فرض کنیم $f_1, \dots, f_k$ توابعی حقیقی بر فضای متریک X و f آن نگاشت از X بتوی R^k باشد که با

$$(7) \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) \quad (x \in X)$$

تعریف می شود. در این صورت، f پیوسته است اگر و فقط اگر هر یک از توابع $f_1, \dots, f_k$ ،
 f_k پیوسته باشد.

(ب) هرگاه f و g نگاشتهای پیوسته‌ای از X بتوی R^k باشند، $f+g$ و $f \cdot g$ بر X پیوسته خواهند بود.

توابع $f_1, \dots, f_k$ را مؤلفه‌های f می‌نامند. توجه کنید که $f+g$ نگاشتی بتوی R^k است، حال آنکه $f \cdot g$ یک تابع حقیقی بر X می‌باشد.

برهان. قسمت (ت) از نامساویهای

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq |f(x) - f(y)| = \left\{ \sum_{i=1}^k |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

به ازای $j = 1, \dots, k$ به دست می‌آید. قسمت (ب) از (ت) و قضیه ۹.۴ نتیجه خواهد شد.

۱۱.۴ چند مثال. هرگاه $x_1, \dots, x_k$ مختصات نقطه $x \in R^k$ باشند، توابع ϕ_i که
 با

$$(8) \quad \phi_i(x) = x_i \quad (x \in R^k)$$

تعریف می‌شوند بر R^k پیوسته‌اند، زیرا نامساوی

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq |x - y|$$

نشان می‌دهد که در تعریف ۵.۴ می‌توان δ را ε گرفت. تابعهای ϕ_i را گاهی توابع مختصی می‌نامند.

پس، با چند بار استفاده از قضیه ۹.۴، معلوم می‌شود که هر تک جمله‌ای

$$(9) \quad x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

که در آن $n_1, \dots, n_k$ اعدادی صحیح و نامنفی هستند، بر R^k پیوسته است. همین مطلب در مورد مضارب ثابت (۹) نیز درست است، زیرا ثابتها بوضوح پیوسته می‌باشند، از این نتیجه می‌شود که هر چند جمله‌ای P ، که با

$$(10) \quad P(x) = \sum c_{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \quad (x \in R^k)$$

داده شود، بر R^k پیوسته خواهد بود. در اینجا ضرایب $c_{n_1 \dots n_k}$ اعدادی مختلط، $n_1, \dots, n_k$ اعدادی صحیح و نامنفی، و مجموع مذکور در (۱۰) تعدادی متناهی جمله

دارد.

علاوه بر این، هر تابع گویا از $x_1, \dots, x_k$ ، یعنی، هر خارج قسمت دو چندحمله‌ای به شکل (۱۰)، بر R^k هر جا که مخرج مخالف صفر است، پیوسته می‌باشد. از نامساوی مثلثی به آسانی دیده می‌شود که

$$(11) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (x, y \in R^k).$$

پس نگاشت $|x| \rightarrow x$ یک تابع حقیقی و پیوسته بر R^k است.

حال اگر f یک نگاشت پیوسته از فضای متریک X بتوی R^k باشد، و ϕ بر X با $\phi(p) = |f(p)|$ تعریف شود، از قضیه ۷.۴ نتیجه خواهد شد که ϕ یک تابع حقیقی و پیوسته بر X می‌باشد.

۱۲.۴ تبصره. ما مفهوم پیوستگی را برای توابعی تعریف کردیم که بر یک زیرمجموعه چون E از فضای متریک X تعریف شده‌اند. لکن در این تعریف متمم E در X هیچ نقشی رانداشت (توجه کنید که وضع در مورد حدود توابع قدری متفاوت بود). لذا، با حذف متمم از قلمرو f چیز قابل توجهی از کف نخواهد رفت. این یعنی که می‌توان، علاوه بر نگاشتهای از زیرمجموعه‌ها، در باب نگاشتهای پیوسته از یک فضای متریک در دیگری نیز سخن گفت. این عمل بیان و برهان برخی از قضایا را ساده خواهد کرد. ما قبلاً "در قضایای ۸.۴ تا ۱۰.۴ از این اصل استفاده کرده‌ایم، و در بخش زیر که درباره فشردگی است به این کار ادامه خواهیم داد.

پیوستگی و فشردگی

۱۳.۴ تعریف. نگاشت f از مجموعه E بتوی R^k را *گواندار* نامند هرگاه عددی حقیقی مثل M باشد بطوری که به ازای هر $x \in E$ ، $|f(x)| \leq M$.

۱۴.۴ قضیه. فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از فضای متریک و فشرده X بتوی فضای متریک Y باشد. در این صورت، $f(X)$ فشرده خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ پوشش بازی از $f(X)$ باشد. چون f پیوسته است، قضیه ۸.۴ نشان می‌دهد که هر یک از مجموعه‌های $f^{-1}(V_\alpha)$ باز است. و از آنجا که X فشرده است،

تعدادی متناهی اندیس، مثلاً $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، وجود دارند بطوری که

$$(12) \quad X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}).$$

چون به ازای هر $E \subset Y$ ، $E \subset f(f^{-1}(E))$ ، پس (۱۲) ایجاب می‌کند که

$$(13) \quad f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

توجه: ما از رابطه $E \subset f(f^{-1}(E))$ ، که به ازای هر $E \subset Y$ معتبر است، استفاده کرده‌ایم.

هرگاه $E \subset X$ ، آنگاه $E \subset f^{-1}(f(E))$ ، در هیچیک از این حالات لزومی به برقراری تساوی نیست.

حال از قضیه ۱۴.۴ چند نتیجه به دست می‌آوریم.

۱۵.۴ قضیه. هرگاه f یک نگاشت پیوسته از فضای متریک فشرده X بتوی R^k باشد، آنگاه $f(X)$ بسته و کراندار است. لذا، f کراندار خواهد بود.

این از قضیه ۴۱.۲ به دست می‌آید. این نتیجه بخصوص وقتی f حقیقی است اهمیت دارد:

۱۶.۴ قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی پیوسته بر فضای متریک فشرده X باشد، و

$$(14) \quad M = \sup_{p \in X} f(p), \quad m = \inf_{p \in X} f(p).$$

در این صورت، نقاطی مانند $p, q \in X$ هستند بطوری که $f(p) = M$ و $f(q) = m$.

نمادهای (۱۴) به این معنی‌اند که M کوچکترین کران بالایی مجموعه تمام اعدادی چون $f(p)$ است که در آنها p روی X تغییر می‌کند، و m بزرگترین کران پایینی همین مجموعه از اعداد می‌باشد.

این نتیجه به صورت زیر نیز قابل بیان است: نقاطی مانند p و q در X وجود دارند بطوری که به ازای هر $x \in X$ ، $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ ؛ یعنی، f به ماگزیمم خود (در p) و به مینیمم خود (در q) می‌رسد.

برهان. بنابر قضیه ۱۵.۴، $f(X)$ مجموعه‌ای است بسته و کراندار از اعداد حقیقی. پس، بنابر قضیه ۲۸.۲، $f(X)$ شامل

$$M = \sup f(X) , m = \inf f(X)$$

می باشد .

۱۷.۴ قضیه . فرض کنیم f یک نگاشت ۱-۱ پیوسته از فضای متریک و فشرده X بسروی فضای متریک Y باشد . در این صورت ، نگاشت معکوس f^{-1} ، که بر Y یا

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X)$$

تعریف می شود ، یک نگاشت پیوسته از Y بروی X است .

برهان . با اعمال قضیه ۸.۴ در مورد f^{-1} به جای f ، می بینیم کافی است ثابت شود که به ازای هر مجموعه باز V در X ، $f(V)$ یک مجموعه باز در Y است . از این V ها یکی اختیار و آن را ثابت می گیریم .

چون متمم V^c ی مجموعه V در X بسته است ، پس فشرده است (قضیه ۳۵.۲) . لذا ، $f(V^c)$ زیر مجموعه فشرده ای از Y بوده (قضیه ۱۴.۴) ؛ در نتیجه ، در Y بسته می باشد (قضیه ۳۴.۲) . چون f یک به یک و برعکس است ، پس $f(V)$ متمم $f(V^c)$ است . بنابراین ، $f(V)$ باز می باشد .

۱۸.۴ تعریف . فرض کنیم f یک نگاشت از فضای متریک X بتوی فضای متریک Y باشد . می گوئیم f بر X به طور یکنواخت پیوسته است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ی مثبتی باشد بطوری که به ازای هر p و هر q در X که $d_X(p, q) < \delta$ داشته باشیم

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \quad (15)$$

حال به تفاوت های موجود میان مفاهیم پیوستگی و پیوستگی یکنواخت نظری می اندازیم . "اولا" ، پیوستگی یکنواخت خاصیتی از یک تابع بر یک مجموعه است ، حال آنکه پیوستگی را می شود در یک نقطه هم تعریف کرد . اینکه برسیم تابعی در یک نقطه معین به طور یکنواخت پیوسته هست یا نه بی معنی است . ثانياً ، "هرگاه f بر X پیوسته باشد ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر نقطه p از X می توان عددی مانند $\delta > 0$ را طوری یافت که از خاصیت مذکور در تعریف ۵.۴ برخوردار باشد . این δ هم به ε و هم به p بستگی دارد . اما ، اگر f بر X به طور یکنواخت پیوسته باشد ، می توان به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک δ ی مثبت یافت که در تعریف پیوستگی برای تمام نقاط p از X مناسب باشد .

واضح است که هر تابع به طور یکنواخت پیوسته پیوسته است. اینکه این دو مفهوم بر مجموعه‌های فشرده معادلند از قضیه بعدی نتیجه می‌شود.

۱۹.۴ قضیه. فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از فضای متری و فشرده X بتوی فضای متری Y باشد. در این صورت، f بر X به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشد. چون f پیوسته است، می‌توان به هر نقطه $p \in X$ عدد مثبت $\phi(p)$ را قسمی مربوط کرد که

$$(16) \quad d_X(p, q) < \phi(p) \text{ و } q \in X \text{ نامساوی } d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ را ایجاب کنند.}$$

فرض کنیم $J(p)$ مجموعه تمام q هایی در X باشد که برای آنها

$$(17) \quad d_X(p, q) < \frac{1}{2}\phi(p).$$

چون $p \in J(p)$ ، پس گردآیه تمام مجموعه‌های $J(p)$ یک پوشش باز X می‌باشد. و چون X فشرده است، مجموعه‌ای متناهی متشکل از نقاط $p_1, \dots, p_n$ در X هست بطوری که

$$(18) \quad X \subset J(p_1) \cup \dots \cup J(p_n).$$

قرار می‌دهیم

$$(19) \quad \delta = \frac{1}{2} \min [\phi(p_1), \dots, \phi(p_n)].$$

در این صورت، $\delta > 0$. (این یکی از جاهایی است که متناهی بودن پوشش، که در ذات تعریف فشردهگی است، لازم می‌شود. مینیمم یک مجموعه متناهی از اعداد مثبت مثبت است، حال آنکه اینفیمم یک مجموعه نامتناهی از اعداد مثبت ممکن است 0 هم باشد.)
حال فرض کنیم p و q چنان نقاطی از X باشند که $d_X(p, q) < \delta$. بنابر (۱۸)، عدد صحیحی مثل m هست، که $m \leq n$ به‌طوری که $p \in J(p_m)$. در نتیجه،

$$(20) \quad d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\phi(p_m).$$

و نیز داریم

$$d_X(q, p_m) \leq d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\phi(p_m) \leq \phi(p_m).$$

بالاخره، (۱۶) نشان می‌دهد که

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

برهان دیگری در تمرین ۱۵ مختصراً "شرح داده شده است.

حال نشان می‌دهیم که در مفروضات قضایای ۱۴۰۴، ۱۵۰۴، ۱۶۰۴ و ۱۹۰۴ فشردگی لازم است.

۲۰۰۴ قضیه. فرض کنیم E یک مجموعهٔ ناقشرده در R^1 باشد. در این صورت،

(آ) تابعی پیوسته بر E هست که کراندار نیست؛

(ب) تابعی پیوسته و کراندار بر E هست که ماکزیمم ندارد.

هرگاه، علاوه بر این، E کراندار هم باشد، آنگاه

(پ) تابع پیوسته‌ای بر E هست که به طور یکنواخت پیوسته نمی‌باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم E کراندار باشد. در نتیجه، یک نقطهٔ حدی مانند x_0 از E هست که نقطه‌ای از E نیست. تابع

$$(21) \quad f(x) = \frac{1}{x - x_0} \quad (x \in E)$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع بر E پیوسته است (قضیهٔ ۹۰۴)، اما بوضوح کراندار نیست.

برای اثبات اینکه (۲۱) به طور یکنواخت پیوسته نیست، فرض می‌کنیم $\delta > 0$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند، و نقطه‌ای مانند x در E را قسمی اختیار می‌کنیم که $\delta < |x - x_0|$ بی‌توان با اختیار t به قدر کافی نزدیک x_0 ، ضمن اینکه $\delta < |t - x|$ ، تفاضل $|f(t) - f(x)|$ را از ε بزرگتر کرد. چون این مطلب برای هر $\delta > 0$ درست است، پس f بر E به طور یکنواخت پیوسته نمی‌باشد.

تابع g که با

$$(22) \quad g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2} \quad (x \in E)$$

داده شده بر E پیوسته است و، چون $0 < g(x) < 1$ ، کراندار می‌باشد واضح است که

$$\sup_{x \in E} g(x) = 1.$$

حال آنکه به ازای هر $x \in E$ ، $g(x) < 1$ پس g بر E ماکزیمم ندارد.

حال که قضیه برای مجموعه‌های کراندار E ثابت شده، با اجازهٔ شما فرض می‌کنیم E بی‌کران باشد. در این صورت، $x = f(x)$ قسمت (آ) را ثابت می‌کند، در حالی که

$$(23) \quad h(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad (x \in E)$$

قسمت (ب) را تأیید خواهد کرد، زیرا

$$\sup_{x \in E} h(x) = 1$$

و، به ازای هر $x \in E$ ، $h(x) < 1$.

اگر کراندار بودن از مفروضات حذف شده بود، حکم (پ) دیگر برقرار نمی‌گشت. زیرا فرض کنیم E مجموعه تمام اعداد صحیح باشد. در این صورت، هر تابع تعریف شده بر E بر آن به طور یکنواخت پیوسته است. برای اثبات این مطلب فقط کافی است در تعریف δ ، 18.4 را از یک کوچکتر بگیریم.

این بخش را بانسان دادن اینکه در قضیه 17.4 نیز فشردگی لازم است به پایان می‌بریم.

۲۱.۴ مثال. فرض کنیم X بازه نیم باز $[0, 2\pi)$ بر خط حقیقی بوده، f نگاشتی از X بروی دایره Y ، که مرکب از تمام نقاطی است که فاصله شان تا مبدا یک است، باشد که این طور داده شده است:

$$(24) \quad f(t) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

پیوستگی توابع مثلثاتی کسینوس و سینوس و نیز خواص تناوبی آنها در فصل ۸ ثابت می‌شوند. این نتایج نشان می‌دهند که f یک نگاشت ۱-۱ پیوسته از X بروی Y است. با اینحال، نگاشت معکوس (که به دلیل یک به یک و برو بودن f وجود دارد) در نقطه $f(0) = (1, 0)$ پیوسته نیست. البته، X در این مثال فشرد نمی‌باشد. (دیدن اینکه f^{-1} با وجود فشرد بودن Y پیوسته نیست ممکن است جالب باشد!)

پیوستگی و همبندی

۲۲.۴ قضیه. هرگاه f یک نگاشت پیوسته از فضای متری X بتوی فضای متری Y ، و E زیر مجموعه همبندی از X باشد، آنگاه $f(E)$ نیز همبند است.

برهان. فرض کنیم عکس این بوده $f(E) = A \cup B$ که در آن A و B زیر مجموعه‌های ناتهیی و از هم جدا شده‌ای از Y می‌باشند. قرار می‌دهیم $H = E \cap f^{-1}(B)$ ، $G = E \cap f^{-1}(A)$.

پس $E = G \cup H$ و نه G تهی است و نه H .

چون $A \subset \bar{A}$ ($\bar{A}$ بست A است)، داریم $G \subset f^{-1}(\bar{A})$ ، مجموعه دوم بخاطر پیوسته بودن f بسته است. بنابراین، $f^{-1}(\bar{A}) \subset \bar{G}$ از این نتیجه می شود که $f(\bar{G}) \subset \bar{A}$ چون $f(H) \subset B$ و $\bar{A} \cap B$ تهی است، نتیجه می گیریم که $\bar{G} \cap H$ تهی می باشد. همین استدلال نشان می دهد که $\bar{G} \cap H$ تهی است. لذا G و H از هم جدا شده می باشند. این در صورتی که E همبند باشد ممکن نیست.

۲۳.۴ قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد. هرگاه $f(a) < f(b)$ و c عددی باشد که $f(a) < c < f(b)$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست بطوری که $f(x) = c$.

البته، در صورتی که $f(a) > f(b)$ ، نتیجه مشابهی برقرار خواهد بود. به بیان نادقیق، قضیه این را می گوید که هر تابع حقیقی پیوسته بر یک بازه تمام مقادیر میانی را می گیرد.

برهان. $[a, b]$ ، بر طبق قضیه ۴۷.۲، همبند است. پس قضیه ۲۲.۴ نشان می دهد که $f([a, b])$ زیرمجموعه همبندی از R^1 است، و حکم با توسل مجدد به قضیه ۴۷.۲ ثابت می شود.

۲۴.۴ تبصره. در نظر اول ممکن است این طور دیده شود که قضیه ۲۳.۴ عکس دارد. یعنی، شخص ممکن است این تصور را بکند که هرگاه به ازای هر دو نقطه $x_1 < x_2$ و هر عدد حقیقی c بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ نقطه‌ای مانند x در (x_1, x_2) باشد که $f(x) = c$ ، آنگاه f باید پیوسته باشد.

اینکه این مطلب درست نیست را می شود از مثال ۲۷.۴ (ت) نتیجه گرفت.

ناپیوستگیها

هرگاه تابع f در نقطه x از قلمرو تعریف خود پیوسته نباشد، می گوئیم f در x ناپیوسته است، یا اینکه f در x ناپیوستگی دارد. در صورت تعریف شدن f بر یک بازه یا یک قطعه، رسم این است که ناپیوستگیها را به دونوع تقسیم می کنند. پیش از ذکر این رده بندی باید حدود سمت راست و سمت چپ f در x را، که به ترتیب با $f(x+)$ و

$f(x-)$ نشان می‌دهیم، تعریف کنیم.

۲۵.۴ تعریف. فرض کنیم f بر (a, b) تعریف شده باشد. نقطه دلخواه x را قسمی می‌گیریم که $a \leq x < b$ می‌نویسیم

$$f(x+) = q$$

در صورتی که به ازای تمام دنباله‌های $\{t_n\}$ در (x, b) که $t_n \rightarrow x$ ، وقتی $f(t_n) \rightarrow q$ ، $n \rightarrow \infty$ برای رسیدن به تعریف $f(x-)$ به ازای $a < x \leq b$ خود را به دنباله‌های $\{t_n\}$ در (a, x) محدود می‌نماییم.

واضح است که $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$ در هر نقطه x از (a, b) وجود دارد اگر و فقط اگر

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t \rightarrow x} f(t).$$

۲۶.۴ تعریف. فرض کنیم f بر (a, b) تعریف شده باشد. هرگاه f در x ناپیوسته و $f(x+)$ و $f(x-)$ موجود باشند، آنگاه می‌گویند f در x ناپیوستگی از نوع اول، یا ناپیوستگی ساده، دارد. در غیر این صورت، ناپیوستگی از نوع دوم خوانده می‌شود.

یک تابع در دو صورت می‌تواند ناپیوستگی ساده داشته باشد: یا $f(x+) \neq f(x-)$ یا [که در این حالت مقدار $f(x)$ مهم نیست]، یا اینکه $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

۲۷.۴ چند مثال

(ا) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ گویا}) \\ 0 & (x \text{ گنگ}) \end{cases}.$$

در این صورت، f در هر نقطه x ناپیوستگی از نوع دوم دارد، زیرا نه $f(x+)$ موجود است و نه $f(x-)$.

(ب) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ گویا}) \\ 0 & (x \text{ گنگ}) \end{cases}.$$

در این صورت، f در $x=0$ پیوسته است، و در هر نقطه دیگر ناپیوستگی از نوع دوم دارد.

(پ) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (-3 < x < -2), \\ -x-2 & (-2 \leq x < 0), \\ x+2 & (0 \leq x < 1). \end{cases}$$

در این صورت، f در $x=0$ ناپیوستگی ساده دارد، و در هر نقطه دیگر $(-3, 1)$ پیوسته است.

(ت) تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

چون نه $f(0+)$ وجود دارد و نه $f(0-)$ ، پس f در $x=0$ ناپیوستگی از نوع دوم دارد. تا بحال نشان نداده‌ایم که $\sin x$ یک تابع پیوسته است. اگر این نتیجه را یک آن بپذیریم، قضیه ۲۰۴ پیوسته بودن f را در هر نقطه $x \neq 0$ ایجاب خواهد کرد.

توابع یکنوا

حال آن توابعی را بررسی می‌کنیم که بر یک قطعه مفروض هرگز نزول (و یا صعود) نمی‌کنند.

۲۸.۴ تعریف. فرض کنیم f بر (a, b) حقیقی باشد. در این صورت، گوئیم f بر (a, b) صعودی است هرگاه $a < x < y < b$ نامساوی $f(x) \leq f(y)$ را ایجاب کند. چنانچه جهت آخرین نامساوی عوض شود، تعریف نزولی بودن یک تابع را خواهیم داشت. رده توابع یکنوا از تابه‌ای صعودی و تابه‌ای نزولی تشکیل شده است.

۲۹.۴ قضیه. فرض کنیم f بر (a, b) صعودی باشد. در این صورت، $f(x+)$ و $f(x-)$ در هر نقطه x از (a, b) وجود دارند. به عبارت دقیقتر،

$$(25) \quad \sup_{a < t < x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x < t < b} f(t).$$

بعلاوه، هرگاه $a < x < y < b$ نگاه

$$(26) \quad f(x+) \leq f(y-).$$

واضح است که برای توابع نزولی نتایج مشابهی برقرارند.

برهان. بنا به فرض، مجموعه $f(t)$ ها، که در آنها $a < t < x$ ، از بالا به $f(x)$ کراندار است، و لذا، کوچکترین کران بالایی دارد که ما آن را با A نشان می‌دهیم. واضح است که $A \leq f(x)$ باید ثابت کنیم $A = f(x)$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از تعریف A به عنوان کوچکترین کران بالایی معلوم می‌شود که عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که $x - \delta < x - a$ و

$$(27) \quad A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A.$$

چون f یکنواست، داریم

$$(28) \quad f(x - \delta) \leq f(t) \leq A \quad (x - \delta < t < x).$$

چنانچه (۲۷) و (۲۸) را با هم تلفیق کنیم، خواهیم دید که

$$|f(t) - A| < \varepsilon \quad (x - \delta < t < x).$$

پس $f(x-) = A$.

قسمت دوم (۲۵) درست به همین نحو ثابت می‌شود.

اینک، اگر $a < x < y < b$ از (۲۵) می‌بینیم که

$$(29) \quad f(x+) = \inf_{x < t < b} f(t) = \inf_{x < t < y} f(t).$$

تساوی آخر از اعمال (۲۵) در مورد (a, y) به جای (a, b) به دست آمده است. به همین نحو،

$$(30) \quad f(y-) = \sup_{a < t < y} f(t) = \sup_{x < t < y} f(t).$$

مقایسه (۲۹) با (۳۰) نامساوی (۲۶) را خواهد داد.

نتیجه. توابع یکنوا ناپیوستگی از نوع دوم ندارند.

این نتیجه ایجاب می‌کند که هر تابع یکنوا حداکثر در تعدادی شمارشپذیر نقطه ناپیوسته است. به جای توسل به قضیه کلی که اثباتش مختصراً "در تمرین ۱۷ آمده، ما در اینجا برهان ساده‌ای را می‌آوریم که در مورد توابع یکنوا قابل اجراست.

۳۰.۴ قضیه. فرض کنیم f بر (a, b) یکنوا باشد. در این صورت، مجموعه نقاطی از

(a, b) که در آنها f ناپیوسته است حداکثر شمارشپذیر می باشد .

برهان . برای مشخص بودن وضع ، فرض می کنیم f صعودی باشد ، و E را مجموعه نقاطی می انگاریم که f در آنها ناپیوسته است .

به هر x از E عدد گویای $r(x)$ را طوری مربوط می کنیم که

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

چون $x_1 < x_2$ نامساوی $f(x_1+) \leq f(x_2-)$ را ایجاب می کند ، ملاحظه می کنیم که اگر

$$r(x_1) \neq r(x_2) \Leftarrow x_1 \neq x_2$$

پس بین مجموعه E و زیر مجموعه ای از مجموعه اعداد گویا تناظر 1-1 ی برقرار

کرده ایم . مجموعه دوم ، همانطور که می دانیم ، شمارشپذیر است .

۳۱.۴ تبصره . باید توجه داشت کنه ناپیوستگیهای یک تابع یکنوا لزوماً " تنها نیستند . در واقع ، به ازای هر زیر مجموعه شمارشپذیر E از (a, b) ، که حتی ممکن است چگال باشد ، می توان تابع f را طوری ساخت که بر (a, b) یکنوا و بر آن فقط در نقاط E ناپیوسته باشد .

برای اثبات این مطلب ، فرض می کنیم نقاط E را به صورت دنباله $\{x_n\}$ آراسته باشیم . $n = 1, 2, 3, \dots$. $\{c_n\}$ را دنباله ای از اعداد مثبت می گیریم بطوری که $\sum c_n$ همگرا باشد . تعریف می کنیم

$$(31) \quad f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \quad (a < x < b).$$

جمع بندی به صورت زیر فرض شده است : مجموع روی آن اندیسهای n گرفته می شود که برای آنها $x < x_n$. اگر هیچ x_n ی سمت چپ x نباشد ، مجموع تهی است . از آنچه رسم است پیروی کرده آن را صفر تعریف می کنیم . چون (۳۱) به طور مطلق همگراست ، ترتیبی که با آن جملات آراسته می شوند اهمیتی نخواهد داشت . تحقیق خواص زیر در مورد f را به خواننده وا می گذاریم :

(۱) f بر (a, b) صعودی است ؛

(ب) f در هر نقطه E ناپیوسته است ؛ در واقع ،

$$f(x_n+) - f(x_n-) = c_n ;$$

(پ) f در هر نقطه دیگر (a, b) پیوسته می باشد

بعلاوه، اثبات اینکه در تمام نقاط (a, b) ، $f(x-) = f(x)$ ، کار مشکلی نخواهد بود. هرگاه تابعی در این شرط صدق کند، می‌گوییم f از چپ پیوسته است. چنانچه در (۳۱) جمع‌بندی روی تمام اندیسهای n گرفته می‌شد که به ازای آنها $x_n \leq x$ ، ما در هر نقطه (a, b) می‌داشتیم $f(x+) = f(x)$ ؛ یعنی، f از راست پیوسته می‌بود. توابع از این نوع را می‌توان با روشی دیگر نیز تعریف کرد؛ برای دیدن نمونه، شما را به قضیه ۱۶.۶ ارجاع می‌دهیم.

حدود نامتناهی و حدود دربی‌نهایت

حال برای آنکه بتوان در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی کار کرد، دامنه تعریف ۱.۴ را، با تنظیم مجددش برحسب همسایگیها، وسعت می‌بخشیم. قبلاً، "به ازای هر عدد حقیقی x ، هر قطعه $(x - \delta, x + \delta)$ را یک همسایگی x تعریف کرده‌ایم.

۳۲.۴ تعریف. به ازای هر c حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی x که $c > x$ یک همسایگی $+\infty$ نام دارد و به صورت $(c, +\infty)$ نوشته می‌شود. بهمین نحو، مجموعه $(-\infty, c)$ یک همسایگی $-\infty$ می‌باشد.

۳۳.۴ تعریف. فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد که بر E تعریف شده است. گوییم

$$\text{وقتی } t \rightarrow x, f(t) \rightarrow A$$

(که در آن A و x در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی اند) هرگاه به ازای هر همسایگی U از A همسایگی V از x باشد بطوری که $V \cap E$ تهی نبوده و به ازای هر $t \in V \cap E$ که $t \neq x$ ، $f(t) \in U$.

لحظه‌ای تأمل معلوم می‌سازد که این در حالتی که A و x حقیقی هستند با تعریف ۱.۴ یکی است.

مشابه قضیه ۴.۴ هنوز هم درست است، و برهان آن چیز تازه‌ای به دست نمی‌دهد. ما آن را برای تکمیل بحث بیان می‌داریم.

۳۴.۴ قضیه. فرض کنیم f و g بر E تعریف شده باشند. همچنین،

وقتی $g(t) \rightarrow B$ و $f(t) \rightarrow A, t \rightarrow x$

در این صورت ،

(آ) $f(t) \rightarrow A'$ ایجاب می‌کند که $A' = A$ ؛

(ب) $(f+g)(t) \rightarrow A+B$ ؛

(پ) $(fg)(t) \rightarrow AB$ ؛

(ت) $(f/g)(t) \rightarrow A/B$ ؛

مشروط بر اینکه طرفهای راست (ب)، (پ)، و (ت) تعریف شده باشند .

توجه دارید که $-\infty < 0 < \infty$ ، ∞/∞ و $A/0$ تعریف نشده‌اند (ر.ک. تعریف

۰ (۲۳۰۱)

تمرین

۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی تعریف شده بر R^1 باشد که در

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

به ازای هر $x \in R^1$ صدق می‌کند . آیا این پیوسته بودن f را ایجاب خواهد کرد ؟

۲. هرگاه f نگاشت پیوسته‌ای از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد ، ثابت کنید به

ازای هر مجموعه $E \subset X$ ،

$$f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)} .$$

($\bar{E}$ بست E را نشان می‌دهد) . بایک مثال نشان دهید که $f(\bar{E})$ می‌تواند یک زیر-مجموعه حقیقی $\overline{f(E)}$ باشد .

۳. فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر فضای متری X باشد . $(Z(f))$ (مجموعه صفر f) را مجموعه تمام p هایی در X بگیرید که در آنها $f(p) = 0$. ثابت کنید

$Z(f)$ بسته است .

۴. فرض کنید f و g نگاشت‌های پیوسته‌ای از فضای متری X بتوی فضای متری Y ، و

E یک زیر مجموعه چگال X باشد . ثابت کنید $f(E)$ در $f(X)$ چگال است . هرگاه

به ازای هر $p \in E$ ، $g(p) = f(p)$ ، ثابت کنید به ازای هر $p \in X$ ، $g(p) = f(p)$.

(به عبارت دیگر ، یک نگاشت پیوسته با مقادیرش بر زیر مجموعه چگالی از قلمرو خود

مشخص می‌شود .)

۵. هرگاه f یک تابع حقیقی پیوسته باشد که بر مجموعه بسته $E \subset R^1$ تعریف شده است ،

- ثابت کنید تابعی حقیقی و پیوسته بر R^1 چون g هست بطوری که به ازای هر $x \in E$ ، $g(x) = f(x)$. (این g ها را توسیعیهای پیوسته f از E به R^1 می نامند .) نشان دهید که نتیجه فوق با حذف کلمه " بسته " درست نیست . این نتیجه را به توابع برداری تعمیم دهید . راهنمایی: فرض کنید نمودار g بر هر یک از قطعه‌هایی که متمم E را می سازند خطی مستقیم است (قس . تمرین ۲۹ در فصل ۲) . هرگاه به جای R^1 یک فضای متری بگذاریم ، نتیجه مورد نظر باز هم برقرار است ، لکن اثباتش چندان ساده نخواهد بود .
- ۶ . هرگاه f بر E تعریف شده باشد ، نمودار f مجموعه نقاطی چون $(x, f(x))$ است که $x \in E$ بخصوص ، اگر E مجموعه اعداد حقیقی و f یک تابع حقیقی باشد ، نمودار f زیر مجموعه‌ای از صفحه خواهد بود .
- فرض کنید E فشرده باشد ، و ثابت کنید f بر E پیوسته است اگر و فقط اگر نمودار f فشرده باشد .
- ۷ . هرگاه $E \subset X$ و f تابعی تعریف شده بر X باشد ، تحدید f به E تابعی است چون g که قلمرو تعریفش E بوده و ، به ازای هر $p \in E$ $g(p) = f(p)$. f و g را بر R^2 این طور تعریف کنید : $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ ؛ اگر $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ و $g(x, y) = xy^2/(x^2 + y^6)$. ثابت کنید f بر R^2 کراندار است ، g در هر همسایگی $(0, 0)$ بی کران است ، و f در $(0, 0)$ پیوسته نیست ؛ معذرا ، تحدیدهای هم f و هم g به هر خط مستقیم در R^2 پیوسته می باشند !
- ۸ . فرض کنید تابع حقیقی f بر مجموعه کراندار E در R^1 به طور یکنواخت پیوسته باشد . ثابت کنید f بر E کراندار است .
- نشان دهید که اگر کراندار بودن E از مفروضات حذف شود ، نتیجه فوق درست نخواهد بود .
- ۹ . نشان دهید که تعریف پیوستگی یکنواخت را می توان بر حسب اقطار مجموعه‌ها این طور بیان کرد : به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ی مثبتی باشد بطوری که به ازای هر $E \subset X$ که $\text{diam } E < \delta$ ، $\text{diam } f(E) < \varepsilon$.
- ۱۰ . جزئیات مربوط به گفته زیر را ، که برهان دیگری از قضیه ۱۹.۴ است ، کامل نمایید : هرگاه f به طور یکنواخت پیوسته نباشد ، آنگاه ، به ازای ε مثبتی ، دنباله‌های $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ در X هستند بطوری که $d_X(p_n, q_n) \rightarrow 0$ ولی $d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$. با استفاده از قضیه ۳۷.۲ تناقضی به دست آورید .
- ۱۱ . فرض کنید f نگاشتی باشد به طور یکنواخت پیوسته از فضای متری X بتوی فضای

متری γ ، و ثابت کنید به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X ، $\{f(x_n)\}$ یک دنباله کشی در Y است. با استفاده از این نتیجه، برهان دیگری برای قضیه مذکور در تمرین ۱۳ ارائه دهید.

۱۲. هر تابع به طور یکنواخت پیوسته از یک تابع به طور یکنواخت پیوسته خود یک تابع به طور یکنواخت پیوسته است.

این مطلب را دقیقتر بیان کرده آن را اثبات نمایید.

۱۳. فرض کنید E یک زیر مجموعه چگال فضای متری X ، و f یک تابع حقیقی و به طور یکنواخت پیوسته باشد که بر E تعریف شده است. ثابت کنید f توسیع پیوسته ای از E به X دارد (برای اصطلاح مربوطه، ر. ک. تمرین ۵). (یکتایی توسیع از تمرین ۴ نتیجه می شود.) راهنمایی: به ازای هر $p \in X$ و هر عدد صحیح و مثبت n ، فرض کنید $V_n(p)$ مجموعه تمام q هایی در E باشد که $d(p, q) < 1/n$. با استفاده از تمرین ۹ نشان دهید که اشتراک بستمای مجموعه های $f(V_1(p))$ ، $f(V_2(p))$ ، ... از یک نقطه در R^1 ، مثلاً " $g(p)$ "، تشکیل شده است. ثابت کنید تابع g که بر X این طور تعریف شود همان توسیع مطلوب f است.

آیا می شد فضای برد، یعنی R^1 ، را با R^* ، با هر فضای متری فشرده، با هر فضای متری نام، و یا با هر فضای متری عوض کرد؟

۱۴. فرض کنید $I = [0, 1]$ بازه یکپسته باشد. f را یک نگاشت پیوسته از I بتوی I بیگارید.

• $f(x) = x$ ، $x \in I$ یک بازه از دست کم یک $x \in I$ را نگاشت f از X بتوی Y را باز خوانند هرگاه به ازای هر مجموعه باز V در X ، $f(V)$ مجموعه باز Y باشد.

ثبت کنید هر نگاشت باز پیوسته از R^1 بتوی R^1 یکنوا است.

۱۶. فرض کنید $[x]$ بزرگترین عدد صحیح موجود در x باشد، یعنی، $[x]$ عدد صحیحی باشد که $x - 1 < [x] \leq x$ ؛ و $(x) = x - [x]$ را جزء کسری x فرض کنید. ناپیوستگیهای توابع $[x]$ و (x) چه هستند؟

۱۷. فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که بر (a, b) تعریف شده است. ثابت کنید مجموعه نقاطی که در آنها f ناپیوستگی ساده دارد حداکثر شمارشپذیر است. راهنمایی: فرض کنید E مجموعه ای باشد که بر آن $f(x-) < f(x+)$ به هر نقطه x از E سه تایی (p, q, r) از اعداد گویا را چنان مربوط کنید که

$$f(x-) < p < f(x+)(\bar{f})$$

(ب) $a < q < t < x$ رابطه $f(t) < p$ را ایجاب کند؛

(پ) $x < t < r < b$ رابطه $f(t) > p$ را ایجاب نماید.

مجموعه تمام این سه تایپها شمارشپذیر است. نشان دهید که هر سه تایپ به حداکثر یک نقطه از E مربوط است. همین روش را برای ناپیوستگیهای ساده نوع دیگر به کار برید.

۱. هر عدد گویای x را می توان به شکل $x = m/n$ نوشت که در آن $n > 0$ ، m و n اعداد صحیح بدون مقسوم علیه مشترک باشند. وقتی $x = 0$ ، n را مساوی ۱ بگیرید. تابع f را، که بر R^1 با روابط زیر تعریف شده، در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ گنگ}), \\ \frac{1}{n} & (x = \frac{m}{n}). \end{cases}$$

ثابت کنید f در هر نقطه گنگ پیوسته است، و در هر نقطه گویا ناپیوستگی ساده دارد.

۱. فرض کنید f یک تابع حقیقی با قلمرو R^1 باشد که خاصیت مقدار میانی دارد: هرگاه

$f(a) < c < f(b)$ ، آنگاه به ازای x ی بین a و b ، $f(x) = c$ ، همچنین، فرض

کنید به ازای هر r گویا، مجموعه تمام x هایی که $f(x) = r$ بسته باشد. ثابت کنید

f پیوسته است. راهنمایی: هرگاه $x_n \rightarrow x_0$ اما به ازای r و هر

n ، $f(x_n) > r > f(x_0)$ ، آنگاه t_n ی بین x_n و x_0 هست که $f(t_n) = r$.

پس $t_n \rightarrow x_0$. حال تناقض به دست آورید.^۱

۲. هرگاه E زیر مجموعه ای ناتهی از فضای متری X باشد، فاصله $x \in X$ تا E را با رابطه

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$$

تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید $\rho_E(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x \in E$.

(ب) با نشان دادن اینکه به ازای هر $x, y \in X$ ،

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$$

ثابت کنید ρ_E بر X به طور یکنواخت پیوسته است.

راهنمایی: $\rho_E(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. در نتیجه،

$$\rho_E(x) \leq d(x, y) + \rho_E(y)$$

۲۱. فرض کنید K و F مجموعه‌هایی از هم جدا در فضای متریک X ، و K فشرده و F

بسته باشد. ثابت کنید δ ی مثبتی هست بطوری که اگر $q \in F$ و $p \in K$ و $d(p, q) > \delta$.

راهنمایی: ρ_F تابع مثبت پیوسته‌ای بر K است.

نشان دهید که نتیجه فوق ممکن است برای دو مجموعه بسته از هم جدا که هیچیک فشرده نیست برقرار نباشد.

۲۲. فرض کنید A و B مجموعه‌هایی بسته و ناتهی و از هم جدا در فضای متریک X باشند،

و تعریف کنید

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \quad (p \in X).$$

نشان دهید که f بر X تابع پیوسته‌ای است که بردش در $[0, 1]$ قرار دارد؛ همچنین،

فقط بر A ، $f(p) = 0$ ، و فقط بر B ، $f(p) = 1$. این مطلب عکس تمرین ۳ را به ما

می‌دهد: هر مجموعه بسته $A \subset X$ به ازای تابع حقیقی و پیوسته‌ای مانند f بر X ،

مساوی $Z(f)$ است. با فرض $V = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ ، $W = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ نشان

دهید که V و W باز و از هم جدا هستند، و $A \subset V$ ، $B \subset W$. (لذا، هر جفت مجموعه

بسته از هم جدا در یک فضای متریک را می‌توان با جفتی از مجموعه‌های باز از هم -

جدا پوشانید. این خاصیت فضاهای متریک را خاصیت نرمالی می‌نامند.)

۲۳. تابع حقیقی f تعریف شده در (a, b) را محدب خوانند هرگاه وقتی

$$a < x < b, a < y < b, \text{ و } 0 < \lambda < 1 \text{ داشته باشیم}$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

ثابت کنید هر تابع محدب پیوسته است. ثابت کنید هر تابع محدب صعودی از یک

تابع محدب یک تابع محدب است. (به عنوان مثال، اگر f محدب باشد، e^f نیز

چنین است.)

هرگاه f در (a, b) محدب باشد و $a < s < t < u < b$ ، نشان دهید که

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}.$$

۲۴. فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته باشد که در (a, b) تعریف شده است بطوری

که به ازای هر $x, y \in (a, b)$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

ثابت کنید f محدب است.

۲۵. هرگاه R^k ، $A \subset R^k$ و $B \subset R^k$ ، $A+B$ را مجموعه تمام مجموعه‌های $x+y$ که $x \in A$ و $y \in B$ تعریف کنید.

(۱) هرگاه در R^k مجموعه K فشرده و C بسته باشد، ثابت کنید $K+C$ بسته است. راهنمایی: فرض کنید $z \notin K+C$. قرار دهید $F = z - C$ ؛ یعنی، مجموعه تمام $z-y$ هایی که $y \in C$. در این صورت، K و F از هم جدا هستند. δ را مثل تمرین ۲۱ اختیار کنید. نشان دهید که گوی باز به مرکز z و شعاع δ مجموعه $K+C$ را قطع نمی‌کند.

(ب) فرض کنید α عدد گنگی باشد. همچنین، C_1 مجموعه تمام اعداد صحیح، و C_2 مجموعه همه $n\alpha$ هایی باشد که $n \in C_1$. با نشان دادن اینکه $C_1 + C_2$ یک زیرمجموعه چگال و شمارشپذیر R^1 است، ثابت کنید C_1 و C_2 زیرمجموعه‌های بسته R^1 اند در حالی که مجموع $C_1 + C_2$ بسته نیست.

۲۶. فرض کنید X ، Y ، و Z فضاهایی متری باشند و Y فشرده باشد. f را نگاشتی بینگارید

که X را بتوی Y می‌نگارد، g را نگاشت یک به یک پیوسته‌ای از Y بتوی Z بگیرید، و به ازای هر $x \in X$ قرار دهید $h(x) = g(f(x))$.

ثابت کنید که اگر h به طور یکنواخت پیوسته باشد، f نیز چنین است. راهنمایی: g^{-1} دایر قلمرو فشرده $g(Y)$ است، و $f(x) = g^{-1}(h(x))$.

همچنین، ثابت کنید که اگر h پیوسته باشد، f نیز چنین خواهد بود.

(با اصلاح مثال ۲۱.۴ و یا با مثالی دیگر) نشان دهید که حتی وقتی X و Z هم فشرده باشند، فشردگی Y را نمی‌شود از مفروضات حذف کرد.



مشتقگیری

در این فصل (جز در بخش آخر) نظر خود را معطوف توابع حقیقی می‌کنیم که بر بازه‌ها و یا قطعه‌هایی تعریف شده‌اند. این کار صرفاً "برای راحتی صورت نمی‌گیرد، چرا که تفاوت‌های ذاتی وقتی ظاهر شوند که ما از توابع حقیقی به تابعهای برداری برویم. مشتقگیری از تابعهایی که بر $\mathbb{R}^k$ تعریف شده‌اند در فصل ۹ مطرح خواهد شد.

مشتق يك تابع حقیقی

۱۰۵ تعریف. فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد (و حقیقی باشد). به ازای هر $x \in [a, b]$

$$(1) \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x)$$

را تشکیل داده، تعریف می‌کنیم

$$(2) \quad f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t),$$

مشروط بر آنکه این حد طبق تعریف ۱۰۴ وجود داشته باشد.

پس به تابع f تابع f' مربوط می‌شود که قلمروش مجموعه x هایی است که در آنها حد (۲) وجود دارد. f' را مشتق f نام نهاده‌اند.

هرگاه f' در نقطه x تعریف شده باشد، می‌گوییم f در x مشتقپذیر است. چنانچه f' در هر نقطه از مجموعه $E \subset [a, b]$ تعریف شده باشد، گوییم f بر E مشتقپذیر می‌باشد. در (۲) می‌توان حدود سمت راست و سمت چپ را در نظر گرفت. این امر به تعریف مشتقهای سمت راست و سمت چپ منجر می‌شود. بخصوص، در نقاط انتهایی a و b ، مشتق،

در صورت وجود، به ترتیب مشتق سمت راست یا سمت چپ می باشد. بهر حال، ما در جزئیات مشتقهای یکطرفه وارد نخواهیم شد.

هرگاه f بر قطعه (a, b) تعریف شده $a < x < b$ ، $f'(x)$ ، مثل بالا، به وسیله (۱) و (۲) تعریف می شود. لکن در این حالت $f'(a)$ و $f'(b)$ تعریف نشده اند.

۲.۵ قضیه. فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. هرگاه f در نقطه $x \in [a, b]$ مشتقپذیر باشد، f در x پیوسته است.

برهان. وقتی $x \rightarrow t$ ، بنابر قضیه ۴.۴، داریم

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \rightarrow f'(x) \cdot 0 = 0.$$

عکس این قضیه درست نیست. به آسانی می توان توابع پیوسته ای ساخت که در نقاط تنها مشتقپذیر نباشند. حتی در فصل ۷ با تابعی آشنا می شویم که بر تمام خط پیوسته است بی آنکه در نقطه ای مشتقپذیر باشد!

۳.۵ قضیه. فرض کنیم f و g بر $[a, b]$ تعریف شده و در نقطه $x \in [a, b]$ مشتقپذیر باشند. در این صورت، $f + g$ ، fg ، و f/g در x مشتقپذیرند، و

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (\text{آ})$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{ب})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{پ})$$

البته، در (پ)، فرض می کنیم $g(x) \neq 0$.

برهان. (آ)، بنابر قضیه ۴.۴، واضح است. قرار می دهیم $h = fg$ در این صورت،

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)].$$

اگر این رابطه را بر $t - x$ تقسیم کرده، توجه کنیم که وقتی $t \rightarrow x$ ، $f(t) \rightarrow f(x)$ (قضیه ۲.۵)، (ب) نتیجه خواهد شد. حال قرار می دهیم $h = f/g$ در این صورت،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)} \left[g(x) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x) \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right].$$

چنانچه $x \rightarrow t$ ، و قضایای ۴۰۴ و ۲۰۵ را به کار ببریم، (پ) به دستمان خواهد رسید.

۴۰۵ چند مثال. مشتق هر مقدار ثابت بوضوح صفر است. هرگاه f با $x = f(x)$ تعریف شده باشد، $f'(x) = 1$. پس با به کار بردن مکرر (-) و (پ) معلوم می شود که x^n مشتق پذیر است و مشتق آن به ازای هر عدد صحیح n مساوی nx^{n-1} می باشد (اگر $n < 0$ ، باید خود را به $x \neq 0$ مقید نماییم). لذا، هر چند جمله ای مشتق پذیر است، و همچنین، هر تابع گویا، جز در نقاطی که مخرجش صفر است، مشتق پذیر می باشد.

قضیه زیر به "قاعده زنجیره ای" برای مشتگیری معروف شده است. این قاعده به مشتگیری از توابع مرکب می پردازد، و احتمالاً "مهمترین قضیه در باب مشتقها است. ما صورتهای کلیتر آن را در فصل ۹ خواهیم دید.

۵۰۵ قضیه. فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته بوده، $f'(x)$ در نقطه ای چون $x \in [a, b]$ وجود داشته باشد، g بر بازه I که شامل برد f است تعریف شده باشد، و g در نقطه $f(x)$ مشتق پذیر باشد. هرگاه

$$h(t) = g(f(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

آنگاه h در x مشتق پذیر است، و

$$(3) \quad h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

برهان. قرار می دهیم $y = f(x)$. بنا به تعریف مشتق داریم

$$(4) \quad f(t) - f(x) = (t - x)[f'(x) + u(t)],$$

$$(5) \quad g(s) - g(y) = (s - y)[g'(y) + v(s)],$$

که در آنها $t \in [a, b]$ ، $s \in I$ ، و وقتی $t \rightarrow x$ ، $u(t) \rightarrow 0$ ، و وقتی $s \rightarrow y$ ، $v(s) \rightarrow 0$. قرار می دهیم $s = f(t)$. اگر اول از (۵) و بعد از (۴) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$h(t) - h(x) = g(f(t)) - g(f(x))$$

$$= [f(t) - f(x)] \cdot [g'(y) + v(s)]$$

$$= (t - x) \cdot [f'(x) + u(t)] \cdot [g'(y) + v(s)],$$

یا، اگر $t \neq x$ ،

$$(6) \quad \frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [g'(y) + v(s)] \cdot [f'(x) + u(t)].$$

با فرض $t \rightarrow x$ ، از پیوستگی f معلوم می‌شود که $y \rightarrow s$ ؛ در نتیجه، طرف راست (۶) به $g'(y)f'(x)$ میل می‌کند، که (۳) را به دست خواهد داد.

۶.۵ چند مثال

(۱) فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

با این فرض که مشتق $\sin x$ مساوی $\cos x$ است (توابع مثلثاتی در فصل ۸ مطرح می‌شوند)، می‌توانیم قضایای ۳.۵ و ۵.۵ را به ازای $x \neq 0$ به کار برده نتیجه بگیریم که

$$(8) \quad f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

این قضایا در $x = 0$ قابل اعمال نیستند، زیرا $1/x$ در آن تعریف نشده است، و در این مورد ما مستقیماً "به تعریف متوسل می‌شویم: به ازای $t \neq 0$ داریم

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \sin \frac{1}{t}.$$

وقتی $t \rightarrow 0$ ، مقدار فوق به حدی نمی‌گراید؛ پس $f'(0)$ وجود نخواهد داشت.

(ب) فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(9) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

مثل بالا داریم

$$(10) \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

در $x = 0$ ، به تعریف متوسل شده به دست می‌آوریم که

$$\left| \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \right| = \left| t \sin \frac{1}{t} \right| \leq |t| \quad (t \neq 0).$$

با فرض $t \rightarrow 0$ خواهیم دید که

$$(11) \quad f'(0) = 0.$$

پس f در تمام x ها مشتقپذیر است. اما f' تابع پیوسته‌ای نیست، زیرا وقتی $x \rightarrow 0$ ، $\cos(1/x)$ در (۱۰) به حدی میل نمی‌کند.

قضایای مقدار میانی

۷.۵ تعریف. فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد که بر فضای متری X تعریف شده است.

می‌گوییم f در نقطه $p \in X$ ماکزیمم موضعی دارد هرگاه δ مثبتی باشد بطوری که به ازای هر $q \in X$ که $d(p, q) < \delta$ داشته باشیم $f(q) \leq f(p)$.
مینیممهای موضعی به همین نحو تعریف می‌شوند.

قضیه بعدی اساس بسیاری از کاربردهای مشتقگیری می‌باشد.

۸.۵ قضیه. فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. هرگاه f در نقطه $x \in (a, b)$ ماکزیمم موضعی داشته و $f'(x)$ موجود باشد، آنگاه $f'(x) = 0$.
البته، برای مینیممهای موضعی نیز حکم مشابهی برقرار است.

برهان. δ را طبق تعریف ۷.۵ اختیار می‌کنیم بطوری که

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b.$$

هرگاه $x - \delta < t < x$ ، آنگاه

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

با فرض $x \rightarrow t$ مشاهده می‌کنیم که $f'(x) \geq 0$.

هرگاه $x < t < x + \delta$ ، آنگاه

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0,$$

که نشان می‌دهد که $f'(x) \leq 0$. پس $f'(x) = 0$.

۹.۵ قضیه. هرگاه f و g توابع حقیقی و پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشند که در (a, b) مشتقپذیرند، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که در آن

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

توجه کنید که در نقاط انتهایی مشتقپذیری لازم نیست.

برهان. قرار می‌دهیم

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

در این صورت، h بر $[a, b]$ پیوسته است، h در (a, b) مشتقپذیر است، و

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

برای اثبات قضیه باید نشان داد که به ازای x در (a, b) ، $h'(x) = 0$.
 گوییم اگر h ثابت باشد ، این رابطه برای هر $x \in (a, b)$ برقرار است . هرگاه به ازای t ای در (a, b) ، $h(t) > h(a)$ ، x را نقطه‌ای در $[a, b]$ می‌گیریم که در آن h به ماکزیمم خود می‌رسد (قضیه ۱۶۰۴) . بنابر (۱۲) ، $x \in (a, b)$ ، و قضیه ۸۰۵ نشان می‌دهد که $h'(x) = 0$. چنانچه به ازای t ای در (a, b) ، $h(t) < h(a)$ ، در صورتی که برای x نقطه‌ای در $[a, b]$ اختیار شود که h در آن به مینیمم می‌رسد ، همان استدلال بالا اعتبار خواهد داشت .

این قضیه را اغلب قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته می‌خوانند ؛ حالت خاص زیر است که معمولاً "قضیه مقدار میانگین" نام دارد .

۱۰۰۵ قضیه . هرگاه f یک تابع پیوسته حقیقی بر $[a, b]$ باشد که در (a, b) مشتقپذیر است ، آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که در آن

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

برهان . در قضیه ۹۰۵ ، $g(x)$ را مساوی x اختیار کنید .

۱۱۰۵ قضیه . فرض کنیم f در (a, b) مشتقپذیر باشد .
 (آ) هرگاه به ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) \geq 0$ ، آنگاه f صعودی است .
 (ب) هرگاه به ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) = 0$ ، آنگاه f ثابت است .
 (پ) هرگاه به ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) \leq 0$ ، آنگاه f نزولی خواهد بود .

برهان . تمام احکام را می‌توان از معادله

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x),$$

که به ازای هر جفت x_1 و x_2 در (a, b) و x ی بین x_1 و x_2 معتبر است ، به دست آورد .

پیوستگی مشتقها

قبلاً دیده‌ایم [مثال ۶۰۵ (ب)] که ممکن است f' در هر نقطه وجود داشته ولی در نقطه‌ای

ناپیوسته باشد. لکن این طور نیست که هر تابع مشتق تابعی باشد. بخصوص. مشتق‌هایی که در هر نقطه از یک بازه وجود دارند با توابع پیوسته بر یک بازه در یک خاصیت سهیمند: این مشتقها مقادیر میانی خود را می‌گیرند (قس. قضیه ۲۳.۴). بیان دقیق مطلب در زیر آمده است.

۱۲.۵ قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی مشتق‌پذیر بر $[a, b]$ باشد و $f'(a) < \lambda < f'(b)$ در این صورت، نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ هست که $f'(x) = \lambda$. البته، در صورتی که $f'(a) > f'(b)$ ، نتیجه مشابهی برقرار است.

برهان. قرار می‌دهیم $g(t) = f(t) - \lambda t$. در این صورت، $g'(a) < 0$ پس به ازای t_1 ی در (a, b) ، $g(t_1) < g(a)$ و $g'(b) > 0$ پس به ازای t_2 ی در (a, b) ، $g(t_2) < g(b)$ از اینرو، g در نقطه‌ای چون x که $a < x < b$ به مینیمم خود بر $[a, b]$ می‌رسد (قضیه ۱۶.۴) بر طبق قضیه ۰.۸.۵، $g'(x) = 0$ ، بنابراین $f''(x) = \lambda$.

نتیجه. هرگاه f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f' نمی‌تواند بر $[a, b]$ ناپیوستگی ساده داشته باشد.

اما f' ممکن است ناپیوستگیهایی از نوع دوم داشته باشد.

قاعده هوییتال^۱

قضیه زیر در محاسبه حدود کرارا^۲ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱۳.۵ قضیه. فرض کنیم f و g در (a, b) حقیقی و مشتق‌پذیر باشند و به ازای هر $x \in (a, b)$ ، $g'(x) \neq 0$ ، که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ بگیریم

$$(13) \quad \text{وقتی } \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow A, \quad x \rightarrow a$$

هرگاه

$$(14) \quad \text{وقتی } f(x) \rightarrow 0, \quad g(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow a$$

$$(15) \quad \text{وقتی } g(x) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow a$$

آنگاه

$$(16) \quad \text{وقتی } \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow A, \quad x \rightarrow a$$

البته، اگر $x \rightarrow b$ یا در (۱۵) $g(x) \rightarrow -\infty$ ، حکم مشابهی نیز برقرار خواهد بود. خاطر نشان کنیم که ما اینک مفهوم حد را به معنی وسیع تعریف ۳۳.۴ گرفته ایم.

برهان. ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که در آن $-\infty \leq A < +\infty$ ، عدد حقیقی q را قسمی اختیار می کنیم که $A < q$ ، و بعد r را طوری می گیریم که $A < r < q$. بنابر (۱۳)، نقطه ای مانند $c \in (a, b)$ هست که $a < x < c$ نامساوی

$$(17) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

را ایجاب می کند. هرگاه $a < x < y < c$ قضیه ۹.۵ نشان می دهد که نقطه ای مانند $t \in (x, y)$ وجود دارد که

$$(18) \quad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r$$

فرض کنیم (۱۴) برقرار باشد. با فرض $x \rightarrow a$ در (۱۸) می بینیم که

$$(19) \quad \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (a < y < c).$$

حال فرض می کنیم (۱۵) برقرار باشد. با ثابت گرفتن y در (۱۸)، می توان نقطه ای

چون c_1 در (a, y) را طوری اختیار کرد که به ازای $a < x < c_1$ و $g(x) > 0$ و $g'(x) > g(y)$ و $g(y) > 0$ با ضرب (۱۸) در $[g(x) - g(y)]/g(x)$ خواهیم داشت

$$(20) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < r - r \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1).$$

اگر در (۲۰) $x \rightarrow a$ رابطه (۱۵) نشان خواهد داد که نقطه ای مانند $c_2 \in (a, c_1)$ هست

$$(21) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2).$$

بقسمی که

خلاصه آنکه، (۱۹) و (۲۱) معلوم می کنند که به ازای هر q ، فقط تابع شرط

$$A < q, \quad \text{نقطه ای مانند } c_2 \text{ هست که اگر } a < x < c_2, \quad f(x)/g(x) < q.$$

به همین نحو، اگر $-\infty < A \leq +\infty$ و p طوری اختیار شود که $p < A$ ، می توان

نقطه c_3 را چنان یافت که

$$(22) \quad p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3).$$

و (۱۶) از این دو مطلب نتیجه خواهد شد.

مشتقات مراتب بالاتر

۱۴.۵ تعریف. هرگاه f بر بازه‌ای مشتق داشته و f' خود مشتقپذیر باشد، ما مشتق f' را با f'' نشان داده آن را مشتق دوم f می‌نامیم. با ادامه این کار، تابعهای

$$f, f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$$

را خواهیم داشت که هر یک مشتق تابع پیش از خود است. $f^{(n)}$ مشتق n م، یا مشتق مرتبه n ، f نامیده شده است.

برای آنکه $f^{(n)}(x)$ در x وجود داشته باشد باید $f^{(n-1)}(t)$ در یکی از همسایگیهای x (یا، اگر x یک نقطه انتهایی بازه‌ای باشد که f بر آن تعریف شده، در یکی از همسایگیهای یکطرفه x) وجود داشته و $f^{(n-1)}$ در x مشتقپذیر باشد. چون وجود $f^{(n-1)}$ در یکی از همسایگیهای x الزامی است، $f^{(n-2)}$ باید در آن همسایگی مشتقپذیر باشد.

قضیه تیلور

۱۵.۵ قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر $[a, b]$ بوده، n عدد صحیح مثبتی باشد، $f^{(n-1)}$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و $f^{(n)}(t)$ به ازای هر $t \in (a, b)$ وجود داشته باشد. α و β را نقاط متمایزی از $[a, b]$ انگاشته، تعریف می‌کنیم

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k. \quad (23)$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند x بین α و β هست بطوری که

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n. \quad (24)$$

این قضیه به ازای $n=1$ همان قضیه مقدار میانگین است. قضیه، در حالت کلی، نشان می‌دهد که f را می‌شود با یک چند جمله‌ای درجه $n-1$ تقریب کرد، با دانستن کرانهای $|f^{(n)}(x)|$ ، می‌توان خطا را به وسیله (24) تخمین زد.

برهان. فرض کنیم M عددی باشد که با

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n \quad (25)$$

تعریف می‌شود، و قرار می‌دهیم

$$(26) \quad g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad (a \leq t \leq b).$$

باید نشان دهیم که به ازای x بین α و β ، $n!M = f^{(n)}(x)$ ، گوییم، بنابر (۲۳) و

(۲۶)، داریم

$$(27) \quad g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b).$$

پس اگر بشود نشان داد که به ازای x بین α و β ، $g^{(n)}(x) = 0$ ، برهان تمام خواهد بود.گوییم چون به ازای $k = 0, \dots, n-1$ ، $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ ، پس داریم

$$(28) \quad g(x) = g'(x) = \dots = g^{(n-1)}(x) = 0.$$

انتخاب ما از M نشان می‌دهد که $g(\beta) = 0$ ، پس، بنابر قضیه مقدار میانگین، به ازای x_1 بین α و β ، $g'(x_1) = 0$ ، چون $g'(\alpha) = 0$ ، به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که به ازای x_2 ای بین α و x_1 ، $g''(x_2) = 0$ ، پس از n مرحله به این نتیجه می‌رسیم که به ازای x_n ایبین α و x_{n-1} ، یعنی، بین α و β ، داریم $g^{(n)}(x_n) = 0$.

مشتقگیری از توابع برداری

۱۶۰۵ چند تبصره. تعریف ۱۰۵ برای توابع مختلط f که بر $[a, b]$ تعریف شده‌اند بدون

ذره‌ای تغییر به کار می‌رود، و قضایای ۲۰۵ و ۳۰۵ با برهانهایشان معتبر می‌مانند. هرگاه

 f_1 و f_2 قسمت‌های حقیقی و موهومی f باشند؛ یعنی، هرگاه به ازای $a \leq t \leq b$ ،

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

که در آن $f_1(t)$ و $f_2(t)$ حقیقی‌اند، بوضوح خواهیم داشت

$$(29) \quad f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

همچنین، f در x مشتقپذیر است اگر و فقط اگر هر دوی f_1 و f_2 در x مشتقپذیر باشند.با طرح مطلب در حالت کلی برای توابع برداری، یعنی، توابعی چون f که $[a, b]$ رابتوی R^k ای می‌نگارد، هنوز هم می‌توان تعریف ۱۰۵ را به کار برد و $f'(x)$ را تعریف کرد.در این حالت جمله $\phi(t)$ در (۱)، به ازای هر t ، نقطه‌ای است در R^k ، و حد مذکور در(۲) بر حسب نرم R^k گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، $f'(x)$ (در صورت وجود) آننقطه‌ای از R^k است که به ازای آن

$$(30) \quad \lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| = 0,$$

و باز f' تابعی است که مقادیرش در R^k می‌باشند.

هرگاه $f_1, \dots, f_k$ مؤلفه‌های f باشند، که در قضیه ۱۰۰۴ تعریف شدند، آنگاه

$$(31) \quad f' = (f'_1, \dots, f'_k),$$

و f در نقطه x مشتقپذیر است اگر و فقط اگر هر یک از توابع $f_1, \dots, f_k$ در x مشتقپذیر باشد.

در این وضع قضیه ۲۰۵ نیز درست است، و اگر f, g را با حاصل ضرب داخلی $f \cdot g$ (ر.ک. تعریف ۳۰۴) عوض کنیم، قسمتهای (۱) و (ب) قضیه ۳۰۵ هم درست خواهند بود.

اما وقتی به قضیه مقدار میانگین و به یکی از نتایج آن، یعنی، قاعده هوییتال، رو می‌آوریم وضع فرق می‌کند. دو مثال بعدی نشان می‌دهند که این نتایج برای توابع مختلط برقرار نیستند.

۱۷۰۵ مثال. به ازای هر x حقیقی تعریف می‌کنیم

$$(32) \quad f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

(می‌توان عبارت آخر را تعریف نمایی مختلط e^{ix} گرفت؛ برای بحث کاملی از این توابع، ر.ک. فصل ۰۸) در این صورت،

$$(33) \quad f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0,$$

اما

$$(34) \quad f'(x) = ie^{ix};$$

در نتیجه، به ازای هر x حقیقی، $|f'(x)| = 1$.

بنابراین، قضیه ۱۰۰۵ در این حالت برقرار نیست.

۱۸۰۵ مثال. برقطعه $(0, 1)$ تعریف می‌کنیم $f(x) = x$ و

$$(35) \quad g(x) = x + x^2 e^{1/x^2}.$$

چون به ازای هر t حقیقی $|e^{it}| = 1$ ، مشاهده می‌کنیم که

$$(36) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

دیگر اینکه،

$$(37) \quad g'(x) = 1 + \left\{ 2x - \frac{2}{x} \right\} e^{1/x^2} \quad (0 < x < 1).$$

$$(38) \quad |g'(x)| \geq \left| 2x - \frac{2i}{x} \right| - 1 \geq \frac{2}{x} - 1.$$

لذا،

$$(39) \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| = \frac{1}{|g'(x)|} \leq \frac{x}{2-x};$$

و در نتیجه،

$$(40) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

بنابر (۳۶) و (۴۰)، قاعده هوییتال در این حالت برقرار نیست. همچنین، توجه کنید که، بنابر (۳۸)، $g'(x)$ بر $(0, 1)$ مخالف ۰ است.

بهر حال، قضیه مقدار میانگین متضمن نتیجه‌ای است که، از جهات کاربردی، تقریباً به سودمندی قضیه ۱۰.۵ است، و برای توابع برداری نیز برقراری ماند: از قضیه ۱۰.۵ نتیجه می‌شود که

$$(41) \quad |f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{a < x < b} |f'(x)|.$$

۱۹.۵ قضیه. فرض کنیم f یک نگاشت پیوسته از $[a, b]$ بتوی R^k و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، x ی در (a, b) هست بطوری که

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) |f'(x)|.$$

برهان^۱. قرار می‌دهیم $z = f(b) - f(a)$ ، و تعریف می‌کنیم

$$\varphi(t) = z \cdot f(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

در این صورت، φ یک تابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ است که در (a, b) مشتق دارد. بنابراین، قضیه مقدار میانگین نشان می‌دهد که به ازای x ی در (a, b) ،

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\varphi'(x) = (b - a)z \cdot f'(x).$$

از سوی دیگر،

$$\varphi(b) - \varphi(a) = z \cdot f(b) - z \cdot f(a) = z \cdot z = |z|^2.$$

حال نامساوی شوارتز نتیجه می‌دهد که

$$|z|^2 = (b - a) |z \cdot f'(x)| \leq (b - a) |z| |f'(x)|.$$

۱. هاوین (V. P. Havin) چاپ دوم این کتاب را به روسی برگردانده، این برهان را به برهان اصلی افزوده است.

پس $|z| \leq (b-a)|f'(x)|$ ، که همان نتیجه مطلوب است.

تمرین

۱. فرض کنید f به ازای هر x حقیقی تعریف شده باشد، و به ازای هر x و y حقیقی داشته

باشیم

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

نشان دهید که f ثابت است.

۲. فرض کنید $f'(x)$ در (a, b) بزرگتر از ۰ باشد. ثابت کنید که f در (a, b) اکیدا "صعودی

است، و g را تابع معکوس آن بینگارید. ثابت کنید g مشتقپذیر است و

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (a < x < b).$$

۳. فرض کنید g یک تابع حقیقی بر R^1 با مشتق کراندار باشد (مثلاً، " $|g'| \leq M$ ، $\varepsilon > 0$).

را ثابت نگه داشته تعریف کنید $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. ثابت کنید اگر ε به قدر کافی

کوچک باشد، f یک به یک خواهد بود. (می توان مجموعه ای از مقادیر مجاز ε را که

فقط به M بستگی دارند معین کرد.)

۴. اگر

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

که در آن $C_0, \dots, C_n$ ثوابتی حقیقی هستند، ثابت کنید معادله

$$C_0 + C_1x + \cdots + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n = 0$$

دست کم یک ریشه حقیقی بین ۰ و ۱ دارد.

۵. فرض کنید f به ازای هر $x > 0$ تعریف شده و مشتقپذیر باشد و، وقتی

$x \rightarrow +\infty$ ، $f'(x) \rightarrow 0$ ، قرار دهید $g(x) = f(x+1) - f(x)$. ثابت کنید وقتی

$$x \rightarrow +\infty \text{، } g(x) \rightarrow 0.$$

۶. فرض کنید

(ا) f به ازای $x \geq 0$ پیوسته باشد؛

(ب) $f'(x)$ به ازای $x > 0$ وجود داشته باشد؛

(پ) $f(0) = 0$ ؛

(ت) f' صعودی باشد.

قرار دهید

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$

و ثابت کنید g صعودی است.

۷. فرض کنید $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند، $g'(x) \neq 0$ ، و $f(x) = g(x) = 0$ ، ثابت کنید

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(این مطلب برای توابع مختلط نیز برقرار است.)

۸. فرض کنید f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $\varepsilon > 0$. ثابت کنید δ ی مثبتی هست قسمی هست هرگاه $\delta > 0$ و $a \leq t \leq b$ و $a \leq x \leq b$ و $0 < |t - x| < \delta$ آنگاه

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

(این مطلب را می‌شد این طور گفت که اگر f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، f بر $[a, b]$ به طور یکنواخت مشتقپذیر است.) آیا این توابع برداری نیز برقرار هست؟

۹. فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر R^1 باشد، و بدانیم به ازای هر x ، $x \neq 0$ ، $f'(x)$ وجود دارد و وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f'(x) \rightarrow 3$ ، آیا از اینها وجود $f'(0)$ نتیجه می‌شود؟

۱۰. فرض کنید f و g توابع مشتقپذیر مختلطی بر $(0, 1)$ باشند. همچنین، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، $g(x) \rightarrow 0$ ، $f'(x) \rightarrow A$ ، و $g'(x) \rightarrow B$ ، که در آنها A و B اعدادی مختلط اند و $B \neq 0$ ، ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

قس. مثال ۱۸.۵. راهنمایی:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f(x)}{x} - A \right) \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$

قضیه ۱۳.۵ را در مورد قسمتهای حقیقی و موهومی $f(x)/x$ و $g(x)/x$ به کار بندید.

۱۱. فرض کنید f در یکی از همسایگیهای x تعریف شده و $f''(x)$ وجود داشته باشد. نشان دهید که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

با یک مثال نشان دهید که حد فوق حتی اگر $f''(x)$ هم وجود نداشته باشد ممکن است موجود باشد. راهنمایی: از قضیه ۱۳.۵ استفاده کنید.

۱۲. چنانچه $f(x) = |x|^3$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ را به ازای هر x حقیقی حساب کرده، نشان دهید که $f^{(3)}(0)$ وجود ندارد.

۱۳. فرض کنید a و c اعدادی حقیقی بوده، $c > 0$ ، و f بر $[-1, 1]$ این طور تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \text{ اگر } x \neq 0$$

احکام زیر را ثابت کنید:

(آ) f پیوسته است اگر و فقط اگر $a > 0$ ؛

(ب) $f'(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a > 1$ ؛

(پ) f' کراندار است اگر و فقط اگر $a \geq 1 + c$ ؛

(ت) f' پیوسته است اگر و فقط اگر $a > 1 + c$ ؛

(ث) $f''(0)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $a > 2 + c$ ؛

(ج) f'' کراندار است اگر و فقط اگر $a \geq 2 + 2c$ ؛

(چ) f'' پیوسته است اگر و فقط اگر $a > 2 + 2c$.

۱۴. فرض کنید f یک تابع حقیقی مشتقپذیر باشد که در (a, b) تعریف شده است. ثابت

کنید f محدب است اگر و فقط اگر f' صعودی باشد. بعد فرض کنید $f''(x)$ به ازای هر

$x \in (a, b)$ وجود داشته باشد، و ثابت کنید f محدب است اگر و فقط اگر به ازای

هر $x \in (a, b)$ $f''(x) \geq 0$.

۱۵. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^1$ ، f یک تابع حقیقی و دوبار مشتقپذیر بر (a, ∞) ، و M_0, M_1 و

M_2 به ترتیب کوچکترین کرانهای بالایی $|f(x)|$ ، $|f'(x)|$ ، و $|f''(x)|$ بر (a, ∞) باشند.

ثابت کنید

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

راهنمایی: اگر $h > 0$ ، قضیهٔ تیلور نشان می‌دهد که به ازای نقطه‌ای مانند

$\xi \in (x, x + 2h)$

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x + 2h) - f(x)] - hf''(\xi).$$

لذا،

$$|f'(x)| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

برای نشان دادن اینکه $M_1^2 = 4M_0M_2$ می‌تواند عملاً "روی دهد"، a را -1 گرفته،

تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & (-1 < x < 0), \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & (0 \leq x < \infty), \end{cases}$$

و نشان دهید $M_2 = 4$ و $M_1 = 4$ ، $M_0 = 1$.

آیا $M_1^2 \leq 4M_0 M_2$ برای توابع برداری نیز برقرار است؟

۱۶. فرض کنید f بر $(0, \infty)$ دویبار مشتقپذیر بوده، f'' بر $(0, \infty)$ کراندار باشد، و وقتی

$$f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad f'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

راهنمایی: در تمرین ۱۵ فرض کنید $a \rightarrow \infty$

۱۷. فرض کنید f حقیقی و بر $[-1, 1]$ سه بار مشتقپذیر باشد بطوری که

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

ثابت کنید به ازای x در $(-1, 1)$ ، $f^{(3)}(x) \geq 3$

توجه کنید که تساوی به ازای $\frac{1}{2}(x^3 + x^2)$ برقرار است.

راهنمایی: از قضیه ۱۵.۵ با فرض $\alpha = 0$ و $\beta = \pm 1$ استفاده کرده، نشان دهید که S ی

در $(0, 1)$ و t ای در $(-1, 0)$ هست که

$$f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6.$$

۱۸. فرض کنید f تابعی حقیقی بر $[a, b]$ بوده، n عدد صحیح مثبتی باشد، و $f^{(n-1)}$ به

ازای هر $t \in [a, b]$ وجود داشته باشد. α ، β ، و P را همانهایی بگیرید که در قضیه

تیلور (قضیه ۱۵.۵) آمده‌اند. به ازای هر $t \in [a, b]$ که $t \neq \beta$ تعریف کنید

$$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}.$$

از $f(t) - f(\beta) = (t - \beta)Q(t)$ در $t = \alpha$ و $t = \alpha - 1$ بار مشتق بگیرید، و صورت زیر از قضیه

تیلور را به دست آورید:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (\beta - \alpha)^n.$$

۱۹. فرض کنید f در $(-1, 1)$ تعریف شده و $f'(0)$ وجود داشته باشد. همچنین،

$-1 < \alpha_n < \beta_n < 1$ ، و وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\alpha_n \rightarrow 0$ و $\beta_n \rightarrow 0$. خارج قسمتهای تفاضلی

$$D_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

را تعریف کرده، احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) هرگاه $\alpha_n < 0 < \beta_n$ ، آنگاه $\lim D_n = f'(0)$ ؛

(ب) هرگاه $0 < \alpha_n < \beta_n$ و $\{\beta_n / (\beta_n - \alpha_n)\}$ کراندار باشد، آنگاه $\lim D_n = f'(0)$ ؛

(پ) هرگاه f' در $(-1, 1)$ پیوسته باشد، آنگاه $\lim D_n = f'(0)$.

مثالی بزنید که در آن f در $(-1, 1)$ مشتقپذیر بوده (ولی f' در 0 پیوسته نباشد)،
و α_n و β_n طوری به 0 میل کنند که $\lim D_n$ وجود داشته ولی با $f'(0)$ فرق داشته باشد.
۲۰. یک نامساوی که از قضیه تیلور حاصل شده و برای توابع برداری معتبر باشد تنظیم
و آن را ثابت نمایید.

۲۱. فرض کنید E یک زیر مجموعه بسته R^1 باشد. در تمرین ۲۲، فصل ۴، دیدیم که
تابعی حقیقی و پیوسته مثل f بر R^1 هست که مجموعه صفر آن E است. آیا می توان
برای هر مجموعه بسته E چنین f ی یافت که بر R^1 مشتقپذیر باشد، یا اینکه n بار
مشتقپذیر باشد، یا حتی از هر مرتبه ای بر R^1 مشتقپذیر باشد؟

۲۲. فرض کنید f تابعی حقیقی بر $(-\infty, \infty)$ باشد x را یک نقطه ثابت f خوانیم هرگاه
 $f(x) = x$.

(آ) چنانچه f مشتقپذیر بوده و به ازای هر t حقیقی $f'(t) \neq 1$ ، ثابت کنید
 f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

(ب) نشان دهید تابع f تعریف شده با

$$f(t) = t + (1 + e^t)^{-1}$$

نقطه ثابت ندارد، هرچند که به ازای هر t حقیقی $0 < f'(t) < 1$.

(پ) بهر حال، اگر عدد ثابتی مثل $A < 1$ باشد بطوری که به ازای هر t حقیقی
 $|f'(t)| \leq A$ ، ثابت کنید نقطه ثابتی از f مانند x وجود دارد، و $x = \lim x_n$ که
در آن x_1 عدد حقیقی دلخواهی است و، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

(ت) نشان دهید که فرایند (پ) را می شود با منحنی شکسته

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_2) \rightarrow (x_2, x_3) \rightarrow (x_3, x_3) \rightarrow (x_3, x_4) \rightarrow \dots$$

تجسم کرد.

۲۳. تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$$

سه نقطه ثابت، مثلاً α ، β ، و γ ، دارد که

$$-2 < \alpha < -1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 < \gamma < 2.$$

با انتخاب x_1 به طور دلخواه، $\{x_n\}$ را با فرض $x_{n+1} = f(x_n)$ تعریف نمایید.

(آ) هرگاه $x_1 < \alpha$ ، ثابت کنید وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $x_n \rightarrow -\infty$.

(ب) هرگاه $\gamma < x_1 < \alpha$ ، ثابت کنید وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $x_n \rightarrow \beta$.

(پ) چنانچه $\gamma < x_1$ ، ثابت کنید وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $x_n \rightarrow +\infty$.

پس با این روش می‌توان جای β را مشخص کرد اما این عمل در مورد α و γ میسر نیست.

۲۴. فرایند وصف شده در قسمت (پ) تمرین ۲۲ را می‌توان در مورد توابعی که $(0, \infty)$ را به $(0, \infty)$ می‌نگارند نیز به کار برد.

$\alpha \geq 1$ را ثابت نگهداشته، قرار دهید

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{x} \right), \quad g(x) = \frac{\alpha + x}{1 + x}.$$

تنها نقطه ثابت f و g در $(0, \infty)$ ، $\sqrt{\alpha}$ است. سعی کنید به کمک خواص f و g توضیح دهید که چرا همگرایی تمرین ۱۶، فصل ۳، از همگرایی تمرین ۱۷ به مراتب سریعتر است. (با مقایسه f' و g' ، منحنی شکسته پیشنهاد شده در تمرین ۲۲ را رسم نمایید.)

همین کار را زمانی که $0 < \alpha < 1$ انجام دهید.

۲۵. فرض کنید f بر $[a, b]$ دوبار مشتقپذیر بوده، $f(a) < 0$ ، $f(b) > 0$ ، $f'(x) \geq \delta > 0$ ، و به ازای هر $x \in [a, b]$ ، $0 \leq f''(x) \leq M$. ξ را نقطه منحصراً فردی در (a, b) بینگارید که $f(\xi) = 0$ است.

جزئیات روش نیوتن^۱ برای محاسبه ξ را که ذیلاً "به اختصار آمده کامل نمایید:

(آ) x_1 ی در (ξ, b) اختیار، و $\{x_n\}$ را با

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

تعریف کنید. این را بر حسب مماس بر نمودار f تعبیر هندسی نمایید.

(ب) ثابت کنید که $x_{n+1} < x_n$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

(پ) با استفاده از قضیه تیلور نشان دهید که به ازای t_n ی در (ξ, x_n) ،

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)} (x_n - \xi)^2.$$

(ت) چنانچه $A = M/2\delta$ ، نتیجه بگیرید که

$$0 \leq x_{n+1} - \xi \leq \frac{1}{A} [A(x_1 - \xi)]^{2^n}.$$

(قس). تمرینهای ۱۶ و ۱۸ در فصل ۰.۳

(ث) نشان دهید که روش نیوتن معادل آن است که نقطه ثابتی از تابع g را که با

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

تعریف می شود پیدا کنیم. رفتار $g'(x)$ به ازای x های نزدیک ξ چگونه است؟

(ج) بر $(-\infty, \infty)$ قرار دهید $f(x) = x^{1/3}$ و روش نیوتن را امتحان کنید. چه اتفاقی رخ می دهد؟

۲۶. فرض کنید f بر $[a, b]$ مشتق پذیر بوده $f(a) = 0$ ، و عددی حقیقی مانند A باشد بطوری

که بر $[a, b]$ $|f'(x)| \leq A|f(x)|$. ثابت کنید به ازای هر $x \in [a, b]$ $f(x) = 0$.

راهنمایی: $x_0 \in [a, b]$ را ثابت نگه داشته، به ازای $a \leq x \leq x_0$ قرار دهید

$$M_0 = \sup |f(x)|, \quad M_1 = \sup |f'(x)|.$$

برای هر چنین x ی

$$|f(x)| \leq M_1(x_0 - a) \leq A(x_0 - a)M_0.$$

در نتیجه اگر $1 < A(x_0 - a) < M_0 = 0$ ، یعنی f بر $[a, x_0]$ مساوی ۰ است. این عمل را ادامه دهید.

۲۷. فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی باشد که بر مستطیل R در صفحه، که با $a \leq x \leq b$ و

$\alpha \leq y \leq \beta$ داده شده، تعریف گشته است. بنا به تعریف، یک جواب مسئله با مقدار

اولیه

$$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c \quad (\alpha \leq c \leq \beta),$$

تابع مشتق پذیری چون f بر $[a, b]$ است که $f(a) = c$ ، $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ ، و

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b).$$

ثابت کنید این مسئله هرگاه عدد ثابتی مثل A باشد بطوری که هر وقت $(x, y_1) \in R$ و

$(x, y_2) \in R$

$$|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)| \leq A|y_2 - y_1|$$

حداکثر یک جواب خواهد داشت. راهنمایی: تمرین ۲۶ را در مورد تفاضل دو جواب

به کار ببرید. توجه کنید که این قضیه یکتایی برای مسئله با مقدار اولیه

$$y' = y^{1/2}, \quad y(0) = 0,$$

که دو جواب $f(x) = 0$ و $f(x) = x^2/4$ را دارد، برقرار نمی باشد. جمیع جوابهای

دیگر آن را بیابید .

۲۸ . قضیه یکتایی مشابهی برای دستگاههای معادلات دیفرانسیل

$$y'_j = \phi_j(x, y_1, \dots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \quad (j = 1, \dots, k),$$

تنظیم و آن را ثابت کنید . توجه کنید که این دستگاهها را می توان به شکل

$$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c,$$

نوشت که در آن $y = (y_1, \dots, y_k)$ در یک حجه k بعدی تغییر می کند، ϕ نگاشتی از یک حجه $(k+1)$ بعدی به فضای اقلیدسی k بعدی است که مؤلفه هایش توابع $\phi_1, \dots, \phi_k$ می باشند، و c بردار $(c_1, \dots, c_k)$ می باشد . برای توابع برداری تمرین ۲۶ را به کار برید .

۲۹ . به عنوان حالت خاصی از تمرین ۲۸، دستگاه زیر را در نظر بگیرید :

$$y'_j = y_{j+1} \quad (j = 1, \dots, k-1),$$

$$y'_k = f(x) - \sum_{j=1}^k g_j(x)y_j,$$

که در آن f و $g_1, \dots, g_k$ توابع حقیقی پیوسته ای بر $[a, b]$ می باشند، و برای جوابهای معادله

$$y^{(k)} + g_k(x)y^{(k-1)} + \dots + g_2(x)y' + g_1(x)y = f(x)$$

با شرایط اولیه

$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(a) = c_k$$

یک قضیه یکتایی به دست آورید .

انتگرال ریمان - اشتیل یس^۱

فصل حاضر را بر تعریف انتگرال ریمان ، که به طرز بسیار روشنی به ترتیب موجود در خط حقیقی وابسته است ، بنانهاده ایم . بدین قرار ، مطلب را با بحثی در باب انتگرالگیری توابع حقیقی بر بازه ها آغاز می کنیم . تعمیمش به تابعهای مختلط و برداری بر بازه ها در بخشهای بعدی می آید . انتگرالگیری روی مجموعه هایی جز بازه ها در فصول ۱۵ و ۱۱ مطرح خواهد شد .

تعریف وجود انتگرال

۱.۶ تعریف . فرض کنیم $[a, b]$ بازه معلومی باشد . منظور از *افراز* P از $[a, b]$ یعنی مجموعه ای متناهی از نقاط مانند $x_0, x_1, \dots, x_n$ که

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

می نویسیم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

حال فرض کنیم f یک تابع حقیقی و کراندار باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده است . به ازای هر افراز P از $[a, b]$ قرار می دهیم

$$M_i = \sup f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i),$$

$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i),$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

و، بالاخره،

$$(1) \quad \int_a^b f dx = \inf U(P, f),$$

$$(2) \quad \int_a^b f dx = \sup L(P, f),$$

که در آنها $\inf$ و $\sup$ روی تمام افرازهای P از $[a, b]$ گرفته شده‌اند. طرفهای چپ (۱) و (۲) بترتیب انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی f روی $[a, b]$ نام دارند.

هرگاه انتگرالهای بالایی و پایینی مساوی باشند، می‌گوییم f بر $[a, b]$ ریمان-

انتگرالپذیر است، می‌نویسیم $f \in \mathcal{R}$ (یعنی، $\mathcal{R}$ مجموعه‌توابعی است که انتگرال ریمان دارند)، و مقدار مشترک (۱) و (۲) را با

$$(3) \quad \int_a^b f dx$$

یا با

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx$$

نشان می‌دهیم.

این انتگرال ریمان f روی $[a, b]$ می‌باشد. چون f کراندار است، دو عدد مانند m

و M هستند بطوری که

$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b).$$

پس، به ازای هر P ،

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a).$$

در نتیجه، اعداد $L(P, f)$ و $U(P, f)$ مجموعه‌کراننداری را تشکیل می‌دهند. این امر نشان خواهد داد که انتگرالهای بالایی و پایینی هر تابع کراندار f تعریف شده‌اند. مسئله‌تساوی آنها، در نتیجه، مشکل انتگرالپذیری f مسئله‌ظریفتری است. به جای آنکه این مسئله را جدا برای انتگرال ریمان بررسی کنیم مستقیماً به وضع کلیتری خواهیم پرداخت.

۲۰۶ تعریف. فرض کنیم α یک تابع صعودی بر $[a, b]$ باشد (چون $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ متناهی اند، نتیجه می شود که α بر $[a, b]$ کراندار است). به ازای هر افراز P از $[a, b]$ می نویسیم

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

واضح است که $\Delta\alpha_i \geq 0$. به ازای هر تابع حقیقی و کراندار f بر $[a, b]$ قرار می دهیم

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i,$$

که در آنها M_i و m_i همان معانی مذکور در تعریف ۱۰۶ را دارند، و تعریف می کنیم

$$(5) \quad \int_a^b f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha),$$

$$(6) \quad \int_a^b f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha),$$

که مجدداً "inf و sup روی کلیه افرازا گرفته شده اند.

هرگاه طرفهای چپ (۵) و (۶) مساوی باشند، مقدار مشترک آنها را با

$$(7) \quad \int_a^b f d\alpha$$

یا گاهی با

$$(8) \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

نشان خواهیم داد.

این انتگرال ریمان - اشتیل یس (یا فقط انتگرال اشتیل یس) f نسبت به α روی

$[a, b]$ می باشد.

هرگاه (۷) وجود داشته باشد، یعنی اگر (۵) و (۶) مساوی باشند، می گوئیم f

نسبت به α ، به معنای ریمان، انتگرالپذیر است، و می نویسیم $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

با فرض $\alpha(x) = x$ دیده می شود که انتگرال ریمان حالت خاصی از انتگرال ریمان

اشتیل یس است. بهر حال، باید بصراحت گفت که در حالت کلی حتی لزومی به پیوستگی

α هم نیست.

راجع به نمادها مختصر توضیحی لازم است. ما نماد (۷) را به (۸) ترجیح می‌دهیم، زیرا حرف x که در عبارت (۸) آمده چیزی به مضمون (۷) نمی‌افزاید. اینکه چه "متغیر انتگرالگیری" را به کار می‌بریم اهمیتی نخواهد داشت. برای مثال، عبارت (۸) با

$$\int_a^b f(y) \, d\alpha(y)$$

یکی است. انتگرال به f, α, a, b بستگی دارد، لکن از متغیر انتگرالگیری فارغ است و می‌توان آن را حذف کرد.

نقش متغیر انتگرالگیری کاملاً "شبهه به نقش اندیس جمع‌بندی است: دو علامت

$$\sum_{i=1}^n c_i, \quad \sum_{k=1}^n c_k$$

یکی هستند، چرا که هر یک به معنی $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ می‌باشد.

البته، گذاردن متغیر انتگرالگیری ضروری ندارد، و در بسیاری حالات عملاً "تسهیلاتی را نیز موجب می‌شود.

حال به بررسی وجود انتگرال (۷) می‌پردازیم. بی‌آنکه دم‌بدم تکرار کنیم فرض می‌کنیم f بر $[a, b]$ حقیقی و کراندار و α بر این بازه صعودی باشد؛ و، وقتی ابهامی در کار نیست، به جای $\int_a^b$ می‌نویسیم $\int$.

۳.۶ تعریف. افزاز P^* را یک تطریف P نامیم هرگاه $P^* \supset P$ (یعنی، هرگاه هر نقطه P یک نقطه P^* باشد). چنانچه دو افزاز P_1 و P_2 مفروض باشند، می‌گوییم P^* تطریف مشترک آنهاست در صورتی که $P^* = P_1 \cup P_2$.

۴.۶ قضیه. هرگاه P^* یک تطریف P باشد، آنگاه

$$(9) \quad L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$$

و

$$(10) \quad U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

برهان. برای اثبات (۹) ابتدا فرض می‌کنیم P^* فقط یک نقطه از P بیشتر داشته باشد.

این نقطه اضافی را x^* انگاشته، فرض می‌کنیم $x_{i-1} < x^* < x_i$ که در آن x_{i-1} و x_i دو نقطه متوالی P می‌باشند. قرار می‌دهیم

$$w_1 = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x^*),$$

$$w_2 = \inf f(x) \quad (x^* \leq x \leq x_i).$$

واضح است که $w_1 \geq m_i$ و $w_2 \geq m_i$ که در آنها، مثل قبل،

$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i).$$

در نتیجه،

$$L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

$$= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geq 0.$$

چنانچه P^* ، k نقطه بیش از P داشته باشد، این استدلال را k بار تکرار کرده به (۹) خواهیم رسید. اثبات نامساوی (۱۰) به همین نحو خواهد بود.

$$۵.۶ \text{ قضیه. } \int_a^b f d\alpha \leq \bar{\int}_a^b f d\alpha.$$

برهان. فرض کنیم P^* نظریف مشترک دو افراز P_1 و P_2 باشد. بنابر قضیه ۴.۶،

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \leq U(P^*, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

در نتیجه،

$$(11) \quad L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

چنانچه P_2 ثابت باشد و $\sup$ روی تمام P_1 ها گرفته شود، (۱۱) به دست خواهد داد که

$$(12) \quad \int f d\alpha \leq U(P_2, f, \alpha).$$

قضیه با گرفتن $\inf$ روی جمیع P_2 ها در (۱۲) نتیجه خواهد شد.

۶.۶ قضیه. $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ اگر و فقط اگر به ازای $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P باشد بطوری که

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

برهان. به ازای هر P داریم

$$L(P, f, \alpha) \leq \int f d\alpha \leq \bar{\int} f d\alpha \leq U(P, f, \alpha).$$

لذا، (۱۳) ایجاب می‌کند که

$$0 \leq \bar{\int} f d\alpha - \int f d\alpha < \varepsilon.$$

پس، اگر (۱۳) بتواند به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار شود، خواهیم داشت

$$\bar{\int} f d\alpha = \int f d\alpha.$$

یعنی، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

عکس، فرض کنیم $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، افزایش

P_2 و P_1 ای هستند بطوری که

$$(14) \quad U(P_2, f, \alpha) - \int f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(15) \quad \int f d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

P را تعریف مشترک P_2 و P_1 می‌گیریم. پس قضیه ۴.۶، در معیت (۱۴) و (۱۵)، نشان می‌دهد که

$$U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) < \int f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \leq L(P, f, \alpha) + \varepsilon.$$

در نتیجه، (۱۳) به ازای این افزایش P برقرار است.

قضیه ۶.۶ برای انتگرالپذیری محک مناسبی به دست می‌دهد.

پیش از به کار بردنش، چند نکته را که با آن ارتباط نزدیک دارند بیان می‌داریم.

۷.۶ قضیه

(آ) هرگاه به ازای P و ε رابطه (۱۳) برقرار باشد، (۱۳) به ازای هر تعریف P (با همین ε) نیز برقرار می‌شود.

(ب) هرگاه (۱۳) به ازای $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ برقرار باشد و s_i و t_i نقاط دلخواهی در $[x_{i-1}, x_i]$ باشند،

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta \alpha_i < \varepsilon.$$

(پ) هرگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و مفروضات (ب) برقرار باشند،

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta \alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon.$$

برهان. قضیه ۴.۶ قسمت (آ) را ایجاب می‌کند. تحت شرطهای آمده در (ب)، هم
 $f(s_i)$ در $[m_i, M_i]$ است و هم $f(t_i)$ پس $|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$.
 لذا،

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta \alpha_i \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha),$$

که (ب) را ثابت می‌کند. نامساویهای بدیهی

$$L(P, f, \alpha) \leq \sum f(t_i) \Delta \alpha_i \leq U(P, f, \alpha)$$

و

$$L(P, f, \alpha) \leq \int f d\alpha \leq U(P, f, \alpha)$$

(پ) را ثابت خواهند کرد.

۸.۶ قضیه. هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. η ی بزرگتر از ۰ را طوری می‌گیریم که

$$|\alpha(b) - \alpha(a)|\eta < \varepsilon.$$

چون f بر $[a, b]$ به طور یکساخت پیوسته است (قضیه ۱۹.۴)، پس δ ی مثبتی

هست بطوری که اگر $x \in [a, b]$ ، $t \in [a, b]$ ، و $|x - t| < \delta$ ، داریم

$$(16) \quad |f(x) - f(t)| < \eta.$$

هرگاه P چنان افرازی از $[a, b]$ باشد که به ازای هر i ، $\Delta x_i < \delta$ ، آنگاه

(۱۶) ایجاب می‌کند که

$$(17) \quad M_i - m_i \leq \eta \quad (i = 1, \dots, n).$$

و در نتیجه،

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i$$

$$\leq \eta \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i = \eta [\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

حال، بنابر قضیه ۶.۶، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

۹.۶ قضیه. هرگاه f بر $[a, b]$ یکنوا و α بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. (البته، هنوز بر این فرضیم که α یکنواست).

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، افرازی را برمی‌گزینیم که در آن

$$\Delta \alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

این کار به دلیل پیوسته بودن α میسر است (قضیه ۲۳.۴). فرض کنیم f صعودی باشد (اثبات در حالت دیگر به همین نحو است). در این صورت،

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, n).$$

پس اگر n به قدر کافی بزرگ باشد،

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

حال، بنابر قضیه ۶.۶، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

۱۰.۶ قضیه. فرض کنیم f بر $[a, b]$ گراندار بوده، تعدادی متناهی نقطه ناپیوستگی بر $[a, b]$ داشته، و α در هر نقطه ناپیوستگی‌اش پیوسته باشد. در این صورت، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $M = \sup |f(x)|$ و E را مجموعه نقاطی می‌انگاریم که f در آنها ناپیوسته است. چون E متناهی و α در هر نقطه E پیوسته است، می‌توان E را با تعدادی متناهی بازه‌های هم‌جدا $[u_j, v_j] \subset [a, b]$ پوشاند که مجموع تفاضل‌های $\alpha(v_j) - \alpha(u_j)$ آنها از ε کمتر باشد. بعلاوه، می‌توان این بازه‌ها را قسمی گرفت که هر نقطه $E \cap (a, b)$ درون یکی از $[u_j, v_j]$ ها باشد. قطعه‌های (u_j, v_j) را از $[a, b]$ برمی‌داریم. مجموعه مانده K فشرده است.

پس f بر K به طور یکنواخت پیوسته است، و δ ی مثبتی هست بطوری که اگر $s \in K$ ، $t \in K$ و $|s - t| < \delta$ ، داریم $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$.

حالت افزایش $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ را به صورت زیر می‌سازیم: هر u_j و هر v_j در P باشد و هیچ نقطه از قطعه (u_j, v_j) در P نباشد؛ و هرگاه x_{i-1} یکی از u_j ها نباشد، آنگاه $\Delta x_i < \delta$.

توجه شود که به ازای هر $M_i - m_i \leq 2M\epsilon$ ، و $M_i - m_i \leq \epsilon$ مگر آنکه x_{i-1} یکی از u_j ها باشد. در نتیجه، مثل برهان قضیه ۸.۶، داریم

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon.$$

چون ϵ دلخواه است، قضیه ۶.۶ نشان خواهد داد که $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

توجه: هرگاه f و α نقطه ناپیوستگی مشترکی داشته باشند، f الزاما "در $\mathcal{R}(\alpha)$ نخواهد بود. تمرین ۳ این مطلب را نشان خواهد داد.

۱۱.۶ قضیه. فرض کنیم $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، $m \leq f \leq M$ ، ϕ بر $[m, M]$ پیوسته باشد، و $h(x) = \phi(f(x))$ بر $[a, b]$. در این صورت، $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$.

برهان. $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. چون ϕ بر $[m, M]$ به طور یکنواخت پیوسته است، δ مثبتی وجود دارد بقسمی که $\delta < \epsilon$ و، اگر $s, t \in [m, M]$ و $|s - t| \leq \delta$ ، $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$.

چون $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ ، افزایشی مثل $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ هست بطوری که

$$(18) \quad U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2.$$

فرض کنیم m_i و M_i همان معانی مذکور در تعریف ۱.۶ را داشته و m_i^* و M_i^* اعداد نظیر آنها برای h باشند. اعداد $1, \dots, n$ را به دوردۀ تقسیم می‌کنیم: گوئیم اگر

$$i \in A \Leftrightarrow M_i - m_i < \delta, \quad \text{اگر } i \in B \Leftrightarrow M_i - m_i \geq \delta$$

به ازای $i \in A$ ، δ انتخابی ما نشان می‌دهد که $M_i^* - m_i^* \leq \epsilon$.

به ازای $i \in B$ ، $M_i^* - m_i^* \leq 2K$ که در آن $K = \sup |\phi(t)|$ و $m \leq t \leq M$ بنا بر

(۱۸) خواهیم داشت

$$(19) \quad \delta \sum_{i \in B} \Delta \alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta \alpha_i < \delta^2.$$

پس $\sum_{i \in B} \Delta \alpha_i < \delta$ از این نتیجه می‌شود که

$$U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta \alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta \alpha_i \\ \leq \varepsilon [\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon [\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

چون ε دلخواه بود، قضیه ۶.۶ ایجاب خواهد کرد که $h \in \mathcal{R}(\alpha)$.

تبصره. قضیه فوق‌الاین سؤال را پیش می‌آورد که "دقیقا" چه توابعی انتگرال ریمن دارند؟
جوابش در قضیه ۳۳.۱۱ (ب) داده شده است.

خواص انتگرال

۱۲.۶ قضیه

(آ) هرگاه $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، آنگاه
 $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$.

$cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ به ازای هر ثابت c ، و

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(ب) هرگاه $f_1(x) \leq f_2(x)$ بر $[a, b]$ ، آنگاه

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(پ) هرگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ و $a < c < b$ ، آنگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, c]$ و بر

$[c, b]$ و داریم

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

(ت) هرگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ و $|f(x)| \leq M$ ، آنگاه

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(ث) هرگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ و $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$ ، آنگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ و

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

چنانچه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و c عدد ثابت مثبتی باشد، $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ و

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$

برهان. هرگاه $f = f_1 + f_2$ و P افراز دلخواهی از $[a, b]$ باشد، داریم

$$(20) \quad L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \\ \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha).$$

فرض می‌کنیم $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ ، و ε را معلوم می‌گیریم. در این صورت، افرازهای P_j ($j = 1, 2$) ای وجود دارند بطوری که

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon.$$

چنانچه به جای p_1 و p_2 تطریف مشترکشان P قرار گیرد، باز هم این نامساویها برقرارند.

پس (۲۰) نامساوی

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\varepsilon$$

را ایجاب می‌کند، که این $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ را ثابت خواهد کرد.

با همین P داریم

$$U(P, f_j, \alpha) < \int f_j d\alpha + \varepsilon \quad (j = 1, 2).$$

در نتیجه، (۲۰) ایجاب می‌کند که

$$\int f d\alpha \leq U(P, f, \alpha) < \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha + 2\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که

$$(21) \quad \int f d\alpha \leq \int f_1 d\alpha + \int f_2 d\alpha.$$

چنانچه در (۲۱) f_1 و f_2 را با $-f_1$ و $-f_2$ عوض کنیم، جهت نامساوی

عوض می‌شود و تساوی اثبات خواهد شد.

اثبات احکام دیگر قضیه ۱۲.۶ آنقدر شبیه است که جزئیات آنها را حذف می‌کنیم.

در قسمت (پ) نکته این است که برای تقریب به $\int f d\alpha$ می‌توان (با توسل به تطریفها) خود را به افرازهایی محدود ساخت که شامل نقطه c می‌باشند.

۱۳.۶ قضیه. هرگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، آنگاه

$$fg \in \mathcal{R}(\alpha) \quad (\text{آ})$$

$$|f| \in \mathcal{R}(\alpha) \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad \left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$$

برهان. هرگاه $\phi(t)$ را مساوی t^2 بگیریم، قضیه ۱۱.۶ نشان می‌دهد که اگر

$$f \in \mathcal{R}(\alpha), \quad f^2 \in \mathcal{R}(\alpha) \quad \text{حال اتحاد}$$

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

برهان (۱) را تمام خواهد کرد.

چنانچه $\phi(t)$ را $|t|$ بگیریم، قضیه ۱۱.۶ "مشابها" نشان می‌دهد که $c \cdot |f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ را مساوی ± 1 اختیار می‌کنیم بطوری که

$$c \int f d\alpha \geq 0.$$

در این صورت، چون $c \leq |f|$ ،

$$\left| \int f d\alpha \right| = c \int f d\alpha = \int cf d\alpha \leq \int |f| d\alpha.$$

۱۴.۶ تعریف. تابع پله‌ای یگه I این طور تعریف می‌شود:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

۱۵.۶ قضیه. هرگاه $f, a < s < b$ بر $[a, b]$ کراندار و در s پیوسته باشد، و $\alpha(x) = I(x - s)$ ، آنگاه

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

برهان. افرازهای $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ را، که در آن‌ها $x_0 = a$ و $x_3 = b$ و $x_1 = s < x_2$ ، در نظر می‌گیریم. در این صورت،

$$U(P, f, \alpha) = M_2, \quad L(P, f, \alpha) = m_2.$$

چون f در s پیوسته است، می‌بینیم که وقتی $x_2 \rightarrow s$ ، M_2 و m_2 همگرا به $f(s)$ خواهند بود.

۱۶.۶ قضیه. فرض کنیم به ازای $1, 2, 3, \dots$ ، $c_n \geq 0$ ، $\sum c_n$ همگرا بوده، $\{s_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در (a, b) باشد و

$$(22) \quad \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

در این صورت، اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد،

$$(23) \quad \int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n).$$

برهان. آزمون مقایسه‌ای نشان می‌دهد که سری (۲۲) به ازای هر x همگراست. واضح است که مجموع آن $\alpha(x)$ یکنواست، و $\alpha(a) = 0$ و $\alpha(b) = \sum c_n$. (این α از نوع آن تابعی است که در تبصره ۳۱.۴ آمده بود.)

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند، و N را طوری اختیار می‌کنیم که

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^N c_n I(x - s_n), \quad \alpha_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

بنابر قضایای ۱۲.۶ و ۱۵.۶ داریم

$$(24) \quad \int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^N c_n f(s_n).$$

چون $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$

$$(25) \quad \left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq M\varepsilon$$

که در آن $M = \sup |f(x)|$. از آنجا که $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ، از (۲۴) و (۲۵) نتیجه می‌شود که

$$(26) \quad \left| \int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^N c_n f(s_n) \right| \leq M\varepsilon.$$

چنانچه $N \rightarrow \infty$ ، رابطه (۲۳) به دستمان خواهد رسید.

۱۷.۶ قضیه. فرض کنیم α صعودی باشد و $\alpha' \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$. همچنین، f را یک تابع حقیقی و کراندار بر $[a, b]$ می‌انگاریم.

در این صورت، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ اگر و فقط اگر $f\alpha' \in \mathcal{R}$ در این وضع،

$$(27) \quad \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، و قضیه ۶.۶ را در مورد α' به کار می‌بریم: گوئیم افزایی مانند $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ هست بطوری که

$$(28) \quad U(P, \alpha') - L(P, \alpha') < \varepsilon.$$

قضیه مقدار میانگین نقاطی چون $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ را به دست می‌دهد که به

ازای هر $i = 1, \dots, n$

$$\Delta \alpha_i = \alpha'(t_i) \Delta x_i.$$

هرگاه $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، Γ نگاه بنابر (۲۸) و قضیه ۷۰۶ (ب) داریم

$$(29) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \Delta x_i < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $M = \sup |f(x)|$. چون

$$\sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(t_i) \Delta x_i,$$

از (۲۹) نتیجه می‌شود که

$$(30) \quad \left| \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta \alpha_i - \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i \right| \leq M\varepsilon.$$

بخصوص، به ازای هر انتخاب $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta \alpha_i \leq U(P, f\alpha') + M\varepsilon.$$

پس

$$U(P, f, \alpha) \leq U(P, f\alpha') + M\varepsilon.$$

با همین استدلال، از (۳۰) به نامساوی

$$U(P, f\alpha') \leq U(P, f, \alpha) + M\varepsilon$$

می‌رسیم. لذا، خواهیم داشت

$$(31) \quad |U(P, f, \alpha) - U(P, f\alpha')| \leq M\varepsilon.$$

حال توجه می‌کنیم که (۲۸) از تعویض p با هر تطریف آن برقرار می‌ماند. پس

(۳۱) نیز برقرار خواهد ماند. لذا، نتیجه می‌گیریم که

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx \right| \leq M\varepsilon.$$

اما ε دلخواه است. بنابراین، به ازای هر تابع کراندار f ،

$$(32) \quad \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

تساوی انتگرالهای پایینی درست به همین نحو از (۳۰) به دست می‌آید، و قضیه نتیجه خواهد شد.

۱۸۰۶ تبصره. دو قضیه پیش‌جامعیت و قابلیت انعطافی را که در ذات عمل انتگرالگیری اشتیل پس است نشان می‌دهند. هرگاه α یک تابع پله‌ای صرف باشد [این نامی است که

اغلب به توابع (۲۲) اطلاق می‌شود]، انتگرال به یک سری متناهی یا نامتناهی تحویل می‌شود. چنانچه α مشتق انتگرالپذیر داشته باشد، انتگرال به یک انتگرال ریمان عادی بدل می‌گردد. این در بسیاری از حالات مطالعهٔ سریها و انتگرالها را با هم میسر خواهد ساخت.

برای روشن شدن این نکته به یک مثال فیزیکی توجه می‌کنیم. گشتاور ماند یک سیم مستقیم به طول یک حول محوری که از یکی از نقاط انتهایی آن گذشته و با آن زاویهٔ قائمه می‌سازد برابر است با

$$(33) \quad \int_0^1 x^2 dm$$

که در آن $m(x)$ جرم موجود در بازهٔ $[0, x]$ می‌باشد. چنانچه این فرض بشود که سیم چگالی پیوستهٔ ρ دارد، یعنی $m'(x) = \rho(x)$ (۳۳) به صورت

$$(34) \quad \int_0^1 x^2 \rho(x) dx$$

در می‌آید.

از سوی دیگر، اگر سیم از جرمهای m_i که در نقاط x_i متمرکز شده‌اند تشکیل شده باشد، (۳۳) چنین خواهد شد:

$$(35) \quad \sum x_i^2 m_i.$$

لذا، (۳۳) عبارات (۳۴) و (۳۵) را به عنوان حالاتی خاص در بردارد، اما حالات زیاد دیگری را نیز شامل است. مثلاً، شامل حالتی است که در آن پیوسته بوده ولی همه جا مشتقپذیر نمی‌باشد.

۱۹۰۶ قضیه (تغییر متغیر). فرض کنیم φ یک تابع اکیداً صعودی و پیوسته باشد که بازهٔ $[A, B]$ را بروی $[a, b]$ می‌نگارد. همچنین، α بر $[a, b]$ صعودی باشد و $f \in \mathcal{R}(a, b)$ و $g \in \mathcal{R}(A, B)$ این طور تعریف می‌کنیم:

$$(36) \quad \beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \quad g(y) = f(\varphi(y)).$$

در این صورت، $g \in \mathcal{R}(\beta)$ و

$$(37) \quad \int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha.$$

برهان. هر افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ نظیر افرازی مانند $Q = \{y_0, \dots, y_n\}$

از $[A, B]$ است بطوری که $x_i = \varphi(y_i)$. جمع افرازهای $[A, B]$ از این راه به دست می آیند. چون مقادیری که f بر $[x_{i-1}, x_i]$ می گیرد درست همانهایی هستند که g بر $[y_{i-1}, y_i]$ اخذ می کند، خواهیم دید که

$$(38) \quad U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha), \quad L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha).$$

و چونکه $P, f \in \mathcal{R}(\alpha)$ را می شود طوری اختیار کرد که هر دوی $U(P, f, \alpha)$ و $L(P, f, \alpha)$ به $\int f d\alpha$ نزدیک باشند. لذا، (۳۸)، در معیت قضیه ۶.۶، نشان می دهد که $g \in \mathcal{R}(\beta)$ ، و (۳۷) برقرار است. این برهان را تمام خواهد کرد.

اینک به حالت خاص زیر توجه می کنیم:

فرض می کنیم $\alpha(x) = x$. پس $\beta = \varphi$. گیریم $\varphi' \in \mathcal{R}$ بر $[A, B]$. اگر قضیه ۱۷.۶ را سمت چپ (۳۷) اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$(39) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy.$$

انتگرالگیری و مشتقگیری

ما در این بخش هنوز باید توابع حقیقی هستیم. نشان خواهیم داد که اعمال انتگرالگیری و مشتقگیری، بنوعی، معکوس یکدیگرند.

۲۰.۶ قضیه. فرض کنیم $f \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$. به ازای $a \leq x \leq b$ قرار می دهیم

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

در این صورت، F بر $[a, b]$ پیوسته است؛ علاوه، هرگاه f در نقطه x_0 از $[a, b]$ پیوسته باشد، F در x_0 مشتقپذیر است و

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

برهان. چون $f \in \mathcal{R}$ ، f کراندار است. فرض کنیم به ازای $a \leq t \leq b$ ، $|f(t)| \leq M$. هرگاه $a \leq x < y \leq b$ آنگاه، بنابر قضیه ۱۲.۶ (پ) و (ت)،

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq M(y - x).$$

اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، خواهیم دید که با شرط $|y - x| < \varepsilon/M$ داریم

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

این پیوستگی (و، درواقع، پیوستگی یکنواخت) F را ثابت می‌کند.

حال فرض می‌کنیم f در x_0 پیوسته باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده $\delta > 0$ را

طوری می‌گیریم که اگر $|t - x_0| < \delta$ و $a \leq t \leq b$ داشته باشیم

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

پس، اگر

$$x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta, \quad a \leq s < t \leq b.$$

بنابر قضیه ۱۲.۶ (ت)، خواهیم داشت

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)] du \right| < \varepsilon.$$

از این نتیجه می‌شود که $F'(x_0) = f(x_0)$.

۲۱.۶ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. هرگاه $f \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$ و تابع

مشتق‌پذیر F بر $[a, b]$ چنان باشد که $F' = f$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ را

طوری اختیار می‌کنیم که $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. قضیه مقدار میانگین نقاطی مانند

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{را به دست می‌دهد که به ازای هر } i = 1, \dots, n$$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i) \Delta x_i.$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = F(b) - F(a).$$

حال از قضیه ۷.۶ (پ) نتیجه می‌شود که

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

چون این نامساوی به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، برهان تمام خواهد بود.

۲۲.۶ قضیه (انتگرالگیری به طریق جزء به جزء). فرض کنیم F و G توابع مشتق‌پذیری

بر $[a, b]$ باشند، $F' = f \in \mathcal{R}$ و $G' = g \in \mathcal{R}$ در این صورت،

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

برهان. قرار می‌دهیم $H(x) = F(x)G(x)$ ، و قضیه ۲۱.۶ را در مورد H و مشتقش به کار می‌بریم. توجه کنید که، بنابر قضیه ۱۳.۶، $H' \in \mathcal{R}$.

انتگرالگیری از توابع برداری

۲۳.۰۶ تعریف. فرض کنیم $f_1, \dots, f_k$ توابعی حقیقی بر $[a, b]$ ، و $f = (f_1, \dots, f_k)$ نگاشت نظیر آنها از $[a, b]$ بتوی R^k باشد. چنانچه α بر $[a, b]$ صعود کند، منظور از $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ این خواهد بود که به ازای هر $j = 1, \dots, k$ ، $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ در این حالت است که تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \dots, \int_a^b f_k d\alpha \right).$$

به عبارت دیگر، $\int f d\alpha$ آن نقطه در R^k است که مختص z م آن $\int f_j d\alpha$ می‌باشد. واضح است که قسمتهای $(\bar{\alpha})$ ، (ρ) ، و (θ) قضیه ۱۲.۶ برای این انتگرالهای برداری معتبرند؛ کافی است نتایج پیشتر را در مورد هر مختص به کار ببریم. همین مطلب درباره قضایای ۱۷.۰۶، ۲۰.۰۶، و ۲۱.۰۶ صحیح است. در توضیح این امر، شبیه قضیه ۲۱.۰۶ را بیان می‌داریم.

۲۴.۰۶ قضیه. هرگاه f و F بازه $[a, b]$ را بتوی R^k بنگارند، $f \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$ ، و $F' = f$ آنگاه

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

شبیه قضیه ۱۳.۰۶ (ب) کیفیات نوی را، دست کم در برهانش، از خود بروز می‌دهد.

۲۵.۰۶ قضیه. هرگاه f بازه $[a, b]$ را بتوی R^k بنگارد و، به ازای تابعی صعودی چون α بر $[a, b]$ ، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ ، آنگاه $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ و

$$(40) \quad \left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha.$$

برهان. هرگاه $f_1, \dots, f_k$ مولفه‌های f باشند، آنگاه

$$(41) \quad |f| = (f_1^2 + \dots + f_k^2)^{1/2}.$$

بنابر قضیه ۱۱.۶، هر f_i^2 متعلق به $\mathcal{R}(\alpha)$ است. پس مجموع آنها نیز چنین خواهد بود. چون x^2 تابع پیوسته‌ای از x است، قضیه ۱۷.۴ نشان می‌دهد که تابع ریشه دوم به ازای هر M حقیقی بر $[0, M]$ پیوسته می‌باشد. اگر قضیه ۱۱.۶ را بار دیگر به کار ببریم، (۴۱) نشان خواهد داد که $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$.

برای اثبات (۴۰) قرار می‌دهیم $y = (y_1, \dots, y_k)$ که در آن $y_j = \int f_j d\alpha$. در این صورت، داریم $y = \int f d\alpha$ و

$$|y|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j \int f_j d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j \right) d\alpha.$$

بنابر نامساوی شوارتز،

$$(42) \quad \sum y_j f_j(t) \leq |y| |f(t)| \quad (a \leq t \leq b).$$

پس قضیه ۱۲.۶ (ب) ایجاب می‌کند که

$$(43) \quad |y|^2 \leq |y| \int |f| d\alpha.$$

هرگاه $y = 0$ ، نامساوی (۴۰) بدیهی است. چنانچه $y \neq 0$ ، از تقسیم (۴۳) بر

$|y|$ نامساوی (۴۰) به دست خواهد آمد.

منحنیهای باطول متناهی

این فصل را با مطلبی که از نظر هندسی جالب است پایان می‌بخشیم. این مطلب کاربرد بخشی از نظریه پیش را تدارک خواهد دید. حالت $k=2$ (یعنی، حالت منحنیهای مسطح) در بررسی توابع تحلیلی یک متغیر مختلط از اهمیت قابل توجهی برخوردار است.

۲۶.۶ تعریف. نگاشت پیوسته γ از بازه $[a, b]$ بتوی R^k یک منحنی در R^k نامیده می‌شود. برای تأکید روی بازه پارامتری $[a, b]$ ، همچنین می‌توان گفت γ یک منحنی بر $[a, b]$ می‌باشد.

هرگاه γ یک به یک باشد، γ یک قوس نام دارد.

چنانچه $\gamma(a) = \gamma(b)$ ، γ یک منحنی بسته خوانده خواهد شد.

باید توجه داشت که ما هر منحنی را یک نگاشت تعریف کردیم نه مجموعه‌ای از نقاط.

البته، به هر منحنی مانند γ در R^k زیرمجموعه‌ای از R^k ، یعنی برد γ ، مربوط می‌شود؛ لکن منحنیهای متفاوت می‌توانند از یک برد برخوردار باشند.

ما به هر افراز $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ و هر منحنی γ بر $[a, b]$ عدد

$$\Lambda(P, \gamma) = \sum_{i=1}^n |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|$$

را مربوط می‌کنیم. جمله i م در این مجموع فاصله بین نقاط $\gamma(x_{i-1})$ و $\gamma(x_i)$ (در R^k) می‌باشد. پس $\Lambda(P, \gamma)$ طول یک منحنی چندضلعی با رئوس $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)$ به همین ترتیب خواهد بود. هر قدر افراز ما ظریفتر شود این چندضلعی به برد γ بیشتر نزدیک می‌شود. این امر تعریف طول γ را به صورت

$$\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(P, \gamma)$$

که در آن سوپریم روی تمام افرازهای $[a, b]$ گرفته می‌شود، توجیه خواهد کرد. چنانچه $\Lambda(\gamma) < \infty$ ، می‌گوییم γ با طول متناهی است.

در بعضی حالات، $\Lambda(\gamma)$ با یکانتگرال ریمان داده می‌شود. ما این مطلب را برای منحنیهای به طور پیوسته مشتقپذیر، یعنی برای منحنیهایی چون γ که γ' پیوسته است، ثابت می‌کنیم.

۲۷.۶ قضیه. هرگاه γ' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه γ با طول متناهی است و

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

برهان. هرگاه $a \leq x_{i-1} < x_i \leq b$ ، آنگاه

$$|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt.$$

پس، به ازای هر افراز P از $[a, b]$ ،

$$\Lambda(P, \gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

در نتیجه،

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

برای اثبات این نامساوی در جهت دیگر، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. چون

γ' بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است، پس δ ی مثبتی وجود دارد بطوری که

$$\text{اگر } |s - t| < \delta \quad \text{و} \quad |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$$

فرض کنیم $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد به این ترتیب که به ازای هر

$\Delta x_i < \delta, i$. چنانچه $x_{i-1} \leq t \leq x_i$ ، نتیجه می شود که

$$|\gamma'(t)| \leq |\gamma'(x_i)| + \varepsilon.$$

پس

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt &\leq |\gamma'(x_i)| \Delta x_i + \varepsilon \Delta x_i \\ &= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\varepsilon \Delta x_i. \end{aligned}$$

اگر این نامساویها را با هم جمع کنیم ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \Lambda(P, \gamma) + 2\varepsilon(b-a) \\ &\leq \Lambda(\gamma) + 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

چون ε دلخواه بود ،

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq \Lambda(\gamma).$$

این برهان را تمام خواهد کرد .

تمرین

۱ . فرض کنید α بر $[a, b]$ صعودی بوده ، $a \leq x_0 \leq b$ ، در x_0 پیوسته باشد ،

$f(x_0) = 1$ ، و ، اگر $f(x) = 0$ ، $x \neq x_0$. ثابت کنید $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ و $\int f d\alpha = 0$.

۲ . فرض کنید $f \geq 0$ ، f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، و $\int_a^b f(x) dx = 0$. ثابت کنید

به ازای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) = 0$. (قس . تمرین ۰۱)

۳ . سه تابع β_1 ، β_2 ، و β_3 را این طور تعریف کنید : اگر $\beta_j(x) = 0$ ، $x < 0$ ؛ اگر

$\beta_j(x) = 1$ ، $x > 0$ ؛ $j = 1, 2, 3$ ؛ و $\beta_1(0) = 0$ ، $\beta_2(0) = 1$ ، $\beta_3(0) = \frac{1}{2}$. فرض

کنید f یک تابع کراندار بر $[-1, 1]$ باشد .

(آ) ثابت کنید $f \in \mathcal{R}(\beta_1)$ اگر و فقط اگر $f(0+) = f(0)$ ، و در این صورت

$$\int f d\beta_1 = f(0).$$

(ب) نتیجه مشابه را برای β_2 بیان و اثبات نمایید .

(پ) ثابت کنید $f \in \mathcal{R}(\beta_3)$ اگر و فقط اگر f در ۰ پیوسته باشد .

(ت) هرگاه f در ۰ پیوسته باشد ، ثابت کنید .

$$\int f d\beta_1 = \int f d\beta_2 = \int f d\beta_3 = f(0).$$

۴. هرگاه به ازای هر x گنگ $f(x) = 0$ و به ازای هر x گویا $f(x) = 1$ ، ثابت کنید

به ازای هر $a < b$ ، $f \notin \mathcal{R}$ بر $[a, b]$.

۵. فرض کنید f یک تابع حقیقی کراندار بر $[a, b]$ باشد و $f^2 \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$. آیا

می شود نتیجه گرفت که $f \in \mathcal{R}$ ؟ آیا جواب مسئله با فرض $f^3 \in \mathcal{R}$ تغییر خواهد کرد؟

۶. فرض کنید p مجموعه کانتور باشد که در بخش ۴۴.۲ ساخته شد. f را یک تابع

حقیقی و کراندار بر $[0, 1]$ بینگارید که در هر نقطه خارج از p پیوسته است.

ثابت کنید $f \in \mathcal{R}$ بر $[0, 1]$. راهنمایی: p را می توان با تعدادی متناهی قطعه

که مجموع طولهایشان را می شود به قدر مطلوب کوچک کرد پوشانید. حال مثل

قضیه ۱۰.۶ عمل کنید.

۷. فرض کنید f یک تابع حقیقی بر $(0, 1)$ باشد و، به ازای هر $c > 0$ ، $f \in \mathcal{R}$ بر

$[c, 1]$. در صورت وجود (و متناهی بودن) حد زیر، تعریف کنید

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 f(x) dx.$$

(آ) هرگاه $f \in \mathcal{R}$ بر $[0, 1]$ ، نشان دهید که این تعریف انتگرال با تعریف قدیم

مطابقت دارد.

(ب) تابع f را طوری بسازید که حد بالا وجود داشته ولی این حد برای $|f|$ به

جای f موجود نباشد.

۸. فرض کنید به ازای هر $b > a$ (که در آن a ثابت است)، $f \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$. به

شرط وجود (و متناهی بودن) حد زیر، تعریف کنید

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

در این حالت می گوییم انتگرال سمت چپ همگراست. اگر این انتگرال پس از

تعویض f با $|f|$ نیز همگرا باشد، می گوییم انتگرال به طور مطلق همگراست.

فرض کنید $f(x) \geq 0$ بر $[1, \infty)$ ، و f بر این بازه نزولی باشد. ثابت کنید

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

همگراست اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

همگرا باشد. (این روش را "آزمون انتگرال" برای همگرایی سریها می نامند.)
 ۹. نشان دهید که انتگرالگیری به طریقه "جزء به جزء" را گاهی می توان در مورد انتگرالهای "مجازی"، که در تمرینهای ۷ و ۸ تعریف شدند، به کار گرفت. (مفروضات لازم را بیان، قضیه را تنظیم، و آن را اثبات نمایید.) به عنوان مثال، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx.$$

ثابت کنید یکی از این انتگرالها به طور مطلق همگراست، اما دیگری چنین نمی باشد.

۱۰. فرض کنید p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند بطوری که

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

احکام زیر را ثابت کنید:

(۱) هرگاه $u \geq 0$ و $v \geq 0$ ، آنگاه

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $u^p = v^q$.

(۲) هرگاه $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ ، $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ ، $f \geq 0$ ، $g \geq 0$ ، و

$$\int_a^b f^p d\alpha = 1 = \int_a^b g^q d\alpha,$$

آنگاه

$$\int_a^b fg d\alpha \leq 1.$$

(۳) هرگاه f و g توابع مختلطی در $\mathcal{R}(\alpha)$ باشند، آنگاه

$$\left| \int_a^b fg d\alpha \right| \leq \left\{ \int_a^b |f|^p d\alpha \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |g|^q d\alpha \right\}^{1/q}.$$

این را نامساوی هولدر می نامند. معمولا وقتی $p = q = 2$ ، آن را نامساوی شوارتز

می خوانند. (توجه کنید که قضیه ۳۵.۱ حالت بسیار خاصی از این است.)

(۴) نشان دهید که نامساوی هولدر برای انتگرالهای "مجازی"، که در تمرینهای

۷ و ۸ وصف شدند، نیز برقرار است.

۱۱. فرض کنید α تابع صعودی ثابتی بر $[a, b]$ باشد. به ازای $u \in \mathcal{H}(\alpha)$ تعریف

کنید

$$\|u\|_2 = \left\{ \int_a^b |u|^2 d\alpha \right\}^{1/2}.$$

فرض کنید $f, g, h \in \mathcal{B}(\alpha)$ مثل برهان قضیه ۳۷۰.۱، نامساوی مثلثی

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

را به عنوان نتیجه‌ای از نامساوی شوارتز ثابت نمایید.

۱۲. با نمادهای تمرین ۱۱، فرض کنید $f \in \mathcal{B}(\alpha)$ و $\varepsilon > 0$. ثابت کنید تابع پیوسته‌ای

چون g بر $[a, b]$ هست بطوری که $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. راهنمایی: فرض کنید

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$ افراز مناسبی از $[a, b]$ باشد و، اگر $x_{i-1} \leq t \leq x_i$ ،

تعریف کنید

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i).$$

۱۳. تعریف کنید

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2) dt.$$

(آ) ثابت کنید که اگر $|f(x)| < 1/x$ ، $x > 0$ ، راهنمایی: قرار دهید $t^2 = u$ و،

با انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء، نشان دهید که $f(x)$ مساوی

$$\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du$$

است. حال $\cos u$ را با -1 عوض نمایید.

(ب) ثابت کنید

$$2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x)$$

که در آن $|r(x)| < c/x$ و c عدد ثابتی است.

(پ) حدود بالایی و پایینی $xf(x)$ را وقتی $x \rightarrow \infty$ بیابید.

(ت) آیا $\int_0^\infty \sin(t^2) dt$ همگراست؟

۱۴. همین توجه را به

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt$$

بنمایید: نشان دهید که

$$e^x |f(x)| < 2,$$

و

$$e^x f(x) = \cos(e^x) - e^{-1} \cos(e^{x+1}) + r(x)$$

که در آن، به ازای ثابتی چون C ، $|r(x)| < Ce^{-x}$.

۱۵. فرض کنید f یک تابع حقیقی و به طور پیوسته مشتق‌پذیر بر $[a, b]$ باشد،

$$f(a) = f(b) = 0$$

$$\int_a^b f^2(x) dx = 1.$$

ثابت کنید

$$\int_a^b x f'(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

و

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x) dx > \frac{1}{4}.$$

۱۶. به ازای $1 < s < \infty$ تعریف کنید

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(این تابع زتای ریمان است که در بررسی توزیع اعداد اول اهمیت زیادی دارد.)
ثابت کنید

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} dx \quad (\text{آ})$$

و

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx \quad (\text{ب})$$

که در آنها $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x است.

ثابت کنید انتگرال مذکور در (ب) به ازای هر $s > 0$ همگراست.

راهنمایی: برای اثبات (آ)، تفاوت بین انتگرال روی $[1, N]$ و مجموع جزئی N م سری هرف $\zeta(s)$ را حساب کنید.

۱۷. فرض کنید α بر $[a, b]$ صعود کند، g پیوسته باشد و، به ازای $a \leq x \leq b$ ،

$$g(x) = G'(x) \quad \text{ثابت کنید}$$

$$\int_a^b \alpha(x) g(x) dx = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \int_a^b G d\alpha.$$

راهنمایی: بی آنکه به کلیت خللی وارد شود می توان g را حقیقی گرفت. هرگاه

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{مفروض باشد،} \quad t_i \in (x_{i-1}, x_i) \quad \text{را قسمی اختیار کنید}$$

$$g(t_i) \Delta x_i = G(x_i) - G(x_{i-1}) \quad \text{که نشان دهید که}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha(x_i) g(t_i) \Delta x_i = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \sum_{i=1}^n G(x_{i-1}) \Delta \alpha_i.$$

۱۸. فرض کنید $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ منحنیهایی در صفحه مختلط باشند که بر $[0, 2\pi]$

با

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{2\pi i t \sin(1/t)}$$

تعریف شده‌اند. نشان دهید که این سه منحنی یک برد دارند، γ_1 و γ_2 با طول متناهی‌اند، طول γ_1 مساوی 2π است، γ_2 از طول 4π برخوردار است، و γ_3 با طول متناهی نمی‌باشد.

۱۹. فرض کنید γ_1 یک منحنی در R^k باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده است؛ ϕ نگاشت یک به یک پیوسته‌ای از $[c, d]$ بروی $[a, b]$ باشد که $\phi(c) = a$ ؛ و تعریف کنید $\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s))$. ثابت کنید γ_2 یک قوس، یک منحنی بسته، یا یک منحنی با طول متناهی است اگر و فقط اگر همین مطلب برای γ_1 درست باشد. ثابت کنید γ_1 و γ_2 از یک طول برخوردارند.



دنباله‌ها و سریهای توابع

در فصل حاضر نظر خود را معطوف توابع مختلط (البته، به انضمام تابعهای حقیقی) می‌کنیم. با آنکه بسیاری از قضایا و برهانهای زیر بدون اشکال به توابع برداری، و حتی نگاشتهای بتوی فضاهاى مترى کلی، قابل تعمیم‌اند، ماهمین چهار چوب ساده را برمی-گزینیم تا نظر خود را بر مهمترین جنبه‌های مسائلی که حین تعویض اعمال حدگیری ظاهر می‌شوند متمرکز سازیم.

بحث دربارهٔ مسئلهٔ اصلی

۱۰۷. تعریف. فرض کنیم $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعه E تعریف شده‌اند، و دنباله $\{f_n(x)\}$ از اعداد را به ازای هر $x \in E$ همگرا می‌گیریم. در این صورت، می‌توانیم تابع f را با

$$(1) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in E)$$

تعریف کنیم.

در این شرایط می‌گوییم $\{f_n\}$ بر E همگراست، و f حد یا تابع حدی $\{f_n\}$ می‌باشد. گاهی اصطلاح توصیفی‌تری به کار برده خواهیم گفت " $\{f_n\}$ بر E به f نقطه به نقطه همگراست " اگر که (۱) برقرار باشد. بهمین نحو، اگر $\sum f_n(x)$ به ازای هر $x \in E$ همگرا باشد و f را این طور تعریف کنیم

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in E).$$

تابع f مجموع سری $\sum f_n$ نام خواهد داشت.

مسئله اصلی آن است که معین شود آیا خواص مهم توابع تحت اعمال حدی (۱) و (۲) حفظ می‌شوند یا نه. به عنوان مثال، اگر توابع f_n پیوسته یا مشتق‌پذیر و یا انتگرال-پذیر باشند، آیا همین خاصیت را تابع حدی هم دارد؟ یا، مثلاً، چه رابطه‌هایی بین f'_n و f' ، و یا بین انتگرالهای f_n و f ، وجود دارند؟ وقتی می‌گوییم f در x پیوسته است یعنی که

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x).$$

پس، اینکه سؤال شود آیا حد دنباله‌ای از توابع پیوسته پیوسته است مثل آن است که بپرسیم آیا

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t)$$

برقرار است؛ یعنی، آیا ترتیب انجام اعمال حدی بالا اهمیتی ندارد. در سمت چپ (۳)، اول فرض می‌کنیم $n \rightarrow \infty$ و بعد $t \rightarrow x$ ؛ در طرف راست آن، ابتدا $t \rightarrow x$ و بعد $n \rightarrow \infty$.

حال با چند مثال نشان می‌دهیم که تعویض اعمال حدی نمی‌تواند در حالت کلی بی تأثیر باشد. پس از آن ثابت می‌کنیم که، تحت شرایطی معین، ترتیب اعمال حدی بی اهمیت خواهد بود.

اولین مثال ما، که ساده‌تر از همه است، راجع به یک "دنباله مضاعف" می‌باشد.

۲۰۷ مثال. به ازای $m = 1, 2, 3, \dots$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ قرار می‌دهیم

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

در این صورت، به ازای هر n ثابت،

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = 1.$$

پس

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = 1.$$

از سوی دیگر، به ازای هر m ثابت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = 0.$$

پس

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = 0.$$

۳.۷ مثال. فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(x حقیقی است و ...)

و توجه می‌کنیم که

$$(6) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

چون $f_n(0) = 0$ ، داریم $f(0) = 0$. به ازای $x \neq 0$ ، آخرین سری در (۶) یک سری هندسی همگرا با مجموع $1+x^2$ است (قضیه ۲۶.۳). در نتیجه،

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0), \\ 1+x^2 & (x \neq 0). \end{cases}$$

پس یک سری همگرا از توابع پیوسته می‌تواند مجموع ناپیوسته داشته باشد.

۴.۷ مثال. به ازای $m = 1, 2, 3, \dots$ قرار می‌دهیم

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2^n}.$$

وقتی $m!x$ صحیح باشد، $f_m(x) = 1$. به ازای مقادیر دیگر x ، $f_m(x) = 0$. حال قرار می‌دهیم

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x).$$

اگر x گنگ باشد، به ازای هر m ، $f_m(x) = 0$. لذا $f(x) = 0$. به ازای x گویا، مثلاً $x = p/q$ که در آن p و q صحیح‌اند، می‌بینیم که اگر $m \geq q$ ، $m!x$ صحیح است. در نتیجه، $f(x) = 1$ از اینرو،

$$(8) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2^n} = \begin{cases} 0 & (x \text{ گنگ}), \\ 1 & (x \text{ گویا}). \end{cases}$$

پس یک تابع حدی همه جا ناپیوسته به دست آورده‌ایم که انتگرال ریمان ندارد

(ر. ک. تمرین ۴، فصل ۶).

۵.۷ مثال. فرض کنیم

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad (x \text{ حقیقی است و } n = 1, 2, 3, \dots)$$

و

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

در این صورت، $f'(x) = 0$ و

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

پس $\{f'_n\}$ همگرا به f' نیست. مثلاً، وقتی $n \rightarrow \infty$

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \rightarrow +\infty,$$

حال آنکه $f'(0) = 0$.

۶.۷ مثال. فرض کنیم

$$(10) \quad f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n \quad (0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots).$$

بنابر قضیه ۲۰.۳ (ت)، به ازای $0 < x \leq 1$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

چون $f_n(0) = 0$ ، خواهیم دید که

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+2}.$$

لذا، با وجود (۱۱)، وقتی $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^2}{2n+2} \rightarrow +\infty.$$

اگر در (۱۰) n^2 را با n عوض کنیم، (۱۱) باز هم برقرار است، ولی در این

حالت داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

حال آنکه

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx = 0.$$

لذا، حد انتگرال لزوماً مساوی انتگرال حد نیست، حتی اگر هر دو نیز متناهی باشند پس از این مثالها، که مشکلات ناشی از بی دقتی در تعویض اعمال حدی را نشان می‌دهند، به تعریف نوع جدیدی از همگرایی که از همگرایی نقطه به نقطه مذکور در تعریف

۱۰۷ قویتر است می‌پردازیم. این همگرایی ما را به چند نتیجه قطعی خواهد رسانید.

همگرایی یکنواخت

۷.۷ تعریف. گوئیم دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ بر E به طور یکنواخت به تابع f همگراست هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (12)$$

را به ازای هر $x \in E$ ایجاب کند.

واضح است که هر دنباله به طور یکنواخت همگرا نقطه به نقطه همگراست. فرق این دو مفهوم صریحا "بدین شرح است: هرگاه $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه همگرا باشد، آنگاه تابعی چون f هست که به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $x \in E$ عدد صحیحی مانند N وابسته به ε و x ، وجود دارد بطوری که (۱۲) به ازای $n \geq N$ برقرار است؛ چنانچه $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد، می‌توان به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح N را یافت که برای هر $x \in E$ کارساز باشد.

می‌گوئیم سری $\sum f_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگراست هرگاه دنباله $\{s_n\}$ از مجموعه‌های جزئی که با

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = s_n(x)$$

تعریف می‌شوند بر E به طور یکنواخت همگرا باشد.
محک کشی برای همگرایی یکنواخت بدین قرار است.

۸۰۷ قضیه. دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$ تعریف شده بر E به طور یکنواخت بر E همگرا است اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که $m \geq N$ و $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad (13)$$

را ایجاب کنند.

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا و f تابع حدی آن باشد. در

این صورت، عدد صحیحی مانند N هست بطوری که $x \in E$ و $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب می کنند. پس، اگر $n \geq N$ و $m \geq n$ ، $x \in E$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

بعکس، فرض کنیم شرط کفی برقرار باشد. بنابر قضیه ۱۱.۳، دنباله $\{f_n(x)\}$

به ازای هر x به حدی که آن را $f(x)$ می نامیم همگراست. پس دنباله $\{f_n\}$ بر E به f همگرا خواهد بود. باید ثابت کنیم که همگرایی یکنواخت است.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، و N را قسمی می گیریم که (۱۳) برقرار شود. در

(۱۳) n را ثابت گرفته m را به ∞ میل می دهیم. چون وقتی که

$$m \rightarrow \infty, \quad f_m(x) \rightarrow f(x), \quad x \in E \text{ و } n \geq N$$

نتیجه می شود که به ازای هر $n \geq N$ و هر $x \in E$

$$(14) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{و برهان تمام خواهد شد.}$$

محک زیر گاهی اوقات مفید واقع می شود.

۹.۷ قضیه. فرض کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E).$$

قرار می دهیم

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

در این صورت، $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر E اگر و فقط اگر وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $M_n \rightarrow 0$.

چون این قضیه نتیجه مستقیم تعریف ۷.۷ است، برهانش را حذف می کنیم.

در مورد سریها، آزمون بسیار مناسبی برای همگرایی یکنواخت وجود دارد که به

وایراشتراس منسوب است.

۱۰.۷ قضیه. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع باشد که بر E تعریف شده اند، و گیریم

که

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

در این صورت، اگر $\sum M_n$ همگرا باشد، $\sum f_n$ بر E به طور یکنواخت همگراست.

توجه کنید که عکس قضیه فوق ادعا نشده است (و، در واقع، درست هم نیست).

برهان. هرگاه $\sum M_n$ همگرا باشد، آنگاه به ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه

$$\left| \sum_{i=n}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n}^m M_i \leq \varepsilon \quad (x \in E).$$

مشروط بر اینکه m و n به قدر کافی بزرگ باشند. حال همگرایی یکنواخت از قضیه ۸.۷ نتیجه می‌شود.

همگرایی یکنواخت و پیوستگی

۱۱.۷ قضیه. فرض کنیم در یک فضای متری $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر مجموعه E . x را یک نقطه حدی E می‌انگاریم و فرض می‌کنیم

$$\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (15)$$

در این صورت، $\{A_n\}$ همگراست و

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n. \quad (16)$$

به عبارت دیگر، نتیجه این است که

$$\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t). \quad (17)$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. بنا بر همگرایی یکنواخت $\{f_n\}$ ، عدد صحیحی مانند N هست بطوری که $n \geq N$ ، $m \geq N$ ، و $t \in E$ ایجاب می‌کنند که

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon. \quad (18)$$

با فرض $t \rightarrow x$ در (۱۸)، به ازای $n \geq N$ و $m \geq N$ خواهیم داشت

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon.$$

پس $\{A_n\}$ یک دنباله کشی است؛ و در نتیجه، همگرا (مثلاً، به A) می‌باشد.

دیگر اینکه،

$$(19) \quad |f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|.$$

ابتدا n را طوری می‌گیریم که به ازای هر $t \in E$

$$(20) \quad |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

(این بخاطر همگرایی یکنواخت میسر است) ، و نیز

$$(21) \quad |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

بعد، به ازای این n ، همسایگی V از x را قسمی اختیار می‌کنیم که

اگر $t \in V \cap E$ و $t \neq x$ ، داشته باشیم

$$(22) \quad |f_n(t) - A_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

با گذاردن نامساویهای (۲۰) تا (۲۲) در (۱۹) خواهیم دید که، با شرط

$$|f(t) - A| \leq \varepsilon, \quad t \in V \cap E \text{ و } t \neq x,$$

این با (۱۶) معادل خواهد بود.

۱۲.۷ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر E باشد و $f_n \rightarrow f$ به طور

یکنواخت بر E ، آنگاه f بر E پیوسته خواهد بود.

این قضیه بسیار مهم نتیجه مستقیم قضیه ۱۱.۷ است.

عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی، ممکن است دنباله‌ای از توابع پیوسته، در عین

همگرایی یکنواخت نبودن، به تابع پیوسته‌ای همگرا بشود. مثال ۶.۷ از این قماش است (برای

اثبات آن، قضیه ۹.۷ را به کار ببرید). اما حالتی وجود دارد که در آن می‌توان به عکس

قضیه بالا حکم داد.

۱۳.۷ قضیه. فرض کنیم K فشرده باشد، و

(آ) $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر K باشد؛

(ب) $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به تابع پیوسته‌ای چون f بر K همگرا باشد؛

(پ) به ازای هر $x \in K$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ،

در این صورت، $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر K .

برهان. قرار می‌دهیم $g_n = f_n - f$. پس g_n پیوسته است، $g_n \rightarrow 0$ نقطه به نقطه، و $g_n \geq g_{n+1}$. باید ثابت کنیم $g_n \rightarrow 0$ به طور یکنواخت بر K .

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. K_n را مجموعه تمام x هایی در K می‌انگاریم که $g_n(x) \geq \varepsilon$. چون g_n پیوسته است، K_n بسته می‌باشد (قضیه ۸.۴). در نتیجه، فشرده خواهد بود (قضیه ۳۵.۲). و چون $g_n \geq g_{n+1}$ ، داریم $K_n \supset K_{n+1}$. از آنجا که $g_n(x) \rightarrow 0$ ، ملاحظه می‌کنیم که اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، $x \notin K_n$. لذا $x \notin \bigcap K_n$ به عبارت دیگر، $\bigcap K_n$ تهی است. پس K_N به ازای N تهی خواهد بود (قضیه ۳۶.۲). از این نتیجه می‌شود که برای هر $x \in K$ و هر $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ ، $n \geq N$ این قضیه را ثابت می‌کند.

توجه می‌دهیم که در اینجا فشردگی واقعا "لازم است". مثلاً، هرگاه

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \quad (0 < x < 1; n = 1, 2, 3, \dots),$$

آنگاه $f_n(x) \rightarrow 0$ به طور یکنوا در $(0, 1)$ ، اما همگرایی یکنواخت نخواهد بود.

۱۴.۷ تعریف. هرگاه X یک فضای متریک باشد، $\mathcal{C}(X)$ مجموعه تمام توابع مختلط، پیوسته، و کراندار با قلمرو X خواهد بود.

[توجه کنید که در حالت فشردگی X ، کراندار بودن زائد است (قضیه ۱۵.۴). لذا، اگر X فشرده باشد، $\mathcal{C}(X)$ از جمیع توابع مختلط پیوسته بر X تشکیل خواهد شد. به هر $f \in \mathcal{C}(X)$ نرم سوپرمم آن، یعنی

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

را مربوط می‌کنیم. چون f کراندار فرض شده، پس $\|f\| < \infty$. واضح است که $\|f\| = 0$ فقط اگر که به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) = 0$ ؛ یعنی، فقط اگر که $f = 0$. هرگاه $h = f + g$ ، آنگاه به ازای هر $x \in X$ ،

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

پس

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

چنانچه فاصله بین $f \in \mathcal{C}(X)$ و $g \in \mathcal{C}(X)$ مساوی $\|f - g\|$ تعریف شود، نتیجه خواهد شد که اصول موضوع ۱۵.۲ برای یک متر برقرارند.

بنابراین، $\mathcal{C}(X)$ را به یک فضای متری بدل کردیم.

قضیه ۹.۷ را می‌توانیم این طور هم بگوییم:

دنباله $\{f_n\}$ نسبت به متر $\mathcal{C}(X)$ همگرا به f است اگر و فقط اگر $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر X .

از این روست که گاهی زیر مجموعه‌های بسته $\mathcal{C}(X)$ را به طور یکنواخت بسته، و بست هر مجموعه مانند $\mathcal{C}(X) \supset \mathcal{A}$ را بست یکنواخت آن می‌نامند، و مانند اینها.

۱۵.۷ قضیه. متر مذکور در بالا $\mathcal{C}(X)$ را به یک فضای متری تام بدل می‌کند.

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{C}(X)$ باشد. این یعنی به هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N نظیر است بنحوی که اگر $n \geq N$ و $m \geq N$ ، $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. پس (بنابر قضیه ۸.۷) تابعی مانند f با قلمرو X هست که $\{f_n\}$ به آن به طور یکنواخت همگراست. بنابر قضیه ۱۲.۷، f پیوسته می‌باشد. بعلاوه، f کراندار است، چرا که n ی هست بطوری که به ازای هر $x \in X$ ، $|f(x) - f_n(x)| < 1$ ، و f_n کراندار می‌باشد.

بنابراین، $f \in \mathcal{C}(X)$ ، و چون $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر X ، پس وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\|f - f_n\| \rightarrow 0$.

همگرایی یکنواخت و انتگرالگیری

۱۶.۷ قضیه. فرض کنیم α بر $[a, b]$ صعودی باشد. همچنین، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر $[a, b]$. در این صورت، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ و

$$(23) \quad \int_a^b f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha.$$

(وجود حد بخشی از نتیجه است.)

برهان. کافی است قضیه برای f_n های حقیقی ثابت شود. قرار می‌دهیم

$$(24) \quad \varepsilon_n = \sup |f_n(x) - f(x)|,$$

که در آن سوپرم روی $a \leq x \leq b$ گرفته شده است. پس

$$f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n.$$

در نتیجه، انتگرالهای بالایی و پایینی f (ر.ک. تعریف ۲۰۶) در نامساویهای

$$(25) \quad \int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) d\alpha$$

صدق می‌کند. لذا،

$$0 \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \leq 2\varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

چون وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (قضیه ۹۰۷)، پس انتگرالهای بالایی و پایینی f برابر می‌باشند.

بنابراین، $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. اینک کاربرد دیگر (۲۵) نتیجه می‌دهد که

$$(26) \quad \left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \leq \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

این (۲۳) را ایجاب خواهد کرد.

نتیجه. هرگاه $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ،

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

و سری بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha.$$

به عبارت دیگر، از سری می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

همگرایی یکنواخت و مشتقگیری

قبلاً، در مثال ۵۰۷، دیدیم که از همگرایی یکنواخت $\{f_n\}$ چیزی برای دنباله $\{f'_n\}$ حاصل نمی‌شود. از اینرو، حکم "اگر $f_n \rightarrow f$ ، $f'_n \rightarrow f'$ " به فرضهای قویتری نیاز خواهد داشت.

۱۷۰۷ قضیه. فرض کنیم $\{f_n\}$ چنان دنباله‌ای از توابع باشد که بر $[a, b]$ مشتقپذیر اند، و به ازای نقطه‌ای چون x_0 در $[a, b]$ ، $\{f'_n(x_0)\}$ همگراست. هرگاه

$\{f'_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد، $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت به تابعی چون f همگراست و

$$(27) \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. N را قسمی اختیار می‌کنیم که $m \geq N$ و $n \geq N$ نامساویهای

$$(28) \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$(29) \quad |f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (a \leq t \leq b)$$

را ایجاب کنند.

چنانچه قضیه مقدار میانگین (قضیه ۱۹۰۵) را برای تابع $f_n - f_m$ به کار ببریم، (۲۹) نشان خواهد داد که به ازای هر x و هر t در $[a, b]$ ، در صورتی که $m \geq N$ و $n \geq N$ ،

$$(30) \quad |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,$$

به کمک (۲۸) و (۳۰)، ایجاب می‌کند که

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b, n \geq N, m \geq N).$$

پس $\{f'_n\}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

حال نقطه x را در $[a, b]$ ثابت می‌گیریم و، به ازای $a \leq t \leq b$ که $t \neq x$ تعریف

$$(31) \quad \phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

می‌کنیم

در این صورت،

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = f'_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

اولین نامساوی در (۳۰) نشان می‌دهد که

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (n \geq N, m \geq N).$$

پس $\{\phi_n\}$ به ازای $t \neq x$ به طور یکنواخت همگراست. چون $\{f_n\}$ همگرا به f است، ز (۳۱) نتیجه می‌گیریم که

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$$

به طور یکنواخت به ازای $a \leq t \leq b$ که $t \neq x$.
حال اگر قضیه ۱۱۰۷ را در مورد $\{\phi_n\}$ به کار ببریم، (۳۲) و (۳۳) نشان خواهند داد که

$$\lim_{t \rightarrow x} \phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x);$$

و این، بنابر تعریف $\phi(t)$ ، همان (۲۷) می‌باشد.

تبصره. هرگاه، علاوه بر مفروضات فوق، پیوستگی f'_n هائیز اضافه شود، می‌توان، برپایه قضیه ۱۶۰۷ و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، به برهان بسیار کوتاه‌تری از (۲۷) دست یافت.

۱۸۰۷ قضیه. تابعی حقیقی و پیوسته بر خط حقیقی هست که در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیست.

برهان. تعریف می‌کنیم

$$(34) \quad \varphi(x) = |x| \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

و، با قرار

$$(35) \quad \varphi(x+2) = \varphi(x),$$

تعریف $\varphi(x)$ را به تمام x های حقیقی تعمیم می‌دهیم. در این صورت، به ازای هر s و t داریم

$$(36) \quad |\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t|.$$

بخصوص، φ بر R^1 پیوسته می‌باشد. تعریف می‌کنیم

$$(37) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

چون $0 \leq \varphi \leq 1$ و قضیه ۱۵۰۷ نشان می‌دهد که سری (۳۷) بر R^1 به طور یکنواخت همگرا

است. بنا بر قضیه ۱۲.۷، f بر $\mathbb{R}^1$ پیوسته خواهد بود.

حال عدد حقیقی x و عدد صحیح و مثبت m را ثابت می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$(38) \quad \delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$$

که در آن علامت طوری اختیار می‌شود که هیچ عدد صحیحی بین $4^m x$ و $4^m(x + \delta_m)$ قرار نگیرد. این عمل، به این دلیل که $4^m |\delta_m| = \frac{1}{2}$ ، میسر است. تعریف می‌کنیم

$$(39) \quad \gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}.$$

وقتی $n > m$ ، $4^n \delta_m$ زوج است؛ پس $\gamma_n = 0$. زمانی که $0 \leq n \leq m$ (۳۶) ایجاب می‌کند که $|\gamma_n| \leq 4^n$.

چون $|\gamma_m| = 4^m$ ، نتیجه خواهیم گرفت که

$$\left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right|$$

$$\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n$$

$$= \frac{1}{2}(3^m + 1).$$

وقتی $m \rightarrow \infty$ ، $\delta_m \rightarrow 0$. پس f در x مشتق‌پذیر نخواهد بود.

خانواده‌های همپیوسته از توابع

در قضیه ۶.۳ دیدیم که هر دنباله کراندار از اعداد مختلط شامل زیر دنباله‌ای همگراست، و این سؤال مطرح می‌شود که آیا برای دنباله‌های توابع نیز چیزی شبیه به این درست است یا خیر. برای دقیق‌تر شدن سؤال، دوتنوع کراندار بودن را تعریف می‌کنیم.

۱۹.۷ تعریف. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعه E تعریف شده‌اند. می‌گوییم $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه کراندار است هرگاه دنباله $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ کراندار باشد؛ یعنی، تابعی با مقادیر متناهی چون ϕ ، که بر E تعریف شده، باشد بطوری که

$$|f_n(x)| < \phi(x) \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

می‌گوییم $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت کراندار است هرگاه عددی مانند M باشد بطوری که

$$|f_n(x)| < M \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

حال اگر $\{f_n\}$ بر E نقطه به نقطه کراندار بوده و E_1 زیر مجموعه شمارشپذیری از E باشد، همیشه می‌توان زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ را قسمی یافت که $\{f_{n_k}(x)\}$ به ازای هر $x \in E_1$ همگرا باشد. این را می‌شود با فرایند قطری، که در برهان قضیه ۲۳.۷ به کار رفت، صورت داد.

با این حال، حتی اگر $\{f_n\}$ دنباله به طور یکنواخت کراندار از توابع پیوسته بر مجموعه فشرده E هم باشد، باز لازم نیست زیر دنباله‌ای از آن که بر E نقطه به نقطه همگراست وجود داشته باشد. در مثال زیر، اثبات این مطلب با وسایلی که تاکنون در اختیار ما قرار گرفته کار پرمشیتی است، لکن این اثبات با توسل به قضیه‌ای از فصل ۱۱ کاملاً ساده خواهد بود.

۲۰.۷ مثال. گیریم

$$f_n(x) = \sin nx \quad (0 \leq x \leq 2\pi, n = 1, 2, 3, \dots).$$

و فرض می‌کنیم دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ باشد بطوری که به ازای هر $x \in [0, 2\pi]$ $\{\sin n_k x\}$ همگرا باشد. در آن صورت باید داشته باشیم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

پس

$$(40) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

بنابر قضیه لگ مربوط به انتگرالگیری از دنباله‌های به طور کراندار همگرا (قضیه ۳۲.۱۱)، رابطه (۴۰) ایجاب می‌کند که

$$(41) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0.$$

اما محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 2\pi,$$

که ناقض (۴۱) می‌باشد.

سؤال دیگر آن است که آیا هر دنباله همگرا شامل زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت

همگرا هست یا نه. مثال بعدی ما نشان می‌دهد که الزاما "این طور نیست حتی اگر دنباله بر مجموعه‌ای فشرده به طور یکنواخت کراندار باشد. (مثال ۲۰۷، ۶ نشان می‌دهد که یک دنباله از توابع کراندار می‌تواند بدون آنکه به طور یکنواخت کراندار باشد همگرا باشد. اما بوضوح دیده می‌شود که همگرایی یکنواخت دنباله‌ای از توابع کراندار کراندار یکنواخت آن را ایجاب خواهد کرد.)

۲۱۰۷ مثال. فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \quad (0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots).$$

در این صورت، $|f_n(x)| \leq 1$ پس $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت کراندار است. همچنین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

ولی

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

در نتیجه، هیچ زیر دنباله‌ای نمی‌تواند بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگرا شود. مفهومی که در این رابطه مورد نیاز است همپیوستگی است، که در تعریف زیر داده می‌شود.

۲۲۰۷ تعریف. خانواده $\mathcal{F}$ از توابع مختلط مانند f را که بر مجموعه E در فضای متریک X تعریف شده‌اند بر E همپیوسته خوانند هرگاه به ازای هر $\delta > 0$ ، ε مثبتی باشد بطوری که هر وقت $d(x, y) < \delta$ ، $x \in E$ ، $y \in E$ ، و $f \in \mathcal{F}$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

در اینجا d نشان دهنده متر X است.

واضح است که هر عضو یک خانواده همپیوسته به طور یکنواخت پیوسته است.

دنباله مذکور در مثال ۲۱۰۷ همپیوسته نمی‌باشد.

فضای ۲۴۰۷ و ۲۵۰۷ نشان می‌دهند که بین همپیوستگی، از یک سو، و همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع پیوسته، از جهت دیگر، رابطه بسیار نزدیکی وجود دارد. لکن ما ابتدا یک فرایند گزینش را که هیچ ربطی به پیوستگی ندارد شرح می‌دهیم.

۲۳.۷ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله نقطه به نقطه کراندار از توابع مختلط بر مجموعه شمارشپذیر E باشد، آنگاه $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ دارد بطوری که $\{f_{n_k}(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ همگراست.

برهان. فرض کنیم $\{x_i\}$ ، $i = 1, 2, 3, \dots$ ، نقاط E باشد که به شکل یک دنباله آراسته شده‌اند. چون $\{f_n(x_1)\}$ کراندار است، زیردنباله‌ای مانند $\{f_{1,k}\}$ هست که وقتی $k \rightarrow \infty$ همگرا می‌باشد.

حال به دنباله $S_1, S_2, S_3, \dots$ که با آرایه

$$\begin{aligned} S_1: & f_{1,1} \quad f_{1,2} \quad f_{1,3} \quad f_{1,4} \quad \dots \\ S_2: & f_{2,1} \quad f_{2,2} \quad f_{2,3} \quad f_{2,4} \quad \dots \\ S_3: & f_{3,1} \quad f_{3,2} \quad f_{3,3} \quad f_{3,4} \quad \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

نشانش می‌دهیم و از خواص زیر برخوردار است توجه می‌کنیم:

(آ) به ازای S_n ، $n = 2, 3, 4, \dots$ زیردنباله‌ای از S_{n-1} است؛

(ب) وقتی $k \rightarrow \infty$ همگراست $\{f_{n,k}(x_n)\}$ (کراندار بودن $\{f_n(x_n)\}$ انتخاب S_n را به این طریق ممکن می‌سازد)؛

(پ) ترتیب ظاهر شدن تابعها در هر دنباله یکی است؛ یعنی، اگر در S_1 تابعی پیش از دیگری باشد، این رابطه در هر S_n بینشان هست تا اینکه یکی از آنها حذف شود. در نتیجه، وقتی در آرایه فوق از یک سطر به سطر بعد می‌رویم، ممکن است تابعها به چپ حرکت کنند ولی هرگز به راست نخواهند رفت.

حال در امتداد قطر آرایه پایین می‌رویم؛ یعنی، دنباله

$$S: f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \quad \dots$$

را در نظر می‌گیریم. بنا بر (پ)، دنباله S (بجز احتمالاً $n-1$ جمله اول آن) یک زیر-دنباله S_n به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ است. پس (ب) ایجاب خواهد کرد که به ازای هر $x_i \in E$ ، $\{f_{n,n}(x_i)\}$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ همگرا باشد.

۲۴.۷ قضیه. هرگاه K یک فضای متری فشرده بوده، $f_n \in \mathcal{C}(K)$ به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ و $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه $\{f_n\}$ بر K همپیوسته خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند. چون $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگراست، عددی

صحیح مانند N هست بقسمی که

$$(42) \quad \|f_n - f_N\| < \varepsilon \quad (n > N).$$

(ر. ک. تعریف ۱۴.۷) چون توابع پیوسته بر مجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت پیوسته‌اند،

δ مثبتی هست بطوری که اگر $1 \leq i \leq N$ و $d(x, y) < \delta$ ،

$$(43) \quad |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

چنانچه $n > N$ و $d(x, y) < \delta$ ، نتیجه خواهد شد که

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon.$$

این، درمیت (۴۳)، قضیه را اثبات خواهد کرد.

۲۵.۷ قضیه. هرگاه K فشرده بوده، $f_n \in \mathcal{C}(K)$ به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ و $\{f_n\}$

بر K نقطه به نقطه گراندار و همپیوسته باشد، آنگاه

(آ) $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت گراندار است؛

(ب) $\{f_n\}$ شامل زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

برهان

(آ) فرض کنیم $\varepsilon > 0$ را داده باشند، و $\delta > 0$ را طبق تعریف ۲۲.۷ اختیار می‌کنیم. در-

نتیجه، اگر $d(x, y) < \delta$ ، به ازای هر n داریم

$$(44) \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $p_1, \dots, p_r$ در K هست بطوری که هر

$x \in K$ نظیر دست کم یک p_i با خاصیت $d(x, p_i) < \delta$ می‌باشد. و چون $\{f_n\}$ نقطه

به نقطه گراندار است، M_i ی کوچکتراز ∞ هست بطوری که به ازای هر n $|f_n(p_i)| < M_i$.

هرگاه $M = \max(M_1, \dots, M_r)$ ، آنگاه به ازای هر $x \in K$ $|f(x)| < M + \varepsilon$ این (آ) را

ثابت می‌کند.

(ب) فرض کنیم E زیر مجموعه چگال شمارشپذیری از K باشد. (برای اطلاع از وجود چنین

مجموعه، ر. ک. تمرین ۲۵، فصل ۰۲) قضیه ۲۳.۷ نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ زیر دنباله‌ای

مانند $\{f_{n_i}\}$ دارد بطوری که $\{f_{n_i}(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ همگراست.

برای آنکه نمادگذاری ساده شود، قرار می‌دهیم $f_{n_i} = g_i$. ثابت می‌کنیم $\{g_i\}$ بر

K به طور یکنواخت همگراست.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ را مثل اول برهان اختیار می‌کنیم. گیریم $V(x, \delta)$ مجموعه تمام $y \in K$ هایی باشد که $d(x, y) < \delta$ چون E در K چگال و K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $x_1, \dots, x_m$ در E هستند بطوری که

$$(45) \quad K \subset V(x_1, \delta) \cup \dots \cup V(x_m, \delta).$$

و چون به ازای هر $x \in E$ ، $\{g_i(x)\}$ همگراست، عدد صحیحی مثل N هست بطوری که هر وقت $i \geq N$ ، $j \geq N$ و $1 \leq s \leq m$ ، داریم

$$(46) \quad |g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon.$$

چنانچه $x \in K$ ، رابطه (۴۵) نشان می‌دهد که به ازای s ی $x \in V(x_s, \delta)$ پس، به ازای هر i ،

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon.$$

اگر $i \geq N, j \geq N$ ، از نامساوی (۴۶) نتیجه می‌شود که

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| < 3\varepsilon.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

قضیه استون — وایراشتراس

۲۶.۷ قضیه. هرگاه f تابع مختلط پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشد، دنباله‌ای از چند جمله‌ایها مانند P_n هست بطوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

به طور یکنواخت بر $[a, b]$. چنانچه f حقیقی باشد، P_n ها را می‌توان حقیقی گرفت.

این همان شکلی از قضیه است که در آغاز توسط وایراشتراس کشف شد.

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود می‌توانیم فرض کنیم $[a, b] = [0, 1]$. همچنین، می‌شود فرض کرد که $f(0) = f(1) = 0$. زیرا با این فرض که قضیه برای این حالت درست است، رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1).$$

در اینجا $g(0) = g(1) = 0$ ، و اگر g حد یک دنباله به طور یکنواخت همگرا از چند جمله‌ایها باشد، واضح است که f نیز، به دلیل چند جمله‌ای بودن $f - g$ ، چنین خواهد بود.

بعلاوه، $f(x)$ را به ازای x های خارج $[0, 1]$ صفر تعریف می‌کنیم. در این صورت، f بر تمام خط حقیقی به طور یکنواخت پیوسته است. قرار می‌دهیم

$$(47) \quad Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

که در آن c_n قسمی اختیار شده که

$$(48) \quad \int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

ما در مورد میزان بزرگی c_n به اطلاعاتی نیاز داریم. گوئیم چون

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx \\ &\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

از (۴۸) نتیجه می‌شود که

$$(49) \quad c_n < \sqrt{n}.$$

نامساوی $(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2$ به کار رفته در فوق را می‌توان با توجه به تابع

$$(1 - x^2)^n - 1 + nx^2$$

که در $x=0$ صفر بوده و مشتقش در $(0, 1)$ مثبت است، به آسانی اثبات کرد.

به ازای هر $\delta > 0$ ، رابطه (۴۹) ایجاب خواهد کرد که

$$(50) \quad Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n \quad (\delta \leq |x| \leq 1).$$

پس $Q_n \rightarrow 0$ به طور یکنواخت در $\delta \leq |x| \leq 1$.

حال قرار می‌دهیم

$$(51) \quad P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1).$$

فرضهای ما در باب f نشان می‌دهند که با تغییر متغیر ساده‌ای داریم

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t) dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x) dt,$$

و آخرین انتگرال بوضوح یک چند جمله‌ای از x است. لذا، $\{P_n\}$ دنباله‌ای است از چند جمله‌ایها که اگر f حقیقی باشد، جمله حقیقی خواهند بود.

به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، $\delta > 0$ را قسمی اختیار می‌کنیم که $|y - x| < \delta$ نامساوی

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب کند. فرض می‌کنیم: $M = \sup |f(x)|$. با استفاده از (۴۸)، (۵۰)، و اینکه

$Q_n(x) \geq 0$ ، می‌بینیم که به ازای $0 \leq x \leq 1$ و هر n به قدر کافی بزرگ

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt + 2M \int_{\delta}^1 Q_n(t) dt \\ &\leq 4M \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$< \varepsilon$.

که قضیه را ثابت خواهد کرد.

رسم نمودار Q_n به ازای چند مقدار از n آموخته شده است. همچنین، توجه کنید که برای نیل به همگرایی یکنواخت $\{P_n\}$ پیوستگی یکنواخت f لازم بود.

در برهان قضیه ۳۲.۷ همه توان قضیه ۲۶.۷ مورد حاجت نیست، بلکه فقط از حالت خاص زیر، که به صورت نتیجه بیان شده، استفاده خواهد شد.

۲۷.۷ نتیجه. به ازای هر بازه مانند $[-a, a]$ ، دنباله‌ای از چند جمله‌ایهای حقیقی مانند P_n وجود دارد که $P_n(0) = 0$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = |x|$$

به طور یکنواخت بر $[-a, a]$.

برهان. بنابر قضیه ۲۶.۷، دنباله‌ای از چند جمله‌ایهای حقیقی مانند $\{P_n^*\}$ وجود دارد که به طور یکنواخت بر $[-a, a]$ به $|x|$ همگراست. در حالت خاص، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $P_n^*(0) \rightarrow 0$. چند جمله‌ایهای

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

خواص مطلوب را دارا خواهند بود .

حال آن خواص از چند جمله‌ایها که قضیه و ایراشتراس را ممکن می‌سازند جدا می‌کنیم .

۲۸.۷ تعریف. خانواده $\mathcal{A}$ از توابع مختلط تعریف شده بر مجموعه E را یک جبر نامند هرگاه به ازای هر $f, g \in \mathcal{A}$ و هر ثابت مختلط c ، $(\text{یک}) f + g \in \mathcal{A}$ ، $(\text{دو}) f \cdot g \in \mathcal{A}$ و $(\text{سه}) cf \in \mathcal{A}$ ، یعنی ، هرگاه $\mathcal{A}$ تحت جمع ، ضرب ، و ضرب در اسکالر بسته باشد . همچنین ، باید جبرهای توابع حقیقی را نیز در نظر گرفت ؛ البته ، در این حالت فقط کافی است قسمت (سه) برای تمام c های حقیقی برقرار باشد .

هرگاه $\mathcal{A}$ این خاصیت را دارا باشد که وقتی $f_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر E ، $f \in \mathcal{A}$ آنگاه گفته می‌شود که $\mathcal{A}$ به طور یکنواخت بسته است . فرض کنیم $\mathcal{B}$ مجموعه تمام توابعی باشد که حدود دنباله‌های به طور یکنواخت همگرایی از اعضای $\mathcal{A}$ اند . در این صورت ، $\mathcal{B}$ را بست یکنواخت $\mathcal{A}$ می‌نامند . (ر.ک. تعریف (۰.۱۴.۷))

برای مثال ، مجموعه تمام چند جمله‌ایها یک جبر است ، و قضیه و ایراشتراس را می‌توان این طور گفت که مجموعه توابع پیوسته بر $[a, b]$ بست یکنواخت مجموعه چند جمله‌ایها بر $[a, b]$ می‌باشد .

۲۹.۷ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{B}$ بست یکنواخت جبر $\mathcal{A}$ مرکب از توابع کراندار باشد . در این صورت ، $\mathcal{B}$ یک جبر به طور یکنواخت بسته خواهد بود .

برهان. هرگاه $f \in \mathcal{B}$ و $g \in \mathcal{B}$ ، دنباله‌هایی به طور یکنواخت همگرا مانند $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ وجود دارند بطوری که $f_n \rightarrow f$ ، $g_n \rightarrow g$ ، و $f_n \in \mathcal{A}$ ، $g_n \in \mathcal{A}$ چون سرو کار ما با توابع کراندار است ، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$f_n + g_n \rightarrow f + g, \quad f_n g_n \rightarrow fg, \quad cf_n \rightarrow cf,$$

که c ثابت بوده و همگرایی در هر حالت یکنواخت می‌باشد .

لذا ، $f + g \in \mathcal{B}$ ، $fg \in \mathcal{B}$ و $cf \in \mathcal{B}$ ؛ در نتیجه ، $\mathcal{B}$ یک جبر خواهد بود . بر طبق قضیه ۲۷.۲ ، $\mathcal{B}$ (به طور یکنواخت) بسته است .

۳۰۷ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از توابع بر مجموعه E باشد. در این صورت، می‌گوییم $\mathcal{A}$ نقاط E را جدا می‌کند هرگاه به هر جفت متمایز نقطه مانند $x_1, x_2 \in E$ تابعی $f \in \mathcal{A}$ قسمی نظیر شده باشد که $f(x_1) \neq f(x_2)$.
چنانچه به هر $x \in E$ تابعی مانند $g \in \mathcal{A}$ نظیر شده باشد که $g(x) \neq 0$ ، می‌گوییم $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه E صفر نمی‌شود.

واضح است که جبر تمام چند جمله‌ایهای یک متغیره این خواص را بر R^1 دارد. یک نمونه از جبرهایی که نقاط را جدا نمی‌کنند مجموعه تمام چند جمله‌ایهای زوج، مثلاً " $[-1, 1]$ "، است، زیرا به ازای هر تابع زوج f ، $f(-x) = f(x)$.
قضیه زیر این مفهوما را بیشتر توضیح می‌دهد.

۳۱۰۷ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع بر مجموعه E باشد، $\mathcal{A}$ نقاط E را جدا کند، و $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه E صفر نشود. x_1 و x_2 را نقاط متمایزی از E گرفته، و c_1 و c_2 را ثابتهای (حقیقی در صورتی که $\mathcal{A}$ یک جبر حقیقی است) می‌نگاریم. در این صورت، $\mathcal{A}$ تابعی را شامل است چون f که

$$f(x_1) = c_1, \quad f(x_2) = c_2.$$

برهان. مفروضات نشان می‌دهند که $\mathcal{A}$ شامل توابعی چون g ، h ، و k است که

$$g(x_1) \neq g(x_2), \quad h(x_1) \neq 0, \quad k(x_2) \neq 0.$$

قرار می‌دهیم

$$u = gk - g(x_1)k, \quad v = gh - g(x_2)h.$$

در این صورت، $u \in \mathcal{A}$ ، $v \in \mathcal{A}$ ، $u(x_1) = v(x_2) = 0$ ، $u(x_2) \neq 0$ ، و $v(x_1) \neq 0$. لذا،

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

خواص مطلوب را خواهد داشت.

حال تمام وسائل لازم برای تعمیم استون از قضیه وایراشتراس در اختیار ما قرار دارد.

۳۲۰۷ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر از توابع حقیقی پیوسته بر مجموعه فشرده K باشد.

هرگاه $\mathcal{B}$ نقاط K را جدا کند و در هیچ نقطه از K صفر نشود، آنگاه بست یکنواخت $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ تمام توابع حقیقی و پیوسته بر K تشکیل شده است.

برهان را به چهار مرحله تقسیم می‌کنیم.

مرحله ۱. هرگاه $f \in \mathcal{B}$ ، آنگاه $|f| \in \mathcal{B}$.

برهان. قرار می‌دهیم

$$(52) \quad a = \sup |f(x)| \quad (x \in K),$$

و فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر نتیجه ۲۷۰۷، اعدادی حقیقی مانند $c_1, \dots, c_n$ وجود دارند بطوری که

$$(53) \quad \left| \sum_{i=1}^n c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \quad (-a \leq y \leq a).$$

چون $\mathcal{B}$ یک جبر است، تابع

$$g = \sum_{i=1}^n c_i f^i$$

عضوی از $\mathcal{B}$ است. بنابر (۵۲) و (۵۳)، داریم

$$|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \quad (x \in K).$$

چون $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت بسته است، این نشان خواهد داد که $|f| \in \mathcal{B}$.

مرحله ۲. هرگاه $f \in \mathcal{B}$ و $g \in \mathcal{B}$ ، آنگاه $\max(f, g) \in \mathcal{B}$ و $\min(f, g) \in \mathcal{B}$.

منظور از $\max(f, g)$ یعنی تابعی چون h که این طور تعریف شده است:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{اگر } f(x) < g(x) \end{cases}$$

$\min(f, g)$ به همین نحو تعریف خواهد شد.

برهان. مرحله ۲ از مرحله ۱ و اتحادهای

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

به دست می‌آید.

البته، یا تکرار می‌توان نتیجه را به هر مجموعه متناهی از توابع تعمیم داد: هرگاه

$$\max(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{B} \quad \text{آنگاه} \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}$$

$$\min(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{B}.$$

مرحله ۳. هرگاه تابع حقیقی و بر K پیوسته f ، نقطه $x \in K$ ، و $\varepsilon > 0$ مفروض باشند، تابعی مانند $g_x \in \mathcal{B}$ وجود خواهد داشت بقسمی که $g_x(x) = f(x)$ و

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K). \quad (54)$$

برهان. چون $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ و $\mathcal{H}$ در مفروضات قضیه ۳۱.۷ صدق می‌کند، $\mathcal{B}$ نیز چنین خواهد کرد. لذا، به ازای هر $y \in K$ ، می‌توان تابعی مانند $h_y \in \mathcal{B}$ را طوری یافت که

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y). \quad (55)$$

بنابر پیوستگی h_y ، مجموعه بازی مانند J_y هست، شامل y ، که

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in J_y). \quad (56)$$

و چون K فشرد است، مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $y_1, \dots, y_n$ وجود دارد بطوری که

$$K \subset J_{y_1} \cup \dots \cup J_{y_n}. \quad (57)$$

قرار می‌دهیم

$$g_x = \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_n}).$$

بنابر مرحله ۲، $g \in \mathcal{B}$ ، و روابط (۵۵) تا (۵۷) نشان می‌دهند که g_x خواص لازم دیگر را نیز دارد.

مرحله ۴. هرگاه تابع حقیقی و بر K پیوسته f و $\varepsilon > 0$ مفروض باشند، تابعی مانند $h \in \mathcal{B}$ وجود خواهد داشت بطوری که

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in K). \quad (58)$$

چون $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت بسته است، این حکم معادل قضیهٔ ما خواهد بود.

بوهان. توابع g_x ، به ازای هر $x \in K$ ، راکه در مرحلهٔ ۳ ساخته شدند در نظرمی‌گیریم. بنابر پیوستگی g_x ، مجموعه‌های بازی چون V_x شامل x وجود دارند بطوری که

$$(59) \quad g_x(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in V_x).$$

چون K فشرده است، مجموعه‌ای متناهی از نقاط مانند $x_1, \dots, x_m$ هست بقسمی

$$(60) \quad K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}.$$

قرار می‌دهیم

$$h = \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}).$$

بنابر مرحلهٔ ۲، $h \in \mathcal{B}$ ، و (۵۴) ایجاب می‌کند که

$$(61) \quad h(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K),$$

حال آنکه (۵۹) و (۶۰) نتیجه می‌دهند که

$$(62) \quad h(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in K).$$

بالاخره، (۵۸) از (۶۱) و (۶۲) به دست خواهد آمد.

قضیهٔ ۳۲.۷ برای جبرهای مختلط برقرار نیست. مثال ناقض در تمرین ۲۱ داده شده است. لکن اگر شرط اضافی خودالحاقی را بر $\mathcal{A}$ بگذاریم، این قضیه حتی برای جبرهای مختلط نیز برقرار می‌شود. شرط به این معنی است که به ازای هر $f \in \mathcal{A}$ مزدوج مختلط f ، یعنی $\bar{f}$ ، نیز باید به $\mathcal{A}$ متعلق باشد؛ $\bar{f}$ با $f(x) = \overline{f(x)}$ تعریف می‌شود.

۳۳.۷ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر خودالحاقی از توابع مختلط پیوسته بر مجموعهٔ فشردهٔ K بوده، $\mathcal{A}$ نقاط K را جدا کند، و $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه از K صفر نشود. در این صورت، $\mathcal{A}$ بست یکنواخت $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ تمام توابع مختلط و پیوسته بر K تشکیل شده است. به عبارت دیگر، $\mathcal{A}$ در $\mathcal{B}(K)$ چگال می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{R}$ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی بر K باشد که متعلق به $\mathcal{A}$ هستند. هرگاه $f \in \mathcal{A}$ و $f = u + iv$ ، که در آن u و v حقیقی‌اند، آنگاه $2u = f + \bar{f}$ و $2v = i(f - \bar{f})$ ، چون

خودالحاقی است، خواهیم دید که $u \in \mathcal{A}_R$. چنانچه $x_1 \neq x_2$ ، تابعی مانند $f \in \mathcal{A}$ هست که $f(x_1) = 1$ و $f(x_2) = 0$. پس $u(x_1) = 1 \neq u(x_2) = 0$ ، مبین آنکه $\mathcal{A}_R$ نقاط K را جدا می‌کند. هرگاه $x \in K$ ، آنگاه به ازای g ای در $\mathcal{A}$ ، $g(x) \neq 0$ ، و عدد مختلطی مانند λ هست که $\lambda g(x) > 0$. چنانچه $f = \lambda g$ و $f = u + iv$ ، نتیجه می‌شود که $u(x) > 0$. پس $\mathcal{A}_R$ در هیچ نقطه از K صفر نخواهد شد.

بنابراین، $\mathcal{A}_R$ در مفروضات قضیه ۳۲.۷ صدق می‌کند. در نتیجه، هر تابع حقیقی و پیوسته بر K در بست یکنواخت $\mathcal{A}_R$ ، و لذا، در $\mathcal{B}$ قرار دارد. هرگاه f تابع مختلط پیوسته‌ای بر K بوده و $f = u + iv$ ، آنگاه $u \in \mathcal{B}$ ، $v \in \mathcal{B}$ ، پس $f \in \mathcal{B}$. این برهان را تمام خواهد کرد.

تمرین

۱. ثابت کنید هر دنباله به طور یکنواخت همگرا از توابع کراندار به طور یکنواخت کراندار است.
۲. هرگاه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ بر مجموعه E به طور یکنواخت همگرا باشند، ثابت کنید $\{f_n + g_n\}$ نیز بر E به طور یکنواخت همگرا است. چنانچه، علاوه بر این، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع کراندار باشند، ثابت کنید $\{f_n g_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا خواهد بود.
۳. دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را قسمی بسازید که بر مجموعه‌ای چون E به طور یکنواخت همگرا باشند، ولی $\{f_n g_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا نباشد (البته، باید بر E همگرا باشد).
۴. فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}.$$

این سری به ازای چه x هایی به طور مطلق همگراست؟ بر چه بازه‌هایی به طور یکنواخت همگرا می‌شود؟ بر چه بازه‌هایی به طور یکنواخت همگرا نیست؟ آیا هر جا که سری همگراست f پیوسته است؟ آیا f کراندار است؟

۵. فرض کنید

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x < \frac{1}{n+1}\right), \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \left(\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} < x\right). \end{cases}$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ به تابع پیوسته‌ای همگراست اما نه به طور یکنواخت. با استفاده از سری $\sum f_n$ نشان دهید که همگرایی مطلق، حتی به ازای هر x ، همگرایی یکنواخت را ایجاب نمی‌کند.

۶. ثابت کنید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

در هر بازه کراندار به طور یکنواخت همگراست، ولی به ازای هیچ x به طور مطلق همگرا نیست.

۷. به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ و x حقیقی قرار دهید

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابعی چون f همگراست، و معادله

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

اگر $x \neq 0$ ، درست است ولی، اگر $x = 0$ ، درست نخواهد بود.

۸. هرگاه

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0), \end{cases}$$

$\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز (a, b) باشد، و $\sum |c_n|$ همگرا فرض شود، ...

ثابت کنید سری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \quad (a \leq x \leq b)$$

به طور یکنواخت همگراست و f به ازای هر $x \neq x_n$ پیوسته می‌باشد.

۹. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد که به تابعی چون f بر E به طور

یکنواخت همگراست. ثابت کنید به ازای هر دنباله از نقاط مانند $x_n \in E$ که

$x_n \rightarrow x$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

آیا عکس این مطلب درست است؟

۱۰. با این فرض که (x) قسمت کسری عدد حقیقی x است (برای تعریف آن، ر.ک. تمرین ۱۶، فصل ۴)، تابع

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} \quad (x \text{ حقیقی})$$

را در نظر بگیرید. تمام ناپیوستگیهای f را یافته، نشان دهید که مجموعه‌ای چگال و شمارش‌پذیر تشکیل می‌دهند. نشان دهید که f در عین حال بر هر بازه کراندار انتگرال ریمان دارد.

۱۱. فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ بر E تعریف شده باشند، و

(A) دنباله مجموعه‌ای جزئی Σf_n به طور یکنواخت کراندار باشد؛

(B) $g_n \rightarrow 0$ به طور یکنواخت بر E ؛

(P) به ازای هر $x \in E$ $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \dots$

ثابت کنید $\Sigma f_n g_n$ بر E به طور یکنواخت همگراست. راهنمایی: قضیه

۴۲.۳.

۱۲. فرض کنید g و f_n ($n=1, 2, 3, \dots$) بر $(0, \infty)$ تعریف شده باشند، بر $[t, T]$

(وقتی $0 < t < T < \infty$) انتگرال ریمان داشته باشند، $|f_n| \leq g$ ، $f_n \rightarrow f$ به طور

یکنواخت بر هر زیرمجموعه فشرده $(0, \infty)$ ، و

$$\int_0^{\infty} g(x) dx < \infty.$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

(برای تعریفهای مربوطه، ر.ک. تمرینهای ۷ و ۸ فصل ۶.)

این شکل نسبتاً "ضعیفی از قضیه همگرایی تسلطی لبگ (قضیه ۳۲.۱۱) است.

حتی در میثاق انتگرال ریمان نیز، اگر $f \in \mathcal{R}$ فرض شود، می‌توان همگرایی یکنواخت را با همگرایی نقطه به نقطه عوض کرد^۱.

۱. ر.ک. مقاله‌های زیر:

F. Cunningham in *Math. Mag.*, vol. 40, 1967, pp. 179-186;

H. Kestelman in *Amer. Math. Monthly*, vol. 77, 1970, pp. 182-187.

۱۳. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع صعودی بر R^1 باشد و، به ازای هر x و هر

$$0 \leq f_n(x) \leq 1, \quad n$$

(آ) ثابت کنید تابعی چون f و دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ موجودند بطوری که به

ازای هر $x \in R^1$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x).$$

(وجود چنین زیردنباله نقطه به نقطه همگرا را معمولاً "قضیه انتخاب هلی" می‌نامند.)

(ب) چنانچه، علاوه بر این، f پیوسته هم باشد، ثابت کنید $f_{n_k} \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر R^1 .

راهنمایی: (یک) زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_i}\}$ در تمام نقاط گویای r ، مثلاً "به

$f(r)$ ، همگراست. (دو) به ازای هر $x \in R^1$ ، $f(x)$ را مساوی $\sup f(r)$

تعریف کنید؛ این سوپر مم روی تمام r های نابیشتر از x گرفته می‌شود. (سه)

نشان دهید که در هر x که f در آن پیوسته باشد، $f_{n_i}(x) \rightarrow f(x)$.

(اینجاست که یکنوایی قویاً به کار گرفته شده است.)

(چهار) زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_i}\}$ در هر نقطه ناپیوستگی f همگراست، زیرا

از این نقاط حداکثر تعدادی شمارشپذیر وجود دارد. این (آ) را ثابت خواهد

کرد. برای اثبات (ب)، برهان قسمت (سه) را بنحوی مقتضی اصلاح نمایید.

۱۴. فرض کنید f تابع حقیقی پیوسته‌ای بر R^1 با خواص زیر باشد:

به ازای هر t ، $0 \leq f(t) \leq 1$ ، $f(t+2) = f(t)$ ، و

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ 1 & (\frac{2}{3} \leq t \leq 1). \end{cases}$$

قرار دهید $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ که در آن

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

ثابت کنید Φ پیوسته است، و $I = [0, 1] \times \Phi$ را بروی مربع یک‌ه $I^2 \subset R^2$ می‌نگارد.

درواقع، نشان دهید که Φ مجموعه کانتور را بروی I^2 می‌نگارد. راهنمایی:

هر $(x_0, y_0) \in I^2$ از این شکل برخوردار است:

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \quad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}$$

که در آنها هر a_i مساوی صفر یا یک است. اگر

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-(i-1)} (2a_i),$$

نشان دهید که $f(3^k t_0) = a_k$ ؛ و در نتیجه، $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$

(این مثال ساده را "منحنی فضاپرکن" نامیده و به شونبرگ نسبت می‌دهند.)

۱۵. فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر R^1 بوده، به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ ، $f_n(t) = f(nt)$ و $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همپیوسته باشد. چه نتیجه‌ای می‌توان در مورد f گرفت؟

۱۶. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله همپیوسته‌ای از توابع بر مجموعه فشرده K و $\{f_n\}$ بر K نقطه به نقطه همگرا باشد. ثابت کنید $\{f_n\}$ بر K به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

۱۷. مفاهیم همگرایی یکنواخت و همپیوستگی را برای نگاشته‌های بتوی فضاهای متریک تعریف کنید. نشان دهید که قضایای ۹.۷ و ۱۲.۷ برای نگاشته‌های بتوی فضاهای متریک، قضایای ۸.۷ و ۱۱.۷ برای نگاشته‌های بتوی فضاهای متریک تام، و قضیه‌های ۱۰.۷، ۱۶.۷، ۱۷.۷، ۲۴.۷ و ۲۵.۷ برای توابع برداری، یعنی، نگاشته‌هایی که بتوی R^k هستند، برقرار می‌باشند.

۱۸. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله به طور یکنواخت کرانداری از توابع باشد که بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارند، و قرار دهید

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

ثابت کنید زیر دنباله‌ای چون $\{F_n\}$ هست که بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگراست.

۱۹. فرض کنید K یک فضای متریک فشرده، و S زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{H}(K)$ باشد. ثابت کنید S (نسبت به متر تعریف شده در بخش ۱۴.۷) فشرده است اگر و فقط اگر S به طور

یکنواخت بسته، نقطه به نقطه کراندار، و همپیوسته باشد. (هرگاه S همپیوسته نباشد، S حاوی دنباله‌ای است که هیچ زیردنباله همپیوسته ندارد؛ در نتیجه، زیردنباله‌ای که بر K به طور یکنواخت همگرا باشد نخواهد داشت.)

۲۰. هرگاه f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد و

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

ثابت کنید $f(x)=0$ بر $[0, 1]$. راهنمایی: انتگرال حاصل ضرب f با هر چند-جمله‌ای صفر است. با استفاده از قضیه ویراشتراش نشان دهید که

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 0.$$

۲۱. فرض کنید K دایره یک در صفحه مختلط (یعنی، مجموعه z هایی که $|z|=1$) و $\mathcal{A}$ جبر تمام توابع به شکل

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^N c_n e^{in\theta} \quad (\theta \text{ حقیقی})$$

باشد. در این صورت، $\mathcal{A}$ نقاط K را جدایی‌کند و $\mathcal{A}$ در هیچ نقطه‌ای از K صفر نمی‌شود، اما، با اینحال، توابع پیوسته‌ای بر K وجود دارند که در بست یکنواخت $\mathcal{A}$ نیستند. راهنمایی: به ازای هر $f \in \mathcal{A}$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0,$$

و این مطلب برای هر f موجود در بست $\mathcal{A}$ نیز درست است.

۲۲. فرض کنید $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، و ثابت کنید چندجمله‌ایهایی چون P_n هستند بطوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f - P_n|^2 d\alpha = 0.$$

(قس. تمرین ۱۲، فصل ۰۶)

۲۳. قرار دهید $P_0 = 0$ و، به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ ، تعریف کنید

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}.$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = |x|$$

به طور یکنواخت بر $[-1, 1]$.

(این، اثبات قضیه استون - وایر اشتراس را بی آنکه ابتدا قضیه ۲۶.۷ ثابت شود ممکن می سازد.)

راهنمایی: با استفاده از اتحاد

$$|x| - P_{n+1}(x) = [|x| - P_n(x)] \left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2} \right]$$

ثابت کنید که اگر $|x| \leq 1$ ، $|x| - P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$ ، و اگر $|x| \leq 1$ ،

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2} \right)^n < \frac{2}{n+1}.$$

۲۴. فرض کنید X یک فضای متری با متر d باشد. نقطه $a \in X$ را اختیار و آن را ثابت بگیرید. به هر $p \in X$ تابع f_p را که با

$$f_p(x) = d(x, p) - d(x, a) \quad (x \in X)$$

تعریف می شود مربوط نمایید. ثابت کنید به ازای هر $x \in X$ ، $|f_p(x)| \leq d(a, p)$ ؛

و در نتیجه، $f_p \in \mathcal{C}(X)$. ثابت کنید به ازای هر $p, q \in X$ ،

$$\|f_p - f_q\| = d(p, q).$$

اگر $\Phi(p) = f_p$ ، نتیجه خواهد شد که Φ یک یکمتری (نگاشتی حافظ فاصله) از

X بروی $\mathcal{C}(X)$ است.

فرض کنید Y بست $\Phi(X)$ در $\mathcal{C}(X)$ باشد. نشان دهید که Y تام است.

نتیجه: X با زیرمجموعه چگالی از یک فضای متری تام Y یکمتر است.

(تمرین ۲۴، فصل ۳، برهان دیگری از این مطلب را شامل است.)

۲۵. فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی کراندار و پیوسته در نواری باشد که $0 \leq x \leq 1$ و

$-\infty < y < \infty$ - تعریف می شود. ثابت کنید مسئله با مقدار اولیه

$$y' = \phi(x, y), \quad y(0) = c,$$

جواب دارد. (توجه کنید که مفروضات این قضیه وجودی از مفروضات قضیه یکتایی

نظیرش ضعیفترند. ر.ک. تمرین ۲۷، فصل ۰۵)

راهنمایی: n را ثابت نگهداشته به ازای $i = 0, \dots, n$ قرار دهید $x_i = i/n$.

فرض کنید f_n تابع پیوسته‌ای بر $[0, 1]$ باشد به این نحو که $f_n(0) = c$ ،

$$f'_n(t) = \phi(x_i, f_n(x_i)) \quad x_i < t < x_{i+1} \quad \text{اگر}$$

و قرار دهید

$$\Delta_n(t) = f'_n(t) - \phi(t, f_n(t))$$

جز در نقاط x_i که $\Delta_n(t) = 0$ در این صورت ،

$$f_n(x) = c + \int_0^x [\phi(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)] dt.$$

$M < \infty$ را قسمی اختیار کنید که $|\phi| \leq M$ ، و صحت احکام زیر را تحقیق نمایید :

(آ) مثلاً " بر $[0, 1]$ ، به ازای هر n ، $|f'_n| \leq M$ ، $|\Delta_n| \leq 2M$ ، $\Delta_n \in \mathcal{R}$ ، و

$$|f_n| \leq |c| + M = M_1 ;$$

(ب) $\{f_n\}$ ، به این دلیل که $|f'_n| \leq M$ بر $[0, 1]$ همپیوسته است ؛

(پ) زیر دنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ به f ی بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست .

(ت) چون ϕ بر مستطیل $0 \leq x \leq 1, |y| \leq M_1$ به طور یکنواخت پیوسته است ،

$$\phi(t, f_{n_k}(t)) \rightarrow \phi(t, f(t))$$

به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ ؛

(ث) $\Delta_n(t) \rightarrow 0$ به طور یکنواخت بر $[0, 1]$ ، زیرا در (x_i, x_{i+1})

$$\Delta_n(t) = \phi(x_i, f_n(x_i)) - \phi(t, f_n(t)) ;$$

(ج) بنابراین ،

$$f(x) = c + \int_0^x \phi(t, f(t)) dt .$$

این f یک جواب مسئلهء داده شده است .

۲۶ . قضیهء وجودی مشابهی را برای مسئلهء بامقدار اولیهء

$$y' = \Phi(x, y), \quad y(0) = c,$$

ثابت کنید که در آن $c \in R^k$ ، $y \in R^k$ ، و Φ نگاشت کراندار پیوسته‌ای از آن بخش

از R^{k+1} که با $0 \leq x \leq 1$ و $y \in R^k$ تعریف می‌شود بتوی R^k می‌باشد . (قس .

تمرین ۲۸ ، فصل ۰۵) راهنمایی : از شکل برداری قضیهء ۲۵.۷ استفاده کنید .



چند تابع خاص

سریهای توانی

در این بخش چند خاصیت از تابعهایی که با سریهای توانی نموده می شوند، یعنی توابعی به شکل

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

یا، بطور کلی، به شکل

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

را به دست می آوریم.

این تابعها را توابع تحلیلی نام نهاده اند.

ما خود را به مقادیر حقیقی x محدود می کنیم. از اینرو، به جای دوایر همگرایی (ر.ک. قضیه ۳۹.۳)، با بازه های همگرایی مواجه خواهیم بود.

چنانچه سری (۱) به ازای هر x در $(-R, R)$ و $R > 0$ ی R ممکن است $+\infty$ باشد) همگرا شود، می گوئیم f به صورت یک سری توانی حول نقطه $x=0$ بسط داده شده است. بهمین نحو، اگر (۲) به ازای $|x-a| < R$ همگرا باشد، می گوئیم f به صورت یک سری توانی حول نقطه $x=a$ بسط داده شده است. ما اغلب برای راحتی، بی آنکه به کلیت خلل وارد شود، a را صفر اختیار می کنیم.

۱۰۸ قضیه. فرض کنیم سری

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

به ازای $|x| < R$ همگراست، و تعریف می‌کنیم

$$(4) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x| < R).$$

در این صورت، (۳) بر $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ ، صرف نظر از اینکه چه $\varepsilon > 0$ ی اختیار شده، به طور یکنواخت همگراست؛ تابع f در $(-R, R)$ پیوسته و مشتقپذیر است؛ و

$$(5) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (|x| < R).$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. به ازای $|x| \leq R - \varepsilon$ داریم

$$|c_n x^n| \leq |c_n (R - \varepsilon)^n|.$$

و چون

$$\sum c_n (R - \varepsilon)^n$$

به طور مطلق همگراست (هرسری توانی، طبق آزمون ریشه، درون بازه همگرایی خود به طور مطلق همگراست)، قضیه ۱۰.۷ همگرایی یکنواخت (۳) بر $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ را نشان خواهد داد.

چون وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ، خواهیم داشت

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

در نتیجه، سریهای (۴) و (۵) از یک بازه همگرایی برخوردارند.

چون سری (۵) یک سری توانی است، در $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، به طور یکنواخت همگراست، و می‌توان قضیه ۱۷.۷ (برای سریها به جای دنباله‌ها) را به کار گرفت. از این عمل نتیجه می‌شود که رابطه (۵) به ازای $|x| \leq R - \varepsilon$ برقرار است. اما، به ازای هر x که $|x| < R$ ، می‌توان $\varepsilon > 0$ ی را طوری یافت که $|x| < R - \varepsilon$ این نشان خواهد داد که (۵) به ازای $|x| < R$ برقرار است.

پیوستگی f از وجود f' نتیجه خواهد شد (قضیه ۲.۵).

نتیجه. با شرایط قضیه ۱۰.۸، f در $(-R, R)$ از هر مرتبه مشتق دارد که با

$$(6) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n x^{n-k}$$

داده می‌شوند.

بخصوص،

$$(7) \quad f^{(k)}(0) = k!c_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

در اینجا $f^{(0)}$ به معنی f است، و $f^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) مشتق k ام f خواهد بود.

برهان. اگر قضیه ۱۰۸ را متوالیا " بر $f, f', f'', \dots$ اعمال کنیم، معادله (۶) به دست می‌آید. با گذاردن $x = 0$ در (۶) روابط (۷) را خواهیم داشت.

فرمول (۷) فرمول بسیار جالبی است. از یک سو نشان می‌دهد که ضرایب سری توانی بسط f با مقادیر f و مشتقاتش در یک نقطه مشخص می‌شوند. و از طرف دیگر، اگر ضرایب را داده باشند، مقادیر مشتقات f در مرکز بازه همگرایی را می‌شود مستقیماً از روی سری توانی خواند.

با اینحال، توجه دارید که، با آنکه ممکن است تابع f از هر مرتبه مشتق داشته باشد، سری $\sum c_n x^n$ ، که در آن c_n با (۷) حساب می‌شود، الزاماً به ازای هر $x \neq 0$ همگرا به $f(x)$ نیست. در این حالت f را نمی‌توان به صورت یک سری توانی حول نقطه $x = 0$ بسط داد. چرا که اگر می‌داشتیم $f(x) = \sum a_n x^n$ ، باید داشته باشیم

$$n!a_n = f^{(n)}(0).$$

در نتیجه، $a_n = c_n$. نمونه‌ای از این وضع در تمرین ۱ داده شده است.

هرگاه سری (۳) در یک نقطه انتهایی، مثلاً در $x = R$ ، همگرا باشد، f نه فقط در $(-R, R)$ بلکه در $x = R$ نیز پیوسته است. این مطلب از قضیه آبل نتیجه می‌شود (برای تسهیل در نمادگذاری، R را یک می‌گیریم):

۲۰۸ قضیه. فرض کنیم $\sum c_n$ همگرا باشد. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (-1 < x < 1).$$

در این صورت،

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

برهان. فرض کنیم $s_n = c_n + \dots + c_0$ و $s_{-1} = 0$ پس

$$\sum_{n=0}^m c_n x^n = \sum_{n=0}^m (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

به ازای $|x| < 1$ ، m را به ∞ میل داده نتیجه می گیریم که

$$(9) \quad f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

فرض می کنیم $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ و $\varepsilon > 0$ را معلوم می انگاریم. N را قسمی اختیار می کنیم که $n > N$ نامساوی

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

را ایجاب کند. در این صورت، چون

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \quad (|x| < 1),$$

اگر به ازای $\delta > 0$ ای که مناسب اختیار شده $\delta - 1 < x < 1$ از (۹) خواهیم داشت

$$|f(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^N |s_n - s| |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

این (۸) را ایجاب خواهد کرد.

به عنوان کاربرد، قضیه ۵۱.۳ را ثابت می کنیم که این طور حکم می کند:

هرگاه $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ ، و $\sum c_n$ همگرا به A ، B ، و C باشند و

$$c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$$

گوییم فرض کنیم به ازای $0 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

این سریها به ازای $x < 1$ به طور مطلق همگرا هستند؛ و در نتیجه، می توانند طبق تعریف

۴۸.۳ در هم ضرب شوند. وقتی این ضرب انجام گیرد، خواهیم دید که

$$(10) \quad f(x) \cdot g(x) = h(x) \quad (0 \leq x < 1).$$

بنابر قضیه ۲۰.۸، وقتی $x \rightarrow 1$

$$(11) \quad f(x) \rightarrow A, \quad g(x) \rightarrow B, \quad h(x) \rightarrow C.$$

معادلات (۱۰) و (۱۱) ایجاب خواهند کرد که $AB = C$.

حال در مورد تعویض ترتیب جمع‌بندی قضیه‌ای بیان می‌کنیم. (ر. ک. تمرینهای

۲ و ۳.)

۳.۸ قضیه. هرگاه دنباله مضاعف $\{a_{ij}\}$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, j = 1, 2, 3, \dots$ ، معلوم باشد،

$$(12) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

و $\sum b_i$ همگرا باشد، آنگاه

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

برهان. رابطه (۱۳) را می‌شد به روشی مستقیم شبیه (اگر چه پیچیده‌تر از) روش به کار رفته در قضیه ۵۵.۳ اثبات کرد. لکن روش زیر جالب‌تر به چشم می‌آید.

فرض کنیم E مجموعه شمارش‌پذیری باشد که از $x_0, x_1, x_2, \dots$ تشکیل شده است، و نیز وقتی $x_n \rightarrow x_0$ ، $n \rightarrow \infty$ تعریف می‌کنیم

$$(14) \quad f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(15) \quad f_i(x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(16) \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad (x \in E).$$

حال (۱۴) و (۱۵) همراه با (۱۲) نشان می‌دهند که هر f_i در x_0 پیوسته است.

و چون به ازای $|f_i(x)| \leq b_i$ ، $x \in E$ ، (۱۶) به طور یکنواخت همگراست. پس g در x_0 پیوسته خواهد بود (قضیه ۱۱.۷). از این نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

۴۰۸ قضیه. فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

و سری در $|x| < R$ همگرا باشد. هرگاه $R < a < R + |a|$ ، نگاه f را می‌توان به صورت یک سری توانی حول نقطه $x = a$ بسط داد، که در $|x - a| < R - |a|$ همگراست و

$$(17) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (|x - a| < R - |a|).$$

این تعمیمی است از قضیه ۱۵۰۵ که به قضیه تیلور نیز شهرت دارد.

برهان. داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x - a) + a]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} (x - a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x - a)^m. \end{aligned}$$

این همان بسط مطلوب حول نقطه $x = a$ می‌باشد. برای اثبات اعتبارش باید تغییری که در ترتیب جمع‌بندی داده‌ایم توجیه نماییم. قضیه ۳۰۸ نشان می‌دهد که این کار مجاز است هرگاه

$$(18) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m} (x - a)^m \right|$$

همگرا باشد. اما (۱۸) با

$$(19) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|x - a| + |a|)^n$$

یکی است، و (۱۹) همگراست هرگاه $|x - a| + |a| < R$.

بالاخره، شکل ضرایب در (۱۷) از (۷) نتیجه خواهد شد.

لازم‌است خاطر نشان کنیم که (۱۷) ممکن است عملاً "در بازه وسیع‌تری از

$|x - a| < R - |a|$ همگرا باشد.

هرگاه دوسری توانسی در $(-R, R)$ به یک تابع همگرا باشند، رابطه (۷) نشان می‌دهد که دوسری باید یکی باشند؛ یعنی، از یک ضرایب برخوردار باشند. جالب اینجاست که همین نتیجه را می‌توان از مفروضات خیلی ضعیفتر نیز به دست آورد:

۵.۸ قضیه. فرض کنیم سریهای $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ در قطعه $S = (-R, R)$ همگرا باشند. E را مجموعه تمام x هایی در S می‌گیریم که در آنها

$$(20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

هرگاه E در S نقطه حدی داشته باشد، آنگاه به ازای $a_n \neq b_n, n = 0, 1, 2, \dots$ پس (۲۰) به ازای هر $x \in S$ برقرار خواهد بود.

برهان. قرار می‌دهیم $c_n = a_n - b_n$ و

$$(21) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (x \in S).$$

در این صورت، $f(x) = 0$ بر E .

فرض کنیم A مجموعه تمام نقاط حدی E در S ، و B از همه نقاط دیگر S تشکیل شده باشد. از تعریف "نقطه حدی" واضح است که B باز می‌باشد. فرض کنید بتوان باز بودن A را ثابت کرد. در این صورت، A و B مجموعه‌های باز از هم جدایی هستند. لذا، از هم جدا شده خواهند بود (تعریف ۴۵.۲). چون $S = A \cup B$ همبند است، یکی از A و B باید تهی باشد. بنابه فرض، A تهی نیست. پس B تهی است و $A = S$ چون f در S پیوسته است، $A \subset E$ ، لذا، $E = S$ ، و (۷) نشان می‌دهد که به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ $c_n = 0$ ، که همان نتیجه مطلوب می‌باشد.

بنابراین، باید ثابت شود که A باز است. گوییم هرگاه $x_0 \in A$ ، قضیه ۴.۸ نشان می‌دهد که

$$(22) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \quad (|x - x_0| < R - |x_0|).$$

حکم می‌کنیم که به ازای هر n ، $d_n = 0$. در غیر این صورت، k را کوچکترین عدد صحیح نامنفی می‌گیریم که $d_k \neq 0$. پس

$$(23) \quad f(x) = (x - x_0)^k g(x) \quad (|x - x_0| < R - |x_0|)$$

که در آن

$$(24) \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m} (x - x_0)^m.$$

چون g در x_0 پیوسته است و

$$g(x_0) = d_k \neq 0.$$

پس $\delta > 0$ ای وجود دارد بطوری که اگر $|x - x_0| < \delta$ ، $g(x) \neq 0$. از (۲۳) نتیجه می شود که اگر $0 < |x - x_0| < \delta$ ، $f(x) \neq 0$. اما این با نقطه حدی E بودن x_0 تعارض دارد .

پس به ازای هر n ، $d_n = 0$. در نتیجه ، به ازای هر x که برایش (۲۲) برقرار باشد ، یعنی در یکی از همسایگیهای x_0 ، $f(x) = 0$. این نشان می دهد که A باز است و برهان را تمام خواهد کرد .

توابع نمایی و لگاریتمی

تعریف می کنیم

$$(25) \quad E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

آزمون نسبت نشان می دهد که این سری به ازای هر z مختلط همگراست . با اعمال قضیه ۵۰.۳ بر ضرب سریهای به طور مطلق همگرا ، داریم

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}, \end{aligned}$$

که فرمول مهم جمع

$$(26) \quad E(z+w) = E(z)E(w) \quad (z, w \text{ مختلط})$$

را به ما می دهد .

یک نتیجه آن است که

$$(27) \quad E(z)E(-z) = E(z-z) = E(0) = 1 \quad (z \text{ مختلط}).$$

این نشان می‌دهد که به ازای هر z ، $E(z) \neq 0$ بر طبق (۲۵)، اگر $x > 0$ ، $E(x) > 0$. پس (۲۷) نشان می‌دهد که به ازای هر x حقیقی $E(x) > 0$ مطابق (۲۵)، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $E(x) \rightarrow +\infty$. در نتیجه، (۲۷) نشان خواهد داد که وقتی x در امتداد محور حقیقی به $-\infty$ میل کند، $E(x) \rightarrow 0$. بنابر (۲۵) $0 < x < y$ ایجاب می‌کند که $E(x) < E(y)$. از این، بخاطر (۲۷)، نتیجه خواهد شد که $E(-y) < E(-x)$. پس E بر تمام محور حقیقی اکیدا "صعودی" است.

فرمول جمع همچنین نشان می‌دهد که

$$(28) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z).$$

تساوی آخر مستقیماً از (۲۵) به دست می‌آید.

از تکرار (۲۶) نتیجه می‌شود که

$$(29) \quad E(z_1 + \dots + z_n) = E(z_1) \dots E(z_n).$$

حال $z_1, \dots, z_n$ را برابر ۱ می‌گیریم. چون $E(1) = e$ ، که در آن e عدد معرفی شده در تعریف ۳۰.۳ است، خواهیم داشت

$$(30) \quad E(n) = e^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

هرگاه $p = n/m$ ، که در آن n و m صحیح و مثبت هستند، آنگاه

$$(31) \quad [E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n.$$

پس

$$(32) \quad E(p) = e^p \quad (p > 0, p \text{ گویا}).$$

از (۲۷) نتیجه می‌شود که اگر p مثبت و گویا باشد، $E(-p) = e^{-p}$. لذا، (۳۲) به ازای هر p گویا برقرار است.

در تمرین ۶، فصل ۱، تعریف

$$(33) \quad x^y = \sup x^p$$

را پیشنهاد کردیم که در آن $\sup$ روی تمام p های گویایی که $p < y$ گرفته می‌شود، y حقیقی و دلخواه است، و $x > 1$. لذا، اگر به ازای هر x حقیقی تعریف کنیم

$$(34) \quad e^x = \sup e^p \quad (p < x, p \text{ گویا})$$

خواص پیوستگی و یکنوایی E همراه با (۳۲) نشان خواهند داد که به ازای هر x حقیقی

$$(35) \quad E(x) = e^x.$$

معادله (۳۵) دلیل اینکه چرا E تابع نمایی نامیده شده توضیح می دهد .

نماد $\exp(x)$ اغلب، بویژه وقتی x عبارت پیچیده‌ای است، به جای e^x به کار می‌رود .

در واقع، شخص می‌تواند (۳۵) را نیز، به جای (۳۴)، به عنوان تعریف e^x به کار برد . (۳۵) نقطه شروع بسیار شایسته‌تری برای بررسی خواص e^x است . بزودی خواهیم دید که (۳۳) را نیز می‌توان با تعریف مناسب‌تری عوض کرد [ر. ک. (۴۳)] .
حال به نماد متداول e^x ، به جای $E(x)$ ، بازگشته آنچه را که تاکنون ثابت کرده‌ایم خلاصه می‌کنیم .

۶۰۸ قضیه. فرض کنیم e^x بر R^1 با (۳۵) و (۲۵) تعریف شده باشد . در این صورت ،

(آ) e^x به ازای هر x پیوسته و مشتق‌پذیر است ؛

$$(۴) (e^x)' = e^x ;$$

(پ) e^x یک تابع اکیدا " صعودی " از x است و $e^x > 0$ ؛

$$(ت) e^{x+y} = e^x e^y ;$$

(ث) وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $e^x \rightarrow +\infty$ و ، وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، $e^x \rightarrow 0$ ؛

(ج) به ازای هر n ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

برهان . ما قبلاً " (آ) تا (ث) را ثابت کرده‌ایم . رابطه (۲۵) نشان می‌دهد که به ازای $x > 0$ ،

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} .$$

در نتیجه ،

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x} ,$$

و (ج) به دست می‌آید . قسمت (ج) نشان می‌دهد که وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، e^x از هر توانی از x " سریعتر " به $+\infty$ میل می‌کند .

چون E بر R^1 اکیدا " صعودی و مشتق‌پذیر است ، تابع معکوسی مانند L هست که این نیز اکیدا " صعودی و مشتق‌پذیر است و قلمروش $E(R^1)$ ، یعنی مجموعه تمام اعداد مثبت ، می‌باشد . L با

$$(36) \quad E(L(y)) = y \quad (y > 0)$$

یا، به عبارت معادل، با

$$(37) \quad L(E(x)) = x \quad (x \text{ حقیقی})$$

تعریف می‌شود. با مشتگیری از (۳۷) خواهیم داشت (قس. قضیه ۵۰۵)

$$L'(E(x)) \cdot E(x) = 1.$$

این، اگر بنویسیم $y = E(x)$ ، به ما خواهد داد

$$(38) \quad L'(y) = \frac{1}{y} \quad (y > 0).$$

با اختیار $x = 0$ در (۳۷) می‌بینیم که $L(1) = 0$. لذا، (۳۸) ایجاب خواهد کرد که

$$(39) \quad L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}.$$

اغلب اوقات (۳۹) را نقطه شروع نظریه لگاریتم و تابع نمایی می‌گیرند. چنانچه بنویسیم $u = E(x)$ و $v = E(y)$ ، (۲۶) نتیجه می‌دهد که

$$L(uv) = L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x+y)) = x + y,$$

پس

$$(40) \quad L(uv) = L(u) + L(v) \quad (u > 0, v > 0).$$

این نشان می‌دهد که L خاصیت آشنایی دارد که این خاصیت لگاریتمها را ابزارهای مفیدی در محاسبه می‌سازد. البته، نماد معمول برای $L(x)$ ، $\log x$ خواهد بود. در مورد رفتار $\log x$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow 0$ ، قضیه ۶۰۸ (ث) نشان می‌دهد که

$$\text{وقتی } x \rightarrow +\infty, \log x \rightarrow +\infty;$$

$$\text{وقتی } x \rightarrow 0, \log x \rightarrow -\infty.$$

به آسانی می‌بینیم که اگر $x > 0$ و n عددی صحیح باشد،

$$(41) \quad x^n = E(nL(x)).$$

بهمین نحو، اگر m عدد صحیح مثبتی باشد، داریم

$$(42) \quad x^{1/m} = E\left(\frac{1}{m} L(x)\right),$$

زیرا هر جمله (۴۲)، وقتی به توان m برسد، جمله متناظر (۳۷) را می‌دهد. با تلفیق (۴۱) و (۴۲)، به ازای هر α ی گویا خواهیم داشت

$$(43) \quad x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \log x}.$$

حال x^α را به ازای هر α ی حقیقی و هر $x > 0$ با (۴۳) تعریف می‌کنیم. پیوستگی و یکنوایی E و L نشان می‌دهند که این تعریف و تعریف پیشنهادی قبلی به یک نتیجه ختم می‌شوند. احکام ذکر شده در تمرین ۶، فصل ۱، نتایج بدیهی (۴۳) می‌باشند. اگر از (۴۳) مشتق بگیریم، بنابر قضیه ۵.۵ خواهیم داشت

$$(44) \quad (x^\alpha)' = E(\alpha L(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

توجه دارید که ما قبلاً (۴۴) را فقط برای مقادیر صحیح α به کار برده‌ایم، که در این حالت (۴۴) به آسانی از قضیه ۳.۵ (ب) نتیجه می‌شود. اثبات (۴۴) مستقیماً از تعریف مشتق، در حالتی که x^α با (۳۳) تعریف شده و α گنگ باشد، کار پرزحمتی خواهد بود. فرمول معروف انتگرالگیری از x^α ، اگر $\alpha \neq -1$ ، از (۴۴) و، چنانچه $\alpha = -1$ ، از (۳۸) نتیجه می‌شود. می‌خواهیم یکی دیگر از خواص $\log x$ ، یعنی

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0$$

به ازای هر $\alpha > 0$ ، را نیز ثابت، کنیم. یعنی، ثابت کنیم $\log x$ ، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، از هر توان مثبت x "کندتر" به $+\infty$ میل می‌کند. گوییم هرگاه $0 < \varepsilon < \alpha$ و $x > 1$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} x^{-\alpha} \log x &= x^{-\alpha} \int_1^x t^{-1} dt < x^{-\alpha} \int_1^x t^{\varepsilon-1} dt \\ &= x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

و (۴۵) نتیجه خواهد شد. می‌توانستیم از قضیه ۶.۸ (ج) نیز برای رسیدن به (۴۵) استفاده نماییم.

توابع مثلثاتی

تعریف می‌کنیم

$$(46) \quad C(x) = \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)], \quad S(x) = \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)].$$

نشان می‌دهیم که $C(x)$ و $S(x)$ با توابع $\cos x$ و $\sin x$ ، که تعریفشان معمولاً بر ملاحظات هندسی استوار است، یکی می‌باشند. گوییم، بنابر (۲۵)، $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$.

در نتیجه، (۴۶) نشان می‌دهد که $C(x)$ و $S(x)$ به ازای x های حقیقی حقیقی هستند. همچنین،

$$(47) \quad E(ix) = C(x) + iS(x).$$

پس، اگر x حقیقی باشد، $C(x)$ و $S(x)$ بترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی $E(ix)$ خواهند بود. بنابر (۲۷)،

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1.$$

در نتیجه،

$$(48) \quad |E(ix)| = 1 \quad (x \text{ حقیقی}).$$

از (۴۶) می‌توان دریافت که $C(0) = 1$ ، $S(0) = 0$ ، و (۲۸) نشان خواهد داد

که

$$(49) \quad C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x).$$

حکم می‌کنیم که اعداد مثبتی مثل x هستند بطوری که $C(x) = 0$. زیرا فرض کنیم این طور نباشد. چون $C(0) = 1$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر $x > 0$ ، $C(x) > 0$. در نتیجه، بنابر (۴۹)، $S'(x) > 0$. لذا، S اکیدا "صعودی" می‌باشد. و چون $S(0) = 0$ ، اگر $x > 0$ ، داریم $S(x) > 0$. بنابرین، اگر $0 < x < y$ ، خواهیم داشت

$$(50) \quad S(x)(y-x) < \int_x^y S(t) dt = C(x) - C(y) \leq 2.$$

آخرین نامساوی از (۴۸) و (۴۷) نتیجه می‌شود. چون $S(x) > 0$ ، نامساوی (۵۰) نمی‌تواند به ازای y های بزرگ درست باشد، و ما تناقض خواهیم داشت.

فرض کنیم x_0 کوچکترین عدد مثبتی باشد که $C(x_0) = 0$. این عدد وجود دارد، زیرا مجموعهٔ صفرهای یک تابع پیوسته بسته است، و $C(0) \neq 0$. ما عدد π را با

$$(51) \quad \pi = 2x_0$$

تعریف می‌کنیم.

در این صورت، $C(\pi/2) = 0$ ، و (۴۸) نشان می‌دهد که $S(\pi/2) = \pm 1$. چون $C(x) > 0$ در $(0, \pi/2)$ ، S در $(0, \pi/2)$ صعودی است. پس $S(\pi/2) = 1$ ، لذا،

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i,$$

و فرمول جمع نتیجه می‌دهد که

$$(52) \quad E(\pi i) = -1, \quad E(2\pi i) = 1,$$

بنابراین،

$$(53) \quad E(z + 2\pi i) = E(z) \quad (z \text{ مختلط}).$$

۷۰۸ قضیه

(آ) تابع E متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است.(ب) توابع C و S متناوب با دوره تناوب 2π اند.(پ) هرگاه $0 < t < 2\pi$ ، آنگاه $E(it) \neq 1$.

(ت) هرگاه z عددی مختلط با $|z| = 1$ باشد، t ی منحصر بفردی در $[0, 2\pi)$ هست که $E(it) = z$.

برهان. (آ)، بنابر (۵۳)، برقرار است؛ و (ب) از (آ) و (۴۶) نتیجه می شود.

فرض کنیم $0 < t < \pi/2$ ، و $E(it) = x + iy$ ، که در آن x و y حقیقی اند. آنچه قبلاً " شد نشان می دهد که $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ ، توجه کنید که

$$E(4it) = (x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2).$$

اگر $E(4it)$ حقیقی باشد، نتیجه می شود که $x^2 - y^2 = 0$ و چون $x^2 + y^2 = 1$ ، بنابر (۴۸) داریم $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. در نتیجه، $E(4it) = -1$. این (پ) را ثابت می کند.

هرگاه $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$ ، آنگاه، بنابر (پ)،

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2 - it_1) \neq 1.$$

این حکم یکتایی مذکور در (ت) را ثابت می کند.

برای اثبات حکم وجودی (ت)، z را ثابت می گیریم بنحوی که $|z| = 1$. می نویسیم $z = x + iy$ که در آن x و y حقیقی اند. ابتدا فرض می کنیم $x \geq 0$ و $y \geq 0$. بر $[0, \pi/2]$ ، C از ۱ تا ۰ نزول می کند. پس به ازای t ای در $[0, \pi/2]$ ، $C(t) = x$ ،

چون $C^2 + S^2 = 1$ و $S \geq 0$ بر $[0, \pi/2]$ ، نتیجه خواهد شد که $z = E(it)$.

اگر $x < 0$ و $y \geq 0$ ، شرایط قبلی به وسیله $-iz$ برقرار می شوند. در نتیجه، به ازای t ای در $[0, \pi/2]$ ، $-iz = E(it)$ و چون $i = E(\pi/2)$ ، خواهیم

داشت $z = E(i(t + \pi/2))$. بالاخره، اگر $y < 0$ ، دو حالت قبلی نشان می‌دهند که به ازای t ای در $(0, \pi)$ ، $-z = E(it)$. بنابراین ،

$$z = -E(it) = E(i(t + \pi)) .$$

این (ت) را ثابت می‌کند؛ و در نتیجه، قضیه به اثبات خواهد رسید .

از (ت) و (۴۸) نتیجه می‌شود که منحنی γ تعریف شده با

$$(54) \quad \gamma(t) = E(it) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

یک منحنی بسته ساده است که بردش دایره یک در صفحه می‌باشد . چون

$$\gamma'(t) = iE(it) , \quad \text{بنابر قضیه } ۲۷.۶ , \text{ طول } \gamma \text{ برابر}$$

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi$$

خواهد بود . البته ، انتظار این نتیجه برای محیط دایره‌ای به شعاع یک از قبل می‌رفت . این نتیجه نشان می‌دهد که π ، که با (۵۱) تعریف شده ، معنی هندسی عادی خود را دارد .

بهین نحو، مشاهده می‌کنیم که نقطه $\gamma(t)$ ، وقتی t از ۰ تا t_0 صعود کند ، یک قوس مستدیر به طول t_0 را وصف می‌کند . با توجه به مثلثی که رئوسش

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \gamma(t_0), \quad z_3 = C(t_0)$$

اند، معلوم می‌شود که $C(t)$ و $S(t)$ واقعا " با $\cos t$ و $\sin t$ (اگر اینها طبق معمول به صورت نسبت‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شوند) یکی هستند .

لازم است تأکید کنیم که ما خواص اساسی توابع مثلثاتی را از (۴۶) و (۲۵) بی‌توسل به مفهوم هندسی زاویه، نتیجه گرفتیم . راه‌های غیرهندسی دیگری نیز برای رسیدن به این توابع وجود دارند^۱ .

تمامیت جبری میدان مختلط

حال در وضعی هستیم که می‌توانیم برای این مطلب که میدان مختلط به طور جبری تام

(۱) در مقالاتی که

W. F. Eberlein (*Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, pp. 1223-1225)

و

G. B. Robison (*Math. Mag.*, vol. 41, 1968, pp. 66-70)

نوشته‌اند به این موضوعات پرداخته شده است .

است، یعنی هر چند جمله‌ای غیر ثابت با ضرایب مختلط ریشه‌ای مختلط دارد، برهانی ساده بیاوریم.

۸.۸ قضیه. فرض کنیم $a_0, \dots, a_n$ اعدادی مختلط باشند، $n \geq 1$ ، $a_n \neq 0$ ، و

$$P(z) = \sum_0^n a_k z^k.$$

در این صورت، به ازای عدد مختلطی چون z ، $P(z) = 0$.

برهان. بی آنکه به کلیت خللی وارد شود فرض می‌کنیم $a_n = 1$. قرار می‌دهیم

$$(55) \quad \mu = \inf |P(z)| \quad (z \text{ مختلط}).$$

هرگاه $|z| = R$ ، آنگاه

$$(56) \quad |P(z)| \geq R^n [1 - |a_{n-1}| R^{-1} - \dots - |a_0| R^{-n}].$$

طرف راست (۵۶)، وقتی $R \rightarrow \infty$ ، به ∞ میل می‌کند. از اینرو، R_0 ی هست بطوری که اگر $|z| > R_0$ ، $|P(z)| > \mu$ ، چون $|P|$ بر قرص بسته به مرکز ۰ و شعاع R_0 پیوسته است، قضیه ۱۶.۴ نشان می‌دهد که به ازای z_0 ی $|P(z_0)| = \mu$.

حکم می‌کنیم که $\mu = 0$.

گوییم اگر چنین نباشد، قرار می‌دهیم $Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0)$. در این صورت، Q یک چند جمله‌ای غیر ثابت است، $Q(0) = 1$ ، و، به ازای هر z ، $|Q(z)| \geq 1$. کوچکترین عدد صحیح k هست، که $1 \leq k \leq n$ ، بطوری که

$$(57) \quad Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0.$$

بنابر قضیه ۷.۸ (ت)، θ ای حقیقی وجود دارد بقسمی که

$$(58) \quad e^{ik\theta} b_k = -|b_k|.$$

اگر $r > 0$ و $r^k |b_k| < 1$ ، (۵۸) ایجاب می‌کند که

$$|1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k |b_k|.$$

در نتیجه،

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k \{|b_k| - r|b_{k+1}| - \dots - r^{n-k}|b_n|\}.$$

عبارت داخل دوا برو به ازای r به قدر کافی کوچک مثبت است؛ در نتیجه، $|Q(re^{i\theta})| < 1$ که یک تناقض می‌باشد.

لذا $\mu = 0$ ؛ یعنی، $P(z_0) = 0$.
 تمرین ۲۷ شامل نتیجه کلیتری خواهد بود.

سریهای فوریه

۹.۸ تعریف. یک چند جمله‌ای مثلثاتی مجموعی است متناهی به شکل

$$(59) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \text{ حقیقی})$$

که در آن $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ اعداد مختلطی می‌باشند. نظر به اتحادهای (۴۶)، (۵۹) را می‌توان به شکل

$$(60) \quad f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \quad (x \text{ حقیقی})$$

نیز نوشت، که برای اغلب مقاصد مناسبتر است. واضح است که هر چند جمله‌ای مثلثاتی متناوب و دوره تناوبش 2π می‌باشد.

چنانچه n عدد صحیح ناصفری باشد، e^{inx} مشتق e^{inx}/in است، که این نیز دوره تناوب 2π دارد. لذا،

$$(61) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n=\pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

حال رابطه (۶۰) را در e^{-imx} ، که در آن m عدد صحیحی است، ضرب می‌کنیم. اگر از این حاصل ضرب انتگرال بگیریم، (۶۱) نشان خواهد داد که به ازای $|m| \leq N$

$$(62) \quad c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

چنانچه $|m| > N$ ، انتگرال مذکور در (۶۲) مساوی ۰ است.

مطلب زیر را می‌توان از روی (۶۰) و (۶۲) دریافت: چند جمله‌ای مثلثاتی f ، که با (۶۰) داده شده، حقیقی است اگر و فقط اگر به ازای $n = 0, \dots, N$ ، $c_{-n} = \bar{c}_n$.

موافق با (۶۰)، یک سری مثلثاتی را سری به شکل

$$(63) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \text{ حقیقی})$$

تعریف می‌کنیم. مجموع جزئی $\sum_{n=-N}^N$ (۶۳) مساوی سمت راست (۶۰) تعریف می‌شود. هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر بر $[-\pi, \pi]$ باشد، اعداد c_m را که به ازای تمام

اعداد صحیح m با (۶۲) تعریف می شوند. ضرایب فوریه f خوانده، سری (۶۳) را که با این ضرایب شکل می گیرد سری فوریه f می نامند.

سوالی که اینک به طور طبیعی مطرح می شود این است که آیا سری فوریه f همگرا به f هست، یا، بطور کلی، آیا f با سری فوریه اش مشخص خواهد شد؛ به این معنی که اگر ضرایب فوریه یک تابع بر ما معلوم باشد، آیا می توانیم تابع را پیدا کنیم، و اگر چنین است، چگونه؟

بررسی این سریها و، بخصوص، مسئله نمایش یک تابع داده شده با یک سری مثلثاتی، ریشه در مسائل فیزیکی مانند نظریه نوسانات و نظریه انتقال حرارت ("نظریه تحلیلی حرارت" فوریه در ۱۸۲۲ منتشر شد) دارد. مسائل مشکل و ظریف زیادی که حین این بررسی پدید آمدند موجب آن شدند که تمام نظریه توابع یک متغیر حقیقی تجدید نظر و تجدید سازمان کامل یابد. در میان نامهای مشهور بسیار، اسامی ریمان، کانتور، و لیبگ^۱ عمیقاً به این مبحث وابسته اند، مبحثی که امروزه با تمام تعمیمها و انشعابهایش می توان گفت که در قلب تمام آنالیز جای دارد.

ما به اثبات چند قضیه اساسی که با روشهای آمده در فصلهای پیش قابل حصولند قناعت می کنیم. برای بررسیهای جامعتر، انتگرال لیبگ وسیله ای طبیعی و لازم خواهد بود. ابتدا دستگاههای توابع کلیتری را که از خاصیتی شبیه به (۶۱) برخوردارند مورد مطالعه قرار می دهیم.

۱۰۰۸ تعریف. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) دنباله ای از توابع مختلط بر $[a, b]$ باشد بطوری که

$$(64) \quad \int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = 0 \quad (n \neq m).$$

در این صورت، $\{\phi_n\}$ یک دستگاه متعامد از توابع بر $[a, b]$ نامیده می شود. اگر، علاوه بر این، به ازای هر n

$$(65) \quad \int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx = 1,$$

$\{\phi_n\}$ متعامدیکه نام خواهد داشت.

به عنوان مثال، تابعهای $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}$ یک دستگاه متعامدیکه بر $[-\pi, \pi]$ تشکیل می دهند. همچنین است توابع حقیقی

1. Theorie analytique de la chaleur

2. Lebesgue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

اگر $\{\phi_n\}$ بر $[a, b]$ متعامدیکه باشد و

$$(66) \quad c_n = \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

c_n را ضریب فوریه^۶ n م f نسبت به $\{\phi_n\}$ می‌خوانیم. می‌نویسیم

$$(67) \quad f(x) \sim \sum_1^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

و این سری را سری فوریه^۶ f (نسبت به $\{\phi_n\}$) خواهیم نامید.

توجه کنید که علامت $\sim$ به کار رفته در (۶۷) چیزی در مورد همگرایی سری به دست نمی‌دهد. علامت فقط این را می‌گوید که ضرایب با (۶۶) داده شده‌اند.

قضایای زیر نشان می‌دهند که مجموعه‌های جزئی سری فوریه^۶ f از یک خاصیت مینیمم برخوردارند. در اینجا و تا پایان این فصل فرض می‌کنیم $f \in \mathcal{R}$ اگر چه این فرض را می‌شود ضعیفتر هم کرد.

۱۱.۸ قضیه. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ بر $[a, b]$ متعامدیکه باشد. همچنین،

$$(68) \quad s_n(x) = \sum_{m=1}^n c_m \phi_m(x)$$

مجموع جزئی n م سری فوریه^۶ f باشد و

$$(69) \quad t_n(x) = \sum_{m=1}^n \gamma_m \phi_m(x).$$

در این صورت،

$$(70) \quad \int_a^b |f - s_n|^2 dx \leq \int_a^b |f - t_n|^2 dx,$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

$$(71) \quad \gamma_m = c_m \quad (m = 1, \dots, n).$$

یعنی، در میان تمام توابع t_n ، s_n بهترین تقریب میانگین مربعی ممکن به f را به دست می‌دهند.

برهان. فرض کنیم $\int$ انتگرال روی $[a, b]$ و Σ مجموع از 1 تا n را نشان دهد. در این صورت، بنابر تعریف $\{c_m\}$ ،

$$\int f \bar{t}_n = \int f \sum \bar{\gamma}_m \bar{\phi}_m = \sum c_m \bar{\gamma}_m.$$

چون $\{\phi_m\}$ متعامدیکه است،

$$\int |t_n|^2 = \int t_n \bar{t}_n = \int \sum \gamma_m \phi_m \sum \bar{\gamma}_k \bar{\phi}_k = \sum |\gamma_m|^2;$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int |f - t_n|^2 &= \int |f|^2 - \int f \bar{t}_n - \int \bar{f} t_n + \int |t_n|^2 \\ &= \int |f|^2 - \sum c_m \bar{\gamma}_m - \sum \bar{c}_m \gamma_m + \sum \gamma_m \bar{\gamma}_m \\ &= \int |f|^2 - \sum |c_m|^2 + \sum |\gamma_m - c_m|^2, \end{aligned}$$

که بوضوح مینیمم است اگر و فقط اگر $\gamma_m = c_m$.

با گذاردن $\gamma_m = c_m$ در این محاسبات، چون $\int |f - t_n|^2 \geq 0$ ، خواهیم داشت

$$(72) \quad \int_a^b |s_n(x)|^2 dx = \sum_{m=1}^n |c_m|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

۱۲.۸ قضیه. هرگاه $\{\phi_n\}$ بر $[a, b]$ متعامدیکه باشد و

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

آنگاه

$$(73) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

بویژه،

$$(74) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

برهان. با فرض $n \rightarrow \infty$ در (۷۲) نامساوی (۷۳) را، که نامساوی بسل^۱ نام دارد، به دست خواهیم آورد.

۱۳۰۸ سریهای مثلثاتی

از حالا به بعد سروکارمان فقط با دستگاه مثلثاتی خواهد بود. به f هایی توجه داریم که از دوره تناوب 2π برخوردارند و بر $[-\pi, \pi]$ (و در نتیجه، بر هر بازه کراندار) انتگرال ریمان دارند. در این صورت، سری فوریه f سری (۶۳) است که ضرایبش c_n با انتگرال (۶۲) داده می شوند، و

$$(75) \quad s_N(x) = s_N(f; x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

مجموع جزئی s_N م سری فوریه f می باشد. در این وضع، نامساوی (۷۲) شکل

$$(76) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

را خواهد یافت.

برای داشتن عبارتی برای s_N که بیش از (۷۵) انعطاف داشته باشد، هسته دیریکله^۱ را معرفی می کنیم:

$$(77) \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}.$$

اولین تساوی تعریف $D_N(x)$ است. دومی این طور به دست می آید که طرفین اتحاد

$$(e^{ix} - 1)D_N(x) = e^{i(N+1)x} - e^{-ix}$$

را در $e^{-ix/2}$ ضرب کنیم.

بنابر (۶۲) و (۷۵) داریم

$$\begin{aligned} s_N(f; x) &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} dt. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(78) \quad s_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

متناوب بودن تمام توابع مربوطه نشان می دهد که اینکه بر چه بازه ای انتگرال می گیریم اهمیت ندارد، همین قدر که طولش 2π باشد کافی است. این امر نشان می دهد که دو

انتگرال مذکور در (۷۸) با هم مساوی می‌باشند.

ما در مورد همگرایی نقطه به نقطه سری فوریه فقط یک قضیه ثابت می‌کنیم.

۱۴۰۸ قضیه. هرگاه به ازای x ی ثابت‌هایی چون $\delta > 0$ و $M < \infty$ وجود داشته باشند بطوری که برای هر $t \in (-\delta, \delta)$

$$(79) \quad |f(x+t) - f(x)| \leq M|t|,$$

آنگاه

$$(80) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f; x) = f(x).$$

بوهان. به ازای $0 < |t| \leq \pi$ تعریف می‌کنیم

$$(81) \quad g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)},$$

و قرار می‌دهیم $g(0) = 0$. بنابر تعریف (۷۷)،

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1.$$

در نتیجه، (۷۸) نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} s_N(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(t) \cos \frac{t}{2} \right] \sin Nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(t) \sin \frac{t}{2} \right] \cos Nt dt. \end{aligned}$$

بنابر (۷۹) و (۸۱)، $g(t) \cos(t/2)$ و $g(t) \sin(t/2)$ کراندارند. لذا، بر طبق (۷۴)، دو انتگرال آخر وقتی $N \rightarrow \infty$ به ۰ میل می‌نمایند. این (۸۰) را ثابت خواهد کرد.

نتیجه. هرگاه به ازای هر x در قطعه‌ای چون J ، $f(x) = 0$ ، آنگاه به ازای هر

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f; x) = 0, \quad x \in J.$$

تنظیم دیگری از این نتیجه به صورت زیر است:

هرگاه به ازای هر t در یکی از همسایگیهای x ، $f(t) = g(t)$ ، آنگاه

وقتی $s_N(f; x) - s_N(g; x) = s_N(f - g; x)$ ، $N \rightarrow \infty$

این را معمولاً "قضیه موضعی سازی می خوانند. این قضیه نشان می دهد که رفتار دنباله $\{s_N(f; x)\}$ ، تا جایی که به همگرایی مربوط شود، فقط به مقادیر f در یکی از همسایگیهای (بدلخواه کوچک) x بستگی دارد. لذا، دوسری فوریه ممکن است در یک بازه یک نوع رفتار کنند ولی در بازه های دیگر رفتارشان کاملاً "فرق داشته باشد. اینجاست که تفاوت بسیار فاحشی میان سریهای فوریه و سریهای توانی وجود خواهد داشت (قضیه ۵۰۸).

مطلب را با دو قضیه تقریب دیگر به پایان می بریم.

۱۵۰۸ قضیه. هرگاه f (با دوره تناوب 2π) پیوسته باشد و $\varepsilon > 0$ ، آنگاه یک چندجمله ای مثلثاتی مثل p هست بطوری که به ازای هر x حقیقی

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

برهان. اگر x و $x + 2\pi$ را یکی بگیریم، می توان، به وسیله نگاشت $x \rightarrow e^{ix}$ ، تابعهای 2π متناوب بر R^1 را توابعی بر دایره T یکپاره تلقی کرد. چندجمله ایهای مثلثاتی، یعنی توابعی به شکل $(e^{ix})^n$ ، یک جبر خود الحاقی مانند $\mathcal{H}$ را می سازند که نقاط T را جدا می کند و در هیچ نقطه از T صفر نمی شود. چون T فشرده است، قضیه ۳۳۰۷ به ما می گوید که $\mathcal{H}$ در $\mathcal{C}(T)$ چگال است. این همان چیزی است که قضیه حکم می کند.

شکل دقیقتر این قضیه در تمرین ۱۵ خواهد آمد.

۱۶۰۸ قضیه پارسوال^۱. فرض کنیم f و g توابعی باشند دارای انتگرال ریمان و دوره تناوب

2π ، و

$$(82) \quad f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}.$$

در این صورت،

$$(83) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(f; x)|^2 dx = 0,$$

$$(84) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{g}_n,$$

$$(85) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

برهان. از نماد

$$(86) \quad \|h\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $f \in \mathcal{R}$ و $f(\pi) = f(-\pi)$ ، ساختنی که در تمرین ۱۲، فصل ۶، وصف شد تابع -2π -متناوب و پیوسته h را با

$$(87) \quad \|f - h\|_2 < \varepsilon$$

به دست می‌دهد.

بنابر قضیه ۱۵۰۸، چندجمله‌ای مثلثاتی P هست بطوری که به ازای هر x ، $|h(x) - P(x)| < \varepsilon$. لذا، $\|h - P\|_2 < \varepsilon$. اگر درجه N_0, P باشد، قضیه ۱۱۰۸ نشان خواهد داد که به ازای هر $N \geq N_0$

$$(88) \quad \|h - s_N(h)\|_2 \leq \|h - P\|_2 < \varepsilon.$$

بنابر (۷۲)، با اختیار $h - f$ به جای f ،

$$(89) \quad \|s_N(h) - s_N(f)\|_2 = \|s_N(h - f)\|_2 \leq \|h - f\|_2 < \varepsilon.$$

حال نامساوی مثلثی (تمرین ۱۱، فصل ۶)، در تلفیق با (۸۷)، (۸۸)، و (۸۹)، نشان می‌دهد که

$$(90) \quad \|f - s_N(f)\|_2 < 3\varepsilon \quad (N \geq N_0).$$

این (۸۳) را ثابت می‌کند. دیگر اینکه،

$$(91) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_N(f) \bar{g} dx = \sum_{n=-N}^N c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-N}^N c_n \bar{g}_n$$

و نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$(92) \quad \left| \int f \bar{g} - \int s_N(f) \bar{g} \right| \leq \int |f - s_N(f)| |g| \leq \left\{ \int |f - s_N|^2 \int |g|^2 \right\}^{1/2},$$

که، بنابر (۸۳)، وقتی $N \rightarrow \infty$ ، به ۰ میل می‌کند. مقایسه (۹۱) با (۹۲) رابطه (۸۴)

را به دست می‌دهد. بالاخره، (۸۵) حالت خاص (۸۴) به ازای $g = f$ می‌باشد.

صورت کلیتر قضیه ۱۶۰۸ در فصل ۱۱ خواهد آمد.

تابع گاما

این تابع رابطه نزدیکی با فاکتوریلها دارد، و در بسیاری از جاها در آنالیز بی مقدمه ظاهر می‌شود. منشاء، تاریخچه، و گسترش آن در مقاله جالب دیویس^۱ خوبی وصف شده است. کتاب آرتین^۲ (مذکور در کتابنامه) معرف مقدماتی خوب دیگری از این تابع خواهد بود.

گفتار ما در این باب خیلی فشرده است، و فقط پس از هر قضیه چند نکته توضیح می‌شود. از اینرو، این بخش را می‌توان تمرینی طولانی انگاشت و نیز مجالی برای به کارگیری بخشی از مطالب ذکر شده تا بحال تلقی نمود.

۱۷۰۸ تعریف. به ازای $0 < x < \infty$

$$(93) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

انتگرال فوق به ازای این x ها همگراست. (وقتی $x < 1$ ، هم باید به ۰ توجه داشت و هم به ∞ .)

۱۸۰۸ قضیه

(آ) معادله تابعی

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

برقرار است اگر که $0 < x < \infty$.

(ب) به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $\Gamma(n+1) = n!$

(ج) $\log \Gamma$ بر $(0, \infty)$ محدب است.

1. P. J. Davis (Amer. Math. Monthly, vol. 66, 1959, pp. 849-869).

برهان. انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء $(\bar{\Gamma})$ را ثابت می‌کند. چون $\Gamma(1) = 1$ ، $(\bar{\Gamma})$ به استقرا (ب) را ایجاب می‌نماید. اگر $1 < p < \infty$ و $(1/p) + (1/q) = 1$ ، نامساوی هولدر (تمرین ۱۰، فصل ۶) را بر (۹۳) اعمال کرده نتیجه می‌گیریم که

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q}.$$

این با (پ) معادل خواهد بود.

اینکه این سه خاصیت Γ را کاملاً مشخص می‌کنند موضوع نسبتاً "تعجب‌آوری است که توسط بوهر^۱ و مالرپ^۲ کشف شده است.

۱۹۰۸ قضیه. هرگاه f تابع مثبتی بر $(0, \infty)$ باشد بقسمی که

$$f(x+1) = xf(x) \quad (\bar{\Gamma})$$

$$f(1) = 1 \quad (ب)$$

$$\log f \text{ محدب باشد،} \quad (پ)$$

$$f(x) = \Gamma(x) \text{ آنگاه}$$

برهان. چون Γ در $(\bar{\Gamma})$ ، $(ب)$ ، و $(پ)$ صدق می‌کند، کافی است ثابت کنیم که $f(x)$ ، به ازای هر $x > 0$ ، به‌طور منحصر بفرد به وسیله $(\bar{\Gamma})$ ، $(ب)$ ، و $(پ)$ مشخص می‌شود. بر طبق $(\bar{\Gamma})$ ، کافی است این امر به ازای $x \in (0, 1)$ صورت گیرد.

قرار می‌دهیم $\varphi = \log f$ در این صورت،

$$(94) \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) + \log x \quad (0 < x < \infty)$$

و $\varphi(1) = 0$ و φ محدب است. فرض کنیم $0 < x < 1$ و n عدد صحیح مثبتی باشد. بنابر

$$(94), \quad \varphi(n+1) = \log(n!).$$

خارج قسمتهای تفاضلی φ را بر بازه‌های $[n, n+1]$ ، $[n+1, n+1+x]$ ، $[n+1, n+2]$ در نظر می‌گیریم. چون φ محدب

است،

$$\log n \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \log(n+1).$$

چند بار استفاده از (۹۴) نتیجه می دهد که

$$\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \log [x(x+1) \cdots (x+n)] .$$

پس

$$0 \leq \varphi(x) - \log \left[\frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \right] \leq x \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) .$$

عبارت آخر، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به ۰ میل می کند. لذا، $\varphi(x)$ معین است و برهان تمام خواهد بود.

به عنوان یک نتیجه فرعی، رابطه

$$(95) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

را حداقل وقتی $0 < x < 1$ به دست می آوریم. از این رابطه، چون $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ، می توان (۹۵) را به ازای هر $x > 0$ نتیجه گرفت.

۲۰۰۸ قضیه. هرگاه $x > 0$ و $y > 0$ ، آنگاه

$$(96) \quad \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} .$$

این انتگرال تابع بتای $(B(x, y))$ لقب یافته است.

برهان. توجه کنید که $B(1, y) = 1/y$ ، و $\log B(x, y)$ ، بنابر نامساوی هولدر، مثل قضیه ۱۸۰۸، به ازای هر y ثابت تابع محدبی از x است، و

$$(97) \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) .$$

برای اثبات (۹۷)، انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء را در

$$B(x+1, y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^x (1-t)^{x+y-1} dt$$

انجام می دهیم. این سه خاصیت $B(x, y)$ نشان می دهند که، به ازای هر y ، قضیه ۱۹۰۸ در مورد تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y)$$

قابل اجراست. در نتیجه، $f(x) = \Gamma(x)$.

۲۱.۸ چند نتیجه. جانشانی $t = \sin^2 \theta$ ، (۹۶) را به

$$(98) \quad 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

بدل می‌کند. حالت خاص $x = y = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌دهد که

$$(99) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

جانشانی $t = s^2$ ، (۹۳) را به

$$(100) \quad \Gamma(x) = 2 \int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds \quad (0 < x < \infty)$$

تبدیل می‌نماید. حالت خاص $x = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌دهد که

$$(101) \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

بنابر (۹۹)، اتحاد

$$(102) \quad \Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

مستقیماً^۱ از قضیه^{۱۹.۸} نتیجه خواهد شد.

۲۲.۸ فرمول استرلینگ^۱. این فرمول عبارت تقریبی ساده‌ای را برای $\Gamma(x+1)$ وقتی x بزرگ است (در نتیجه، برای $n!$ وقتی n بزرگ است) به دست می‌دهد. فرمول عبارت خواهد بود از

$$(103) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x \sqrt{2\pi x}} = 1.$$

اثبات بدین قرار است: در (۹۳) قرار می‌دهیم $t = x(1+u)$. این نتیجه می‌دهد

که

$$(104) \quad \Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{\infty} [(1+u)e^{-u}]^x du.$$

$h(u)$ را قسمی تعیین می‌کنیم که $h(0) = 1$ و، اگر $u \neq 0$ و $-1 < u < \infty$

$$(105) \quad (1+u)e^{-u} = \exp \left[-\frac{u^2}{2} h(u) \right].$$

در این صورت،

$$(106) \quad h(u) = \frac{2}{u^2} [u - \log(1+u)].$$

از این نتیجه می‌شود که h پیوسته است و $h(u)$ ، وقتی u از -1 تا ∞ صعود کند، از ∞ تا 0 نزول می‌نماید.

جانشانی $u = s\sqrt{2/x}$ رابطه (۱۰۴) را به

$$(107) \quad \Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2x} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(s) ds$$

بدل می‌کند که در آن

$$\psi_x(s) = \begin{cases} \exp[-s^2 h(s\sqrt{2/x})] & (-\sqrt{x/2} < s < \infty), \\ 0 & (s \leq -\sqrt{x/2}). \end{cases}$$

به نکات زیر در باب $\psi_x(s)$ توجه نمایید:

(آ) به ازای هر s ، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $\psi_x(s) \rightarrow e^{-s^2}$ ؛

(ب) همگرایی در (آ)، به ازای هر $A < \infty$ ، بر $[-A, A]$ یکنواخت است؛

(پ) هرگاه $s < 0$ ، آنگاه $0 < \psi_x(s) < e^{-s^2}$ ؛

(ت) هرگاه $s > 0$ و $x > 1$ ، آنگاه $0 < \psi_x(s) < \psi_1(s)$ ؛

(ث) $\int_0^{\infty} \psi_1(s) ds < \infty$.

لذا، قضیه همگرایی مذکور در تمرین ۱۲، فصل ۷، را می‌توان در مورد انتگرال

(۱۰۷) به کاربرد، و نشان داد که این انتگرال، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، بنا به (۱۰۱)، به

$\sqrt{\pi}$ همگراست. این (۱۰۳) را ثابت خواهد کرد.

شکل مبسوط‌تر این برهان را می‌توان در کتاب "جساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته"

باک^۱ یافت. برای مشاهده دو برهان کاملاً متفاوت دیگر، ر.ک. مقاله فلر^۲ و صفحات

1. R. C. Buck's "Advanced Calculus," pp. 216-218.

2. W. Feller's article in *Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, pp. 1223-1225 (with a correction in vol. 75, 1968, p. 518).

۲۵ تا ۲۴ کتاب آرتین.

تمرین ۲۵ برهان ساده‌تری از یک نتیجه کمتر دقیق را به دست خواهد داد.

تمرین

۱. تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

ثابت کنید f از هر مرتبه در $x=0$ مشتق دارد و، به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ ، $f^{(n)}(0)=0$.

۲. فرض کنید a_{ij} عددی باشد که در سطر i و ستون j مآرایه

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \cdots & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

واقع است؛ یعنی،

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i < j), \\ -1 & (i = j), \\ 2^{j-i} & (i > j). \end{cases}$$

ثابت کنید

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = -2, \quad \sum_j \sum_i a_{ij} = 0.$$

۳. ثابت کنید که اگر به ازای هر i و j ، $a_{ij} \geq 0$ ، داریم

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$$

(حالت $+\infty = +\infty$ نیز ممکن است پیش بیاید).

۴. روابط حدی زیر را ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \log b \quad (b > 0) \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{ت})$$

۵. حدهای زیر را بیابید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} [n^{1/n} - 1] \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x(1 - \cos x)} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x} \quad (\text{ت})$$

۶. فرض کنید به ازای هر x و y حقیقی $f(x)f(y) = f(x+y)$

(آ) با این انگار که f مشتقپذیر است و صفر نیست، ثابت کنید

$$f(x) = e^{cx}$$

که در آن c یک ثابت است.

(ب) همین مطلب را با فقط این فرض که f پیوسته است اثبات نمایید.

۷. هرگاه $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، ثابت کنید که

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

۸. به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ و x حقیقی، ثابت کنید که

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

توجه کنید که این نامساوی ممکن است برای مقادیر دیگری از n درست نباشد. به عنوان مثال،

$$|\sin \frac{1}{2}\pi| > \frac{1}{2} |\sin \pi|.$$

۹. (آ) قرار دهید $s_N = 1 + (\frac{1}{2}) + \dots + (1/N)$. ثابت کنید که

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N - \log N)$$

وجود دارد. (این حد، که اغلب با γ نموده می شود، ثابت ویلر^۱ نام دارد. مقدار عددیش

...0.5772 است. معلوم نیست که آیا γ گویاست یا نه.

(ب) حدوداً "چقدر باید m بزرگ باشد که $N = 10^m$ در $s_N > 100$ صدق کند؟

۱۰. ثابت کنید $\sum 1/p$ واگراست؛ این مجموع روی جمیع اعداد اول گرفته می شود.

(این نشان می دهد که اعداد اول زیرمجموعه "نسبتاً" قابل توجهی از مجموعه اعداد صحیح مثبت را تشکیل می دهند.)

راهنمایی: با معلوم بودن N ، فرض کنید $p_1, \dots, p_k$ اعداد اولی باشند که لااقل یک عدد صحیح نابیشتر از N را عاد می کنند. در این صورت،

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &\leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \dots\right) \\ &= \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^{-1} \\ &\leq \exp \sum_{j=1}^k \frac{2}{p_j}. \end{aligned}$$

نامساوی آخر برقرار است از اینرو که اگر $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ،

$$(1-x)^{-1} \leq e^{2x}.$$

(این نتیجه برهانهای زیادی دارد. به عنوان مثال، ر. ک. مقاله نیون^۱ و مقاله بلمن^۲.)

۱۱. فرض کنید $f \in \mathcal{R}$ بر $[0, A]$ به ازای هر $A < \infty$ ، و وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $f(x) \rightarrow 1$. ثابت کنید که

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = 1 \quad (t > 0).$$

۱۲. فرض کنید $0 < \delta < \pi$ ، اگر $|x| \leq \delta$ ، $f(x) = 1$ ، اگر $\delta < |x| \leq \pi$ ، $f(x) = 0$ ،

و به ازای هر x ، $f(x + 2\pi) = f(x)$.

(آ) ضرایب فوریه f را حساب کنید.

(ب) نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2} \quad (0 < \delta < \pi).$$

1. I. Niven in *Amer. Math. Monthly*, vol. 78, 1971, pp. 272-273.

2. R. Bellman in *Amer. Math. Monthly*, vol. 50, 1943, pp. 318-319.

(پ) از قضیه پارسوال نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

(ت) فرض کنید $\delta \rightarrow 0$ ، و ثابت کنید که

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

(ث) در (پ) قرار دهید $\delta = \pi/2$. چه نتیجه‌ای حاصلتان می‌شود؟

۱۳. اگر $0 \leq x < 2\pi$ ، قرار دهید $f(x) = x$ ، و با استفاده از قضیه پارسوال، نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

۱۴. اگر $f(x) = (\pi - |x|)^2$ بر $[-\pi, \pi]$ ، ثابت کنید

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx,$$

و نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(مقاله اخیر اشتارک^۱ به سریهای از شکل $\sum n^{-s}$ که در آن s عدد صحیح مثبتی است ارجاع بسیار دارد. ^(۲))

۱۵. با D_n تعریف شده در (۷۷)، قرار دهید

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x).$$

ثابت کنید

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1 - \cos(N+1)x}{1 - \cos x};$$

و نیز

$$K_N \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx = 1 \quad (2)$$

$$K_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2}{1 - \cos \delta} \quad \text{اگر } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi$$

با این فرض که $s_N = s_N(f; x)$ مجموع جزئی N م سری فوریه f است، میانگینهای حسابی

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_N}{N+1}$$

را در نظر بگیرید. ثابت کنید

$$\sigma_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt ;$$

و در نتیجه، قضیه فجر^۱ را اثبات نمایید:

هرگاه f پیوسته و با دوره تناوب 2π باشد، آنگاه $\sigma_N(f; x) \rightarrow f(x)$

به طور یکنواخت بر $[-\pi, \pi]$.

راهنمایی: با استفاده از خواص (1)، (2) و (3)، مثل قضیه ۲۶.۷ عمل کنید.

۱۶. شکل نقطه به نقطه قضیه فجر را ثابت کنید:

هرگاه $f \in \mathcal{R}$ و $f(x+)$ و $f(x-)$ به ازای x موجود باشند، آنگاه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f; x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

۱۷. فرض کنید f بر $[-\pi, \pi]$ کراندار و یکنوا بوده و ضرایب c_n فوریه‌اش به صورت (۶۲) باشند.

(1) از تمرین ۱۷، فصل ۶، استفاده کرده ثابت نمایید $\{nc_n\}$ یک دنباله کراندار است.

(2) قسمت (1) را با تمرین (۱۶) و تمرین ۱۴ (3)، فصل ۳، تلفیق کرده نتیجه بگیرید که به ازای هر x ،

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f; x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] .$$

(پ) فقط فرض کنید $f \in \mathcal{D}$ بر $[-\pi, \pi]$ و f در قطعه‌ای چون $(\alpha, \beta) \subset [-\pi, \pi]$ یکنوا باشد. ثابت کنید نتیجه (ب) به ازای هر $x \in (\alpha, \beta)$ برقرار است.
(این کاربردی از قضیه موضعی سازی می باشد.)

۱۸. تعریف کنید

$$f(x) = x^3 - \sin^2 x \tan x , \\ g(x) = 2x^2 - \sin^2 x - x \tan x .$$

در مورد هریک از این دو تابع تحقیق کنید آیا به ازای هر $x \in (0, \pi/2)$ مثبت است یا منفی، و یا که تغییر علامت می دهد. جواب خود را اثبات نمایید.

۱۹. فرض کنید f یک تابع پیوسته بر R^1 باشد، $f(x+2\pi) = f(x)$ و α/π گنگ باشد. ثابت کنید به ازای هر x ،

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt .$$

راهنمایی: مطلب را ابتدا برای $f(x) = e^{ikx}$ ثابت کنید.

۲۰. محاسبه ساده زیر تقریب مناسبی را برای فرمول استرلینگ به ما می دهد:

به ازای $m = 1, 2, 3, \dots$ ، اگر $m \leq x \leq m+1$ ، تعریف کنید

$$f(x) = (m+1-x) \log m + (x-m) \log (m+1)$$

و، اگر $m - \frac{1}{2} \leq x < m + \frac{1}{2}$ ، تعریف کنید

$$g(x) = \frac{x}{m} - 1 + \log m .$$

نمودارهای f و g را بکشید. توجه کنید که اگر $x \geq 1$ ، $f(x) \leq \log x \leq g(x)$ ؛

و

$$\int_1^n f(x) dx = \log(n!) - \frac{1}{2} \log n > -\frac{1}{2} + \int_1^n g(x) dx .$$

از $\log x$ روی $[1, n]$ انتگرال گرفته نتیجه بگیرید که به ازای $n = 2, 3, 4, \dots$ ،

$$\frac{7}{8} < \log(n!) - (n + \frac{1}{2}) \log n + n < 1 .$$

(توجه: $\log \sqrt{2\pi} \sim 0.918\dots$) بنا براین،

$$e^{7/8} < \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} < e .$$

۲۱. فرض کنید

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

ثابت کنید عدد ثابتی چون $C > 0$ هست بطوری که

$$L_n > C \log n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

یا، به عبارت دقیقتر، دنباله

$$\left\{ L_n - \frac{4}{\pi^2} \log n \right\}$$

کراندار است.

۲۲. چنانچه α حقیقی باشد و $-1 < x < 1$ ، قضیه دو جمله‌ای نیوتن را ثابت نمایید:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

راهنمایی: طرف راست را به $f(x)$ نشان دهید. ثابت کنید که سری همگراست. ثابت کنید

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x),$$

و این معادله دیفرانسیل را حل کنید. همچنین، نشان دهید که اگر $-1 < x < 1$ و $\alpha > 0$

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} x^n.$$

۲۳. فرض کنید γ یک منحنی بسته به طور پیوسته مشتقپذیر در صفحه مختلط با بازه پارامتری $[a, b]$ باشد و، به ازای هر $t \in [a, b]$ ، $\gamma(t) \neq 0$. شاخص γ را این طور تعریف کنید:

$$\text{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

ثابت کنید $\text{Ind}(\gamma)$ همواره یک عدد صحیح است.

راهنمایی: φ ای بر $[a, b]$ با خواص $\varphi' = \gamma'/\gamma$ ، $\varphi(a) = 0$ وجود دارد. در نتیجه، $\gamma \exp(-\varphi)$ ثابت است. چون $\gamma(a) = \gamma(b)$ ، نتیجه می‌شود که $\exp \varphi(b) = \exp \varphi(a) = 1$ توجه کنید که $\varphi(b) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma)$. $\text{Ind}(\gamma)$ را وقتی $\gamma(t) = e^{int}$ ، $a = 0$ ، $b = 2\pi$ محاسبه نمایید.

توضیح دهید که چرا اغلب $\text{Ind}(\gamma)$ را عدد گردشی γ حول 0 می نامند.

۲۴. فرض کنید γ همان γ ی تمرین ۲۳ باشد و، مضافاً، برد γ قسمت منفی محور حقیقی را قطع نکند. ثابت کنید که $\text{Ind}(\gamma) = 0$.

راهنمایی: به ازای $0 \leq c < \infty$ ، $\text{Ind}(\gamma + c)$ تابعی پیوسته و با مقدار صحیح از c است. همچنین، وقتی $c \rightarrow \infty$ ، $\text{Ind}(\gamma + c) \rightarrow 0$.

۲۵. فرض کنید γ_1 و γ_2 منحنیهای تمرین ۲۳ باشند و

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \quad (a \leq t \leq b).$$

ثابت کنید $\text{Ind}(\gamma_1) = \text{Ind}(\gamma_2)$.

راهنمایی: قرار دهید $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$. در این صورت، $|\gamma - 1| < 1$. در نتیجه، بنا بر تمرین ۲۴، $\text{Ind}(\gamma) = 0$ ، همچنین،

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}.$$

۲۶. فرض کنید γ یک منحنی بسته (نه الزاماً "مشتقپذیر) در صفحه مختلط و با بازه

پارامتری $[0, 2\pi]$ باشد بطوری که به ازای هر $t \in [0, 2\pi]$ ، $\gamma(t) \neq 0$.

$\delta > 0$ را قسمی اختیار کنید که به ازای هر $t \in [0, 2\pi]$ ، $|\gamma(t)| > \delta$.

اگر P و P_2 چند جمله ایهای مثلثاتی باشند بطوری که به ازای هر $t \in [0, 2\pi]$ ، $|P_2(t) - \gamma(t)| < \delta/4$ (وجود آنها را قضیه ۱۵.۸ تضمین می کند)، با استفاده از تمرین ۲۵ ثابت کنید

$$\text{Ind}(P_1) = \text{Ind}(P_2).$$

این مقدار مشترک را $\text{Ind}(\gamma)$ تعریف کنید.

ثابت کنید تمرینهای ۲۴ و ۲۵ بدون فرضی از مشتقپذیری برقرارند.

۲۷. فرض کنید f یک تابع مختلط پیوسته باشد که در صفحه مختلط تعریف شده است. همچنین، عدد صحیح و مثبت n و عدد مختلط $c \neq 0$ باشند بطوری که

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) = c.$$

ثابت کنید به ازای دست کم یک z مختلط، $f(z) = 0$.

توجه دارید که این تعمیمی از قضیه ۸.۸ است.

راهنمایی: فرض کنید در ازای هر z ، $f(z) \neq 0$. به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ ، $0 \leq r < \infty$ ،

تعریف کنید

$$\gamma_r(t) = f(re^{it}),$$

و احکام زیر را در مورد منحنیهای γ_r ثابت نمایید:

$$\text{Ind}(\gamma_0) = 0 \quad (\text{T})$$

(ب) به ازای تمام r های به قدر کافی بزرگ، $\text{Ind}(\gamma_r) = n$ ؛

(پ) $\text{Ind}(\gamma_r)$ تابع پیوسته‌ای از r بر $[0, \infty)$ است.

[در (ب) و (پ) قسمت آخر تمرین ۲۶ را به کار ببرید.]

نشان دهید که (T) و (ب) و (پ)، چون $n > 0$ ، ضد و نقیض‌اند.

۲۸. فرض کنید $\bar{D}$ قرص یک‌هسته در صفحه مختلط باشد. (پس $z \in \bar{D}$ اگر و فقط اگر

$$|z| \leq 1$$

را نگاشت پیوسته‌ای از $\bar{D}$ بتوی دایره یک‌هسته T بینگارید.) بنابراین،

$$|g(z)| = 1, \quad z \in \bar{D}$$

به ازای هر $z \in \bar{D}$ ؛ $g(z) = -z$ ، $z \in T$ یک دست کم

راهنمایی: به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ و $0 \leq r \leq 1$ قرار دهید

$$\gamma_r(t) = g(re^{it}), \quad \psi(t) = e^{-it}\gamma_1(t).$$

هرگاه به ازای هر $z \in T$ ، $g(z) \neq -z$ ، آنگاه به ازای هر $t \in [0, 2\pi]$ ، $\psi(t) \neq -1$ ؛

پس، بنابر تمرینهای ۲۴ و ۲۶، $\text{Ind}(\psi) = 0$. از این نتیجه می‌شود که $\text{Ind}(\gamma_1) = 1$ ؛

اما $\text{Ind}(\gamma_0) = 0$ ، حال، مثل تمرین ۲۷، تناقض به دست آورید.

۲۹. ثابت کنید هر نگاشت پیوسته f از $\bar{D}$ بتوی $\bar{D}$ در $\bar{D}$ نقطه ثابت دارد.

(این حالت دو بعدی قضیه نقطه ثابت براورث^۱ است.)

راهنمایی: فرض کنید به ازای هر $z \in \bar{D}$ ، $f(z) \neq z$. به هر $z \in \bar{D}$ نقطه $g(z) \in T$

را که روی شعاع آغاز شده از $f(z)$ و ماربر z قرار دارد مربوط کنید. در این صورت،

g ، D را بتوی T می‌نگارد، اگر $g(z) = z$ ، $z \in T$ ، و g پیوسته است، زیرا

$$g(z) = z - s(z)[f(z) - z],$$

که در آن $s(z)$ ریشه نامنفی منحصر بفرد معادله درجه دوم است که ضرایبش توابع

پیوسته‌ای از f و z اند. حال تمرین ۲۸ را به کار گیرید.

توابع چند متغیره

تبدیلات خطی

این فصل را با بحثی از مجموعه بردارها در فضای اقلیدسی n بعدی R^n آغاز می‌کنیم. مطالب جبری ذکر شده در اینجا را می‌توان بدون ذره‌ای تغییر به فضاهای برداری با بعد متناهی روی هر میدان از اسکالرهای تعمیم داد. لکن، برای اهداف ما، چهارچوب مأنوس فضاهای اقلیدسی کاملاً کافی خواهد بود.

۱.۹ چند تعریف

(آ) مجموعه‌ای نامتناهی $X \subset R^n$ را یک فضای برداری نامند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ ، و هر اسکالر c ، $x + y \in X$ و $cx \in X$.

(ب) اگر $x_1, \dots, x_k \in R^n$ و $c_1, \dots, c_k$ اسکالرهایی باشند، بردار

$$c_1x_1 + \dots + c_kx_k$$

یک ترکیب خطی از $x_1, \dots, x_k$ است. چنانچه $S \subset R^n$ و E مجموعه‌ای تمام ترکیبات خطی عناصر S باشد، می‌گوییم S ، E را می‌پیماید یا که E پیمای S است. ملاحظه کنید که هر پیمای یک فضای برداری می‌باشد.

(پ) مجموعه‌ای مرکب از بردارهای $x_1, \dots, x_k$ (برای این مجموعه نماد $\{x_1, \dots, x_k\}$ را به کار می‌بریم) را مستقل نامیم هرگاه رابطه $c_1x_1 + \dots + c_kx_k = 0$ ایجاب کند که $c_1 = \dots = c_k = 0$. در غیر این صورت، $\{x_1, \dots, x_k\}$ را نامستقل خواهیم نامید.

توجه دارید که هیچ مجموعه‌ای مستقلی شامل بردار پوچ نیست.

(ت) هرگاه فضای برداری X حاوی مجموعه مستقلی از r بردار باشد ولی شامل هیچ مجموعه

مستقلی از $r+1$ بردار نباشد، می‌گوییم X دارای بعد r است و می‌نویسیم $\dim X = r$.

مجموعه‌ای که فقط از 0 تشکیل شده یک فضای برداری است؛ بعدش 0 می‌باشد.

(ث) هر زیر مجموعه مستقل فضای برداری X که X را بپیماید یک پایه نام خواهد داشت.

ملاحظه کنید که اگر $B = \{x_1, \dots, x_r\}$ پایه‌ای از X باشد، هر $x \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل $x = \sum c_j x_j$ دارد. این نمایش موجود است چونکه B ، X را می‌پیماید، و منحصر بفرد است زیرا B مستقل می‌باشد. اعداد $c_1, \dots, c_r$ را مختصات x نسبت به پایه B می‌نامند.

آشنا ترین نمونه یک پایه مجموعه $\{e_1, \dots, e_n\}$ است که در آن e_j برداری است در R^n که مختص j م آن 1 و سایر مختصاتش همه 0 می‌باشند. هرگاه $x \in R^n$ و

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{، آنگاه } x = \sum x_j e_j \text{ . ما}$$

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

را پایه متعارف R^n خواهیم نامید.

۲.۹ قضیه. فرض کنیم r عدد صحیح مثبتی باشد. هرگاه فضای برداری X به وسیله

مجموعه‌ای از r بردار پیموده شود، آنگاه $\dim X \leq r$.

برهان. اگر این مطلب درست نباشد، فضایی برداری مانند X هست که مجموعه مستقلی

چون $Q = \{y_1, \dots, y_{r+1}\}$ را در بردارد و به وسیله مجموعه‌ای مانند S_0 مرکب از r بردار پیموده می‌شود.

فرض کنیم $0 \leq i < r$ و مجموعه S_i طوری ساخته شده باشد که X را پیموده و از تمام y_j ها، که $1 \leq j \leq i$ ، به علاوه $r-i$ عضو از S_0 ، مثلاً $x_1, \dots, x_{r-i}$ ، تشکیل شده است. (به عبارت دیگر، S_i از S_0 با تعویض i تا عنصر با اعضای Q ، بدون تغییر در پیمای، به دست می‌آید.) چون S_i ، X را می‌پیماید، y_{i+1} در پیمای S_i قرار دارد. پس اسکالرهایی مثل $a_1, \dots, a_{i+1}, b_1, \dots, b_{r-i}$ ، که $a_{i+1} = 1$ ، هستند بطوری که

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j y_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k x_k = 0.$$

اگر همه b_k ها 0 می‌بودند، استقلال Q ایجاب می‌کرد که تمام a_j ها صفر شوند، که یک تناقض است. پس نتیجه می‌شود که x_k ای در S_i یک ترکیب خطی از اعضای دیگر $T_i = S_i \cup \{y_{i+1}\}$ می‌باشد. این x_k را از T_i برمی‌داریم و مجموعه باقی را S_{i+1} می‌نامیم. در این صورت، S_{i+1} همان مجموعه‌ای که T_i پیموده، یعنی X ، را می‌پیماید. در نتیجه، S_{i+1} از خواصی که برای S_i منظور شده، با $i+1$ به جای i ، برخوردار است.

بدین ترتیب، از S_0 شروع کرده مجموعه‌های $S_1, \dots, S_r$ را می‌سازیم. آخرین مجموعه از $y_1, \dots, y_r$ تشکیل شده است، و طرز ساختن نشان می‌دهد که این مجموعه X را می‌پیماید. اما Q مستقل است. پس y_{r+1} در پیمای S_r قرار ندارد. این تناقض قضیه را به اثبات خواهد رسانید.

نتیجه. $\dim R^n = n$.

برهان. چون $\{e_1, \dots, e_n\}$ ، R^n را می‌پیماید، قضیه نشان می‌دهد که $\dim R^n \leq n$ و چون $\{e_1, \dots, e_n\}$ مستقل است، $\dim R^n \geq n$.

۳.۹ قضیه. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و $\dim X = n$.

(آ) مجموعه E مرکب از n بردار در X ، را می‌پیماید اگر و فقط اگر E مستقل باشد.

(ب) X دارای پایه است، و هر پایه از n بردار متشکل می‌باشد.

(پ) هرگاه $1 \leq r \leq n$ و $\{y_1, \dots, y_r\}$ مجموعه مستقلی در X باشد، آنگاه X پایهای حاوی $\{y_1, \dots, y_r\}$ دارد.

برهان. فرض کنیم $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. چون $\dim X = n$ ، مجموعه $\{x_1, \dots, x_n, y\}$ به ازای هر $y \in X$ نامستقل است. اگر E مستقل باشد، نتیجه می‌شود که y در پیمای E قرار دارد. در نتیجه، E ، X را خواهد پیمود. بعکس، اگر E نامستقل باشد، یکی از اعضایش را می‌توان بدون تغییر پیمای E حذف کرد. لذا، E ، برطبق قضیه ۲.۹، نمی‌تواند X را بپیماید. این (آ) را ثابت خواهد کرد.

چون $\dim X = n$ ، X حاوی مجموعه مستقلی مرکب از n بردار است، و (ب) نشان

می‌دهد که هرچنین مجموعه‌ای یک پایه X می‌باشد. حال (ب) از ۱۰۹ (ت) و ۲۰۹ نتیجه خواهد شد.

برای اثبات (پ) فرض کنیم $\{x_1, \dots, x_n\}$ پایه‌ای از X باشد. مجموعه

$$S = \{y_1, \dots, y_r, x_1, \dots, x_n\}$$

X را می‌پیماید، و نامستقل است زیرا بیش از n بردار دارد. استدلالی که در برهان قضیه ۲۰۹ به کار رفت نشان می‌دهد که یکی از x_i ها ترکیب خطی اعضای دیگر S است. چنانچه این x_i را از S برداریم، مجموعه باقی باز هم X را می‌پیماید. این عمل را می‌توان r بار تکرار کرد و، برطبق (آ)، به پایه‌ای از X رسید که شامل $\{y_1, \dots, y_r\}$ باشد.

۴۰۹ چند تعریف. نگاشت A از فضای برداری X بتوی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی نامند هرگاه به ازای هر $x, x_1, x_2 \in X$ و هر اسکالر c ،

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \quad A(cx) = cAx.$$

توجه کنید که اغلب، در صورت خطی بودن A ، به جای $A(x)$ می‌نویسند Ax .

ملاحظه می‌کنید که، اگر A خطی باشد، $A0 = 0$. همچنین، توجه دارید که یک تبدیل خطی A از X بتوی Y کاملاً "با عملش بر یک پایه مشخص می‌شود: چنانچه $\{x_1, \dots, x_n\}$ یک پایه از X باشد، هر $x \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل

$$x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

دارد، و خطی بودن A محاسبه Ax را از بردارهای $Ax_1, \dots, Ax_n$ و مختصات $c_1, \dots, c_n$ به وسیله فرمول

$$Ax = \sum_{i=1}^n c_i Ax_i$$

میسر می‌سازد.

تبدیلات خطی از X بتوی X را اغلب عملگرهای خطی بر X می‌نامند.

چنانچه A یک عملگر خطی بر X باشد که (یک) یک به یک بوده و (دو) X را بروی X بنگارد، می‌گوییم A معکوسپذیر است. در این حالت می‌توان عملگر A^{-1} را بر X با این قرار که به ازای هر $x \in X$ ، $A^{-1}(Ax) = x$ ، تعریف کرد. خیلی ساده تحقیق می‌شود که در این وضع به ازای هر $x \in X$ ، $A(A^{-1}x) = x$ ، و A^{-1} خطی می‌باشد.

مطلب مهم در باب عملگرهای خطی بر فضاهای برداری با بعد متناهی این است که شرطهای (یک) و (دو) فوق مستلزم هم می باشند:

۵.۹ قضیه. عملگر خطی A بر فضای برداری با بعد متناهی X یک به یک است اگر و فقط اگر برد A تمام X باشد.

برهان. فرض کنیم $\{x_1, \dots, x_n\}$ پایهای از X باشد. خطی بودن A نشان می دهد که بردش $\mathcal{R}(A)$ پیمای مجموعه $Q = \{Ax_1, \dots, Ax_n\}$ است. پس، از قضیه ۳.۹ (آ) این استنباط می شود که $\mathcal{R}(A) = X$ اگر و فقط اگر Q مستقل باشد. باید ثابت کنیم که این روی خواهد داد اگر و فقط اگر A یک به یک باشد.

فرض کنیم A یک به یک باشد و $\sum c_i Ax_i = 0$ در این صورت، $A(\sum c_i x_i) = 0$ پس $\sum c_i x_i = 0$ ، لذا، $c_1 = \dots = c_n = 0$ ، و نتیجه می گیریم که Q مستقل می باشد.

بعکس، فرض کنید Q مستقل باشد و $A(\sum c_i x_i) = 0$ در این صورت، $\sum c_i Ax_i = 0$ پس $c_1 = \dots = c_n = 0$ ، و نتیجه می شود که $Ax = 0$ فقط اگر $x = 0$ حال اگر $Ax = Ay$ ، $A(x - y) = Ax - Ay = 0$ در نتیجه، $x - y = 0$ ، و این گویای یک به یک بودن A خواهد بود.

۶.۹ چند تعریف

(آ) فرض کنیم $L(X, Y)$ مجموعه تمام تبدیلات خطی فضای برداری X بتوی فضای برداری Y باشد. به جای $L(X, X)$ فقط خواهیم نوشت $L(X)$. چنانچه $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ و c_1, c_2 اسکالرهایی باشند، $c_1 A_1 + c_2 A_2$ را با

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)x = c_1 A_1 x + c_2 A_2 x \quad (x \in X)$$

تعریف می کنیم. در این صورت، واضح است که $c_1 A_1 + c_2 A_2 \in L(X, Y)$.

(ب) اگر X, Y, Z فضاهایی برداری باشند و $A \in L(X, Y)$ و $B \in L(Y, Z)$ ، حاصل ضرب آنها BA مساوی ترکیب A و B تعریف می شود:

$$(BA)x = B(Ax) \quad (x \in X).$$

در این صورت، $BA \in L(X, Z)$.

توجه دارید که BA لزوماً همان AB نیست حتی اگر $X = Y = Z$.

(پ) به ازای $A \in L(R^n, R^m)$ ، نرم A ، یعنی $\|A\|$ ، اِراسوپرمم جميع اعداد $|Ax|$ می گیریم که در آنها x روی تمام بردارها در R^n که $|x| \leq 1$ تغییر می کند. ملاحظه کنید که نامساوی

$$|Ax| \leq \|A\| |x|$$

به ازای هر $x \in R^n$ برقرار است. همچنین، هرگاه λ به این صورت باشد که به ازای جميع x های متعلق به R^n ، $|Ax| \leq \lambda |x|$ ، آنگاه $\|A\| \leq \lambda$.

۷.۹ قضیه

(آ) هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ ، آنگاه $\|A\| < \infty$ و A یک نگاشت به طور یکنواخت پیوسته از R^n بتوی R^m است.

(ب) هرگاه $A, B \in L(R^n, R^m)$ و c یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|cA\| = |c| \|A\|.$$

$L(R^n, R^m)$ ، اگر فاصله بین A و B برابر $\|A - B\|$ تعریف شود، یک فضای متری خواهد بود.

(پ) هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ و $B \in L(R^m, R^k)$ ، آنگاه

$$\|BA\| \leq \|B\| \|A\|.$$

برهان

(آ) فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متعارف در R^n باشد، $x = \sum c_i e_i$ ، و $|x| \leq 1$. پس، به ازای $i = 1, \dots, n$ ، $|c_i| \leq 1$ در این صورت،

$$|Ax| = \left| \sum c_i A e_i \right| \leq \sum |c_i| |A e_i| \leq \sum |A e_i|.$$

در نتیجه،

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^n |A e_i| < \infty.$$

چونکه اگر $x, y \in R^n$ ، $|Ax - Ay| \leq \|A\| |x - y|$ ، می بینیم که A به طور یکنواخت پیوسته می باشد.

(ب) نامساوی مذکور در (ب) از

$$|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|) |x|$$

نتیجه می‌شود. قسمت دوم (ب) به همین نحو ثابت خواهد شد. چنانچه

$$A, B, C \in L(R^n, R^m)$$

نامساوی مثلثی

$$\|A - C\| = \|(A - B) + (B - C)\| \leq \|A - B\| + \|B - C\|$$

را خواهیم داشت، و به آسانی تحقیق می‌شود که $\|A - B\|$ از سایر خواص یک متر (تعریف ۱۵۰۲) نیز برخوردار است.

(پ) بالاخره، (پ) از

$$|(BA)x| = |B(Ax)| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \|A\| |x|$$

نتیجه خواهد شد.

حال چون در فضاها $L(R^n, R^m)$ متر در دست ماست، مفاهیم مجموعه‌ء باز، پیوستگی، و غیره در این فضاها معنی دارند. قضیه‌ء بعدی از این مفهوما استفاده خواهد کرد.

۸.۹ قضیه. فرض کنیم Ω مجموعه‌ء تمام عملگرهای خطی معکوسپذیر بر R^n باشد.

(آ) هرگاه $A \in \Omega$ ، $B \in L(R^n)$ ،

$$\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1،$$

آنگاه $B \in \Omega$.

(ب) Ω یک زیرمجموعه‌ء باز $L(R^n)$ است و نگاشت $A \rightarrow A^{-1}$ بر Ω پیوسته می‌باشد. (این نگاشت نیز بوضوح یک نگاشت ۱-۱ از Ω بروی Ω است که معکوس خود می‌باشد.)

برهان

(آ) قرار می‌دهیم $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$ و $\|B - A\| = \beta$. در این صورت، $\alpha < \beta$. بازای

هر $x \in R^n$

$$\begin{aligned} \alpha |x| &= \alpha |A^{-1}Ax| \leq \alpha \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \\ &= |Ax| \leq |(A - B)x| + |Bx| \leq \beta |x| + |Bx|. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(1) \quad (\alpha - \beta) |x| \leq |Bx| \quad (x \in R^n).$$

چون $\alpha - \beta > 0$ ، نامساوی (۱) نشان می‌دهد که اگر $x \neq 0$ ، $Bx \neq 0$. پس B یک به یک خواهد بود. بنا بر قضیه‌ء ۵۰۹، $B \in \Omega$. این رابطه به ازای هر B که $\|B - A\| < \alpha$ برقرار

است. لذا، $(\tilde{A})$ و این مطلب که Ω باز است را خواهیم داشت.

(ب) حال x در (۱) را با $B^{-1}y$ عوض می‌کنیم. نامساوی حاصل، یعنی

$$(2) \quad (\alpha - \beta) |B^{-1}y| \leq |BB^{-1}y| = |y| \quad (y \in R^n).$$

نشان می‌دهد که $\|B^{-1}\| \leq (\alpha - \beta)^{-1}$. بنابراین، اتحاد

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1},$$

در تلفیق با قضیه ۷۰۹ (پ)، ایجاب خواهد کرد که

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|A - B\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}.$$

این پیوستگی حکم شده در (ب) را به ثبوت می‌رساند، زیرا وقتی $B \rightarrow A$ ، $\beta \rightarrow 0$.

۹۰۹ ماتریسها. فرض کنیم $\{x_1, \dots, x_n\}$ و $\{y_1, \dots, y_m\}$ بترتیب پایه‌های فضاها

بردار X و Y باشند. در این صورت، هر $A \in L(X, Y)$ مجموعه‌ای از اعداد چون a_{ij} را معین می‌کند به این نحو که

$$(3) \quad Ax_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

مقتضی است که این اعداد در یک آرایهٔ مستطیلی شکل مرکب از m سطر و n ستون، به نام یک ماتریس m در n ، نموده شوند:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

توجه دارید که مختصات a_{ij} بردار Ax_j (نسبت به پایه $\{y_1, \dots, y_m\}$ در ستون j م

$[A]$ ظاهر می‌شوند. بدین خاطر، گاهی اوقات Ax_j ها را بردارهای ستونی $[A]$ می‌خوانند. با این اصطلاح، برد A به وسیلهٔ بردارهای ستونی $[A]$ پیموده خواهد شد.

هرگاه $x = \sum c_j x_j$ ، خطی بودن A ، همراه با (۳)، نشان می‌دهد که

$$(4) \quad Ax = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right) y_i.$$

لذا، مختصات Ax عبارت خواهند بود از $\sum_j a_{ij} c_j$ توجه دارید که در (۳)

جمع‌بندی روی زیرنویس اول a_{ij} گرفته می‌شود، ولی وقتی مختصات حساب می‌شوند، روی زیرنویس دوم جمع خواهیم کرد.

حال فرض کنیم ماتریس m در n ی با درایه‌های حقیقی a_{ij} داده شده است. در این صورت، اگر A با (۴) تعریف شده باشد، واضح است که $A \in L(X, Y)$ و $[A]$ ماتریس معلوم می‌باشد. پس یک تناظر 1-1 طبیعی بین $L(X, Y)$ و مجموعه تمام ماتریسهای m در n حقیقی وجود دارد. با اینحال، تأکید می‌کنیم که $[A]$ نه فقط به A بلکه به انتخاب پایه در X و Y نیز بستگی دارد. هر A ممکن است در صورت تغییر پایه‌ها ماتریسهای متفاوت بسیار به دست دهد، و بالعکس. ما این بررسی را بیش از این ادامه نمی‌دهیم، زیرا معمولاً "با پایه‌های ثابتی کار خواهیم کرد." (در بخش ۳۷.۹ چند نکته در این باب گفته شده است.)

هرگاه Z سومین فضای برداری با پایه $\{z_1, \dots, z_p\}$ بوده، A با (۳) داده شده باشد، و

$$By_i = \sum_k b_{ki} z_k, \quad (BA)x_j = \sum_k c_{kj} z_k,$$

آنگاه $A \in L(X, Y), B \in L(Y, Z), BA \in L(X, Z)$ و چون

$$\begin{aligned} B(Ax_j) &= B \sum_i a_{ij} y_i = \sum_i a_{ij} By_i \\ &= \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ki} z_k = \sum_k \left(\sum_i b_{ki} a_{ij} \right) z_k, \end{aligned}$$

استقلال $\{z_1, \dots, z_p\}$ ایجاب خواهد کرد که

$$(5) \quad c_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij} \quad (1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq n).$$

این رابطه طرز محاسبه ماتریس p در n $[BA]$ را از $[B]$ و $[A]$ نشان می‌دهد. هرگاه حاصل ضرب $[B][A]$ را برابر $[BA]$ تعریف کنیم، تساوی (۵) قاعده معمول ضرب ماتریسها را توصیف خواهد نمود.

بالاخره، فرض می‌کنیم $\{x_1, \dots, x_n\}$ و $\{y_1, \dots, y_m\}$ پایه‌های متعارف R^n و R^m باشند و A با (۴) داده شده باشد. نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$|Ax|^2 = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} c_j \right)^2 \leq \sum_i \left(\sum_j a_{ij}^2 \cdot \sum_j c_j^2 \right) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 |x|^2.$$

لذا،

$$(6) \quad \|A\| \leq \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2}.$$

چنانچه نامساوی (۶) را در مورد $B - A$ که $A, B \in L(R^n, R^m)$ ، به جای A به کار بریم، خواهیم دید که اگر عناصر ماتریسی a_{ij} توابع پیوسته‌ای از یک پارامتر باشند، همین مطلب در مورد A نیز صادق است. به عبارت دقیقتر:

هرگاه S یک فضای متری بوده، $a_{11}, \dots, a_{mn}$ توابعی حقیقی و پیوسته بر S باشند، و به ازای هر $p \in S$ ، A_p تبدیلی خطی از R^n بتوی R^m باشد که ماتریس درایه‌های $a_{ij}(p)$ را دارد، آنگاه نگاشت $p \rightarrow A_p$ یک نگاشت پیوسته از S بتوی $L(R^n, R^m)$ خواهد بود.

مشتقگیری

۱۰۰۹ مقدمات. برای آنکه به تعریف مشتق یک تابع با قلمرو R^n (و یا زیرمجموعه‌ای از R^n) دست یابیم، به حالت آشنای $n=1$ نظری دیگر افکنده ببینیم مشتق را چگونه تعبیر کنیم که به طور طبیعی به حالت $n > 1$ قابل تعمیم باشد.

هرگاه f یک تابع حقیقی با قلمرو R^1 بوده و $x \in (a, b)$ و $f'(x)$ معمولاً "مساوی عدد حقیقی"

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعریف می‌شود، البته به شرط آنکه این حد وجود داشته باشد. بنابراین،

$$(8) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$$

که در آن "باقیمانده" $r(h)$ کوچک است به این معنی که

$$(9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

توجه کنید که (۸) تفاضل $f(x+h) - f(x)$ را به صورت مجموع یک تابع خطی که h را به $f'(x)h$ می‌برد و یک باقیمانده کوچک بیان می‌دارد.

لذا، می‌توان مشتق f در x را، نه به عنوان یک عدد حقیقی، بلکه به صورت یک عملگر خطی بر R^1 که h را به $f'(x)h$ می‌برد ملحوظ داشت.

[ملاحظه کنید که هر عدد حقیقی α یک عملگر خطی بر R^1 را به ما می‌دهد. این عملگر چیزی جز ضرب در α نیست. بعکس، هر تابع خطی که R^1 را به R^1 ببرد ضرب در عددی

حقیقی خواهد بود. همین تناظر 1-1 طبیعی بین R^1 و $L(R^1)$ است که موجب ذکر مطالب فوق شده است.]

حال تابع f را در نظر می‌گیریم که $(a, b) \subset R^1$ رابتوی R^m می‌نگارد. در این حالت، $f'(x)$ مساوی بردار $y \in R^m$ (در صورت وجود) تعریف شده که برای آن

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - y \right\} = 0.$$

ما مجدداً "این رابه شکل

$$(11) \quad f(x+h) - f(x) = hy + r(h)$$

می‌نویسیم که در آن وقتی $h \rightarrow 0$ ، $r(h)/h \rightarrow 0$. جمله اصلی سمت راست (11) باز یک تابع خطی از h است. هر $y \in R^m$ ، با ربط هر $h \in R^1$ به بردار $hy \in R^m$ ، تبدیلی خطی از R^1 بتوی R^m را به دست می‌دهد. این انطباق R^m با $L(R^1, R^m)$ به ما این اجازه که $f'(x)$ را عضوی از $L(R^1, R^m)$ بدانیم خواهد داد.

لذا، اگر f نگاهت مشتق‌پذیری از $(a, b) \subset R^1$ بتوی R^m بوده و $x \in (a, b)$ ، $f'(x)$ تبدیلی خطی از R^1 بتوی R^m است که در

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

یا، معادلاً، در

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0$$

صدق می‌کند.

ما اینک برای حالت $n > 1$ حاضر و آماده هستیم.

۱۱.۹ تعریف. فرض کنیم E مجموعه‌ای باز در R^n بوده، f مجموعه‌ای E را بتوی R^m بنگارد، و $x \in E$. هرگاه تبدیلی خطی مانند A از R^n بتوی R^m باشد بطوری که

$$(14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0,$$

آنگاه می‌گوییم f در x مشتق‌پذیر است و می‌نویسیم

$$(15) \quad f'(x) = A.$$

چنانچه f در هر $x \in E$ مشتقپذیر باشد، می‌گوییم f در E مشتقپذیر است.

البته، در (۱۴) فرض این است که $h \in R^n$. هرگاه $|h|$ به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه E باز است، $x+h \in E$. پس $f(x+h)$ تعریف شده است، $f(x+h) \in R^m$ ، و چون $A \in L(R^n, R^m)$ ، خواهیم داشت $Ah \in R^m$. بنابراین،

$$f(x+h) - f(x) - Ah \in R^m.$$

در صورت (۱۴) نرم همان نرم R^m است. در مخرج R^n - نرم h را خواهیم داشت.

مسئله یکتایی واضحی وجود دارد که باید پیش از هر کار سامان یابد.

۱۲.۹ قضیه. فرض کنیم E و f همانهایی باشند که در تعریف ۱۲.۹ آمده‌اند، $x \in E$ ، و (۱۴) به ازای $A = A_2$ برقرار باشد. در این صورت، $A_1 = A_2$.

برهان. اگر $B = A_1 - A_2$ ، نامساوی

$$|Bh| \leq |f(x+h) - f(x) - A_1h| + |f(x+h) - f(x) - A_2h|$$

نشان می‌دهد که وقتی $h \rightarrow 0$ ، $|Bh|/|h| \rightarrow 0$. به ازای h ثابت مخالف ۰ نتیجه خواهد شد که

$$(16) \quad \frac{|B(th)|}{|th|} \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad t \rightarrow 0.$$

خطی بودن B نشان می‌دهد که سمت چپ (۱۶) از t مستقل است. لذا، به ازای هر $h \in R^n$ ، $Bh = 0$. بنابراین، $B = 0$.

۱۳.۹ چند تبصره

(آ) رابطه (۱۴) را می‌شود به شکل

$$(17) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)$$

نوشت که در آن باقیمانده $r(h)$ در

$$(18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0$$

صدق می‌کند. می‌توان (۱۷) را، مثل بخش ۱۰.۹، این طور تعبیر کرد که بگوئیم سمت چپ آن به ازای x ثابت و h کوچک تقریباً " مساوی $f'(x)h$ ، یعنی مقدار یک تبدیل خطی در h است.

(ب) فرض کنیم f و E همانهای تعریف ۱۱.۹ باشند و f در E مشتقپذیر باشد. در این صورت، $f'(x)$ به ازای هر $x \in E$ یک تابع، یعنی تبدیلی خطی از R^n بتوی R^m ، است. لکن f' نیز یک تابع است؛ f' مجموعه E را بتوی $L(R^n, R^m)$ می‌نگارد.

(پ) نگاهی به (۱۷) معلوم می‌سازد که f در هر نقطه که مشتقپذیر باشد پیوسته است.
(ت) مشتق تعریف شده با (۱۴) یا (۱۷) را اغلب دیفرانسیل f در x ، یا مشتق کلی f در x نامند تا از مشتقات جزئی که بعداً " می‌آیند ممتاز باشد.

۱۴.۹ مثال. ما مشتق توابعی که R^n را به R^m می‌برند تبدیلاتی خطی از R^n بتوی R^m تعریف کرده‌ایم. می‌پرسیم مشتق یک چنین تبدیل خطی چیست؟ جواب بسیار ساده خواهد بود.
هرگاه $A \in L(R^n, R^m)$ و $x \in R^n$ ، آنگاه

$$(19) \quad A'(x) = A.$$

توجه‌دارید که x طرف چپ (۱۹) ظاهر شده ولی سمت راست آن نیامده است. هر دو طرف (۱۹) اعضای از $L(R^n, R^m)$ هستند حال آنکه $Ax \in R^m$.
برهان (۱۹) واضح است زیرا، بر طبق خطی بودن A ،

$$(20) \quad A(x+h) - Ax = Ah.$$

لذا، با فرض $f(x) = Ax$ ، صورت‌کسر (۱۴) به ازای هر $h \in R^n$ صفر است. در (۱۷)،
 $r(h) = 0$

حال قاعده زنجیره‌ای (قضیه ۵.۵) را به وضع فعلی تعمیم می‌دهیم.

۱۵.۹ قضیه. فرض کنیم E مجموعه‌ای بازی در R^n باشد، f مجموعه E را بتوی R^m بنگارد، f در E مشتقپذیر باشد، g مجموعه‌ای بازی شامل $f(E)$ را بتوی R^k بنگارد، و g در $f(x_0)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، نگاشت F از E بتوی R^k که با

$$F(x) = g(f(x))$$

تعریف شده در x_0 مشتقپذیر است و

$$(21) \quad F'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

در طرف راست (۲۱) حاصل ضرب دو تبدیل خطی را، بصورتی که در بخش ۶.۹ تعریف شده، خواهیم داشت.

برهان. قرار می‌دهیم $y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$ و برای هر $h \in R^n$ و $k \in R^m$ که $f(x_0 + h)$ و $g(y_0 + k)$ معین باشند تعریف می‌کنیم

$$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah,$$

$$v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Bk.$$

در این صورت،

$$(22) \quad |u(h)| = \varepsilon(h)|h|, \quad |v(k)| = \eta(k)|k|$$

که در آنها وقتی $h \rightarrow 0$ ، $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ و وقتی $k \rightarrow 0$ ، $\eta(k) \rightarrow 0$.
چنانچه h داده شده باشد، قرار می‌دهیم $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$

در این صورت،

$$(23) \quad |k| = |Ah + u(h)| \leq [\|A\| + \varepsilon(h)] |h|$$

و

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh &= g(y_0 + k) - g(y_0) - BAh \\ &= B(k - Ah) + v(k) \\ &= Bu(h) + v(k). \end{aligned}$$

لذا، (۲۲) و (۲۳) ایجاب می‌کنند که به ازای $h \neq 0$

$$\frac{|F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh|}{|h|} \leq \|B\| \varepsilon(h) + [\|A\| + \varepsilon(h)] \eta(k)$$

فرض کنیم $h \rightarrow 0$. در این صورت، $\varepsilon(h) \rightarrow 0$. همچنین، بنابر (۲۳)،
 $k \rightarrow 0$. در نتیجه، $\eta(k) \rightarrow 0$. از اینها $F'(x_0) = BA$ نتیجه می‌شود، که همان حکم (۲۱) خواهد بود.

۱۶.۹ مشتقات جزئی. مجدداً به تابع f که مجموعه $E \subset R^n$ را بتوی R^m می‌نگارد توجه می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ و $\{u_1, \dots, u_m\}$ پایه‌های متعارف R^n و R^m باشند. مؤلفه‌های f توابع حقیقی $f_1, \dots, f_m$ اند که با

$$(24) \quad f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i \quad (x \in E)$$

یا، معادلاً"، با $f_i(x) = f(x) \cdot u_i$ ، $1 \leq i \leq m$ ، تعریف می‌شوند.

به ازای $x \in E$ ، $1 \leq i \leq m$ ، و $1 \leq j \leq n$ ، تعریف می‌کنیم

$$(25) \quad (D_j f_i)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t}$$

مشروط براینکه حد وجود داشته باشد. با نوشتن $f_i(x_1, \dots, x_n)$ به جای $f_i(x)$ خواهیم دید که $D_j f_i$ مشتق f_i نسبت به x_j ، با ثابت ماندن سایر متغیرها، می‌باشد.

لذا، نماد

$$(26) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

اغلب به جای $D_j f_i$ به کار می‌رود و $D_j f_i$ مشتق جزئی نام دارد.

در بسیاری حالات که وجود مشتق در پرداختن به توابع یک متغیره کافی است، در مورد توابع چند متغیره پیوستگی و یا لااقل کراننداری مشتقات جزئی ضرورت دارد. به عنوان مثال، توابع f و g وصف شده در تمرین ۷، فصل ۴، در عین اینکه مشتقات جزئی شان در هر نقطه از R^2 وجود دارند پیوسته نیستند. حتی در مورد توابع پیوسته، وجود تمام مشتقات جزئی مشتق پذیری به معنی تعریف ۱۱.۹ را ایجاب نخواهد کرد؛ ر.ک. تمرینهای ۶ و ۱۴ و قضیه ۲۱.۹.

با اینحال، اگر بدانیم f در x مشتق پذیر است، مشتقات جزئی آن در x وجود دارند و تبدیل خطی $f'(x)$ را کاملاً مشخص خواهند کرد:

۱۷.۹ قضیه. فرض کنیم f مجموعه E باز R^n را بتوی R^m بنگرد و f در نقطه $x \in E$

مشتق پذیر باشد. در این صورت، مشتقات جزئی $(D_j f_i)(x)$ وجود دارند و

$$(27) \quad f'(x)e_j = \sum_{i=1}^m (D_j f_i)(x)u_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

در اینجا، مثل بخش ۱۶.۹، $\{e_1, \dots, e_n\}$ و $\{u_1, \dots, u_m\}$ پایه‌های متعارف R^n و R^m هستند.

برهان. z را ثابت می‌گیریم. چون f در x مشتق پذیر است،

$$f(x + te_j) - f(x) = f'(x)(te_j) + r(te_j)$$

که در آن وقتی $t \rightarrow 0$ ، $|r(te_j)|/t \rightarrow 0$. لذا ، خطی بودن $f'(x)$ نشان می دهد که

$$(28) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = f'(x)e_j.$$

حال اگر f را ، مثل (۲۴) ، بر حسب مختصاتش نشان دهیم ، (۲۸) به صورت

$$(29) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} u_i = f'(x)e_j$$

در می آید . از این نتیجه می شود که ، وقتی $t \rightarrow 0$ ، هر کسر در این مجموع حد دارد (ر.ک. قضیه ۱۰.۴) . پس هر $(D_j f_i)(x)$ موجود است ، و لذا ، (۲۷) از (۲۹) حاصل خواهد شد .

در اینجا چند نتیجه از قضیه ۱۷.۹ را ذکر می کنیم :

فرض کنیم $[f'(x)]$ ماتریسی باشد که $f'(x)$ را نسبت به پایه های متعارف ما ، مثل بخش ۹.۹ ، نمایش می دهد . در این صورت ، $f'(x)e_j$ بردار ستونی z م $[f'(x)]$ است ، و لذا ، (۲۷) نشان می دهد که عدد $(D_j f_i)(x)$ محل تلاقی سطری m و ستونی m $[f'(x)]$ را اشغال می کند . بنابراین ،

$$[f'(x)] = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(x) & \cdots & (D_n f_1)(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_1 f_m)(x) & \cdots & (D_n f_m)(x) \end{bmatrix}.$$

هرگاه $h = \sum h_j e_j$ بردار دلخواهی در R^n باشد ، (۲۷) ایجاب خواهد کرد که

$$(30) \quad f'(x)h = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (D_j f_i)(x) h_j \right\} u_i.$$

۱۸.۹ مثال . فرض کنیم γ یک نگاشت مشتق پذیر از قطعه $(a, b) \subset R^1$ بتوی مجموعه E باشد . به عبارت دیگر ، γ یک منحنی مشتق پذیر در E باشد . f را یک تابع حقیقی مشتق پذیر با قلمرو E می انگاریم . پس f یک نگاشت مشتق پذیر از E بتوی R^1 است . تعریف می کنیم

$$(31) \quad g(t) = f(\gamma(t)) \quad (a < t < b).$$

در این صورت، قاعده زنجیره‌ای حکم می‌کند که

$$(32) \quad g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \quad (a < t < b).$$

چون $\gamma'(t) \in L(R^1, R^n)$ و $f'(\gamma(t)) \in L(R^n, R^1)$ ، رابطه (۳۲)، $g'(t)$ را همچون یک عملگر خطی بر R^1 تعریف می‌کند. این با این مطلب که g ، (a, b) را بتوی R^1 می‌نگارد مطابقت دارد. با اینحال، $g'(t)$ را می‌توان به عنوان یک عدد حقیقی نیز ملحوظ داشت. (این مطلب در بخش ۱۰۰۹ مطرح شده بود.) همانطور که اینک خواهیم دید، این عدد را می‌شود بر حسب مشتقات جزئی f و مشتقات مؤلفه‌های γ محاسبه کرد. نسبت به پایه متعارف $\{e_1, \dots, e_n\}$ از R^n یک ماتریس n در ۱ (یک "ماتریس ستونی") $[\gamma'(t)]$ است که در سطر i م خود $\gamma'_i(t)$ را دارد، که $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ مؤلفه‌های γ می‌باشند. به ازای هر $x \in E$ ، $[f'(x)]$ ماتریس ۱ در n (یک "ماتریس سطری") است که $(D_x f)(x)$ را در ستون j مش دارد. پس $[g'(t)]$ ماتریس ۱ در ۱ است که تنها درایه اش عدد حقیقی

$$(33) \quad g'(t) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(\gamma(t)) \gamma'_i(t)$$

می‌باشد.

این حالت خاصی است از قاعده زنجیره‌ای که شخص مکرر با آن مواجه است. آن را می‌توان به صورت زیر سبز بیان کرد:

به هر $x \in E$ یک بردار، که "گرادیان" f در x نام دارد، مربوط می‌شود که توسط

$$(34) \quad (\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(x) e_i$$

تعریف می‌گردد.

چون

$$(35) \quad \gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) e_i,$$

رابطه (۳۳) را می‌توان به شکل

$$(36) \quad g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

یعنی حاصل ضرب اسکالر بردارهای $(\nabla f)(\gamma(t))$ و $\gamma'(t)$ ، نوشت.

حال $x \in E$ را ثابت نگه می‌داریم، فرض می‌کنیم $u \in R^n$ یک بردار یک‌به‌یک باشد (یعنی،

$\|u\| = 1$)، و γ ی خاص

$$(37) \quad \gamma(t) = x + tu \quad (-\infty < t < \infty)$$

را اختیار می‌کنیم. در این صورت، به ازای هر t ، $\gamma'(t) = u$ ، بنابراین، (۳۶) نشان می‌دهد که

$$(38) \quad g'(0) = (\nabla f)(x) \cdot u.$$

از سوی دیگر، (۳۷) نشان می‌دهد که

$$g(t) - g(0) = f(x + tu) - f(x).$$

لذا، (۳۸) نتیجه خواهد داد که

$$(39) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} = (\nabla f)(x) \cdot u.$$

حد مذکور در (۳۹) را معمولاً "مشتق جهتی f در x ، در جهت بردار یکه u ، می‌نامند، و می‌توان آن را با $(D_u f)(x)$ نشان داد.

چنانچه f و x ثابت و u متغیر باشد، (۳۹) نشان می‌دهد که $(D_u f)(x)$ ، وقتی u ضرب اسکالر مثبتی از $(\nabla f)(x)$ است، به ماکزیم خود می‌رسد. [اینجا باید حالت $(\nabla f)(x) = 0$ را مستثنی کرد.]

هرگاه $u = \sum u_i e_i$ ، (۳۹) نشان می‌دهد که $(D_u f)(x)$ را می‌توان بر حسب مشتقات جزئی f در x با فرمول

$$(40) \quad (D_u f)(x) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(x) u_i$$

بیان نمود.

برخی از این مفهوما در قضیه زیر نقش خواهند داشت.

۱۹۰۹ قضیه. فرض کنیم f مجموعه باز و محدب $E \subset \mathbb{R}^n$ را بتوی $\mathbb{R}^m$ می‌نگارد، f در E مشتقپذیر است، و عددی حقیقی مانند M هست بقسمی که به ازای هر $x \in E$ ،

$$\|f'(x)\| \leq M.$$

در این صورت، به ازای هر $a \in E$ و $b \in E$ ،

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

برهان. $a \in E$ و $b \in E$ را ثابت می‌گیریم. به ازای هر $t \in \mathbb{R}^1$ تعریف می‌کنیم

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb$$

بطوری که $\gamma(t) \in E$. چون E محدب است، اگر $0 \leq t \leq 1$ ، $\gamma(t) \in E$. قرار می‌دهیم

$$g(t) = f(\gamma(t)).$$

در این صورت،

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(\gamma(t))(b-a).$$

در نتیجه، به ازای هر $t \in [0, 1]$ ،

$$|g'(t)| \leq \|f'(\gamma(t))\| \|b-a\| \leq M \|b-a\|.$$

بنابر قضیه ۱۹.۵،

$$|g(1) - g(0)| \leq M \|b-a\|.$$

اما $g(0) = f(a)$ و $g(1) = f(b)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتیجه. هرگاه، علاوه بر این، به ازای هر $x \in E$ ، $f'(x) = 0$ ، آنگاه f ثابت می‌باشد.

برهان. برای اثبات این مطلب توجه کنید که مفروضات قضیه اینک به ازای $M=0$ برقرار است.

۲۰.۹ تعریف. نگاشت مشتق‌پذیر f از مجموعه E باز R^n به بتوی R^m را به طور پیوسته مشتق‌پذیر

در E گویند هرگاه f' یک نگاشت پیوسته از E بتوی $L(R^n, R^m)$ باشد.

صریحتر بگوییم، شرط آن است که به هر $x \in E$ و هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای چنان نظیر شود

$$\|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon. \quad \text{اگر } y \in E \text{ و } |x - y| < \delta.$$

اگر چنین باشد، نیز می‌گوییم f یک $\mathcal{C}'$ نگاشت است یا که $f \in \mathcal{C}'(E)$.

۲۱.۹ قضیه. فرض کنیم f مجموعه E باز R^n را بتوی R^m بنگارد. در این صورت،

$f \in \mathcal{C}'(E)$ اگر و فقط اگر مشتقات جزئی $D_j f_i$ ، به ازای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ ، بر E

وجود داشته و پیوسته باشند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f \in \mathcal{C}'(E)$. بنابر (۲۷)، به ازای هر i ، هر j ، و هر

$$x \in E$$

$$(D_j f_i)(x) = (f'(x)e_j) \cdot u_i.$$

پس

$$(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x) = \{[f'(y) - f'(x)]e_j\} \cdot u_i.$$

و چون $|u_i| = |e_j| = 1$ ، نتیجه می شود که

$$|(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x)| \leq |[f'(y) - f'(x)]e_j| \\ \leq \|f'(y) - f'(x)\|.$$

بنابراین، $D_j f_i$ پیوسته می باشد.

برای عکس قضیه کافی است حالت $m=1$ را در نظر بگیریم. (چرا؟) $x \in E$ و $\varepsilon > 0$ را ثابت اختیار می کنیم. چون E باز است، گوی بازی مانند $E \supset S$ به مرکز x و شعاع r وجود دارد، و پیوستگی توابع f_j نشان می دهد که r را می توان طوری گرفت که

$$(41) \quad |(D_j f)(y) - (D_j f)(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (y \in S, 1 \leq j \leq n).$$

فرض کنیم $h = \sum h_j e_j$ و $|h| < r$. قرار می دهیم $v_0 = 0$ و، به ازای $1 \leq k \leq n$ ،
 $v_k = h_1 e_1 + \dots + h_k e_k$ در این صورت.

$$(42) \quad f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^n [f(x+v_j) - f(x+v_{j-1})].$$

چون به ازای $1 \leq k \leq n$ ، $|v_k| < r$ و، چون S محدب است، قطعات با نقاط انتهایی $x+v_{j-1}$ و $x+v_j$ در S جای دارند. از آنجا که $v_j = v_{j-1} + h_j e_j$ ، قضیه مقدار میانگین (۱۰.۵) نشان می دهد که j مین جمعه در (۴۲) به ازای $\theta_j \in (0, 1)$ ای مساوی

$$h_j (D_j f)(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j)$$

است، و با استفاده از (۴۱) معلوم می شود که تفاوت این با $h_j (D_j f)(x)$ از $|h_j| \varepsilon / n$ کمتر است. بنابر (۴۲) نتیجه می شود که به ازای هر h که $|h| < r$ ،

$$\left| f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^n h_j (D_j f)(x) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |h_j| \varepsilon \leq |h| \varepsilon.$$

این مبین آن است که f در x مشتق پذیر می باشد و $f'(x)$ تابعی است خطی که عدد $\sum h_j (D_j f)(x)$ را به بردار $h = \sum h_j e_j$ نسبت می دهد. ماتریس $[f'(x)]$ از سطر

$$(D_1 f)(x), \dots, (D_n f)(x)$$
 تشکیل شده است. و چون $D_1 f, \dots, D_n f$

توابع پیوسته ای بر E اند، نکات پایانی بخش ۹.۹ نشان خواهند داد که $f \in \mathcal{C}'(E)$.

اصل انقباض

حال بحث مشتقگیری را قطع می‌کنیم تا یک قضیه نقطه ثابت را که در فضاهای متری نام معتبر است وارد کار نماییم. از این قضیه در برهان قضیه تابع معکوس استفاده خواهد شد.

۲۲.۹ تعریف. فرض کنیم X یک فضای متری با متر d باشد. هرگاه φ, X را بتوی X بنگارد و عددی مثل $c < 1$ باشد بطوری که به ازای هر $x, y \in X$ ،

$$(43) \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c d(x, y),$$

آنگاه φ یک انقباض از X بتوی X نام دارد.

۲۳.۹ قضیه. هرگاه X یک فضای متری نام و φ یک انقباض از X بتوی X باشد، آنگاه یک و فقط یک $x \in X$ هست که $\varphi(x) = x$.
 به عبارت دیگر، φ دارای نقطه ثابت منحصر بفردی می‌باشد. یکتایی این نقطه بدیهی است، زیرا هرگاه $\varphi(x) = x$ و $\varphi(y) = y$ ، آنگاه (۴۳) نتیجه می‌دهد که $d(x, y) \leq c d(x, y)$ ، که فقط وقتی می‌تواند روی دهد که $d(x, y) = 0$.
 وجود یک نقطه ثابت φ بخش اصلی قضیه است. برهان عملاً "یک روش ساختن برای تعیین جای نقطه ثابت به دست می‌دهد."

برهان. $x_0 \in X$ را دلخواه اختیار و $\{x_n\}$ را به طور بازگشتی، با فرض

(44) $x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ ،
 تعریف می‌کنیم.

$c < 1$ را قسمی می‌گیریم که (۴۳) برقرار باشد. در این صورت، به ازای $n \geq 1$ داریم

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq c d(x_n, x_{n-1}).$$

پس استقرا نتیجه می‌دهد که

$$(45) \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

چنانچه $n < m$ ، نتیجه می‌شود که

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^m d(x_i, x_{i-1})$$

$$\leq (c^n + c^{n+1} + \dots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) \\ \leq [(1 - c)^{-1} d(x_1, x_0)] c^n.$$

لذا، $\{x_n\}$ یک دنباله کشی می باشد. چون X تام است، به ازای x در X ،
 $\lim x_n = x$

و چون φ یک انقباض است، φ بر X پیوسته (درواقع، به طور یکنواخت پیوسته) است.

پس

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

قضیه تابع معکوس

قضیه تابع معکوس، به طور نادقیق، می گوید که نگاشت به طور پیوسته مشتق پذیر f در همسایگی هر نقطه x که در آن تبدیل خطی $f'(x)$ معکوس پذیر باشد معکوس پذیر است:

۲۴.۹ قضیه. فرض کنیم f یک نگاشت از مجموعه E بتوی R^n باشد، به ازای

$a \in E$ ای $f'(a)$ معکوس پذیر باشد، و $b = f(a)$. در این صورت،

(۱) مجموعه های بازی چون U و V در R وجود دارند بطوری که $a \in U$ ، $b \in V$ ، f بر

U یک به یک است، و $f(U) = V$ ؛

(ب) هرگاه g معکوس f [که بنابر (۱) وجود دارد] باشد که در V با

$$g(f(x)) = x \quad (x \in U)$$

تعریف می شود، آنگاه $g \in \mathcal{G}'(V)$.

اگر معادله $y = f(x)$ را به صورت مؤلفه ای بنویسیم، به تعبیر زیر از قضیه دست خواهیم یافت: دستگاه n معادله

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

را، اگر x و y به همسایگیهای به قدر کافی کوچک a و b محدود شوند، می توان نسبت به

$x_1, \dots, x_n$ و بر حسب $y_1, \dots, y_n$ حل کرد؛ جوابها منحصر بفرد و به طور پیوسته

مشتق پذیر می باشند.

برهان

(آ) قرار می‌دهیم $f'(a) = A$ ، و λ را قسمی اختیار می‌کنیم که

$$(46) \quad 2\lambda \|A^{-1}\| = 1.$$

چون f' در a پیوسته است، گوی بازی چون $U \subset E$ به مرکز a وجود دارد بطوری که

$$(47) \quad \|f'(x) - A\| < \lambda \quad (x \in U).$$

به هر $y \in R$ تابع ϕ را که با

$$(48) \quad \phi(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \quad (x \in E)$$

تعریف شده مربوط می‌سازیم.

توجه کنید که $f(x) = y$ اگر و فقط اگر x یک نقطه ثابت ϕ باشد.چون (46) ، (47) ، $\phi'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}(A - f'(x))$ و

ایجاب می‌کنند که

$$(49) \quad \|\phi'(x)\| < \frac{1}{2} \quad (x \in U).$$

پس، بنابر قضیه ۱۹.۹،

$$(50) \quad |\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in U).$$

از اینجا نتیجه می‌شود که ϕ حداکثر یک نقطه ثابت در U دارد. در نتیجه، به ازای

$$f(x) = y, \quad x \in U$$

لذا، f در U یک به یک می‌باشد.حال قرار می‌دهیم $V = f(U)$ و $y_0 \in V$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، به ازای

$$x_0 \in U \quad y_0 = f(x_0).$$

که بستش $\bar{B}$ در U قرار گیرد. نشان می‌دهیم که هرگاه $|y - y_0| < \lambda r$ ، آنگاه $y \in V$. اینالبته ثابت خواهد کرد که V باز است.ی را که $|y - y_0| < \lambda r$ ثابت می‌گیریم. برای ϕ به صورت (۴۸) داریم

$$|\phi(x_0) - x_0| = |A^{-1}(y - y_0)| < \|A^{-1}\| \lambda r = \frac{r}{2}.$$

بنابراین، اگر $x \in \bar{B}$ ، از (۵۰) نتیجه می‌شود که

$$|\phi(x) - x_0| \leq |\phi(x) - \phi(x_0)| + |\phi(x_0) - x_0|$$

$$< \frac{1}{2}|x - x_0| + \frac{r}{2} \leq r;$$

پس $\phi(x) \in \bar{B}$. توجه کنید که (۵۰) برقرار است اگر که $x_1 \in \bar{B}$ و $x_2 \in \bar{B}$.لذا، ϕ یک انقباض از $\bar{B}$ بتوی $\bar{B}$ خواهد بود. $\bar{B}$ ، به دلیل اینکه زیر مجموعهبستهای از R^n است، تام می‌باشد. از اینرو، قضیه ۲۳.۹ ایجاب می‌کند که ϕ نقطه ثابتی

چون $x \in \bar{B}$ داشته باشد. برای این x ، $f(x) = y$ ، بنابراین $y \in f(\bar{B}) \subset f(U) = V$.

این قسمت (آ) قضیه را ثابت خواهد کرد.

(ب) $y \in V$ ، $y + k \in V$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، $x \in U$ و $x + h \in U$ هستند بطوری که $y = f(x)$ ، $y + k = f(x + h)$ برای ϕ به صورت (۴۸) داریم

$$\phi(x + h) - \phi(x) = h + A^{-1}[f(x) - f(x + h)] = h - A^{-1}k.$$

بنابر (۵۰)، $|h - A^{-1}k| \leq \frac{1}{2}|h|$ پس $|A^{-1}k| \geq \frac{1}{2}|h|$ و

$$(51) \quad |h| \leq 2\|A^{-1}\| |k| = \lambda^{-1}|k|.$$

بر طبق (۴۶)، (۴۷)، و قضیه ۸.۹، $f'(x)$ معکوسی مثل T دارد. چون

$$g(y + k) - g(y) - Tk = h - Tk = -T[f(x + h) - f(x) - f'(x)h],$$

نامساوی (۵۱) ایجاب می‌کند که

$$\frac{|g(y + k) - g(y) - Tk|}{|k|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}.$$

وقتی $k \rightarrow 0$ ، (۵۱) نشان خواهد داد که $h \rightarrow 0$. لذا، سمت راست نامساوی آخر به ۰ میل می‌کند. پس همین مطلب در مورد سمت چپ نیز صادق است. در نتیجه، ثابت کرده‌ایم که $g'(y) = T$. اما T معکوس $f'(x) = f'(g(y))$ گرفته شده بود. پس

$$(52) \quad g'(y) = \{f'(g(y))\}^{-1} \quad (y \in V).$$

بالاخره، توجه کنید که g (به دلیل مشتقپذیر بودن) یک نگاشت پیوسته از V بروی U است، f' یک نگاشت پیوسته از U بتوی مجموعه Ω متشکل از تمام عناصر معکوسپذیر $L(R^n)$ است، و، بنابر قضیه ۸.۹، تابع انعکاس یک نگاشت پیوسته از Ω بروی Ω می‌باشد. اگر اینها را با (۵۲) تلفیق کنیم، خواهیم دید که $g \in \mathcal{C}'(V)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

تصوره. از قدرت کامل فرض $f \in \mathcal{C}'(E)$ تنها در آخرین بند برهان پیش استفاده شده است. مطالب دیگر تا معادله (۵۲) از وجود $f'(x)$ به ازای $x \in E$ ، معکوسپذیری

(a) f' ، و پیوستگی f' فقط در نقطه a نتیجه شده‌اند^۱.

قضیه زیر نتیجه مستقیم قسمت (آ) قضیه تابع معکوس است.

۲۵.۹ قضیه. هرگاه f یک نگاشت از مجموعه باز $E \subset R^n$ بتوی R^n و $f'(x)$ به ازای هر $x \in E$ معکوسپذیر باشد، آنگاه $f(W)$ به ازای هر مجموعه باز $W \subset E$ یک زیرمجموعه باز R^n خواهد بود.

به عبارت دیگر، f یک نگاشت باز از E بتوی R^n می‌باشد.

مفروضات قضیه فوق این را که هر نقطه $x \in E$ همسایگی دارد که در آن f یک به یک است تضمین می‌کند. این را می‌توان به این طریق گفت که f در E به طور موضعی یک به یک است. اما f الزاماً تحت این شرایط در E یک به یک نیست. برای دیدن مثال، ر. ک. تمرین ۱۷.

قضیه تابع ضمنی

اگر f یک تابع حقیقی به طور پیوسته مشتقپذیر در صفحه باشد، معادله $f(x, y) = 0$ را می‌شود در همسایگی هر نقطه مانند (a, b) که در آن $f(a, b) = 0$ و $\partial f / \partial y \neq 0$ نسبت به y و بر حسب x حل کرد. همچنین، می‌توان این معادله را در مجاورت (a, b) ، اگر که $\partial f / \partial x$ در آن مخالف صفر باشد، نسبت به x و بر حسب y حل نمود. برای مثالی ساده که لزوم فرض $\partial f / \partial y \neq 0$ را نشان دهد، $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ را مورد توجه قرار دهید.

بیان بسیار غیر صوری پیش ساده‌ترین حالت (حالت $m = n = 1$ قضیه ۲۸.۹) "قضیه تابع ضمنی" است. در برهانش قویاً از این مطلب که تبدیلات به طور پیوسته مشتقپذیر موضعی خیلی شبیه به مشتقات خود عمل می‌کنند استفاده شده است. بدینجهت، ما ابتدا قضیه ۲۷.۹، یعنی شکل خطی قضیه ۲۸.۹، را ثابت می‌کنیم.

۲۶.۹ نمادگذاری. هرگاه $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$ ، به جای نقطه (یا بردار)

۱. در این مورد خواننده را به مقاله‌ای که توسط

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in R^{n+m}$$

خواهیم نوشت (x, y) . در آنچه خواهد آمد، اولین درایه در (x, y) و یا در علامتی مشابه همواره برداری در R^n است؛ دومین درایه برداری در R^m خواهد بود.

هر $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ را می‌توان به دو تبدیل خطی A_x و A_y ، که به ازای هر $h \in R^n$ و $k \in R^m$ با

$$(53) \quad A_x h = A(h, 0), \quad A_y k = A(0, k)$$

تعریف می‌شوند، تجزیه کرد. در این صورت، $A_x \in L(R^n, R^n)$ و $A_y \in L(R^m, R^n)$

$$(54) \quad A(h, k) = A_x h + A_y k.$$

حال شکل خطی قضیهء تابع ضمنی تقریباً واضح است.

۲۷.۹ قضیه. هرگاه $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ و A_x معکوسپذیر باشد، آنگاه نظیر هر $k \in R^m$

یک $h \in R^n$ منحصر بفرد وجود دارد که $A(h, k) = 0$.

این h را می‌توان از k با فرمول

$$(55) \quad h = -(A_x)^{-1} A_y k$$

به دست آورد.

برهان. بنابر (۵۴)، $A(h, k) = 0$ اگر و فقط اگر

$$A_x h + A_y k = 0,$$

که وقتی A_x معکوسپذیر باشد، همان (۵۵) می‌باشد.

ماحصل قضیهء ۲۷.۹، با الفاظی دیگر، این است که اگر k معلوم باشد، معادلهء

$A(h, k) = 0$ را می‌توان (به طور منحصر بفرد) نسبت به h حل کرد، و جواب h تابعی

خطی از k خواهد بود. افراد آشنا با جبر خطی توجه دارند که این یک حکم بسیار آشنا در مورد دستگاههای معادلات خطی می‌باشد.

۲۸.۹ قضیه. فرض کنیم f یک 'نگاشت از مجموعهء باز $E \subset R^{n+m}$ بتوی R^n باشد بطوری که

$$f(a, b) = 0, \quad (a, b) \in E$$

قرار می‌دهیم $A = f'(a, b)$ و فرض می‌کنیم A_x معکوسپذیر باشد.

$$(60) \quad F(x, y) = (f(x, y), y) \quad ((x, y) \in E)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، F یک نگاشت از E بتوی R^{n+m} است. حکم می‌کنیم که $F'(a, b)$ یک عنصر معکوسپذیر $L(R^{n+m})$ است:

گوییم چون $f(a, b) = 0$ ، داریم

$$f(a + h, b + k) = A(h, k) + r(h, k)$$

که در آن r باقیمانده‌ای است که در تعریف $f'(a, b)$ ظاهر می‌شود. و چون

$$\begin{aligned} F(a + h, b + k) - F(a, b) &= (f(a + h, b + k), k) \\ &= (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که $F'(a, b)$ یک عملگر خطی بر R^{n+m} است که (h, k) را به $(A(h, k), k)$ می‌نگارد. هرگاه این بردار نقش 0 باشد، آنگاه $A(h, k) = 0$ و $k = 0$. در نتیجه، $A(h, 0) = 0$ ، و قضیه ۲۷۰۹ ایجاب خواهد کرد که $h = 0$. از اینجا نتیجه می‌شود که $F'(a, b)$ یک به یک است؛ پس معکوسپذیر خواهد بود (قضیه ۵۰۹).

لذا، می‌توان قضیه تابع معکوس را در مورد F اعمال کرد. این کار نشان می‌دهد که مجموعه‌های بازی چون U و V در R^{n+m} با شرایط $(a, b) \in U$ ، $(0, b) \in V$ وجود دارند بطوری که F یک نگاشت 1-1 از U بروی V است.

ما را مجموعه تمام y هایی در R^m می‌گیریم که $(0, y) \in V$. توجه کنید که $b \in W$.

واضح است که W ، بخاطر بازبودن V ، باز می‌باشد.

هرگاه $y \in W$ ، آنگاه به ازای $(x, y) \in U$ ، $(0, y) = F(x, y)$ (بنابر (۶۰)). به ازای این x ، $f(x, y) = 0$.

فرض کنیم، با همین $y \in U$ ، $(x', y) \in U$ و $f(x', y) = 0$ در این صورت،

$$F(x', y) = (f(x', y), y) = (f(x, y), y) = F(x, y).$$

چون F در U یک به یک است، نتیجه می‌شود که $x' = x$.

این قسمت اول قضیه را ثابت می‌کند.

برای اثبات قسمت دوم، $g(y)$ را به ازای $y \in W$ این طور تعریف می‌کنیم که

$(g(y), y) \in U$ و (۵۷) برقرار است. در این صورت،

$$(61) \quad F(g(y), y) = (0, y) \quad (y \in W).$$

هرگاه G آن نگاشت از V بروی U باشد که F را عکس کند، آنگاه، بنابر قضیه تابع معکوس.

$G \in \mathcal{G}'$ ، و (۶۱) نتیجه خواهد داد که

$$(62) \quad (g(y), y) = G(0, y) \quad (y \in W).$$

چون $G \in \mathcal{G}'$ ، (۶۲) نشان می‌دهد که $g \in \mathcal{G}'$.

بالاخره، برای محاسبه $g'(b)$ ، قرار می‌دهیم

$$(g(y), y) = \Phi(y) \quad \text{قرار می‌دهیم}$$

در این صورت ،

$$(63) \quad \Phi'(v)k = (g'(y)k, k) \quad (y \in W, k \in R^m).$$

بنابر (۵۷) ، $f(\Phi(y))$ در W صفر است . پس قاعده زنجیره‌ای نشان می‌دهد که

$$f'(\Phi(y))\Phi'(y) = 0.$$

وقتی $y = b$ ، $\Phi(y) = (a, b)$ ، و $f'(\Phi(y)) = A$ ، از اینرو ،

$$(64) \quad A\Phi'(b) = 0.$$

حال از (۶۴) ، (۶۳) ، و (۵۴) نتیجه می‌شود که به ازای هر $k \in R^m$ ،

$$A_x g'(b)k + A_y k = A(g'(b)k, k) = A\Phi'(b)k = 0.$$

لذا ،

$$(65) \quad A_x g'(b) + A_y = 0.$$

این با (۵۸) معادل است ، و برهان تمام خواهد بود .

توجه . رابطه (۶۵) بر حسب مؤلفه‌های f و g این طور می‌شود :

$$\sum_{j=1}^n (D_j f_i)(a, b)(D_k g_j)(b) = -(D_{n+k} f_i)(a, b)$$

یا

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k} \right) = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right),$$

که در آنها $1 \leq k \leq m$ و $1 \leq i \leq n$.

این به ازای هر k یک دستگاه n معادله خطی است که در آن مشتقات $\partial g_j / \partial y_k$

($1 \leq j \leq n$) مجهولها هستند .

۲۹.۹ مثال n را ۲ و m را ۳ گرفته ، نگاشت $f = (f_1, f_2)$ از R^5 بتوی R^2 را که با

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3,$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3$$

داده شده در نظر می‌گیریم. هرگاه $a = (0, 1)$ و $b = (3, 2, 7)$ ، آنگاه $f(a, b) = 0$.

ماتریس تبدیل $A = f'(a, b)$ نسبت به پایه‌های متعارف عبارت است از

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه،

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A_y] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

ملاحظه می‌کنیم که بردارهای ستونی $[A_x]$ مستقل‌اند. پس A_x معکوسپذیر است، و قضیه

تابع ضمنی بودن یک نگاشت g را تأیید می‌کند که در یکی از همسایگی‌های $(3, 2, 7)$

طوری تعریف شده که $g(3, 2, 7) = (0, 1)$ و $f(g(y), y) = 0$.

می‌توانیم از (۵۸) برای محاسبه $g'(3, 2, 7)$ استفاده کنیم: گوییم چون

$$[(A_x)^{-1}] = [A_x]^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

(۵۸) نتیجه می‌دهد که

$$[g'(3, 2, 7)] = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

نتیجه برحسب مشتقات جزئی چنین است:

$$\begin{aligned} D_1 g_1 &= \frac{1}{4} & D_2 g_1 &= \frac{1}{5} & D_3 g_1 &= -\frac{3}{10} \\ D_1 g_2 &= -\frac{1}{2} & D_2 g_2 &= \frac{6}{5} & D_3 g_2 &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

در نقطه $(3, 2, 7)$.

قضیه رتبه

با آنکه این قضیه به اندازه قضیه تابع معکوس یا قضیه تابع ضمنی مهم نیست، ما آن را از اینرو که گواه‌جالب دیگری از این اصل کلی است که "رفتار یک نگاشت به طور پیوسته

مشتق‌پذیر F در مجاورت x با رفتار تبدیل خطی $F'(x)$ شبیه است" ذکر می‌نماییم.

پیش از بیان آن، به چند مطلب دیگر در باب تبدیلات خطی نیاز داریم.

۳۰.۹ چند تعریف. فرض کنیم، مثل تعریف ۶.۹، X و Y فضا‌هایی برداری باشند و $A \in L(X, Y)$. فضای پوچ A ، یعنی $\mathcal{N}(A)$ ، عبارت‌است از مجموعه تمام x هایی در X که در آنها $Ax = 0$. واضح است که $\mathcal{N}(A)$ یک فضای برداری در X است.

همچنین، برد A ، یعنی $\mathcal{R}(A)$ ، یک فضای برداری در Y می‌باشد. رتبه A برابر بعد $\mathcal{R}(A)$ تعریف می‌شود.

به عنوان مثال، عناصر معکوسپذیر $L(R^n)$ درست همانهایی هستند که رتبه‌شان n است. این مطلب از قضیه ۵.۹ نتیجه می‌شود.

هرگاه $A \in L(X, Y)$ و A رتبه ۰ داشته باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ ، $Ax = 0$. در نتیجه، $\mathcal{N}(A) = X$. در این مورد، $r = 0$. تمرین ۲۵.

۳۱.۹ تصویرها. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. عملگر $P \in L(X)$ را یک تصویر در X خوانیم هرگاه $P^2 = P$.

به بیان صریح‌تر، شرط آن است که به ازای هر $x \in X$ ، $P(Px) = Px$. به عبارت دیگر، P هر بردار واقع در برد خود $\mathcal{R}(P)$ را ثابت نگه می‌دارد. در اینجا چند خاصیت مقدماتی تصویرها ذکر می‌شوند:

(آ) هرگاه P یک تصویر در X باشد، هر $x \in X$ نمایش منحصر بفردی به شکل

$$x = x_1 + x_2$$

دارد که در آن $x_1 \in \mathcal{R}(P)$ ، $x_2 \in \mathcal{N}(P)$.

برای رسیدن به این نمایش، قرار می‌دهیم $x_1 = Px$ ، $x_2 = x - x_1$. در این صورت، $Px_2 = Px - Px_1 = Px - P^2x = 0$ را بر معادله $x = x_1 + x_2$ اعمال می‌کنیم. چون $x_1 \in \mathcal{R}(P)$ و چون $Px_2 = 0$ ، نتیجه می‌شود که $x_1 = Px$.

(ب) هرگاه X فضایی برداری با بعد متناهی و X_1 یک فضای برداری در آن باشد، تصویری چون P در X هست که $\mathcal{R}(P) = X_1$.

این مطلب در صورتی که X_1 فقط شامل ۰ باشد بدیهی است؛ به ازای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم $Px = 0$.

پس فرض کنیم $\dim X_1 = k > 0$. در این صورت، بنابر قضیه ۳.۹، X پایهای چون $\{u_1, \dots, u_n\}$ دارد بطوری که $\{u_1, \dots, u_k\}$ یک پایهای از X_1 می‌باشد. به ازای اسکالرهایی دلخواه $c_1, \dots, c_n$ تعریف می‌کنیم

$$P(c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n.$$

در این صورت، در ازای هر $x \in X_1$ ، $Px = x$ ، و $X_1 = \mathcal{R}(P)$. توجه دارید که $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ یک پایه $\mathcal{N}(P)$ است. همچنین، توجه کنید که اگر $0 < \dim X_1 < \dim X$ ، بی‌نهایت تصویر در X با برد X_1 وجود دارد.

۳۲.۹ قضیه. فرض کنیم m, n, r اعدادی صحیح و نامنفی باشند، $n \geq r$ ، $m \geq r$ ، F یک نگاشت از مجموعه باز $E \subset R^n$ بتوی R^m ، و $F'(x)$ به ازای هر $x \in E$ دارای رتبه r باشد.

$a \in E$ را ثابت می‌گیریم، قرار می‌دهیم $A = F'(a)$ ، Y_1 را برد A تصور می‌کنیم، و P را تصویری در R^m می‌انگاریم که بردش Y_1 است. فرض می‌کنیم Y_2 فضای پوچ P باشد. در این صورت، مجموعه‌های بازی چون U و V در R^n هستند که $a \in U$ ، $U \subset E$ ، و H نگاشت $1-1$ ی مانند H از V بروی U وجود دارد (که معکوسش نیز از رده $\mathcal{G}$ است) بطوری که

$$F(H(x)) = Ax + \varphi(Ax) \quad (x \in V) \quad (66)$$

که در آن φ یک نگاشت از مجموعه باز $A(V) \subset Y_1$ بتوی Y_2 می‌باشد.

پس از اثبات، از اطلاعاتی که (۶۶) شامل است توصیف هندسی تری به دست خواهیم داد.

برهان. هرگاه $r = 0$ ، قضیه ۱۹.۹ نشان می‌دهد که $F(x)$ در همسایگی U از a ثابت است، و (۶۶) با فرض $V = U$ ، $H(x) = x$ ، $\varphi(0) = F(a)$ بدهتا برقرار می‌باشد. از حالا به بعد فرض می‌کنیم $r > 0$. چون $\dim Y_1 = r$ ، Y_1 پایهای چون $\{y_1, \dots, y_r\}$ دارد. $z_i \in R^n$ را قسمی می‌گیریم که $Az_i = y_i$ ($1 \leq i \leq r$)، و نگاشت خطی S از Y_1 بتوی R^n را به ازای جمیع اسکالره‌های $c_1, \dots, c_r$ با

$$S(c_1 y_1 + \cdots + c_r y_r) = c_1 z_1 + \cdots + c_r z_r \quad (67)$$

تعریف می‌کنیم.

در این صورت، به ازای $1 \leq i \leq r$ ، $ASy_i = Az_i = y_i$ ، بنابراین،

$$ASy = y \quad (y \in Y_1). \quad (68)$$

نگاشت G از E بتوی R^n را با قرار

$$(69) \quad G(x) = x + SP[F(x) - Ax] \quad (x \in E)$$

تعریف می‌کنیم. چون $F'(a) = A$ ، مشتگیری از (۶۹) نشان خواهد داد که $G'(a)$ مساوی I ، یعنی مساوی عملگر همانی بر R^n است. بر طبق قضیهٔ تابع معکوس، مجموعه‌های بازی چون U و V در R^n ، که $a \in U$ ، وجود دارند بطوری که G یک نگاشت 1-1 از U بروی V است که معکوسش H نیز از ردهٔ $\mathcal{H}'$ می‌باشد. علاوه بر این، با انقباض U و V در صورت لزوم، می‌توان طوری ترتیب داد که V محدب بوده و $H'(x)$ به ازای هر $x \in V$ معکوسپذیر باشد.

توجه کنید که $ASPA = A$ ، زیرا $PA = A$ و (۶۸) برقرار است. بنابراین، (۶۹) نتیجه خواهد داد که

$$(70) \quad AG(x) = PF(x) \quad (x \in E).$$

بخصوص، (۷۰) به ازای هر $x \in U$ برقرار است. اگر x را با $H(x)$ عوض کنیم، خواهیم داشت

$$(71) \quad PF(H(x)) = Ax \quad (x \in V).$$

تعریف می‌کنیم

$$(72) \quad \psi(x) = F(H(x)) - Ax \quad (x \in V).$$

چون $PA = A$ ، تساوی (۷۱) ایجاب می‌کند که به ازای هر $x \in V$ ، $P\psi(x) = 0$. پس ψ یک $\mathcal{H}'$ -نگاشت از V بتوی Y_2 می‌باشد.

و چون V باز است، بوضوح $A(V)$ یک زیر مجموعهٔ باز بردش $Y_1 = \mathcal{R}(A)$ خواهد بود.

برای اتمام برهان، یعنی رفتن از (۷۲) به (۶۶)، باید نشان دهیم که یک $\mathcal{H}'$ -نگاشت φ از $A(V)$ بتوی Y_2 هست که در

$$(73) \quad \varphi(Ax) = \psi(x) \quad (x \in V)$$

صدق می‌کند.

به عنوان گامی به سوی (۷۳)، ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $x_1 \in V$ ، $x_2 \in V$ ، و $Ax_1 = Ax_2$ داریم

$$(74) \quad \psi(x_1) = \psi(x_2).$$

به ازای $x \in V$ قرار می‌دهیم $\Phi(x) = F(H(x))$. چون $H'(x)$ به ازای هر $x \in V$

رتبه n دارد، و $F'(x)$ به ازای هر $x \in U$ از رتبه r است، نتیجه خواهد شد که

$$(75) \quad \text{rank } \Phi'(x) = \text{rank } F'(H(x))H'(x) = r \quad (x \in V).$$

x را در V ثابت می‌گیریم. فرض می‌کنیم M برد $\Phi'(x)$ باشد. در این صورت، $M \subset R^m$ و

$$\dim M = r \quad \text{بر طبق (۷۱)،}$$

$$(76) \quad P\Phi'(x) = A.$$

پس P ، M را بروی $Y_1 = \mathcal{R}(A)$ می‌نگارد. چون M و Y_1 یک بعد دارند، نتیجه خواهد شد که P (محدود به M) یک به یک می‌باشد.

حال فرض کنیم $Ah = 0$. در این صورت، بنا بر (۷۶)، $P\Phi'(x)h = 0$. اما

$\Phi'(x)h \in M$ و P بر M یک به یک است. لذا، $\psi'(x)h = 0$. حال نظری به (۷۲) معلوم می‌سازد که مطلب زیر ثابت شده است:

هرگاه $x \in V$ و $Ah = 0$ ، آنگاه $\Phi'(x)h = 0$.

اینک می‌توان رابطه (۷۴) را اثبات کرد. فرض کنیم $x_1 \in V$ ، $x_2 \in V$ و

$$Ax_1 = Ax_2. \quad \text{قرار می‌دهیم } h = x_2 - x_1 \text{ و تعریف می‌کنیم}$$

$$(77) \quad g(t) = \psi(x_1 + th) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

محدب بودن V نشان می‌دهد که به ازای این t ها $x_1 + th \in V$. در نتیجه،

$$(78) \quad g'(t) = \psi'(x_1 + th)h = 0 \quad (0 \leq t \leq 1),$$

بطوری که $g(1) = g(0)$. اما $g(1) = \psi(x_2)$ و $g(0) = \psi(x_1)$. این (۷۴) را ثابت خواهد کرد.

بنا بر (۷۴)، $\psi(x)$ ، به ازای $x \in V$ ، فقط به Ax وابسته است. لذا، (۷۳)،

φ را بدون ابهام در $A(V)$ تعریف خواهد کرد. فقط باقی می‌ماند ثابت کنیم $\varphi \in \mathcal{C}'$.

$y_0 \in A(V)$ و $x_0 \in V$ را ثابت می‌گیریم بقسمی که $Ax_0 = y_0$ چون V باز است،

دارای همسایگی W در Y_1 است بطوری که بردار

$$(79) \quad x = x_0 + S(y - y_0)$$

به ازای هر $y \in W$ در V جای دارد. بنا بر (۶۸)،

$$Ax = Ax_0 + y - y_0 = y.$$

بنابراین، (۷۳) و (۷۹) نتیجه می‌دهند که

$$(80) \quad \varphi(y) = \psi(x_0 - Sy_0 + Sy) \quad (y \in W).$$

این فرمول نشان می‌دهد که $\varphi \in \mathcal{C}'$ در W ، در نتیجه در $A(V)$ ، زیرا y در $A(V)$ دلخواه گرفته شده بود.

در اینجا برهان تمام خواهد بود.

اینک به آنچه که قضیه در باب هندسه نگاشت F می‌گوید می‌پردازیم.

هرگاه $y \in F(U)$ ، آنگاه به ازای $x \in V$ ، $y = F(H(x))$ ، و (۶۶) نشان می‌دهد که $Ax = Py$. بنابراین،

$$(81) \quad y = Py + \varphi(Py) \quad (y \in F(U)).$$

این نشان می‌دهد که y به وسیله تصویرش Py معین می‌شود، و p ، تحدیدش به $F(U)$ ، یک نگاشت ۱-۱ از $F(U)$ بروی $A(V)$ می‌باشد. لذا، $F(U)$ یک "سطح r بعدی" است که "روی" هر نقطه $A(V)$ درست یک نقطه دارد. $F(U)$ را می‌توان به منزله نمودار φ نیز ملحوظ داشت.

چنانچه، مثل برهان، $\Phi(x) = F(H(x))$ ، (۶۶) نشان می‌دهد که مجموعه‌های تراز Φ (اینها مجموعه‌هایی هستند که Φ بر آنها مقدار معینی دارد) دقیقاً "مجموعه‌های تراز A در V اند. اینها "تخت" هستند زیرا فصل مشترک انتقال‌های فضای برداری $\mathcal{N}(A)$ با V می‌باشند. توجه کنید که $\mathcal{N}(A) = n - r$ (تمرین ۲۵).

مجموعه‌های تراز F در U نقش مجموعه‌های تراز تخت Φ در V تحت H می‌باشند. از اینرو، اینها "سطوحی $(n - r)$ بعدی" در U خواهند بود.

دترمینانها

دترمینانها اعدادی وابسته به ماتریسهای مربعی، و لذا عملگرهایی که با این ماتریسها نموده می‌شوند، می‌باشند. این اعداد صفرند اگر و فقط اگر عملگر نظیرشان معکوسپذیر نباشد. لذا، از آنها می‌توان برای تعیین صحت و سقم مفروضات چند قضیه قبل استفاده کرد. این اعداد در فصل ۱۰ نقش از این مهمتر را ایفا خواهند کرد.

۳۳.۹ تعریف. هرگاه $(j_1, \dots, j_n)$ یک n تایی مرتب از اعداد صحیح باشد، تعریف می‌کنیم

$$(82) \quad s(j_1, \dots, j_n) = \prod_{p < q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p),$$

که در آن اگر $x > 0$ ، $\operatorname{sgn} x = 1$ ، اگر $x < 0$ ، $\operatorname{sgn} x = -1$ ؛ و اگر $x = 0$ ، $\operatorname{sgn} x = 0$. در این صورت ، $s(j_1, \dots, j_n)$ مساوی 1 ، -1 ، یا 0 است ، و چنانچه دوتا از j ها با هم عوض شوند ، تغییر علامت خواهد داد .

فرض کنیم $[A]$ ماتریس عملگر خطی A بر R^n نسبت به پایه متعارف $\{e_1, \dots, e_n\}$ و با درایه‌های $a(i, j)$ در سطر i م و ستون j م باشد . درمیان $[A]$ مساوی عدد

$$\det [A] = \sum s(j_1, \dots, j_n) a(1, j_1) a(2, j_2) \cdots a(n, j_n) \quad (83)$$

تعریف می‌شود . مجموع (۸۳) روی تمام n تاییهای مرتب $(j_1, \dots, j_n)$ از اعداد صحیح که $1 \leq j_r \leq n$ گرفته می‌شود .

بردارهای ستونی x_j از $[A]$ عبارتند از

$$x_j = \sum_{i=1}^n a(i, j) e_i \quad (1 \leq j \leq n). \quad (84)$$

شایسته است که $\det [A]$ را به صورت تابعی از بردارهای ستونی $[A]$ تصور کنیم . چنانچه بنویسیم

$$\det (x_1, \dots, x_n) = \det [A],$$

حال $\det$ یک تابع حقیقی از مجموعهٔ جميع n تاییهای مرتب از بردارها در R^n خواهد بود .

۳۴۰۹ قضیه

(آ) هرگاه I عملگر همانی بر R^n باشد ، آنگاه

$$\det [I] = \det (e_1, \dots, e_n) = 1.$$

(ب) $\det$ یک تابع خطی از هر بردار ستونی x_j است در صورتی که بقیه ثابت گرفته شوند .

(پ) هرگاه $[A]_1$ از $[A]$ با تعویض دو ستون به دست آمده باشد ، آنگاه

$$\det [A]_1 = -\det [A].$$

(ت) هرگاه $[A]$ دو ستون برابر داشته باشد ، آنگاه $\det [A] = 0$.

برهان . هرگاه $A = I$ ، آنگاه $a(i, i) = 1$ و به ازای $i \neq j$ ، $a(i, j) = 0$. از اینرو ،

$$\det [I] = s(1, 2, \dots, n) = 1,$$

که (۲) را ثابت می‌کند. بنابر (۸۲)، $s(j_1, \dots, j_n) = 0$ هرگاه دو تا از j ها مساوی باشند. هر یک از $n!$ حاصل ضرب باقیمانده در (۸۳) دقیقاً "یک سازه از هرستون را شامل است. این (ب) را ثابت می‌کند. قسمت (پ) نتیجه مستقیم این مطلب است که $s(j_1, \dots, j_n)$ در صورتی که دو تا از جایگاه عوض شود تغییر علامت می‌دهد؛ و (ت) نتیجه‌ای از (پ) خواهد بود.

۳۵.۹ قضیه. هرگاه $[A]$ و $[B]$ ماتریسهای n در n باشند، آنگاه

$$\det([B][A]) = \det[B] \det[A].$$

برهان. اگر $x_1, \dots, x_n$ ستونهای $[A]$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$(85) \quad \Delta_B(x_1, \dots, x_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]).$$

ستونهای $[B][A]$ بردارهای $Bx_1, \dots, Bx_n$ می‌باشند. از اینرو،

$$(86) \quad \Delta_B(x_1, \dots, x_n) = \det(Bx_1, \dots, Bx_n).$$

بنابر (۸۶) و قضیه ۳۴.۹، Δ_B از خواص ۳۴.۹ (ب) تا (ت) نیز برخوردار است. برطبق (ب) و (۸۴)،

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\left(\sum_i a(i, 1)e_i, x_2, \dots, x_n\right) = \sum a(i, 1) \Delta_B(e_i, x_2, \dots, x_n).$$

هرگاه این عمل برای $x_2, \dots, x_n$ تکرار شود، خواهیم داشت

$$(87) \quad \Delta_B[A] = \sum a(i_1, 1)a(i_2, 2) \cdots a(i_n, n) \Delta_B(e_{i_1}, \dots, e_{i_n});$$

مجموع روی تمام n تاییهای مرتب $(i_1, \dots, i_n)$ که $1 \leq i_r \leq n$ ، گرفته می‌شود. بنابر (پ) و (ت)

$$(88) \quad \Delta_B(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = t(i_1, \dots, i_n) \Delta_B(e_1, \dots, e_n),$$

که در آن t مساوی ۱، ۰، یا -۱ است؛ و چون $[B][I] = [B]$ ، (۸۵) نشان می‌دهد که

$$(89) \quad \Delta_B(e_1, \dots, e_n) = \det[B].$$

با گذاردن (۸۹) و (۸۸) در (۸۷)، به ازای جمیع ماتریسهای n در n $[A]$ و $[B]$ خواهیم داشت

$$\det([B][A]) = \left\{ \sum a(i_1, 1) \cdots a(i_n, n) t(i_1, \dots, i_n) \right\} \det[B].$$

با فرض $B = I$ می‌بینیم که مجموع داخل دوا برو در بالا مساوی $\det[A]$ است. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

۳۶۰۹ قضیه. عملگر خطی A بر R^n معکوسپذیر است اگر و فقط اگر $\det [A] \neq 0$.

برهان. چنانچه A معکوسپذیر باشد، قضیه ۳۵۰۹ نشان می‌دهد که $\det [A] \det [A^{-1}] = \det [AA^{-1}] = \det [I] = 1$.

در نتیجه، $\det [A] \neq 0$.

هرگاه A معکوسپذیر نباشد، ستونهای $x_1, \dots, x_n$ ماتریس $[A]$ نامستقلاند (قضیه

۳۵۰۹). لذا، مثلاً، x_k ای هست بطوری که به ازای اسکالرهایی چون c_j

$$(90) \quad x_k + \sum_{j \neq k} c_j x_j = 0.$$

بنابر ۳۴۰۹ (ب) و (ت)، اگر $k \neq z$ ، x_k را می‌توان با $x_k + c_j x_j$ بدون تغییر دترمینان عوض کرد. با تکرار این کار در می‌یابیم که x_k را می‌شود با طرف چپ (۹۰)، یعنی با 0 ، بدون تغییر دترمینان عوض کرد. لکن ماتریسی که یکی از ستونهایش 0 باشد دترمینان 0 دارد. بنابراین، $\det [A] = 0$.

۳۷۰۹ تبصره. فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ و $\{u_1, \dots, u_n\}$ پایه‌هایی در R^n باشند. هر عملگر خطی A بر R^n ماتریسهای $[A]$ و $[A]_U$ با درایه‌های a_{ij} و α_{ij} را که با

$$Ae_j = \sum_i a_{ij} e_i, \quad Au_j = \sum_i \alpha_{ij} u_i$$

داده می‌شوند مشخص می‌کند. هرگاه $u_j = Be_j = \sum_i b_{ij} e_i$ ، Au_j برابر است با

$$\sum_k \alpha_{kj} Be_k = \sum_k \alpha_{kj} \sum_i b_{ik} e_i = \sum_i \left(\sum_k b_{ik} \alpha_{kj} \right) e_i$$

و نیز مساوی است با

$$ABe_j = A \sum_k b_{kj} e_k = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) e_i.$$

پس $\sum_k b_{ik} \alpha_{kj} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ ، یا که

$$(91) \quad [B][A]_U = [A][B].$$

چون B معکوسپذیر است، $\det [B] \neq 0$. از اینرو، (۹۱)، در تلفیق با قضیه ۳۵۰۹، نشان خواهد داد که

$$(92) \quad \det [A]_U = \det [A].$$

بنابراین، دترمینان ماتریس یک عملگر خطی به پایهای که در ساختن ماتریس به کار رفته بستگی ندارد. لذا، سخن از دترمینان یک عملگر خطی، بدون داشتن پایهای در خاطر، بی معنی نخواهد بود.

۳۸.۹ ژاکوبیها. چنانچه f مجموعه $E \subset R^n$ را بتوی R^n بنگارد و در نقطه $x \in E$ مشتقپذیر باشد، دترمینان عملگر خطی $f'(x)$ را ژاکوبی f در x خواهیم نامید. با علامات،

$$J_f(x) = \det f'(x). \quad (93)$$

ما از نماد

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad (94)$$

نیز برای $J_f(x)$ ، در صورتی که $(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ ، استفاده خواهیم کرد. بر حسب ژاکوبیها، فرض قاطع در قضیه تابع معکوس فرض $J_f(a) \neq 0$ است (قس. قضیه ۳۶.۹). چنانچه قضیه تابع ضمنی بر حسب توابع (۵۹) بیان شوند، فرضی که در مورد A شد به صورت

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$$

در خواهد آمد.

مشتقات مراتب بالاتر

۳۹.۹ تعریف. فرض کنیم f یک تابع حقیقی باشد که در مجموعه $E \subset R^n$ تعریف شده و مشتقات جزئیش $D_1 f, \dots, D_n f$ باشند. هرگاه $D_j f$ ها خود مشتقپذیر باشند، مشتقات جزئی مرتبه دوم f با

$$D_{ij} f = D_i D_j f \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

تعریف می شوند. اگر تمام توابع $D_{ij} f$ در E پیوسته باشند، می گوئیم f در E از رده $\mathcal{C}''$ است یا که $f \in \mathcal{C}''(E)$.

نگاشت f از E بتوی R^m را از رده $\mathcal{C}''$ گوئیم هرگاه هر مؤلفه f از رده $\mathcal{C}''$ باشد. ممکن است در نقطه‌ای، در عین اینکه هر دو مشتق وجود دارند، $D_{ij} f \neq D_{ji} f$ (ر. ک. تمرین ۲۷). با اینحال، در زیر خواهیم دید که هر موقع این مشتقها پیوسته باشند،

$$D_{ij} f = D_{ji} f$$

بخاطر سادگی (و بدون کاستن از کلیت) دو قضیه بعدیمان را برای توابع حقیقی دو متغیره بیان می کنیم . اولینش قضیه مقدار میانگین است .

۴۰.۹ قضیه . فرض کنیم f در مجموعه بازی چون $E \subset R^2$ تعریف شده و $D_1 f$ و $D_{21} f$ در هر نقطه E وجود داشته باشند . $Q \in E$ را مستطیل بسته ای می انگاریم ، با اضلاعی موازی محورهای مختصات ، که (a, b) و $(a+h, b+k)$ رابه عنوان رئوس متقابل دارد ($h \neq 0$ و $k \neq 0$) . قرار می دهیم

$$\Delta(f, Q) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b).$$

در این صورت ، نقطه ای مانند (x, y) درون Q هست بطوری که

$$(95) \quad \Delta(f, Q) = hk(D_{21}f)(x, y).$$

به شباهت موجود بین رابطه (۹۵) و قضیه ۱۰.۵ توجه نمایید ؛ مساحت Q مساوی hk است .

برهان . قرار می دهیم $u(t) = f(t, b+k) - f(t, b)$. دوبار کار رفت قضیه ۱۰.۵ نشان می دهد که x ی بین a و $a+h$ و y ی بین b و $b+k$ هست بطوری که

$$\begin{aligned} \Delta(f, Q) &= u(a+h) - u(a) \\ &= hu'(x) \\ &= h[(D_1 f)(x, b+k) - (D_1 f)(x, b)] \\ &= hk(D_{21}f)(x, y). \end{aligned}$$

۴۱.۹ قضیه . فرض کنیم f در مجموعه بازی مثل $E \subset R^2$ تعریف شده است ، $D_1 f$ ، $D_{21} f$ ، و $D_2 f$ در هر نقطه E وجود دارند ، و $D_{21} f$ در نقطه ای چون $(a, b) \in E$ پیوسته است .

$$(96) \quad \text{در این صورت ، در } (a, b) \text{ وجود دارد و } (D_{12}f)(a, b) = (D_{21}f)(a, b).$$

نتیجه . $D_{21}f = D_{12}f$ اگر که $f \in \mathcal{C}''(E)$.

برهان. قرار می‌دهیم $A = (D_{21}f)(a, b)$ و $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. اگر Q مستطیلی مثل مستطیل قضیه ۴۰.۹ و h و k به قدر کافی کوچک باشند، به ازای هر $(x, y) \in Q$ خواهیم داشت

$$|A - (D_{21}f)(x, y)| < \varepsilon.$$

پس، بنابر (۹۵)،

$$\left| \frac{\Delta(f, Q)}{hk} - A \right| < \varepsilon.$$

h را ثابت می‌گیریم و فرض می‌کنیم $k \rightarrow 0$. چون D_2f در E وجود دارد، نامساوی آخر ایجاب می‌کند که

$$(97) \quad \left| \frac{(D_2f)(a+h, b) - (D_2f)(a, b)}{h} - A \right| \leq \varepsilon.$$

چون ε دلخواه و (۹۷) به ازای تمام $h \neq 0$ های به قدر کافی کوچک برقرار است، نتیجه می‌شود که $(D_{12}f)(a, b) = A$. این (۹۶) را به دست خواهد داد.

مشتقگیری از انتگرالها

فرض کنیم φ یک تابع دو متغیره باشد که از آن بتوان نسبت به یک متغیر انتگرال و نسبت به دیگری مشتق گرفت. می‌پرسیم اگر این دو فرایند حدی به ترتیب عکس صورت گیرند، تحت چه شرایطی نتیجه یکسان است؟ سوال را دقیقتر مطرح می‌کنیم: تحت چه شرایطی بر φ می‌توان ثابت کرد که معادله

$$(98) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b \varphi(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx$$

درست است؟ (مثال ناقص در تمرین ۲۸ داده شده است.)

شایسته است که از نماد

$$(99) \quad \varphi'(x) = \varphi(x, t)$$

استفاده نماییم. لذا، φ' ، به ازای هر t ، یک تابع یک متغیره خواهد بود.

۴۲.۹ قضیه. فرض کنیم

(۱) $\varphi(x, t)$ به ازای $a \leq x \leq b$ و $c \leq t \leq d$ تعریف شده باشد؛

(ب) α یک تابع صعودی بر $[a, b]$ باشد؛

(پ) به ازای هر $\varphi' \in \mathcal{R}(a)$ ، $t \in [c, d]$:

(ت) $c < s < d$ ، و به هر δ ، $\varepsilon > 0$ ای بزرگتر از ۰ قسمی نظیر شده باشد که به ازای هر $x \in [a, b]$ و هر $t \in (s - \delta, s + \delta)$

$$|(D_2 \varphi)(x, t) - (D_2 \varphi)(x, s)| < \varepsilon.$$

تعریف می‌کنیم

$$(100) \quad f(t) = \int_a^b \varphi(x, t) dx(x) \quad (c \leq t \leq d).$$

در این صورت، $(D_2 \varphi)^s \in \mathcal{R}(a)$ ، $f'(s)$ وجود دارد، و

$$(101) \quad f'(s) = \int_a^b (D_2 \varphi)(x, s) dx(x).$$

توجه کنید که (پ) فقط حکم به وجود انتگرالهای (۱۰۰) به ازای هر $t \in [c, d]$ دارد. و نیز توجه دارید که (ت) هر وقت $D_2 \varphi$ بر مستطیلی که φ بر آن تعریف شده پیوسته باشد بیقین برقرار است.

برهان. خارج قسمتهای تفاضلی

$$\psi(x, t) = \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x, s)}{t - s}$$

را به ازای $0 < |t - s| < \delta$ در نظر می‌گیریم. بنا بر قضیه ۱۰۰۵، نظیر هر (x, t) عددی مانند u بین s و t هست بطوری که

$$\psi(x, t) = (D_2 \varphi)(x, u).$$

لذا، (ت) ایجاب خواهد کرد که

$$(102) \quad |\psi(x, t) - (D_2 \varphi)(x, s)| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b, \quad 0 < |t - s| < \delta).$$

توجه کنید که

$$(103) \quad \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \int_a^b \psi(x, t) dx(x).$$

بنابر (۱۰۲)، وقتی $t \rightarrow s$ ، $\psi^t \rightarrow (D_2 \varphi)^s$ به طور یکنواخت بر $[a, b]$ و چون هر $\psi^t \in \mathcal{R}(a)$ ، نتیجه مطلوب از (۱۰۳) و قضیه ۱۶۰۷ حاصل خواهد شد.

۴۳۰۹ مثال. البته، می‌توان مشابه قضیه ۴۲۰۹ را با $(-\infty, \infty)$ به جای $[a, b]$ اثبات

کرد. به عوض این کار فقط به یک مثال اکتفا خواهیم کرد. به ازای $-\infty < t < \infty$ تعریف می‌کنیم

$$(104) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

و

$$(105) \quad g(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \sin(xt) dx.$$

هر دو انتگرال وجود دارند (و به طور مطلق همگرا هستند)، زیرا مقادیر مطلق انتگرالدها به ترتیب حداکثر $\exp(-x^2)$ و $|x| \exp(-x^2)$ می‌باشند.

توجه کنید که g از f با مشتقگیری از انتگرالده نسبت به t به دست می‌آید. حکم می‌کنیم که f مشتقپذیر است و

$$(106) \quad f'(t) = g(t) \quad (-\infty < t < \infty).$$

برای اثبات این مطلب، ابتدا خارج قسمتهای تفاضلی کسینوس را مورد بررسی قرار می‌دهیم؟ گوئیم هرگاه $\beta > 0$ ، آنگاه

$$(107) \quad \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\beta} + \sin \alpha = \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\alpha + \beta} (\sin \alpha - \sin t) dt.$$

چون $|\sin \alpha - \sin t| \leq |t - \alpha|$ ، قدر مطلق طرف راست (۱۰۷) حداکثر $\beta/2$ است. حالت $\beta < 0$ به همین نحو بررسی خواهد شد. لذا به ازای هر β (چنانچه سمت چپ نامساوی زیر وقتی $\beta = 0$ صفر تعبیر شود)،

$$(108) \quad \left| \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\beta} + \sin \alpha \right| \leq |\beta|.$$

حال $t \neq 0$ و h را ثابت نگه می‌داریم. رابطه (۱۰۸) را به ازای $\alpha = xt$ و $\beta = xh$ به کار می‌بریم. از (۱۰۴) و (۱۰۵) نتیجه خواهد شد که

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right| \leq |h| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

بنابراین، وقتی $h \rightarrow 0$ ، رابطه (۱۰۶) به دست خواهد آمد.

حال قدمی فراتر می‌گذاریم. انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء، به کار رفته در (۱۰۴)، نشان می‌دهد که

$$(109) \quad f(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \frac{\sin(xt)}{t} dx.$$

لذا، $tf(t) = -2g(t)$ ، و در این حال (۱۰۶) ایجاب می‌کند که f در معادله دیفرانسیل

$$(110) \quad 2f''(t) + tf(t) = 0$$

صدق نماید. اگر این معادله دیفرانسیل را حل و از این مطلب که $f(0) = \sqrt{\pi}$ استفاده

کنیم (ر.ک. بخش ۲۱۰۸)، در می‌یابیم که

$$(111) \quad f(t) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right).$$

بنابر این، انتگرال (۱۰۴) به طور صریح معین خواهد بود.

تمرین

۱. هرگاه S یک زیرمجموعه ناتهی فضای برداری X باشد، ثابت کنید (همانطور که در بخش ۱۰۹ حکم شد) پیمای S یک فضای برداری است.

۲. ثابت کنید (همانطور که در بخش ۶۰۹ حکم شد) اگر A و B تبدیلاتی خطی باشند، BA نیز خطی است. همچنین، ثابت کنید A^{-1} خطی و معکوسپذیر است.

۳. فرض کنید $A \in L(X, Y)$ و $Ax = 0$ فقط وقتی $x = 0$ ثابت کنید که در این صورت A یک به یک است.

۴. ثابت کنید (همانطور که در بخش ۳۰۹ حکم شد) فضاها ی پوچ و بردهای تبدیلات خطی فضاها یی برداری اند.

۵. ثابت کنید به هر $A \in L(R^n, R^1)$ یک $y \in R^n$ منحصر بفرد چنان نظیر است که $Ax = x \cdot y$. همچنین، ثابت کنید که $\|A\| = \|y\|$.

راهنمایی: در نامساوی شوارتز تحت شرایطی تساوی برقرار است.

۶. هرگاه $f(0, 0) = 0$ و،

$$\text{اگر } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

ثابت کنید، با اینکه f در $(0, 0)$ پیوسته نیست، $(D_1 f)(x, y)$ و $(D_2 f)(x, y)$ در هر نقطه R^2 وجود دارند.

۷. فرض کنید f یک تابع حقیقی باشد که در مجموعه باز $E \subset R^n$ تعریف شده و مشتقات

جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ در E کراندار اند. ثابت کنید f در E پیوسته است.

راهنمایی: مثل برهان قضیه ۲۱۰۹ عمل کنید.

۸. فرض کنید f یک تابع حقیقی مشتقپذیر در مجموعه باز $E \subset R^n$ باشد و f در نقطه

$x \in E$ ماکزیم موضعی داشته باشد. ثابت کنید $f'(x) = 0$.

۹. ثابت کنید که اگر f یک نگاشت مشتقپذیر از مجموعه باز و همبند $E \subset R^n$ بتوی R^m بوده

و به ازای هر $x \in E$ ، $f'(x) = 0$ ، f در E ثابت می باشد.

۱۰. هرگاه f یک تابع حقیقی است که در مجموعه باز و محدب $E \subset R^n$ قسمی تعریف شده

که به ازای هر $x \in E$ ، $(D_1 f)(x) = 0$ ، ثابت کنید $f(x)$ فقط به $x_2, \dots, x_n$

بستگی خواهد داشت.

نشان دهید که تحدب E را می توان با شرط ضعیفتری عوض کرد، لکن این کار محتاج

شرطی خواهد بود. به عنوان مثال، اگر $n = 2$ و E شبیه نعل اسب باشد، حکم ممکن

است درست نباشد.

۱۱. هرگاه f و g توابعی حقیقی و مشتقپذیر در R^n باشند، ثابت کنید

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

و، اگر $f \neq 0$ ، $\nabla(1/f) = -f^{-2} \nabla f$.

۱۲. دو عدد حقیقی a و b را که $0 < a < b$ ثابت بگیرید. نگاشت $f = (f_1, f_2, f_3)$

بر R^2 بتوی R^3 را با

$$f_1(s, t) = (b + a \cos s) \cos t$$

$$f_2(s, t) = (b + a \cos s) \sin t$$

$$f_3(s, t) = a \sin s$$

تعریف کنید. برد K ی f را توصیف نمایید. (این یک زیرمجموعه فشرده R^3 است.)

($\bar{T}$) نشان دهید که درست ۴ نقطه مثل $p \in K$ هست که

$$(\nabla f_1)(f^{-1}(p)) = 0.$$

این نقاط را بیابید.

(ب) مجموعه تمام $q \in K$ هایی را تعیین کنید که

$$(\nabla f_2)(f^{-1}(q)) = 0.$$

(پ) نشان دهید که یکی از نقاط p ی قسمت ($\bar{T}$) نظیریک ماکزیم موضعی f_1 است،

یکی نظیر یک مینیم موضعی است، و دوتای دیگر نه این هستند و نه آن ($\bar{T}$ ها را

اصطلاحاً "نقاط زینتی" می خوانند).

کدام نقاط q ی قسمت (ب) نظیر ماکزیم یا مینیم اند؟

(ت) λ را عددی گنگ انگاشته تعریف کنید $g(t) = f(t, \lambda t)$. ثابت کنید

g یک نگاشت $1-1$ از R^1 بروی زیر مجموعه K چگالی از K است. ثابت کنید

$$|g'(t)|^2 = a^2 + \lambda^2(b + a \cos t)^2.$$

۱۳. فرض کنید f یک نگاشت مشتقپذیر از R^1 بتوی R^3 باشد بطوری که به ازای هر t

$$|f(t)| = 1 \quad \text{ثابت کنید} \quad f'(t) \cdot f(t) = 0$$

این نتیجه را تعبیر هندسی نمایید.

۱۴. تعریف کنید $f(0,0) = 0$ و

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{اگر } (x,y) \neq (0,0)$$

(آ) ثابت کنید $D_1 f$ و $D_2 f$ توابع کراننداری در R^2 اند. (در نتیجه، f پیوسته می باشد.)

(ب) فرض کنید u بردار یکه دلخواهی در R^2 باشد. نشان دهید که مشتق جهتی $(D_u f)(0,0)$ وجود دارد و قدر مطلقش حداکثر یک است.

(پ) فرض کنید γ یک نگاشت مشتقپذیر از R^1 بتوی R^2 باشد (به عبارت دیگر، γ یک منحنی مشتقپذیر در R^2 باشد) با این خاصیت که $\gamma(0) = (0,0)$ و $|\gamma'(0)| > 0$. قرار دهید $g(t) = f(\gamma(t))$ و ثابت کنید g به ازای هر $t \in R^1$ مشتقپذیر است. چنانچه $\gamma \in \mathcal{C}^1$ ، ثابت کنید $g \in \mathcal{C}^1$.

(ت) با این وجود، ثابت کنید f در $(0,0)$ مشتقپذیر نیست. راهنمایی: فرمول (۴۰) برقرار نیست.

۱۵. تعریف کنید $f(0,0) = 0$ و، اگر $(x,y) \neq (0,0)$ ، قرار دهید

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}.$$

(آ) ثابت کنید به ازای هر $(x,y) \in R^2$

$$4x^4y^2 \leq (x^4+y^2)^2,$$

و نتیجه بگیرید که f پیوسته می باشد.

(ب) به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $-\infty < t < \infty$ تعریف کنید

$$g_\theta(t) = f(t \cos \theta, t \sin \theta).$$

نشان دهید که $g_\theta(0) = 0$ ، $g'_\theta(0) = 0$ و $g''_\theta(0) = 2$. لذا، هر g_θ یک مینیم موضعی اکید در $t=0$ دارد.

به عبارت دیگر، تحدید f به هر خط مار بر $(0,0)$ مینیم موضعی اکیدی در

$(0, 0)$ خواهد داشت.

(پ) نشان دهید که با اینحال $(0, 0)$ یک مینیمم موضعی برای f نیست، چونکه

$$f(x, x^2) = -x^4$$

۱۶. نشان دهید که در قضیهٔ تابع معکوس، پیوستگی f' در نقطهٔ a ، حتی در حالت $n=1$ ،

ضرور است: هرگاه به ازای $t \neq 0$

$$f(t) = t + 2t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

و $f(0)=0$ ، آنگاه $f'(0)=1$ ، f' در $(-1, 1)$ کراندار است، ولی f در هیچ همسایگی 0 یک به یک نمی‌باشد.

۱۷. فرض کنید $f = (f_1, f_2)$ نگاشتی از R^2 بتوی R^2 باشد که با

$$f_1(x, y) = e^x \cos y, \quad f_2(x, y) = e^x \sin y$$

داده شده است.

(آ) برد f چیست؟

(ب) نشان دهید که ژاکوبی f در هیچ نقطه از R^2 صفر نیست. لذا، هر نقطه R^2 همسایگی

دارد که در آن f یک به یک است. با اینحال، f بر R^2 یک به یک نمی‌باشد.

(پ) قرار دهید $a = (0, \pi/3)$ ، $b = f(a)$ ، و فرض کنید g معکوس پیوستهٔ f باشد که

در همسایگی b تعریف شده بطوری که $g(b) = a$. برای g فرمول صریحی بیابید،

$f'(a)$ و $g'(b)$ را حساب کنید، و صحت فرمول (۵۲) را تحقیق نمایید.

(ت) نقشه‌های خطوط موازی محورهای مختصات تحت f چه می‌باشند؟

۱۸. به سوءالات مشابه در مورد نگاشتی که با

$$u = x^2 - y^2 \text{ و } v = 2xy$$

تعریف شده پاسخ دهید.

۱۹. نشان دهید که دستگاه معادلات

$$3x + y - z + u^2 = 0$$

$$x - y + 2z + u = 0$$

$$2x + 2y - 3z + 2u = 0$$

را می‌توان نسبت به x, y, u و بر حسب z ؛ نسبت به x, z, u و بر حسب y ؛

نسبت به y, z, u و بر حسب x حل کرد؛ لیکن حل آن نسبت به x, y, z و بر-

حسب u میسر نیست.

۲۰. در قضیهء تابع ضمنی m و n را یک گرفته، قضیه (و برهانش) را به طور هندسی تعبیر کنید.

۲۱. f را در R^2 با $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ تعریف کنید.

(آ) چهار نقطه در R^2 بیابید که گرادیان f در آنها صفر باشد. نشان دهید که f در R^2 درست یک ماکزیم موضعی و یک مینیم موضعی دارد.

(ب) فرض کنید S مجموعهء تمام $(x, y) \in R^2$ هایی باشد که در آنها $f(x, y) = 0$. آن نقاطی از S را بیابید که همسایگی که در آن بشود معادلهء $f(x, y) = 0$ را نسبت به y و بر حسب x (یا نسبت به x و بر حسب y) حل کردندارند. S را تا جایی که می توانید دقیق توصیف کنید.

۲۲. شبیه این بحث را در مورد

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2$$

بنمایید.

۲۳. f را در R^3 با

$$f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 + e^x + y_2$$

تعریف کنید. نشان دهید که $f(0, 1, -1) = 0$ ، $(D_1 f)(0, 1, -1) \neq 0$ ، و لذا، تابع مشتق پذیری چون g در یکی از همسایگیهای $(1, -1)$ در R^2 هست بطوری که

$$g(1, -1) = 0$$

$$f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0.$$

و $(D_1 g)(1, -1)$ را پیدا کنید.

۲۴. به ازای $f = (f_1, f_2)$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$ را با

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

تعریف کنید. رتبهء $f'(x, y)$ را حساب کرده برد f را بیابید.

۲۵. فرض کنید که $A \in L(R^n, R^m)$ و r رتبهء A باشد.

(آ) S را مثل S برهان قضیهء ۳۲.۹ تعریف کنید. نشان دهید که SA تصویری در R^n است که فضای پوچش $\mathcal{N}(A)$ و بردش $\mathcal{R}(S)$ می باشد. راهنمایی. بنابر (۶۸)،

$$SASA = SA$$

(ب) با استفاده از (آ) نشان دهید که

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n.$$

۲۶. نشان دهید که وجود (و حتی پیوستگی) $D_{12}f$ وجود φ'_{1f} را ایجاب نمی‌کند.

به عنوان مثال، فرض کنید $f(x, y) = g(x)$ که در آن g هیچ جاکشت پذیر نیست.

۲۷. قرار دهید $f(0, 0) = 0$ و، اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ،

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

ثابت کنید

(۱) f ، D_1f ، D_2f در R^2 پیوسته‌اند؛

(ب) $D_{21}f$ و $D_{12}f$ در هر نقطه از R^2 وجود داشته‌و، جز در $(0, 0)$ ، پیوسته می‌باشند؛

(پ) $(D_{12}f)(0, 0) = 1$ و $(D_{21}f)(0, 0) = -1$.

۲۸. به ازای $t \geq 0$ قرار دهید

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \sqrt{t}) \\ -x + 2\sqrt{t} & (\sqrt{t} \leq x \leq 2\sqrt{t}) \\ 0 & (\text{در غیر این صورت}) \end{cases}$$

و، اگر $t < 0$ ، قرار دهید $\varphi(x, |t|)$.

نشان دهید که φ بر R^2 پیوسته است و، به ازای هر x ،

$$(D_2\varphi)(x, 0) = 0.$$

تعریف کنید

$$f(t) = \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx.$$

نشان دهید که اگر $|t| < \frac{1}{4}$ ، $f(t) = t$ ؛ در نتیجه،

$$f'(0) \neq \int_{-1}^1 (D_2\varphi)(x, 0) dx.$$

۲۹. فرض کنید E مجموعه‌ای باز در R^n باشد. رده‌های $\mathcal{C}'(E)$ و $\mathcal{C}''(E)$ در متن تعریف

شده‌اند. $\mathcal{C}^{(k)}(E)$ را می‌توان برای جمیع اعداد صحیح و مثبت k به استقرا تعریف

کرد: وقتی می‌گوییم $f \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$ یعنی که مشتقات جزئی $D_1f, \dots, D_nf$ متعلق به

$\mathcal{C}^{(k-1)}(E)$ می‌باشند.

فرض کنید $f \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$ ، و (بابه‌کارگیری مکرر قضیه ۴۱.۹) نشان دهید که مشتق

مرتبه k ام

$$D_{i_1 i_2 \dots i_k} f = D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f$$

با جایگشت زیرنویسهای $i_1, \dots, i_k$ بلا تغییر است.

به عنوان مثال، هرگاه $n \geq 3$ ، آنگاه به ازای هر $f \in \mathcal{C}^{(4)}$

$$D_{1213}f = D_{3112}f.$$

۳۰. فرض کنید $f \in \mathcal{C}^{(m)}(E)$ که در آن E زیر مجموعهٔ بازی از R^n است. $a \in E$ را ثابت گرفته

فرض کنید $x \in R^n$ آنقدر به 0 نزدیک باشد که نقاط

$$p(t) = a + tx,$$

به ازای $0 \leq t \leq 1$ در E قرار گیرند. به ازای هر $t \in R$ که $p(t) \in E$ تعریف کنید

$$h(t) = f(p(t)).$$

(آ) به ازای $1 \leq k \leq m$ با به کارگیری مکرر قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان دهید که

$$h^{(k)}(t) = \sum (D_{i_1 \dots i_k} f)(p(t)) x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

مجموع روی تمام k تاییهای مرتب $(i_1, \dots, i_k)$ ای گرفته شده که در آنها هر i_j یکی از اعداد صحیح $1, \dots, n$ است.

(ب) بنابر قضیهٔ تیلور (۱۵.۵)، به ازای $t \in (0, 1)$

$$h(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{h^{(m)}(t)}{m!}.$$

از این استفاده کرده قضیهٔ تیلور در حالت n متغیر را ثابت نمایید به این طریق که نشان دهید فرمول

$$f(a+x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum (D_{i_1 \dots i_k} f)(a) x_{i_1} \dots x_{i_k} + r(x)$$

$f(a+x)$ را به صورت مجموع "چند جمله‌ای تیلور از درجه $m-1$ " اش بعلاوهٔ باقیمانده‌ای که در

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|^{m-1}} = 0$$

صدق می‌کند نمایش می‌دهد.

هریک از مجموعه‌های داخلی روی تمام k تاییهای مرتب $(i_1, \dots, i_k)$ ، مثل k تاییهای قسمت (آ)، گرفته می‌شود. طبق معمول، مشتق مرتبهٔ صفر f فقط f است. در نتیجه، جملهٔ ثابت چند جمله‌ای تیلور f در a ، $f(a)$ خواهد بود.

(پ) تمرین ۲۹ نشان می‌دهد که در چند جمله‌ای تیلور، بصورتی که در قسمت (ب) نوشته شده، تکرار روی می‌دهد. برای مثال، D_{113} سه بار، به صورت D_{113}

D_{131} ، و D_{311} ، ظاهر می شود . مجموع سه جمله نظیر را می توان به شکل

$$3(D_1^2 D_3 f)(a) x_1^2 x_3$$

نوشت . ثابت کنید (با محاسبهء دفعاتی که هر مشتق ظاهر می شود) که چند جمله ای تیلور در (ب) را می شود به شکل

$$\sum \frac{(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n} f)(a)}{s_1! \cdots s_n!} x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$$

نوشت . در اینجا جمع بندی روی تمام n تاییهای مرتب $(s_1, \dots, s_n)$ گرفته می شود

بطوری که هر s یک عدد صحیح نامنفی است و $s_1 + \cdots + s_n \leq m-1$.

۳۱ . فرض کنید در همسایگی از $\mathbb{R}^2$ ، $a \in \mathcal{G}^{(3)}$ ، گردایان f در a مساوی ۰ باشد ، ولی

همهء مشتقات مرتبهء دوم f در a صفر نباشد . در این صورت ، نشان دهید که چگونه

می توان از چند جمله ای تیلور f در a (از درجهء ۲) پی برد که f در a دارای ماکزیمم

موضعی ، یا مینیمم موضعی ، و یا هیچکدام است .

این مطلب را به $\mathbb{R}^n$ در عوض $\mathbb{R}^2$ تعمیم دهید .

انتگرالگیری از فرمهای دیفرانسیل

انتگرالگیری را می‌توان در سطوح بسیاری مطرح کرد. در فصل ۶ این نظریه برای توابعی که بر زیربازه‌های خط حقیقی تا حد معقولی خوشرفتارند عرضه شده بود. در فصل ۱۱ با نظریه انتگرالگیری بسیار پیشرفته‌ای مواجه می‌شویم که می‌تواند در مورد رده‌های بسیار وسیعتری از توابع که قلمروهایشان بیش و کم مجموعه‌های دلخواهی هستند و الزاماً "زیر-مجموعه‌هایی از R^n نیستند قابل اعمال باشد. فصل حاضر به جنبه‌هایی از نظریه انتگرالگیری اختصاص یافته که با هندسه فضاها، اقلیدسی، نظیر فرمول تغییر متغیرها، انتگرالهای خط، و دستگاه فرمهای دیفرانسیل که در صورت و در برهان مشابه n بعدی قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی قضیه استوکس^۱، به کار رفته ارتباط نزدیکی دارند.

انتگرالگیری

۱.۱۰ تعریف. فرض کنیم I^k یک حجره k بعدی در R^k مشتمل بر تمام

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$$

هایی باشد که

$$(1) \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, k),$$

I^n حجره^۶ z بعدی در R^n باشد که با z نامساوی اول (۱) تعریف می‌شود، و f یک تابع پیوسته^۶ حقیقی بر I^k باشد.

قرار می‌دهیم $f = f_k$ ، و f_{k-1} را بر I^{k-1} با

$$f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) dx_k$$

تعریف می‌کنیم. پیوستگی یکنواخت f_k بر I^k نشان می‌دهد که f_{k-1} بر I^{k-1} پیوسته است. لذا، می‌توان این فرایند را تکرار کرد و توابع f_j ، پیوسته بر I^j را به دسه^۷ آورد بطوری که f_{j-1} انتگرال f_j نسبت به x_j روی $[a_j, b_j]$ باشد. پس از k مرحله به عددی مانند f_0 می‌رسیم که آن را **انتگرال f روی I^k** می‌نامیم. این عدد را به شکل

$$(2) \quad \int_{I^k} f \quad \text{یا} \quad \int_{I^k} f(x) dx$$

خواهیم نوشت.

بی‌آزمایش معلوم می‌شود که این تعریف انتگرال به ترتیبی که با آن k انتگرالگیری صورت می‌گیرد بستگی دارد. لکن این بستگی فقط مشهود است. برای اثبات آن، نماد موقت $L(f)$ را برای انتگرال (۲) معرفی کرده $L'(f)$ را حاصل انجام k انتگرالگیری با ترتیبی دیگر می‌انگاریم.

۲۰۱۰ قضیه. به ازای هر $f \in \mathcal{C}(I^k)$ ، $L(f) = L'(f)$.

برهان. هرگاه $h(x) = h_1(x_1) \cdots h_k(x_k)$ ، که در آن $h_j \in \mathcal{C}([a_j, b_j])$ ، آنگاه

$$L(h) = \prod_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i) dx_i = L'(h).$$

هرگاه مجموعه^۸ تمام مجموعه‌های متناهی این h ها باشد، نتیجه می‌شود که به ازای هر $g \in \mathcal{A}$ ، $L(g) = L'(g)$. همچنین، جبری است از توابع بر I^k که قضیه^۹ استون-وایراشتراس در بابش قابل اجراست.

قرار می‌دهیم $V = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$. هرگاه $f \in \mathcal{C}(I^k)$ و $\varepsilon > 0$ ، $g \in \mathcal{A}$ ای هست بطوری که $\|f - g\| < \varepsilon/V$ ، که در آن $\|f\|$ مساوی $\max |f(x)|$ ($x \in I^k$) تعریف

می‌شود. در این صورت، $|L(f-g)| < \varepsilon$ ، $|L'(f-g)| < \varepsilon$ ، و چون

$$L(f) - L'(f) = L(f-g) + L'(g-f)،$$

نتیجه می‌گیریم که

$$|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon.$$

تعین ۲ در ارتباط با این موضوع است.

۳.۱۵ تعریف. تکیه‌گاه تابع (حقیقی یا مختلط) f بر R^k بست مجموعه تمام نقاطی چون $x \in R^k$ است که در آن $f(x) \neq 0$. با این فرض که f تابع پیوسته‌ای با تکیه‌گاه فشرده است، I^k را یک حجره k بعدی دلخواه می‌گیریم که شامل تکیه‌گاه f باشد، و تعریف می‌کنیم

$$(3) \quad \int_{R^k} f = \int_{I^k} f.$$

انتگرالی که به این صورت تعریف شود بوضوح از انتخاب I^k مستقل است فقط به شرط آنکه I^k شامل تکیه‌گاه f باشد.

حال انخوا می‌شویم تعریف انتگرال روی R^k را به تابعهایی که (بنوعی) حدود توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده‌اند تعمیم دهیم. ما نمی‌خواهیم شرایطی را که تحت آنها این کار میسر است مطرح نماییم؛ جای مناسب برای این موضوع انتگرال لبگ است. ما فقط یک مثال بسیار ساده را که در برهان قضیه استوکس به کار می‌رود وصف خواهیم کرد.

۴.۱۵ مثال. فرض کنیم Q^k سادک k بعدی باشد که از تمام نقاط $x = (x_1, \dots, x_k)$ در R^k که در آنها $x_1 + \dots + x_k \leq 1$ و $x_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ ، تشکیل شده است. هرگاه، مثلاً، $k = 3$ ، Q^k یک چهار وجهی است با رئوسی در $0, e_1, e_2, e_3$. اگر $f \in \mathcal{C}(Q^k)$ ، f را با فرض $f(x) = 0$ خارج Q^k به تابعی بر I^k تعمیم می‌دهیم، و تعریف می‌کنیم

$$(4) \quad \int_{Q^k} f = \int_{I^k} f.$$

در اینجا I^k "مکعب یک" است که با

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq k)$$

تعریف می‌شود.

چون f ممکن است بر I^k ناپیوسته باشد، وجود انتگرال سمت راست (۴) محتاج برهان خواهد بود. همچنین، ما یلیم نشان دهیم که این انتگرال از ترتیبی که با آن k انتگرالگیری

صورت می‌گیرد مستقل است.

برای این کار فرض می‌کنیم $0 < \delta < 1$ ، قرار می‌دهیم

$$(5) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq 1 - \delta) \\ \frac{(1-t)}{\delta} & (1 - \delta < t \leq 1) \\ 0 & (1 < t), \end{cases}$$

و تعریف می‌کنیم

$$(6) \quad F(x) = \varphi(x_1 + \dots + x_k) f(x) \quad (x \in I^k).$$

در این صورت، $F \in \mathcal{C}(I^k)$.

قرار می‌دهیم $y = (x_1, \dots, x_{k-1})$ و $x = (y, x_k)$. به ازای هر $y \in I^{k-1}$ ، مجموعه تمام

x_k هایی که $F(y, x_k) \neq f(y, x_k)$ یا تهی است و یا قطعه است که طولش از δ تجاوز

نمی‌کند. چون $0 \leq \varphi \leq 1$ ، نتیجه می‌شود که

$$(7) \quad |F_{k-1}(y) - f_{k-1}(y)| \leq \delta \|f\| \quad (y \in I^{k-1}),$$

که در آن $\|f\|$ همان معنی داشته در برهان قضیه ۲۰۱۰ را دارد و F_{k-1} و f_{k-1} همانهای بوده در تعریف ۱۰۱۰ می‌باشند.

وقتی $0 - \delta$ ، نامساوی (۷) را به صورت حد یکنواختی از یک دنباله از

توابع پیوسته نمایش می‌دهد. لذا، $f_{k-1} \in \mathcal{C}(I^{k-1})$ ، و انتگرالگیریهایی بیشتر مشکلی ایجاد نخواهند کرد.

این وجود انتگرال (۴) را ثابت می‌کند. مضاف بر این، (۷) نشان خواهد داد که

$$(8) \quad \left| \int_{I^k} F(x) dx - \int_{I^k} f(x) dx \right| \leq \delta \|f\|.$$

توجه کنید که (۸)، بی‌اعتنا به ترتیبی که k انتگرالگیری صورت می‌گیرد، درست است.

چون $F \in \mathcal{C}(I^k)$ ، با هر تغییری در این ترتیب $\int F$ دست نمی‌خورد. از اینرو، (۸) صحت همین مطلب را برای $\int f$ نشان خواهد داد.

این برهان را تمام خواهد کرد.

هدف بعدی ما فرمول تغییر متغیرهاست که در قضیه ۹۰۱۰ بیان شد. برای تسهیل

در اثباتش، ابتدا نگاشتهای اولیه و افزارهای واحد را مطرح می‌کنیم. نگاشتهای اولیه ما

را قادر می‌سازند تا از عمل موضعی یک نگاشت با مشتق معکوسپذیر تصویری روشنتر بیابیم،

و افزارهای واحد ابزارهایی بسیار مفید هستند که استفاده از اطلاعات موضعی را در یک

محدوده کلی ممکن خواهند ساخت.

نگاشتهای اولیه

۵.۱۰ تعریف. هرگاه G مجموعه‌ای از R^n باشد، E را بتوی R^n نگاشته، و عدد صحیح m و تابع حقیقی g با قلمرو E وجود داشته باشند بطوری که

$$(9) \quad G(x) = \sum_{i \neq m} x_i e_i + g(x) e_m \quad (x \in E),$$

آنگاه G را یک اولیه خواهیم نامید. لذا، یک نگاشت اولیه نگاشتی است که حداکثر یک مختص را تغییر می‌دهد. توجه کنید که (۹) را می‌توان به شکل

$$(10) \quad G(x) = x + [g(x) - x_m] e_m$$

نیز نوشت.

اگر g در نقطه‌ای مانند $a \in E$ مشتقپذیر باشد، G نیز چنین است. ماتریس $[\alpha_{ij}]$ عملگر $G'(a)$ سطح m مش به صورت

$$(11) \quad (D_1 g)(a), \dots, (D_m g)(a), \dots, (D_n g)(a)$$

می‌باشد. به ازای $m \neq j$ داریم $\alpha_{jj} = 1$ و، اگر $i \neq j$ ، $\alpha_{ij} = 0$. لذا، ژاکوبی G در a با

$$(12) \quad J_G(a) = \det[G'(a)] = (D_m g)(a)$$

داده خواهد شد، و (برطبق قضیه ۳۶۰.۹) مشاهده می‌شود که $G'(a)$ معکوسپذیر است اگر و فقط اگر $(D_m g)(a) \neq 0$.

۶.۱۰ تعریف. عملگر خطی B بر R^n که جفتی از اعضای پایه متعارف را با هم عوض کرده بقیه را ثابت بگذارد یک ضربه نام یافته است.

برای مثال، ضربه B بر R^4 که e_4 و e_2 را با هم عوض می‌کند از شکل

$$(13) \quad B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_1 + x_2 e_4 + x_3 e_3 + x_4 e_2$$

و یا، معادلاً، از شکل

$$(14) \quad B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_1 + x_4 e_2 + x_3 e_3 + x_2 e_4$$

برخوردار است. از اینرو، B را می‌توان به عنوان تعویض کننده دو مختص، به جای دو بردار پایه، نیز تصور کرد.

در برهانی که خواهد آمد، از تساوی $p_0, \dots, p_n$ در R^n که با $p_0 x = 0$ و، به ازای

$$1 \leq m \leq n$$

$$(15) \quad P_m x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$$

تعریف شده اند استفاده خواهیم کرد. بنابراین P_m تصویری است که برد و فضای پوچش
بترتیب به وسیله $\{e_1, \dots, e_m\}$ و $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ پیموده می شوند.

۷۰۱۰ قضیه. فرض کنیم F یک نگاشت از مجموعه $R^n \supset E$ بتوی R^n باشد، $0 \in E$ ،
 $F(0) = 0$ و $F'(0)$ معکوسپذیر باشد.

در این صورت، همسایگی از 0 در R^n هست که در آن نمایش

$$(16) \quad F(x) = B_1 \cdots B_{n-1} G_n \circ \cdots \circ G_1(x)$$

معتبر باشد.

در (۱۶)، هر G_i یک نگاشت اولیه در همسایگی از 0 است، $G_i(0) = 0$ ، $G'_i(0)$ معکوسپذیر است، و هر B_i یا یک ضربه یا عملگر همانی می باشد.

مختصر بگوییم، رابطه (۱۶) نگاشت F را موضعا "به صورت ترکیبی از نگاشتهای اولیه و ضربه ها نمایش می دهد.

برهان. قرار می دهیم $F = F_1$. فرض می کنیم $n - m \leq m$ و فرض استقرای زیر را (که بوضوح برای $m=1$ برقرار است) طرح می کنیم:

V_m یک همسایگی 0 است، $F_m \in \mathcal{C}'(V_m)$ ، $F_m(0) = 0$ ، $F'_m(0)$ معکوسپذیر است، و

$$(17) \quad P_{m-1} F_m(x) = P_{m-1} x \quad (x \in V_m).$$

بنابر (۱۷) داریم

$$(18) \quad F_m(x) = P_{m-1} x + \sum_{i=m}^n \alpha_i(x) e_i$$

که در آن $\alpha_n, \dots, \alpha_m$ ، $\mathcal{C}'$ - توابعی حقیقی در V_m می باشند. بنابراین،

$$(19) \quad F'_m(0) e_m = \sum_{i=m}^n (D_m \alpha_i)(0) e_i.$$

چون $F'_m(0)$ معکوسپذیر است، سمت چپ (۱۹) صفر نیست؛ و لذا، k ای هست که
 $(D_m \alpha_k)(0) \neq 0$ و $m \leq k \leq n$.

فرض کنیم B_m ضربه‌ای باشد که m را با این k عوض می‌کند (B_m در صورت $k = m$ همانی است)، و تعریف می‌کنیم

$$(20) \quad G_m(x) = x + [\alpha_k(x) - x_m]e_m \quad (x \in V_m).$$

در این صورت، $G_m \in \mathcal{G}'(V_m)$ ، اولیه است، و $G'_m(0)$ ، چونکه $(D_m \alpha_k)(0) \neq 0$ ، معکوسپذیر می‌باشد.

بنابر این، قضیه تابع معکوس نشان می‌دهد که مجموعه بازی چون U_m ، با این خاصیت که $0 \in U_m \subset V_m$ وجود دارد بطوری که G_m یک نگاشت 1-1 از U_m بروی همسایگی از 0 مانند V_{m+1} است که در آن G_m^{-1} به طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد. F_{m+1} را با

$$(21) \quad F_{m+1}(y) = B_m F_m \circ G_m^{-1}(y) \quad (y \in V_{m+1})$$

تعریف می‌کنیم.

در این صورت، $F_{m+1} \in \mathcal{G}'(V_{m+1})$ ، $F_{m+1}(0) = 0$ ، و $F'_{m+1}(0)$ (طبق قاعده زنجیره‌ای) معکوسپذیر است. همچنین، به ازای $x \in U_m$

$$\begin{aligned} (22) \quad P_m F_{m+1}(G_m(x)) &= P_m B_m F_m(x) \\ &= P_m [P_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m + \dots] \\ &= P_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m \\ &= P_m G_m(x). \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(23) \quad P_m F_{m+1}(y) = P_m y \quad (y \in V_{m+1}).$$

بنابر این، فرض استقرای ما به ازای $m+1$ به جای m برقرار است.

[در (۲۲) ابتدا از (۲۱)، بعد از (۱۸) و تعریف B_m ، سپس از تعریف P_m ، و سرانجام از (۲۵) استفاده می‌کنیم.]

چون $B_m B_m = I$ ، رابطه (۲۱)، به ازای $y = G_m(x)$ ، با

$$(24) \quad F_m(x) = B_m F_{m+1}(G_m(x)) \quad (x \in U_m)$$

معادل می‌باشد.

چنانچه این را به ازای $m = 1, \dots, n-1$ به کار ببریم، در یکی از همسایگی‌های 0 متوالیا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F &= F_1 = B_1 F_2 \circ G_1 \\ &= B_1 B_2 F_3 \circ G_2 \circ G_1 = \dots \end{aligned}$$

$$= B_1 \cdots B_{n-1} F_n \circ G_{n-1} \circ \cdots \circ G_1.$$

بنابر (۱۷)، F_n اولیه است. این برهان را تمام خواهد کرد.

افزای واحد

۸۰۱۰ قضیه. فرض کنیم K یک زیرمجموعه فشرده R^n و $\{V_\alpha\}$ پوشش بازی از آن باشد.

در این صورت، تابعی چون $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathcal{C}(R^n)$ هستند بطوری که

$$(A) \text{ به ازای } 0 \leq \psi_i \leq 1, 1 \leq i \leq s;$$

(ب) هر ψ_i تکیه‌گاه در V_α دارد؛

$$(پ) \text{ به ازای هر } x \in K, \psi_1(x) + \cdots + \psi_s(x) = 1.$$

بخاطر (پ)، $\{\psi_i\}$ را یک افزای واحد می‌نامند؛ و (ب) را گاهی این‌طور بیان می‌کنند که می‌گویند $\{\psi_i\}$ مطیع پوشش $\{V_\alpha\}$ است.

نتیجه. هرگاه $f \in \mathcal{C}(R^n)$ و تکیه‌گاه f در K قرار داشته باشد، آنگاه

$$(25) \quad f = \sum_{i=1}^s \psi_i f.$$

هر $\psi_i f$ تکیه‌گاهش در V_α ای خواهد بود.

اصل مطلب در (۲۵) این است که این رابطه نمایشی از f به صورت مجموعی از توابع پیوسته $\psi_i f$ با تکیه‌گاههای "کوچک" را به دست می‌دهد.

برهان. به هر $x \in K$ اندیس $\alpha(x)$ را مربوط می‌کنیم بطوری که $x \in V_{\alpha(x)}$. در این صورت، گویهای بازی مانند $B(x)$ و $W(x)$ ، به مرکز x ، هستند با این خاصیت که

$$(26) \quad \overline{B(x)} \subset W(x) \subset \overline{W(x)} \subset V_{\alpha(x)}.$$

چون K فشرده است، نقاطی مثل $x_1, \dots, x_s$ در K موجودند بطوری که

$$(27) \quad K \subset B(x_1) \cup \cdots \cup B(x_s).$$

بنابر (۲۶)، توابعی چون $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathcal{C}(R^n)$ وجود دارند بقسمی که $\varphi_i(x) = 1$ بر $B(x_i)$ ،

$\varphi_i(x)$ خارج $W(x_i)$ صفر است، و $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ بر R^n . تعریف می‌کنیم $\psi_1 = \varphi_1$ و به ازای $i = 1, \dots, s-1$

$$(28) \quad \psi_{i+1} = (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_i) \varphi_{i+1}.$$

خواص (۱) و (ب) واضح هستند. رابطه

$$(29) \quad \psi_1 + \cdots + \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_i)$$

به ازای $i = 1$ بدیهی است. اگر (۲۹) به ازای i کمتر از s برقرار باشد، جمع (۲۸) و (۲۹) رابطه (۲۹) را با $i+1$ به جای i به دست می‌دهد. از اینجا نتیجه خواهد شد که

$$(30) \quad \sum_{i=1}^s \psi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^s [1 - \varphi_i(x)] \quad (x \in R^n).$$

هرگاه $x \in K$ ، آنگاه به ازای i $x \in B(x_i)$. در نتیجه، $\varphi_i(x) = 1$ ، و حاصل ضرب در (۳۰) صفر می‌باشد. این (پ) را ثابت خواهد کرد.

تغییر متغیرها

حال می‌توان به وصف اثر تغییر متغیرها بر انتگرال چندگانه پرداخت. بخاطر سادگی، خود را اینجا به توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده مقید می‌کنیم، هر چند که این برای بسیاری از کاربردها خیلی محدود کننده است. این مطلب با تمرینهای ۹ تا ۱۳ توضیح خواهد شد.

۹.۱۰ قضیه. فرض کنیم T یک نگاشت ۱-۱ از مجموعه $E \subset R^k$ بتوی R^k باشد بطوری که به ازای هر $x \in E$ ، $J_T(x) \neq 0$. هرگاه f یک تابع پیوسته بر R^k باشد که تکیه‌گاهش فشرده و در $T(E)$ جای داشته باشد، آنگاه

$$(31) \quad \int_{R^k} f(y) dy = \int_{R^k} f(T(x)) |J_T(x)| dx.$$

به یاد می‌آوریم که J_T ژاکوبی T است. فرض $J_T(x) \neq 0$ ، بر طبق قضیه تابع معکوس، ایجاب می‌کند که T^{-1} بر $T(E)$ پیوسته است، و این تضمین خواهد کرد که انتگرال ده سمت راست (۳۱) تکیه‌گاه فشرده‌ای در E دارد (قضیه ۱۴.۴).

وجود قدر مطلق $J_T(x)$ در (۳۱) ممکن است توضیحی را طلب کند. حالت $k = 1$ را گرفته فرض می‌کنیم T یک نگاشت ۱-۱ از R^1 بروی R^1 باشد. در این صورت،

$J_T(x) = T'(x)$ ؛ و اگر T صعودی باشد، بنابر قضایای ۱۹۰۶ و ۱۷۰۶، به ازای تمام توابع پیوسته f با تکیه‌گاه فشرده خواهیم داشت

$$(32) \quad \int_{R^1} f(y) dy = \int_{R^1} f(T(x))T'(x) dx.$$

اما هرگاه T نزول کند، آنگاه $T'(x) < 0$ ؛ و اگر f درون تکیه‌گاهش مثبت باشد، سمت چپ (۳۲) مثبت و طرف راست آن منفی است. در صورت تعویض T' در (۳۲) با $|T'|$ معادله صحیحی به دست خواهد آمد.

نکته آن است که انتگرالهایی را که ما فعلاً در نظر می‌گیریم انتگرالهای توابعی هستند روی زیرمجموعه‌هایی از R^k ، و ما امتداد و یا جهتی را به این زیرمجموعه‌ها مربوط نمی‌کنیم. وقتی به انتگرالگیری از فرمهای دیفرانسیل روی سطوح رسیدیم، دیدگاه متفاوتی خواهیم پذیرفت.

برهان. از آنچه هم اکنون گفته شد معلوم می‌شود که (۳۱) درست است هرگاه T یک $\mathcal{C}^1$ -نگاشت اولیه باشد (ر.ک. تعریف ۵۰۱)، و قضیه ۲۰۱۰ نشان می‌دهد که (۳۱) درست است هرگاه T تبدیلی خطی باشد که فقط دو مختص را تغییر می‌دهد.

هرگاه قضیه برای تبدیلات P و Q درست باشد و $S(x) = P(Q(x))$ ،

$$\begin{aligned} \int f(z) dz &= \int f(P(y)) |J_P(y)| dy \\ &= \int f(P(Q(x))) |J_P(Q(x))| |J_Q(x)| dx \\ &= \int f(S(x)) |J_S(x)| dx, \end{aligned}$$

زیرا، بنابر قضیه ضرب دترمینانها و قاعده زنجیره‌ای،

$$\begin{aligned} J_P(Q(x))J_Q(x) &= \det P'(Q(x)) \det Q'(x) \\ &= \det P'(Q(x))Q'(x) = \det S'(x) = J_S(x). \end{aligned}$$

پس قضیه برای S نیز درست می‌باشد.

هر نقطه $a \in E$ همسایگی چون $U \subset E$ دارد که در آن

$$(33) \quad T(x) = T(a) + B_1 \cdots B_{k-1} G_k \circ G_{k-1} \circ \cdots \circ G_1(x-a)$$

که B_i و G_i به صورت بوده در قضیه ۷۰۱۰ هستند. با قرار $V = T(U)$ نتیجه خواهد شد که (۳۱) برقرار است هرگاه تکیه‌گاه f در V جای داشته باشد. بنابراین:

هر نقطه $y \in T(E)$ در مجموعه بازی چون $V_y \subset T(E)$ واقع است بطوری که (۳۱) به ازای تمام توابع پیوسته‌ای که تکیه‌گاهش در V_y جا دارند برقرار می‌باشد.

حال فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای با تکیه‌گاه فشرده $K \subset T(E)$ باشد. چون $\{V_y\}$ K را می‌پوشاند، نتیجه قضیه ۸.۱۰ نشان می‌دهد که $f = \sum \psi_i f$ ، که در آن هر ψ_i پیوسته است و هر ψ_i تکیه‌گاه در V_y دارد. پس (۳۱) به ازای هر $\psi_i f$ برقرار است؛ و در نتیجه، برای مجموعه‌شان f نیز چنین خواهد بود.

فرمهای دیفرانسیل

حال بخشی از ابزارهای لازم برای شکل II بعدی قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را که معمولاً "قضیه استوکس" نام دارد عرضه می‌کنیم. شکل آغازی قضیه استوکس در کاربردهای آنالیز برداری در الکترومغناطیس ظاهر گشت، و برحسب ناو میدان برداری بیان شده بود. قضیه گرین^۱ و قضیه دیورژانس حالات خاص دیگری از آن می‌باشند. این مطالب در پایان فصل به اختصار مطرح می‌شوند.

کیفیت بارز قضیه استوکس این است که تنها مطلب پیچیده در باب آن ساخت ماهرانه تعریفهایی است که برای بیان صورت آن لازمند. این تعریفها به فرمهای دیفرانسیل، مشتقاتشان، کرانه‌ها، و جهت مربوط می‌شوند. به محض فهمیده شدن این مفاهیم، صورت قضیه بسیار مختصر و موجز است و اثباتش مشکل زیادی به بار نخواهد آورد.

تا بحال مشتقات توابع چند متغیره را فقط برای توابعی در نظر گرفته‌ایم که در مجموعه‌های باز تعریف شده‌اند. این عمل برای احتراز از مشکلاتی بود که ممکن است در نقاط کرانه‌ای پیش آیند. اما فعلاً "مقتضی است که توابع مشتقپذیر بر مجموعه‌های فشرده مطرح شوند. لذا، قرار داد زیر را می‌پذیریم:

وقتی می‌گوییم f یک $\mathcal{C}^k$ نگاشت (یا یک $\mathcal{C}^k$ نگاشت) از مجموعه فشرده $R^k \subset D$ بتوی R^n است یعنی که یک $\mathcal{C}^k$ نگاشت (یا یک $\mathcal{C}^k$ نگاشت) g از مجموعه بازی چون $R^k \subset W$ بتوی R^n هست بطوری که $D \subset W$ و، به ازای هر $x \in D$ ، $g(x) = f(x)$.

۱۰۰۱۰ تعریف. فرض کنیم E یک مجموعه بازی باز در R^n باشد. هر سطح k بعدی در E یک $\mathcal{C}^k$ نگاشت ϕ از مجموعه‌ای فشرده مانند $R^k \subset D$ بتوی E است.

D قلمرو پارامتری Φ نام یافته است. نقاط D با $u = (u_1, \dots, u_k)$ نشان داده خواهند شد.

ما خود را به حالت ساده‌ای که در آن D یک حجره k بعدی و یا سادک k بعدی Q^k وصف شده در مثال ۴.۱۰ است محدود می‌کنیم. دلیلش این است که ما به اجبار روی D انتگرال خواهیم گرفت، و هنوز انتگرالگیری روی زیر مجموعه‌های پیچیده تر R^k را مطرح نکرده‌ایم. خواهید دید که این قید بر D (که از حالا به بعد تلویحا "پذیرفته می‌شود") به کلیت نظریه فرمهای دیفرانسیل حاصل لطمه زیادی نخواهد زد.

تأکید می‌کنیم که سطوح k بعدی در E نگاشتهایی بتوی E تعریف شده‌اند نه زیر مجموعه‌هایی از E . این مطلب با تعریف قبلی ما از منحنیها (تعریف ۲۶.۰۶) مطابقت دارد. در واقع، سطوح k بعدی دقیقاً همان منحنیهای به طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشند.

۱۱.۱۰ تعریف. فرض کنیم E مجموعه‌ای بازی در R^n باشد. یک فرم دیفرانسیل از مرتبه $k \geq 1$ در E (مختصراً، یک فرم k بعدی در E) تابعی است چون ω ، که به طور علامتی با مجموع

$$(34) \quad \omega = \sum a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

نموده می‌شود (اندیسهای $i_1, \dots, i_k$ مستقلاً از ۱ تا n تغییر می‌کنند)، بطوری که به هر سطح k بعدی Φ در E عدد $\int_{\Phi} \omega$ را طبق قاعده

$$(35) \quad \int_{\Phi} \omega = \int_D \sum a_{i_1 \dots i_k}(\Phi(\mathbf{u})) \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} d\mathbf{u},$$

که در آن D قلمرو پارامتری Φ است، مربوط می‌کند.

توابع $a_{i_1 \dots i_k}$ تابعهایی حقیقی و پیوسته در E فرض می‌شوند. چنانچه $\phi_1, \dots, \phi_n$ مؤلفه‌های Φ باشند، ژاکوبی آمده در (۳۵) ژاکوبی است که بانگاشت

$$(u_1, \dots, u_k) \rightarrow (\phi_{i_1}(\mathbf{u}), \dots, \phi_{i_k}(\mathbf{u}))$$

مشخص خواهد شد.

توجه کنید که سمت راست (۳۵) انتگرالی روی D ، بصورتی که در تعریف ۱.۱۰ (یا مثال ۴.۱۰) معرفی شده است و (۳۵) تعریف علامت $\int_{\Phi} \omega$ می‌باشد.

فرم k بعدی ω را از رده $\mathcal{E}^k$ یا $\mathcal{E}^k$ نامند هرگاه توابع $a_{i_1 \dots i_k}$ در (۳۴) همه از رده $\mathcal{E}^0$ یا $\mathcal{E}^0$ باشند.

یک فرم 0 بعدی در E ، بنا به تعریف، یک تابع پیوسته در E گرفته می‌شود.

۱۲۰۱۰ چند مثال

(آ) فرض کنیم γ یک سطح ۱ بعدی (منحنی از رده $\mathcal{C}^1$) در R^3 با قلمرو پارامتری $[0, 1]$ باشد.

به جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) ، و قرار می‌دهیم

$$\omega = x \, dy + y \, dx.$$

در این صورت،

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 [\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t)] \, dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0).$$

توجه کنید که در این مثال $\int_{\gamma} \omega$ فقط به نقطه ابتدایی $\gamma(0)$ و نقطه انتهایی $\gamma(1)$ منحنی، γ بستگی دارد. بخصوص، $\int_{\gamma} \omega$ به ازای هر منحنی بسته γ صفر است. (همانطور که بعداً خواهیم دید، این مطلب برای هر فرم ۱ بعدی ω که کامل باشد درست است.)

انتگرالهای فرمهای ۱ بعدی را اغلب *انتگرالهای خط* می‌خوانند.

(ب) $a > 0, b > 0$ را ثابت گرفته تعریف می‌کنیم

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

در نتیجه، γ یک منحنی بسته در R^2 است. (بردش یک بیضی می‌باشد.) در این صورت،

$$\int_{\gamma} x \, dy = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t \, dt = \pi ab,$$

حال آنکه

$$\int_{\gamma} y \, dx = - \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t \, dt = -\pi ab.$$

توجه دارید که $\int_{\gamma} x \, dy$ مساحت ناحیه محدود به γ است. این حالت خاصی از قضیه گرین می‌باشد.

(پ) فرض کنیم D حجه‌ای ۳ بعدی باشد که با

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

تعریف شده است. تعریف می‌کنیم $\Phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ که در آن

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

در این صورت،

$$J_{\Phi}(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

لذا،

$$(36) \quad \int_{\Phi} dx \wedge dy \wedge dz = \int_D J_{\Phi} = \frac{4\pi}{3}.$$

توجه کنید که Φ ، D را بروی گوی یک‌به‌یسته از R^3 می‌نگارد، این نگاشت درون D یک به یک است (ولی بعضی نقاط کرانه‌ای به وسیله Φ بر هم منطبق می‌شوند)، و انتگرال (۳۶) مساوی حجم $\Phi(D)$ می‌باشد.

۱۳۰۱۰ خواص مقدماتی. فرض کنیم $\omega, \omega_1, \omega_2$ فرمهایی k بعدی در E باشند. می‌نویسیم $\omega_1 = \omega_2$ اگر و فقط اگر به ازای هر سطح k بعدی Φ در E ، $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$. بخصوص، $\omega = 0$ یعنی به ازای هر سطح k بعدی Φ در E ، $\omega(\Phi) = 0$. هرگاه c عددی حقیقی باشد، آنگاه $c\omega$ یک فرم k بعدی است که با

$$(37) \quad \int_{\Phi} c\omega = c \int_{\Phi} \omega$$

تعریف می‌شود: $\omega = \omega_1 + \omega_2$ یعنی به ازای هر سطح k بعدی Φ در E

$$(38) \quad \int_{\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_1 + \int_{\Phi} \omega_2.$$

به عنوان حالتی خاص از (۳۷)، ملاحظه می‌کنیم که ω - طوری تعریف شده است که

$$(39) \quad \int_{\Phi} (-\omega) = - \int_{\Phi} d\omega.$$

فرم k بعدی

$$(40) \quad \omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم $\bar{\omega}$ فرم k بعدی باشد که از تعویض جفتی زیرنویس در (۴۰) با هم به دست می‌آید. هرگاه (۳۵) و (۳۹) را با این مطلب که یک دترمینان در صورت

تعویض دو سطرش با هم تغییر علامت می‌دهد تلفیق کنیم، خواهیم دید که

$$(41) \quad \bar{\omega} = -\omega.$$

به عنوان حالتی خاص از این، توجه کنید که رابطه یاد تعویض پذیری

$$(42) \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

به ازای هر i و j برقرار است. بخصوص،

$$(43) \quad dx_i \wedge dx_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

کلیتر می‌گوییم، به رابطه (۴۰) باز می‌گردیم و فرض می‌کنیم به ازای $r \neq s$ ،

$$i_r = i_s. \quad \text{هرگاه این دو زیرنویس با هم عوض شوند، } \bar{\omega} = \omega. \quad \text{در نتیجه، مطابق (۴۱)،}$$

$$\omega = 0.$$

به عبارت دیگر، هرگاه ω با (۴۰) داده شده باشد، آنگاه $\omega = 0$ مگر آنکه زیرنویسهای

$$i_1, \dots, i_k$$

همه متمایز باشند.

لذا، اگر ω مثل ω (۳۴) باشد، مجموعه‌های با زیرنویسهای مکرر را می‌توان

بدون تغییر ω حذف کرد.

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $k > n$ ، تنها فرم k بعدی در هر زیرمجموعه باز

R^n است.

یاد تعویض پذیری که با (۴۲) بیان شده مؤید توجه بیش از حدی است که باید حین

مطالعه فرمهای دیفرانسیل به علامات منفی نمود.

۱۴۰۱۰ فرمهای k بعدی اساسی. هرگاه $i_1, \dots, i_k$ اعداد صحیح باشند بطوری که

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad \text{تایی مرتب } \{i_1, \dots, i_k\} \quad \text{باشد، آنگاه } I \text{ رایک اندیس } k \text{ بعدی}$$

صعودی می‌نامیم و نماد مختصر

$$(44) \quad dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

را به کار می‌بریم. فرمهای dx_I فرمهای k بعدی اساسی در R^n خوانده خواهند شد.

تحقیق اینکه درست $n!/k!(n-k)!$ فرم k بعدی اساسی در R^n وجود دارد مشکل

نیست. بهر حال، ما از این موضوع هیچ استفاده‌ای نخواهیم کرد.

مطلب خیلی مهم‌ترین است که هر فرم k بعدی را می‌توان بر حسب فرمهای k بعدی

اساسی نمایش داد. برای اثبات آن ملاحظه می‌کنیم که هر k تایی $\{j_1, \dots, j_k\}$ از اعداد

صحیح متمایز را می‌توان با تعویض چندجفت از اینها با هم به یک اندیس k بعدی صعودی

I بدل کرد؛ که، همانطور که در بخش ۱۳.۱۰ دیدیم، هریک از این تعویضها به یک ضرب در -1 منجر می شود. لذا،

$$(45) \quad dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = \varepsilon(j_1, \dots, j_k) dx_I$$

که در آن $\varepsilon(j_1, \dots, j_k)$ ، بسته به عده تعویضهای لازم، 1 یا -1 می باشد. در واقع، به آسانی می بینیم که

$$(46) \quad \varepsilon(j_1, \dots, j_k) = s(j_1, \dots, j_k)$$

که در آن s همان s تعریف ۳۳.۹ می باشد.

به عنوان مثال،

$$dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5,$$

$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

چنانچه هر k تایی در (۳۴) به یک اندیس k بعدی صعودی بدل می شود، نمایش متعارف ω را به دست خواهیم آورد:

$$(47) \quad \omega = \sum_I b_I(x) dx_I.$$

در (۴۷) جمع بندی روی تمام اندیسهای k بعدی صعودی I گرفته می شود. [البته، هر اندیس k بعدی صعودی از بسیاری (دقیقا" از $k!$) تایی ناشی می شود. لذا، هر b_I در (۴۷) ممکن است مجموع چند ضریب ذکر شده در (۳۴) باشد.]

به عنوان مثال،

$$x_1 dx_2 \wedge dx_1 - x_2 dx_3 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

یک فرم 2 بعدی در R^3 است که نمایش متعارف آن

$$(1 - x_1) dx_1 \wedge dx_2 + (x_2 + x_3) dx_2 \wedge dx_3$$

می باشد.

قضیه یکتایی زیر یکی از دلایل اصلی معرفی نمایش متعارف یک فرم k بعدی می باشد.

۱۵.۱۰. قضیه. فرض کنیم

$$(48) \quad \omega = \sum_I b_I(x) dx_I$$

نمایش متعارف فرم k بعدی ω در مجموعه $E \subset R^n$ باشد. هرگاه $\omega = 0$ در E ، آنگاه به ازای هر اندیس k بعدی I و هر $x \in E$ ، $b_I(x) = 0$.

توجه کنید که برای مجموعه‌های نظیر (۳۴) حکم مشابه صحیح نیست، چرا که، مثلاً،

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 = 0.$$

برهان. برای رسیدن به تناقض فرض می‌کنیم به ازای $v \in E$ ای و اندیس k بعدی صعودی مانند $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ ، $b_J(v) > 0$ ، چون b_J پیوسته است، $h > 0$ ای وجود دارد بطوری که به ازای تمام $x \in R^n$ هایی که مختصاتشان در $|x_i - v_i| \leq h$ صدق می‌کنند $b_J(x) > 0$. فرض کنید D چنان حجره k بعدی در R^k باشد که $u \in D$ اگر و فقط اگر به ازای $|u_r| \leq h$ ، $r = 1, \dots, k$ ، تعریف می‌کنیم

$$(49) \quad \Phi(u) = v + \sum_{r=1}^k u_r e_{j_r} \quad (u \in D).$$

در این صورت، Φ یک سطح k بعدی در E است، با قلمرو پارامتری D ، و به ازای هر $u \in D$ ، $b_J(\Phi(u)) > 0$. حکم می‌کنیم که

$$(50) \quad \int_{\Phi} \omega = \int_D b_J(\Phi(u)) du.$$

چون طرف راست (۵۰) مثبت است، نتیجه می‌شود که $\omega(\Phi) \neq 0$. لذا، (۵۰) تناقض ما را خواهد داد.

برای اثبات (۵۰)، قاعده (۳۵) را در مورد نمایش (۴۸) به کار می‌گیریم. صریحتر بگوییم، ژاکوبیهایی را که در (۳۵) ظاهر شده‌اند حساب می‌کنیم. بنابر (۴۹)،

$$\frac{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} = 1.$$

به ازای هر اندیس k بعدی و صعودی دیگر $I \neq J$ ژاکوبی صفر است، زیرا مساوی دترمینان ماتریسی است که دست کم یک سطر صفر دارد.

۱۶۰۱۰ حاصل ضربهای فرمهای k بعدی اساسی. فرض کنیم

$$(51) \quad I = \{i_1, \dots, i_p\}, \quad J = \{j_1, \dots, j_q\}$$

که در آنها $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ و $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$ حاصل ضرب فرمهای اساسی نظیر dx_I و dx_J در R^n یک فرم $(p+q)$ بعدی در R^n است که با علامت $dx_I \wedge dx_J$ نموده و توسط

$$(52) \quad dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$$

تعریف می شود .

هرگاه I و J عنصر مشترک داشته باشند، بحث بخش ۱۳۰۱۰ نشان خواهد داد که

$$dx_I \wedge dx_J = 0$$

اگر I و J عنصر مشترک نداشته باشند، به جای اندیس $(p+q)$ بعدی صعودی که با آراستن اعضای $I \cup J$ به ترتیب صعودی حاصل می شود می نویسیم $[I, J]$. در این صورت، $dx_{[I, J]}$ یک فرم $(p+q)$ بعدی اساسی است. حکم می کنیم

$$(53) \quad dx_I \wedge dx_J = (-1)^s dx_{[I, J]}$$

که در آن α تعداد تفاضلهای $i_s - j_t$ است که منفی هستند. (لذا، تعداد تفاضلهای مثبت $\alpha - pq$ می باشد.)

برای اثبات (۵۳)، اعمال زیر را بر اعداد

$$(54) \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q$$

انجام می دهیم. i_p را قدم به قدم به راست می بریم تا جایی که همسایه چپش از i_p کمتر باشد. تعداد گامها برابر عده زیرنویسهایی چون i است که $i_p < j_i$. (توجه کنید که 0 گامها حالات جداگانه ای هستند.) بعد همین کار را برای $i_1, \dots, i_{p-1}$ انجام می دهیم. تعداد کل گامهای برداشته شده α است. آرایش نهایی حاصل $[I, J]$ خواهد بود. هر قدم، وقتی سمت راست (۵۲) برداشته شود، موجب ضرب $dx_I \wedge dx_J$ در -1 می شود. بنابراین، (۵۳) برقرار می باشد.

توجه دارید که سمت راست (۵۳) نمایش متعارف $dx_I \wedge dx_J$ است.

اینک فرض می کنیم $K = (k_1, \dots, k_r)$ یک اندیس r بعدی صعودی در $\{1, \dots, n\}$ باشد. با استفاده از (۵۳) ثابت می کنیم

$$(55) \quad (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K).$$

هرگاه دو مجموعه از مجموعه های I, J, K ، و K عنصر مشترک داشته باشند، هرطرف

(۵۵) صفر است. در نتیجه، دو طرف مساوی خواهند بود.

پس فرض می کنیم I, J, K دو به دو از هم جدا باشند. $[I, J, K]$ را اندیس

$(p+q+r)$ بعدی می انگاریم که از اجتماع آنها حاصل می شود. β را با جفت مرتب

(J, K) و γ را با جفت مرتب (I, K) به همان نحو که α در (۵۳) با (I, J) مربوط

شده بود ربط می دهیم. در این صورت، با دو بار به کار رفتن (۵۳)، طرف چپ (۵۵)

می شود

$$(-1)^{\alpha} dx_{[I, J]} \wedge dx_K = (-1)^{\alpha} (-1)^{\beta+\gamma} dx_{[I, J, K]},$$

و طرف راست (۵۵) خواهد شد

$$(-1)^{\beta} dx_I \wedge dx_{[J, K]} = (-1)^{\beta} (-1)^{\alpha+\gamma} dx_{[I, J, K]}.$$

پس (۵۵) درست خواهد بود.

۱۷۰۱۰ ضرب. فرض کنیم ω و λ ، در مجموعه بازی چون $E \subset R^n$ ، بترتیب فرمهایی p و q بعدی با نمایشهای متعارف

$$(56) \quad \omega = \sum_I b_I(x) dx_I, \quad \lambda = \sum_J c_J(x) dx_J$$

باشند، که در آنها I روی تمام اندیسهای p بعدی و J روی همه اندیسهای q بعدی مأخوذ از مجموعه $\{1, \dots, n\}$ تغییر می کنند.

حاصل ضربشان، که با علامت $\omega \wedge \lambda$ نموده می شود، مساوی

$$(57) \quad \omega \wedge \lambda = \sum_{I, J} b_I(x) c_J(x) dx_I \wedge dx_J$$

تعریف می گردد. در این مجموع، I و J مستقلاً "روی مقادیر ممکن خود تغییر می کنند، و $dx_I \wedge dx_J$ به همان صورت بوده در بخش ۱۶۰۱۰ می باشد. لذا، $\omega \wedge \lambda$ یک فرم $(p+q)$ بعدی در E خواهد بود.

به آسانی دیده می شود (جزئیات را به عنوان تمرین می گذاریم) که قوانین پخش پذیری

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$$

و

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2),$$

نسبت به جمعی که در بخش ۱۳۰۱۰ تعریف شد، برقرار است. اگر این قوانین پخش پذیری با (۵۵) تلیق شوند، قانون شرکت پذیری

$$(58) \quad (\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma)$$

را برای فرمهای دلخواه ω ، λ و σ در E خواهیم داشت.

در این بحث تلویحا "فرض شده بود که $p \geq 1$ و $q \geq 1$. حاصل ضرب فرم ۰ بعدی f با فرم p بعدی ω داده شده با (۵۶) عملاً "مساوی فرم p بعدی

$$f\omega = \omega f = \sum_I f(x) b_I(x) dx_I$$

تعریف می‌شود. رسم این است که وقتی f یک فرم 0 بعدی است، به جای $\omega \wedge f$ می‌نویسند $f\omega$.

۱۸۰۱۰ مشتگیری. حال عملگر مشتگیری d را که به هر فرم k بعدی ω از رده $\mathcal{C}'$ در مجموعه $E \subset R^n$ فرم $(k+1)$ بعدی $d\omega$ را مربوط می‌کند تعریف می‌کنیم. یک فرم 0 بعدی از رده $\mathcal{C}'$ در E چیزی جز یک تابع حقیقی چون $f \in \mathcal{C}'(E)$ نیست، و ما تعریف می‌کنیم

$$(59) \quad df = \sum_{i=1}^n (D_i f)(x) dx_i.$$

هرگاه $\omega = \sum b_I(x) dx_I$ نمایش متعارف فرم k بعدی ω باشد، به ازای هر اندیس k بعدی و صعودی I ، $b_I \in \mathcal{C}'(E)$ ، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$(60) \quad d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I.$$

۱۹۰۱۰ مثال. فرض کنیم E در R^n باز، $f \in \mathcal{C}'(E)$ ، و γ یک منحنی به طور پیوسته مشتق پذیر در E با قلمرو $[0, 1]$ باشد. بنابر (۵۹) و (۳۵)،

$$(61) \quad \int_{\gamma} df = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (D_i f)(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

بنابر قاعده زنجیره‌ای، آخرین انتگرالده مساوی $(f \circ \gamma)'(t)$ است. لذا،

$$(62) \quad \int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),$$

و خواهیم دید که، مثل قسمت (۱) مثال ۱۲۰۱۰، $\int_{\gamma} df$ به ازای تمام γ های با نقطه ابتدایی و نقطه انتهایی مشترک یکی است.

بنابراین، قیاس با مثال ۱۲۰۱۰ (ب) نشان می‌دهد که فرم یک بعدی $x dy$ مشتق هیچ فرم صفر بعدی f نیست. این را می‌شد از قسمت (ب) قضیه زیر نیز نتیجه گرفت، زیرا

$$d(x dy) = dx \wedge dy \neq 0.$$

۲۰۰۱۰ قضیه

(۱) هرگاه ω و λ بترتیب فرمهایی k بعدی و m بعدی و از رده $\mathcal{C}'$ در E باشند، آنگاه

$$(63) \quad d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda.$$

(ب) هرگاه ω از رده $\mathcal{C}^n$ در E باشد، آنگاه $d^2\omega = 0$.

البته، در اینجا $d^2\omega$ یعنی $d(d\omega)$.

برهان. بخاطر (۵۷) و (۶۰)، قسمت (آ) در صورتی نتیجه می شود که (۶۳) برای حالت خاص

$$(64) \quad \omega = f dx_I, \quad \lambda = g dx_J$$

که در آن $f, g \in \mathcal{C}'(E)$ ، dx_I یک فرم k بعدی اساسی، و dx_J یک فرم m بعدی اساسی است، ثابت شود. [چنانچه k یا m هر دو ۰ باشند، فقط dx_I یا dx_J را در (۶۴) حذف می کنیم؛ این عمل بر برهانی که می آید بی تأثیر است.] در این صورت،

$$\omega \wedge \lambda = fg dx_I \wedge dx_J.$$

فرض کنیم I و J عنصر مشترک نداشته باشند. [در حالت دیگر هر یک از سه جمله (۶۳) مساوی ۰ است.] پس، اگر از (۵۳) استفاده کنیم،

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg dx_I \wedge dx_J) = (-1)^s d(fg dx_{I \cup J}).$$

بنابر (۵۹)، $d(fg) = f dg + g df$. لذا، (۶۰) نتیجه می دهد که

$$d(\omega \wedge \lambda) = (-1)^s (f dg + g df) \wedge dx_{I \cup J}$$

$$= (g df + f dg) \wedge dx_I \wedge dx_J.$$

چون dg یک فرم یک بعدی و dx_I یک فرم k بعدی است، بنابر (۴۲) خواهیم داشت

$$dg \wedge dx_I = (-1)^k dx_I \wedge dg.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \lambda) &= (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^k (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda, \end{aligned}$$

که (آ) را ثابت خواهد کرد.

توجه دارید که قانون شرکتپذیری (۵۸) آزادانه به کار رفته است.

حال (ب) را ابتدا برای یک فرم صفر بعدی $f \in \mathcal{C}^n$ ثابت می کنیم:

$$\begin{aligned} d^2f &= d\left(\sum_{j=1}^n (D_j f)(\mathbf{x}) dx_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n d(D_j f) \wedge dx_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}f)(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j.$$

چون $D_{ij}f = D_{ji}f$ (قضیه ۴۱.۰۹) و $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ ، می‌بینیم که $d^2f = 0$.
هرگاه، همانند در (۶۴)، $\omega = f dx_I$ ، آنگاه $d\omega = (df) \wedge dx_I$. بنابراین (۶۵)،
 $d(dx_I) = 0$ پس (۶۳) نشان خواهد داد که

$$d^2\omega = (d^2f) \wedge dx_I = 0.$$

۲۱.۱۰ تغییر متغیرها. فرض کنیم E مجموعه‌ای باز در $\mathcal{U}', T, R^n$ ، نگاشتی از E بتوی مجموعه‌ای باز $V \subset R^m$ ، و ω یک فرم k بعدی در V باشد که نمایش متعارفش

$$(65) \quad \omega = \sum_I b_I(\mathbf{y}) dy_I$$

است. (ما $\mathbf{y}$ را برای نقاط V و $\mathbf{x}$ را برای نقاط E به کار می‌بریم).
فرض کنیم $t_1, \dots, t_m$ مؤلفه‌های T باشند: هرگاه

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = T(\mathbf{x}),$$

آنگاه $y_i = t_i(\mathbf{x})$. همانند در (۵۹)،

$$(66) \quad dt_i = \sum_{j=1}^n (D_j t_i)(\mathbf{x}) dx_j \quad (1 \leq i \leq m).$$

پس هر dt_i یک فرم یک بعدی در E می‌باشد.

نگاشت T ، ω را به یک فرم k بعدی ω_T در E که تعریفش

$$(67) \quad \omega_T = \sum_I b_I(T(\mathbf{x})) dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$$

است تبدیل می‌کند. در هر مجموعه‌ای (۶۷)، $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ یک اندیس k بعدی صعودی خواهد بود.

قضیه بعدی ما نشان می‌دهد که جمع، ضرب، و مشتقگیری از فرمها طوری تعریف

شده‌اند که با تغییر متغیرها تعویض می‌شوند.

۲۲.۱۰ قضیه. با T به صورت بوده در بخش ۲۱.۱۰، فرض می‌کنیم ω و λ به ترتیب فرمهایی k بعدی و m بعدی در V باشند. در این صورت،

$$: (\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T, \quad k = m \text{ اگر } (\bar{\lambda})$$

$$; (\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T \quad (ب)$$

$$d(\omega_T) = (d\omega)_T \quad (پ) \quad \text{هرگاه } \omega \text{ از رده } \mathcal{C}^r \text{ و } T \text{ از رده } \mathcal{C}^n \text{ باشد.}$$

برهان. قسمت (آ) فوراً " از تعریفها نتیجه می شود. قسمت (ب) به محض تشخیص اینکه قطع نظر از صعودی بودن یا نبودن $\{i_1, \dots, i_r\}$

$$(68) \quad (dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r})_T = dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_r}$$

تقریباً " واضح خواهد بود. رابطه (۶۸) برقرار است، زیرا تعداد علامات منهای لازم در هر طرف (۶۸) برای ایجاد تجدید آرایشهای صعودی یکی است.

به اثبات قسمت (پ) می پردازیم. گوییم هرگاه f یک فرم صفر بعدی از رده $\mathcal{C}^r$ در V باشد، آنگاه

$$f_T(\mathbf{x}) = f(T(\mathbf{x})), \quad df = \sum_i (D_i f)(y) dy_i.$$

بنا به قاعده زنجیره ای نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} (69) \quad d(f_T) &= \sum_j (D_j f_T)(\mathbf{x}) dx_j \\ &= \sum_j \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x}))(D_j t_i)(\mathbf{x}) dx_j \\ &= \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x})) dt_i \\ &= (df)_T. \end{aligned}$$

هرگاه $dy_I = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$ ، آنگاه $(dy_I)_T = dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$ ، و قضیه ۲۰۰۱۰ نشان می دهد که

$$(70) \quad d((dy_I)_T) = 0.$$

(این جایی است که فرض $T \in \mathcal{C}^n$ به کار رفته است.)

حال فرض می کنیم $\omega = f dy_I$ در این صورت،

$$\omega_T = f_T(\mathbf{x}) (dy_I)_T,$$

و محاسبات قبلی به

$$\begin{aligned} d(\omega_T) &= d(f_T) \wedge (dy_I)_T = (df)_T \wedge (dy_I)_T \\ &= ((df) \wedge dy_I)_T = (d\omega)_T \end{aligned}$$

منجر می‌شوند. تساوی اول بنا به (۶۳) و (۷۰)، تساوی دوم بنا به (۶۹)، تساوی سوم بنا بر قسمت (ب)، و تساوی آخر بنا به تعریف $d\omega$ برقرار است.

حالت کلی (پ)، در صورتی که $(\tilde{A})$ را به کار ببریم، از حالت خاصی که هم‌اکنون ثابت شد نتیجه می‌شود. این برهان را تمام خواهد کرد.

هدف بعدی ما قضیه ۲۵.۱۰ است. این قضیه مستقیماً "از دو خاصیت تبدیلی مهم دیگر فرمهای دیفرانسیل، که ما آنها را اول بیان می‌کنیم، نتیجه خواهد شد.

۲۳.۱۰ قضیه. فرض کنیم T یک نگاشت از مجموعه $E \subset R^n$ بتوی مجموعه $V \subset R^m$ ، S یک $\mathcal{G}'$ -نگاشت از V بتوی مجموعه $W \subset R^p$ ، و ω یک فرم k بعدی در W باشد بطوری که ω_S یک فرم k بعدی در V است و $(\omega_S)_T$ و ω_{ST} هر دو فرمهایی k بعدی در E می‌باشند، که در اینجا ST با $(ST)(x) = S(T(x))$ تعریف شده است. در این صورت،

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}. \quad (71)$$

برهان. چنانچه ω و λ فرمهایی در W باشند، قضیه ۲۲.۱۰ نشان می‌دهد که

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

و

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}.$$

پس اگر (۷۱) برای ω و برای λ برقرار باشد، نتیجه می‌شود که (۷۱) برای $\omega \wedge \lambda$ نیز برقرار است. چون هر فرم را می‌توان از فرمهای ۰ بعدی و ۱ بعدی با جمع و ضرب ساخت، و چون (۷۱) برای فرمهای ۰ بعدی بدیهی است، کافی است (۷۱) را در حالت $\omega = dz_q$ ، $q = 1, \dots, p$ اثبات نماییم. (نقاط E, V, W را به ترتیب با x, y, z نشان می‌دهیم.)

فرض کنیم $t_1, \dots, t_m$ مؤلفه‌های T ، $s_1, \dots, s_p$ مؤلفه‌های S ، و $r_1, \dots, r_p$ مؤلفه‌های ST باشند. هرگاه $\omega = dz_q$ ، آنگاه

$$\omega_S = ds_q = \sum_j (D_j s_q)(y) dy_j.$$

در نتیجه، قاعده زنجیره‌ای ایجاب می‌کند که

$$(\omega_S)_T = \sum_j (D_j s_q)(T(x)) dt_j$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_j (D_j s_q)(T(x)) \sum_i (D_i t_j)(x) dx_i \\
 &= \sum_i (D_i r_q)(x) dx_i = dr_q = \omega_{ST}.
 \end{aligned}$$

۲۴۰۱۰ قضیه. فرض کنیم ω یک فرم k بعدی در مجموعه Φ باز $E \subset R^n$ یک سطح k بعدی در E با قلمرو پارامتری $D \subset R^k$ و Δ سطح k بعدی در R^k با قلمرو پارامتری D باشد که توسط $\Delta(u) = u (u \in D)$ تعریف می‌شود. در این صورت،

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.$$

برهان. فقط لازم است حالت

$$\omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

را در نظر بگیریم. گوئیم هرگاه $\phi_1, \dots, \phi_n$ مؤلفه‌های Φ باشند، آنگاه

$$\omega_{\Phi} = a(\Phi(u)) d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k}.$$

قضیه در صورتی نتیجه می‌شود که بتوان نشان داد

$$(72) \quad d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = J(u) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$$

که در آن

$$J(u) = \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)},$$

زیرا (۷۲) ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}
 \int_{\Phi} \omega &= \int_D a(\Phi(u)) J(u) du \\
 &= \int_{\Delta} a(\Phi(u)) J(u) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.
 \end{aligned}$$

فرض کنیم $[A]$ ماتریس k در k با درایه‌های

$$\alpha(p, q) = (D_q \phi_{i_p})(u) \quad (p, q = 1, \dots, k)$$

باشد. در این صورت،

$$d\phi_{i_p} = \sum_q \alpha(p, q) du_q;$$

در نتیجه،

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = \sum \alpha(1, q_1) \cdots \alpha(k, q_k) du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k}.$$

در مجموعه آخری $q_1, \dots, q_k$ "مستقلاً" روی $1, \dots, k$ تغییر می‌کنند. رابطه پادتعویض پذیری (۴۲) ایجاب می‌کند که

$$du_{q_1} \wedge \dots \wedge du_{q_k} = s(q_1, \dots, q_k) du_1 \wedge \dots \wedge du_k,$$

که در آن s همان s بوده در تعریف ۳۳.۹ است. با به کار بردن این تعریف خواهیم دید که

$$d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} = \det [A] du_1 \wedge \dots \wedge du_k;$$

و چون $J(u) = \det [A]$ ، (۷۲) ثابت شده است.

نتیجه نهایی این بخش دو قضیه قبلی را در هم می‌آمیزد.

۲۵.۱۰ قضیه. فرض کنیم T یک نگاشت از مجموعه باز $E \subset R^n$ بتوی مجموعه باز $\Phi, V \subset R^m$ یک سطح k بعدی در E ، و یک فرم k بعدی در V باشد. در این صورت،

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T.$$

برهان D . را قلمرو پارامتری Φ (در نتیجه، از آن $T\Phi$) می‌انگاریم، و Δ را همان Δ ی قضیه ۲۴.۱۰ تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{T\Phi} = \int_{\Delta} (\omega_T)_{\Phi} = \int_{\Phi} \omega_T.$$

اولین این تساویها قضیه ۲۴.۱۰ است که به جای Φ در مورد $T\Phi$ به کار رفته است. دومین آنها از قضیه ۲۳.۱۰ نتیجه می‌شود. تساوی سوم قضیه ۲۴.۱۰ است با ω_T به جای ω .

سادکها و زنجیرها

۲۶.۱۰ سادکهای مستوی. نگاشت f که فضای برداری X را بتوی فضای برداری Y می‌برد مستوی نام دارد هرگاه $f - f(0)$ خطی باشد. به عبارت دیگر، شرط آن است که به ازای $A \in L(X, Y)$

$$(73) \quad f(x) = f(0) + Ax.$$

لذا، یک نگاشت مستوی از R^k بتوی R^n در صورتی معین است که $f(0)$ و $f(e_i)$ به

زای $1 \leq i \leq k$ معلوم باشند؛ طبق معمول، $\{e_1, \dots, e_k\}$ پایه متعارف R^k خواهد بود. سادک متعارف Q^k مجموعه تمام $u \in R^k$ ها به شکل

$$(74) \quad u = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$$

که در آنها به ازای $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ و $\sum \alpha_i \leq 1$ تعریف می شود.

حال فرض می کنیم $p_0, p_1, \dots, p_k$ نقاطی از R^n باشند. سادک k بعدی مستوی جهتدار

$$(75) \quad \sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$$

سطح k بعدی در R^n تعریف می شود با قلمرو پارامتری Q^k که با نگاشت مستوی

$$(76) \quad \sigma(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k) = p_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (p_i - p_0)$$

مشخص می گردد. توجه دارید که σ به وسیله

$$(77) \quad \sigma(0) = p_0, \quad \sigma(e_i) = p_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

و

$$(78) \quad \sigma(u) = p_0 + Au \quad (u \in Q^k)$$

که در آن $Ae_i = p_i - p_0, i = 1 \leq k$ به ازای $1 \leq i \leq k$ مشخص می گردد.

σ را جهتدار نامیم تا بر این نکته که ترتیب رؤس $p_0, \dots, p_k$ به حساب آمده است تأکید کرده باشیم. هرگاه

$$(79) \quad \bar{\sigma} = [p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}]$$

که در آن $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ جایگشتی از مجموعه مرتب $\{0, 1, \dots, k\}$ است، نماد

$$(80) \quad \bar{\sigma} = s(i_0, i_1, \dots, i_k)\sigma$$

را که در آن s تابع ذکر شده در تعریف ۳۳.۹ است می پذیریم. لذا، بسته به اینکه $s = 1$ یا $s = -1$ ، $\bar{\sigma} = \pm \sigma$ به بیان دقیق، با قبول (۷۵) و (۷۶) به عنوان تعریف σ ، نباید بنویسیم $\bar{\sigma} = \sigma$ مگر اینکه $i_0 = 0, \dots, i_k = k$ ، حتی اگر $s(i_0, \dots, i_k) = 1$ آنچه در اینجا داریم یک رابطه هم ارزی است نه یک تساوی. بهر حال، برای اهداف ما، نماد فوق الذکر با قضیه ۲۷.۱۰ توجیه می شود.

هرگاه $\bar{\sigma} = \varepsilon \sigma$ (با استفاده از قرارداد فوق) و $\varepsilon = 1$ ، می گوئیم $\bar{\sigma}$ و σ دارای یک جهت هستند. چنانچه $\varepsilon = -1$ ، گوئیم $\bar{\sigma}$ و σ جهت های مختلفی دارند. توجه کنید که ما منظور خود را از "جهت یک سادک" تعریف نکرده ایم. آنچه تعریف شده رابطه ای است

بین جفتهایی از سادکها که دارای یک مجموعه از رثوسند، و این رابطه عبارت است از "دارای یک جهت بودن".

لکن حالتی هست که در آن می توان جهت یک سادک را به طور طبیعی تعریف کرد. این وقتی روی می دهد که $n = k$ و بردارهای $p_i - p_0$ ($1 \leq i \leq k$) مستقل می باشند. در این وضع، تبدیل خطی A در (۷۸) معکوسپذیر است، و دترمینانش (که همان ژاکوبی σ است) ۰ نمی باشد. در این صورت، σ به طور مثبت (یا به طور منفی) جهتدار است هرگاه $\det A$ مثبت (یا منفی) باشد. بخصوص، سادک $[0, e_1, \dots, e_k]$ در R^k که با نگاشت همانی داده شده، جهت مثبت خواهد داشت.

تا بحال فرض کرده ایم $k \geq 1$. یک سادک ۰ بعدی (جهتدار) یک نقطه به انضمام علامتی مربوط به آن تعریف می شود. می نویسیم $\sigma = +p_0$ یا $\sigma = -p_0$ اگر $\sigma = \varepsilon p_0$ ($\varepsilon = \pm 1$) و f یک فرم ۰ بعدی (یعنی، یک تابع حقیقی) باشد، تعریف می کنیم

$$\int_{\sigma} f = \varepsilon f(p_0).$$

۲۷.۱۰ قضیه. هرگاه σ یک سادک k بعدی مستقیم الخط جهتدار در مجموعه E باشد $E \subset R^n$ و $\bar{\sigma} = \varepsilon \sigma$ ، آنگاه به ازای هر فرم k بعدی ω در E

$$(81) \quad \int_{\bar{\sigma}} \omega = \varepsilon \int_{\sigma} \omega.$$

برهان. به ازای $k = 0$ ، (۸۱) از تعریف قبلی نتیجه می شود. پس فرض می کنیم $k \geq 1$ و σ با (۷۵) داده شده باشد.

فرض کنیم $k \leq j$ و $\bar{\sigma}$ از σ با تعویض p_0 و p_j با هم به دست آید. در این صورت،

$$\varepsilon = -1$$

$$\bar{\sigma}(u) = p_j + \beta u \quad (u \in Q^k),$$

که در آن B نگاشت خطی از R^k بتوی R^n است که $p_j - p_0$ و $p_i - p_j$ در $B e_i$ در صورت $i \neq j$ ، تعریف می شود. چنانچه بنویسیم $A e_i = x_i$ ($1 \leq i \leq k$)، که در آن A با (۷۸) داده شده، بردارهای ستونی B (یعنی، بردارهای $B e_i$) عبارت خواهند بود از

$$x_1 - x_j, \dots, x_{j-1} - x_j, -x_j, x_{j+1} - x_j, \dots, x_k - x_j.$$

اگر ستون j م را از هر ستون دیگر کم کنیم، هیچیک از دترمینانهای موجود در (۳۵)

تغییر نمی‌کند، و ما ستونهای $x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_k$ را خواهیم داشت. اینها با ستونهای A فقط در علامت ستون j م فرق دارند. پس (۸۱) برای این حالت برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $0 < i < j \leq k$ و σ از p_i با تعویض p_j با هم به دست آید. پس $\bar{\sigma}(u) = p_0 + Cu$ که در آن C همان ستونهای A را دارد جز آنکه ستونهای i و j م و j م با هم عوض شده‌اند. این باز ایجاب می‌کند (۸۱) برقرار است، زیرا $-1 = \varepsilon$. چون هرجایگشت $\{0, 1, \dots, k\}$ ترکیبی است از حالات خاصی که هم اکنون مورد بحث بودند، پس حالت کلی نتیجه خواهد شد.

۲۸.۱۰ زنجیره‌های مستوی. یک زنجیر k بعدی مستوی Γ در مجموعه $E \subset R^n$ گردآیه-ای است از تعدادی متناهی سادک k بعدی جهتدار $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ در E . این سادکها لزوماً متمایز نیستند. لذا، ممکن است یک سادک در Γ چند بار ظاهر شود. چنانچه Γ مثل بالا و ω یک فرم k بعدی در E باشد، تعریف می‌کنیم

$$(82) \quad \int_{\Gamma} \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\sigma_i} \omega.$$

یک سطح k بعدی Φ در E را می‌توان به مثابه تابعی گرفت که قلمروش گردآیه تمام فرمهای k بعدی در E باشد و عدد $\int_{\Phi} \omega$ را به ω مربوط کند. چون توابع حقیقی را می‌توان (مثل تعریف ۳.۴) بهم افزود، این مطلب استفاده از نماد

$$(83) \quad \Gamma = \sigma_1 + \dots + \sigma_r,$$

یا،

$$(84) \quad \Gamma = \sum_{i=1}^r \sigma_i$$

مختصرتر،

را برای بیان اینکه (۸۲) به ازای هر فرم k بعدی ω در E برقرار است معمول خواهد کرد. برای آنکه از سوء تعبیر اجتناب شود، صریحاً "قید می‌کنیم که نمادهای معرفی شده با (۸۳) و (۸۵) را باید با احتیاط به کار برد. مسئله این است که هر سادک k بعدی مستوی جهتدار σ در R^n تابعی است به دو صورت، با قلمروها و بردهای مختلف؛ و در نتیجه، دو عمل جمع کاملاً متفاوت امکان پذیر است. در اصل، σ به صورت یک تابع R^n مقداری با قلمرو Q^k تعریف شده بود. از اینجهت بود که $\sigma_1 + \sigma_2$ را می‌شد به صورت تابعی

چون تعبیر کرد که بردار $\sigma_1(u) + \sigma_2(u)$ را به هر $u \in Q^k$ مربوط می‌کند. توجه کنید که σ در این صورت باز یک سادک k بعدی مستوی جهتدار در R^n است! این همان چیزی که (۸۳) معنی می‌دهد نیست.

به عنوان مثال، هرگاه مثل (۸۰) داشته باشیم $\sigma_2 = -\sigma_1$ (یعنی، هرگاه σ_1 و σ_2 یک مجموعه رأس داشته ولی متقابلاً "جهتدار باشند) و $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ آنگاه به ازای هر ω ، $\int_{\Gamma} \omega = 0$ ، و می‌توان این مطلب را با نوشتن $\Gamma = 0$ یا $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ بیان کرد. این بدان معنی که $\sigma_1(u) + \sigma_2(u)$ بردار پوچ R^n است نخواهد بود.

۲۹.۱۰ کرانه‌ها. به ازای $k \geq 1$ ، کرانه سادک k بعدی مستوی جهتدار

$$\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$$

زنجیر $(k-1)$ بعدی مستوی

$$(85) \quad \partial\sigma = \sum_{j=0}^k (-1)^j [p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_k]$$

تعریف می‌شود.

به عنوان مثال، هرگاه $\sigma = [p_0, p_1, p_2]$ ، آنگاه

$$\partial\sigma = [p_1, p_2] - [p_0, p_2] + [p_0, p_1] = [p_0, p_1] + [p_1, p_2] + [p_2, p_0].$$

که با مفهوم عادی کرانه جهتدار یک مثلث مطابقت دارد.

بمازای $1 \leq j \leq k$ می‌بینیم که سادک $[p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_k]$ ذکر شده در

(۸۵)، Q^{k-1} را به عنوان قلمرو پارامتری خود دارد و با

$$(86) \quad \sigma_j(u) = p_0 + Bu \quad (u \in Q^{k-1})$$

تعریف می‌شود، که در آن B نگاشت خطی از R^{k-1} به R^n است که با

$$Be_i = p_i - p_0 \quad (1 \leq i \leq j-1),$$

$$Be_i = p_{i+1} - p_0 \quad (j \leq i \leq k-1)$$

مشخص می‌گردد.

سادک

$$\sigma_0 = [p_1, p_2, \dots, p_k],$$

که این نیز در (۸۵) آمده، با نگاشت

$$\sigma_0(u) = p_1 + Bu$$

داده می‌شود که در آن به ازای $1 \leq i \leq k-1$ ، $Be_i = p_{i+1} - p_1$.

۳۰۱۰ سادکها و زنجیرهای مشتقپذیر. فرض کنیم T یک $\mathcal{C}^k$ -نگاشت از مجموعه E باز $E \subset R^n$ بتوی مجموعه $V \subset R^m$ باشد؛ T الزاما "یک به یک نیست. هرگاه σ یک سادک k بعدی مستوی جهتدار در E باشد، آنگاه نگاشت مرکب $\Phi = T \circ \sigma$ (که ما گاهی آن را به شکل ساده‌تر $T\sigma$ خواهیم نوشت) یک سطح k بعدی در V با قلمرو پارامتری Q^k خواهد بود. Φ را یک سادک k بعدی جهتدار از رده $\mathcal{C}^k$ خواهیم نامید.

هرگرده Ψ متناهی چون Ψ از سادکهای k بعدی جهتدار $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ از رده $\mathcal{C}^k$ در V یک زنجیر k بعدی از رده $\mathcal{C}^k$ در V نامیده می‌شود. اگر ω یک فرم k بعدی در V باشد، تعریف می‌کنیم

$$(87) \quad \int_{\Psi} \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\Phi_i} \omega,$$

و نماد مشابه $\Psi = \sum \Phi_i$ را به کار خواهیم برد.

چنانچه $\Gamma = \sum \sigma_i$ یک زنجیر مستوی باشد و $\Phi_i = T \circ \sigma_i$ ، نیز می‌نویسیم $\Psi = T \circ \Gamma$ یا

$$(88) \quad T(\sum \sigma_i) = \sum T\sigma_i.$$

کرانه سادک k بعدی جهتدار $\sigma = T \circ \sigma$ ، یعنی $\partial\Phi$ ، زنجیر $(k-1)$ بعدی تعریف می‌گردد.

(89) $\partial\Phi = T(\partial\sigma)$

در توجیه (۸۹) ملاحظه می‌کنیم که هرگاه T مستوی باشد، $\Phi = T \circ \sigma$ یک سادک k بعدی مستوی جهتدار است، که در این حالت (۸۹) مورد تعریف نداشته بلکه نتیجه‌ای از (۸۵) می‌باشد. لذا، (۸۹) این حالت خاص را تعمیم خواهد داد.

بی‌فاصله می‌بینیم که $\partial\Phi$ از رده $\mathcal{C}^k$ است هرگاه Φ نیز چنین باشد.

سرانجام، کرانه $\partial\Psi$ زنجیر k بعدی $\Psi = \sum \Phi_i$ را زنجیر $(k-1)$ بعدی تعریف می‌کنیم.

$$(90) \quad \partial\Psi = \sum \partial\Phi_i$$

۳۱۰۱۰ کرانه‌های به طور مثبت جهتدار. تا بحال کرانه‌ها را به زنجیرها نسبت داده‌ایم نه به زیرمجموعه‌های R^n . این مفهوم کرانه درست همانی است که برای صورت و برهان قضیه استوکس مناسب‌ترین است. لکن، در عمل، بویژه در R^2 یا R^3 ، رسم و شایسته است که از "کرانه‌های جهتدار" بعضی مجموعه‌ها نیز سخن برود. حال این مفهوم را به طور مختصر توصیف می‌کنیم.

فرض کنیم Q^n سادک متعارف در R^n و σ_0 نگاشت همانی با قلمرو Q^n باشد. همانطور که در بخش ۲۶۰۱۰ دیدیم، σ_0 را می‌شود به عنوان یک سادک n بعدی به طور مثبت جهتدار در R^n گرفت. کرانه‌اش $\partial\sigma_0$ یک زنجیر $(n-1)$ بعدی مستوی است. این زنجیر کرانه به طور مثبت جهتدار مجموعه Q^n نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، کرانه به طور مثبت جهتدار Q^3 عبارت است از

$$[e_1, e_2, e_3] - [0, e_2, e_3] + [0, e_1, e_3] - [0, e_1, e_2].$$

حال فرض کنیم T یک نگاشت 1-1 از Q^n بتوی R^n ، از رده $\mathcal{C}^k$ ، باشد که ژاکوبیش (اقلاً "درون Q^n ") مثبت است. قرار می‌دهیم $E = T(Q^n)$. بنابر قضیه تابع معکوس، E بست زیر مجموعه بازی از R^n است. ما کرانه به طور مثبت جهتدار مجموعه E را برابر زنجیر $(n-1)$ بعدی

$$\partial T = T(\partial\sigma_0)$$

تعریف می‌کنیم، و می‌توانیم این زنجیر $(n-1)$ بعدی را با ∂E نشان دهیم. در اینجا سؤالات واضحی مطرح می‌شود: هرگاه $E = T_1(Q^n) = T_2(Q^n)$ و ژاکوبیه‌های T_1 و T_2 هر دو مثبت باشند، آیا تساوی $\partial T_1 = \partial T_2$ درست است؟ یعنی، آیا تساوی

$$\int_{\partial T_1} \omega = \int_{\partial T_2} \omega$$

برای هر فرم $(n-1)$ بعدی ω برقرار است؟ پاسخ مثبت است، لکن ما برهان آن را حذف می‌کنیم. (برای مشاهده یک نمونه، آخر این بخش را با تمرین ۱۷ مقایسه نمایید.) از این هم می‌توان پا را فراتر گذاشت. فرض کنیم

$$\Omega = E_1 \cup \dots \cup E_r$$

که در آن $E_i = T_i(Q^n)$ ، هر T_i از خواصی که T در بالا داشت برخوردار است، و درونهای مجموعه‌های E_i دودواز هم جدا می‌باشند. در این صورت، زنجیر $(n-1)$ بعدی

$$\partial T_1 + \dots + \partial T_r = \partial\Omega$$

کرانه به طور مثبت جهتدار Ω نام خواهد داشت.

به عنوان مثال، مربع I^2 در R^2 اجتماع $\sigma_1(Q^2)$ و $\sigma_2(Q^2)$ است که در آن

$$\sigma_1(u) = u, \quad \sigma_2(u) = e_1 + e_2 - u.$$

σ_1 و σ_2 هر دو دارای ژاکوبی > 0 یک‌اند. چون

$$\sigma_1 = [0, e_1, e_2], \quad \sigma_2 = [e_1 + e_2, e_2, e_1]$$

خواهیم داشت

$$\partial\sigma_1 = [e_1, e_2] - [0, e_2] + [0, e_1],$$

$$\partial\sigma_2 = [e_2, e_1] - [e_1 + e_2, e_1] + [e_1 + e_2, e_2];$$

مجموع این دو کرانه عبارت خواهد بود از

$$\partial I^2 = [0, e_1] + [e_1, e_1 + e_2] + [e_1 + e_2, e_2] + [e_2, 0].$$

کرانه به طور مثبت جهتدار I^2 توجه کنید که $[e_1, e_2]$ ، $[e_2, e_1]$ را حذف کرده است.

هرگاه Φ یک سطح 2 بعدی در R^m با قلمرو پارامتری I^2 باشد، آنگاه Φ (ملحوظ به

شکل تابعی بر فرمهای 2 بعدی) با زنجیر 2 بعدی

$$\Phi \circ \sigma_1 + \Phi \circ \sigma_2$$

یکی است. لذا،

$$\partial\Phi = \partial(\Phi \circ \sigma_1) + \partial(\Phi \circ \sigma_2)$$

$$= \Phi(\partial\sigma_1) + \Phi(\partial\sigma_2) = \Phi(\partial I^2).$$

به عبارت دیگر، اگر قلمرو پارامتری Φ مربع I^2 باشد، ارجاع به سادگی Q^2 لازم نیست،

بلکه می شود $\partial\Phi$ را مستقیماً از ∂I^2 به دست آورد.

مثالهای دیگر را می توان در تمرینهای ۱۷ تا ۱۹ یافت.

۳۲.۱۰ مثال. به ازای $0 \leq u \leq \pi$ ، $0 \leq v \leq 2\pi$ تعریف می کنیم

$$\Sigma(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

پس Σ یک سطح 2 بعدی در R^3 است که قلمرو پارامتریش مستطیل $R^2 \subset D$ است و بردش کره یکه

در R^3 می باشد. کرانه آن عبارت خواهد بود از

$$\partial\Sigma = \Sigma(\partial D) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

که در آن

$$\gamma_1(u) = \Sigma(u, 0) = (\sin u, 0, \cos u),$$

$$\gamma_2(v) = \Sigma(\pi, v) = (0, 0, -1),$$

$$\gamma_3(u) = \Sigma(\pi - u, 2\pi) = (\sin u, 0, -\cos u),$$

$$\gamma_4(v) = \Sigma(0, 2\pi - v) = (0, 0, 1),$$

با این خاصیت که $[0, \pi]$ و $[0, 2\pi]$ بترتیب بازه های پارامتری برای u و v می باشند.

چون γ_2 و γ_4 ثابتند، مشتقاتشان 0 است. در نتیجه، انتگرال هر فرم 1 بعدی روی γ_2

یا γ_4 صفر می باشد. [ر.ک. مثال ۱۲.۱ (آ).]

و چون $\gamma_3(u) = \gamma_1(\pi - u)$ کاربرد مستقیم (۳۵) نشان می‌دهد که به ازای هر فرم

۱ بعدی ω

$$\int_{\gamma_3} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega.$$

لذا، $\int_{\partial \Sigma} \omega = 0$ و نتیجه خواهیم گرفت که $\partial \Sigma = 0$.

(با اصطلاحات جغرافیا، $\partial \Sigma$ از قطب شمال N شروع به حرکت می‌کند، در امتداد یک نصف‌النهار به سوی قطب جنوب S می‌رود، در S مکث می‌کند، به N در امتداد همان نصف‌النهار بازمی‌گردد، و سرانجام در N توقف خواهد کرد. دو مسیر در امتداد نصف‌النهار در جهات مختلف می‌باشند. از اینرو، دو انتگرال خطی یکدیگر را حذف خواهند کرد. در تمرین ۳۲ نیز یک منحنی وجود دارد که دوبار در کرانه ظاهر می‌شود، منتها بدون حذف.)

قضیه استوکس

۳۳.۱۰ قضیه. هرگاه Ψ یک زنجیر k بعدی از رده $\mathcal{G}^m$ در مجموعه $V \subset R^m$ و ω یک فرم

$(k-1)$ بعدی از رده $\mathcal{G}^m$ در V باشد، آنگاه

$$(91) \quad \int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial \Psi} \omega.$$

حالت $k=m=1$ چیزی جز قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (با فرض اضافی مشتق‌پذیری) نیست. حالت $k=m=2$ قضیه گرین است، و $k=m=3$ "قضیه دیورژانس" گاوس^۱ را به دست می‌دهد. حالت $k=2, m=3$ قضیه‌ای است که در اصل توسط استوکس کشف شد. (کتاب اسپواک^۲ بخشی از زمینه تاریخی مطلب را شرح می‌دهد.) این حالت‌های خاص در آخر فصل حاضر بیشتر مطرح خواهند شد.

برهان. کافی است ثابت شود که به ازای هر سادک k بعدی جهتدار Φ از رده $\mathcal{G}^m$ در V

$$(92) \quad \int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial \Phi} \omega.$$

زیرا هرگاه (۹۲) ثابت شده باشد و $\Psi = \Sigma \Phi$ ، آنگاه (۸۷) و (۸۹) رابطه (۹۱) را ایجاب خواهند کرد.

چنین Φ ای را ثابت گرفته قرار می‌دهیم

$$(93) \quad \sigma = [0, e_1, \dots, e_k].$$

پس σ سادک k بعدی مستوی جهتدار با قلمرو پارامتری Q^k است که با نگاشت همانی تعریف می‌شود. چون Φ نیز بر Q^k تعریف شده است (ر. ک. تعریف ۳۰۰۱۰) و $\Phi \in \mathcal{G}''$ ، پس مجموعه باز $E \subset R^k$ حاوی Q^k موجود و "نگاشتی مانند T از E بتوی V وجود دارد بطوری که $\Phi = T \circ \sigma$. بنابر قضایای ۲۵۰۱۰ و ۲۲۰۱۰ (پ)، طرف چپ (۹۲) برابر

$$\int_{T\sigma} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} d(\omega_T)$$

است. کاربرد دیگری از قضیه ۲۵۰۱۰ نشان می‌دهد که، بنابر (۸۹)، سمت راست (۹۲) مساوی

$$\int_{\ell(T\sigma)} \omega = \int_{T(\ell\sigma)} \omega = \int_{\ell\sigma} \omega_T$$

می‌باشد.

چون ω_T یک فرم $(k-1)$ بعدی در E است، برای اثبات (۹۲) فقط باید نشان داد که به ازای سادک خاص (۹۳) و هر فرم $(k-1)$ بعدی λ از رده $\mathcal{G}'$ در E

$$(94) \quad \int_{\sigma} d\lambda = \int_{\ell\sigma} \lambda.$$

چنانچه $k=1$ ، تعریف سادک 0 بعدی جهتدار نشان می‌دهد که (۹۴) فقط ناظر به این حکم است که به ازای هر تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر f بر $[0, 1]$

$$(95) \quad \int_0^1 f'(u) du = f(1) - f(0)$$

که بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال درست می‌باشد.

از حالا به بعد فرض می‌کنیم $k > 1$ ، عدد صحیح $(1 \leq r \leq k)$ را ثابت می‌گیریم، و $f \in \mathcal{G}''(E)$ را اختیار می‌نماییم. در این صورت، کافی است (۹۴) را برای حالت

$$(96) \quad \lambda = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \dots \wedge dx_k$$

ثابت کنیم، زیرا هر فرم $(k-1)$ بعدی مجموعی از این فرمهای خاص، به ازای $r=1, \dots, k$ می‌باشد.

بنابر (۸۵)، کرانه سادک (۹۳) عبارت است از

$$\partial\sigma = [e_1, \dots, e_k] + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau_i$$

که در آن، به ازای $i = 1, \dots, k$

$$\tau_i = [0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k].$$

قرار می‌دهیم

$$\tau_0 = [e_r, e_1, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_k].$$

توجه کنید که τ_0 از $[e_1, \dots, e_k]$ با $r-1$ تعویض متوالی e_r و همسایه‌های چپش به دست می‌آید. لذا،

$$(97) \quad \partial\sigma = (-1)^{r-1} \tau_0 + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau_i.$$

هرگاه τ_i ، Q^{k-1} را به عنوان قلمرو پارامتری دارد.

هرگاه $x = \tau_0(u)$ و $u \in Q^{k-1}$ ، τ_i نگاه

$$(98) \quad x_j = \begin{cases} u_j & (1 \leq j < r), \\ 1 - (u_1 + \dots + u_{k-1}) & (j = r), \\ u_{j-1} & (r < j \leq k). \end{cases}$$

هرگاه $x = \tau_i(u)$ و $u \in Q^{k-1}$ ، $1 \leq i \leq k$ ، τ_i نگاه

$$(99) \quad x_j = \begin{cases} u_j & (1 \leq j < i), \\ 0 & (j = i), \\ u_{j-1} & (i < j \leq k). \end{cases}$$

به ازای $0 \leq i \leq k$ فرض می‌کنیم J_i ژاکوبی نگاشت

$$(100) \quad (u_1, \dots, u_{k-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_k)$$

باشد که به وسیله τ_i القا می‌شود. وقتی $i=0$ و وقتی $i=r$ ، (۹۸) و (۹۹) نشان می‌دهند که (۱۰۰) نگاشت همانی است. لذا، $J_0 = 1$ ، $J_r = 1$ ، به ازای i های دیگر، اینکه در (۹۹) $x_i = 0$ بیانگر آن است که J_i سطری از صفر دارد؛ در نتیجه، $J_i = 0$. از اینرو، بنابر (۳۵) و (۹۶)،

$$(101) \quad \int_{\tau_i} \lambda = 0 \quad (i \neq 0, i \neq r).$$

پس (۹۷) نتیجه خواهد داد که

$$(102) \quad \int_{\partial\sigma} \lambda = (-1)^{r-1} \int_{\tau_0} \lambda + (-1)^r \int_{\tau_r} \lambda$$

$$= (-1)^{r-1} \int [f(\tau_0(u)) - f(\tau_r(u))] du.$$

از سوی دیگر،

$$d\lambda = (D_r f)(x) dx_r \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

$$= (-1)^{r-1} (D_r f)(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

در نتیجه،

$$(103) \quad \int_{\sigma} d\lambda = (-1)^{r-1} \int_{Q^k} (D_r f)(x) dx.$$

ما (۱۰۳) را این طور حساب می‌کنیم که اول نسبت به x_r روی بازه^۶

$$[0, 1 - (x_1 + \cdots + x_{r-1} + x_{r+1} + \cdots + x_k)]$$

انتگرال می‌گیریم، بعد قرار می‌دهیم $(u_1, \dots, u_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_k)$ و به کمک (۹۸) می‌بینیم که انتگرال روی Q^k در (۱۰۳) مساوی انتگرال روی Q^{k-1} در (۱۰۲) است. بنابراین، (۹۴) برقرار است و برهان تمام خواهد بود.

فرمهای بسته و فرمهای کامل

۳۴۰۱۰ تعریف. فرض کنیم ω یک فرم k بعدی در مجموعه^۷ بازی چون $E \subset R^n$ باشد. چنانچه

فرم $(k-1)$ بعدی λ در E چنان باشد که $d\lambda = \omega$ ، ω در E کامل نامیده می‌شود.

هرگاه ω از رده^۸ $\mathcal{G}'$ باشد و $d\omega = 0$ ، آنگاه ω بسته گفته خواهد شد.

قضیه^۹ ۲۰۰۱۰ (ب) نشان می‌دهد که هر فرم کامل از رده^{۱۰} $\mathcal{G}'$ بسته است.

در بعضی از مجموعه‌های E ، مثلاً "در آنهایی که محدبند، عکس مطلب فوق درست

است؛ این مضمون قضیه^{۱۱} ۳۹۰۱۰ (که معمولاً "به لم پیوانگاره^{۱۲} مشهور است) و قضیه^{۱۳}

۴۰۰۱۰ می‌باشد. بهرحال، مثالهای ۳۶۰۱۰ و ۳۷۰۱۰ فرمهای بسته‌ای را نشان می‌دهند

که کامل نیستند.

۳۵۰۱۰ چند تبصره

(آ) بسته بودن یا نبودن فرم k بعدی ω را می‌توان فقط با مشتقگیری از ضرایب در نمایش

متعارف ω تحقیق کرد. به عنوان مثال، فرم ۱ بعدی

$$(104) \quad \omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i,$$

با این خاصیت که به ازای مجموعه بازی چون $E \subset R^n$ و $f_i \in \mathcal{C}'(E)$ ، بسته است اگر و فقط اگر معادلات

$$(105) \quad (D_j f_i)(x) = (D_i f_j)(x)$$

برای تمام i و j ها در $\{1, \dots, n\}$ و هر $x \in E$ برقرار باشد.

توجه کنید که (۱۰۵) یک شرط "نقطه به نقطه" است؛ این رابطه واجد هیچ خاصیتی همه جایی که به شکل E وابسته باشد نیست.

از سوی دیگر، برای آنکه نشان دهیم ω در E کامل است باید وجود فرمی مانند λ ، که در E تعریف شده، را ثابت کنیم که $d\lambda = \omega$. این عمل به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، نه فقط موضعی بلکه در تمام E ، منجر می شود. به عنوان مثال، برای اثبات اینکه (۱۰۴) در مجموعه E کامل است باید یک تابع (یا فرم ۰ بعدی) مانند $g \in \mathcal{C}'(E)$ پیدا کنیم که

$$(106) \quad (D_i g)(x) = f_i(x) \quad (x \in E, 1 \leq i \leq n).$$

البته، (۱۰۵) شرطی لازم برای حل پذیری (۱۰۶) خواهد بود.

(ب) فرض کنیم ω یک فرم k بعدی کامل در E باشد. در این صورت، یک فرم $(k-1)$ -بعدی مانند λ در E با خاصیت $d\lambda = \omega$ وجود دارد، و قضیه استوکس حکم می کند که به ازای هر زنجیر k بعدی Ψ از رده $\mathcal{C}^m$ در E

$$(107) \quad \int_{\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\lambda = \int_{\partial\Psi} \lambda.$$

چنانچه Ψ_1 و Ψ_2 چنین زنجیرهایی باشند و از یک کرانه برخوردار باشند، نتیجه خواهد شد که

$$\int_{\Psi_1} \omega = \int_{\Psi_2} \omega.$$

بخصوص، انتگرال یک فرم k بعدی کامل در E روی هر زنجیر k بعدی در E که کرانه اش ۰ باشد ۰ است.

به عنوان حالت خاص مهمی از این، توجه می کنیم که انتگرالهای فرمهای ۱ بعدی کامل در E روی منحنیهای (مشتق پذیر) بسته در E صفرند.

(پ) فرض کنیم ω یک فرم k بعدی بسته در E باشد. در این صورت، $d\omega = 0$ ، و قضیه

استوکس حکم می‌کند که به ازای هر زنجیر $(k+1)$ بعدی Ψ از رده $\mathcal{E}''$ در E

$$(108) \quad \int_{\partial\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\omega = 0.$$

به عبارت دیگر، انتگرالهای فرمهای k بعدی بسته در E روی زنجیرهای k بعدی که کرانه‌های زنجیرهای $(k+1)$ بعدی در E اند ۰ می‌باشند.

(ت) فرض کنیم Ψ یک زنجیر $(k+1)$ بعدی در E و λ یک فرم $(k-1)$ بعدی در E ، هر دو از رده $\mathcal{E}''$ باشند. چون $d^2\lambda = 0$ ، دوبار به کارگیری قضیه استوکس نشان می‌دهد که

$$(109) \quad \int_{\partial\partial\Psi} \lambda = \int_{\partial\Psi} d\lambda = \int_{\Psi} d^2\lambda = 0.$$

از این نتیجه می‌گیریم که $\partial^2\Psi = 0$ به عبارت دیگر، کرانه یک کرانه ۰ است. برای اثبات سراسر تر این، ر. ک. تمرین ۱۶.

۳۶۰۱۰ مثال. فرض کنیم $\{0\} - R^2 = E$ ، یعنی صفحه که مبدأش حذف شده است. فرم ۱ بعدی

$$(110) \quad \eta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

در $\{0\} - R^2$ بسته است. این مطلب به آسانی با مشتگیری تحقیق می‌شود. $r > 0$ را ثابت گرفته تعریف می‌کنیم

$$(111) \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

در این صورت، γ یک منحنی (یک "ساده ۱ بعدی جهتدار") در $\{0\} - R^2$ است. چون داریم $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$

$$(112) \quad \partial\gamma = 0.$$

محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که

$$(113) \quad \int_{\gamma} \eta = 2\pi \neq 0.$$

آنچه در تبصره‌های ۳۵۰۱۰ (ب) و (پ) آمده نشان می‌دهد که از (۱۱۳) می‌توانیم دو نتیجه بگیریم:

اول اینکه، η در $\{0\} - R^2$ کامل نیست، زیرا در غیر این صورت (۱۱۲) انتگرال

(۱۱۳) را مجبور به ۰ می‌کرد.

دوم آنکه، γ کرانه هیچ زنجیر ۲ بعدی در $\{0\} - R^2$ (از رده $\mathcal{C}''$) نیست، چرا که در غیر این صورت بسته بودن η انتگرال (۱۱۳) را ۰ می‌گردانید.

۳۷۰۱۰ مثال. فرض کنیم $E = R^3 - \{0\}$ یعنی فضای ۳ بعدی که مبدأش حذف شده است. تعریف می‌کنیم

$$(114) \quad \zeta = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

که در آن به جای (x_1, x_2, x_3) نوشته ایم (x, y, z) . مشتگیری نشان می‌دهد که $d\zeta = 0$. در نتیجه، ζ یک فرم ۲ بعدی بسته در $\{0\} - R^3$ می‌باشد.

فرض کنیم Σ زنجیر ۲ بعدی در $\{0\} - R^3$ باشد که در مثال ۳۲۰۱۰ ساخته شده بود. یادآور می‌شویم که Σ یک پارامتری سازی کره R^3 است. با استفاده از مستطیل D مثال ۳۲۰۱۰ به عنوان قلمرو پارامتری، به آسانی معلوم می‌شود که

$$(115) \quad \int_{\Sigma} \zeta = \int_D \sin u \, du \, dv = 4\pi \neq 0.$$

حال، مثل مثال قبل، می‌توان نتیجه گرفت که ζ در $\{0\} - R^3$ کامل نیست (زیرا، همانطور که در مثال ۳۲۰۱۰ نشان داده شده، $\partial \Sigma = 0$ و، با آنکه $\partial \Sigma = 0$ ، کره Σ کرانه هیچ زنجیر ۳ بعدی در $\{0\} - R^3$ (از رده $\mathcal{C}''$) نمی‌باشد.

نتیجه زیر در برهان قضیه ۳۹۰۱۰ به کار خواهد رفت.

۳۸۰۱۰ قضیه. فرض کنیم E یک مجموعه باز محدب در R^n باشد، $f \in \mathcal{C}'(E)$ ، p یک عدد صحیح $1 \leq p \leq n$ و

$$(116) \quad (D_j f)(x) = 0 \quad (p < j \leq n, x \in E).$$

در این صورت، $F \in \mathcal{C}'(E)$ ی هست بقسمی که

$$(117) \quad (D_p F)(x) = f(x), \quad (D_j F)(x) = 0 \quad (p < j \leq n, x \in E).$$

برهان. می نویسیم $x = (x', x_p, x'')$ که در آن

$$x' = (x_1, \dots, x_{p-1}), \quad x'' = (x_{p+1}, \dots, x_n).$$

(وقتی $p = 1$ وجود ندارد؛ زمانی که $p = n$ وجود نخواهد داشت.) فرض کنیم V مجموعه تمام (x', α_p) هایی در R^p باشد که به ازای x'' ی $(x', x_p, x'') \in E$ ، $V \cdot (x', x_p, x'')$ بدلیل تصویر E بودن، مجموعه باز محدبی در R^p است. چون E محدب و (۱۱۶) برقرار است، $f(x)$ به x'' بستگی ندارد. لذا، تابعی چون φ با قلمرو V هست بطوری که به ازای هر

$$x \in E \quad f(x) = \varphi(x', x_p).$$

هرگاه $p = 1$ ، V یک قطعه در R^1 (احتمالاً "بی کران") است $c \in V$ را اختیار کرده

تعریف می کنیم

$$F(x) = \int_c^{x_1} \varphi(t) dt \quad (x \in E).$$

چنانچه $p > 1$ ، فرض می کنیم U مجموعه تمام x' هایی در R^{p-1} باشد که به ازای x_p ای $(x', x_p) \in V$ در این صورت، U یک مجموعه باز محدب در R^{p-1} است، و تابعی مانند $\alpha \in \mathcal{C}'(U)$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $x' \in U$ ، $(x', \alpha(x')) \in V$. به عبارت دیگر، نمودار α در V قرار دارد (تمرین ۲۹). تعریف می کنیم

$$F(x) = \int_{\alpha(x')}^{x_p} \varphi(x', t) dt \quad (x \in E).$$

در هر حالت، F در (۱۱۷) صدق خواهد کرد.

(توجه: این قرارداد معمول را که $\int_a^b$ ، در صورتی که $b < a$ ، به معنی $\int_b^a$ — است به یاد بیاورید.)

۳۹۰۱۰ قضیه. هرگاه $E \subset R^n$ محدب و باز بوده، $k \geq 1$ ، ω یک فرم k بعدی از رده $\mathcal{C}^k$ در E باشد، و $d\omega = 0$ ، آنگاه یک فرم $(k-1)$ بعدی در E مانند λ هست بطوری که $\omega = d\lambda$. مختصر بگوییم، فرمهای بسته در مجموعه های محدب کاملند.

برهان. به ازای $p = 1, \dots, n$ فرض می کنیم γ_p مجموعه تمام فرمهای k بعدی ω از رده $\mathcal{C}^k$ در E باشد که نمایش متعارفشان

$$(118) \quad \omega = \sum_I f_I(x) dx_I$$

شامل $dx_{p+1}, \dots, dx_n$ نیست. به عبارت دیگر، اگر به ازای x در E ، $f_I(x) \neq 0$ ، داشته باشیم $I \subset \{1, \dots, p\}$ به استقرا بر p عمل می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم $\omega \in Y_1$. در این صورت، $\omega = f(x) dx_1$ چون $d\omega = 0$ به ازای $x \in E$ و $1 < j \leq n$ خواهیم داشت $(D_j f)(x) = 0$. بنابراین قضیه ۳۸.۱۰ F در $\mathcal{C}'(E)$ هست قسمی که به ازای $m < j \leq n$ داریم $D_1 F = f$ و $D_j F = 0$. پس

$$dF = (D_1 F)(x) dx_1 = f(x) dx_1 = \omega.$$

حال p را بزرگتر از یک گرفته فرض استقرا را می‌پذیریم: هر فرم k بعدی بسته‌ای که متعلق به Y_{p-1} باشد در E کامل است. $\omega \in Y_p$ را قسمی اختیار می‌کنیم که $d\omega = 0$. بنا بر (۱۱۸)،

$$(119) \quad \sum_I \sum_{j=1}^n (D_j f_I)(x) dx_j \wedge dx_I = d\omega = 0.$$

جی ثابتی را که $m < j \leq p$ در نظر می‌گیریم. هر I که در (۱۱۸) ظاهر می‌شود در $\{1, \dots, p\}$ قرار دارد. هرگاه I_1 و I_2 دو تا از این اندیسهای k بعدی باشند و $I_1 \neq I_2$ ، اندیسهای $(k+1)$ بعدی (I_1, j) و (I_2, j) متمایز خواهند بود. لذا، حذفی در بین نیست و از (۱۱۹) نتیجه خواهیم گرفت که هر ضریب در (۱۱۸) در

$$(120) \quad (D_j f_I)(x) = 0 \quad (x \in E, p < j \leq n)$$

صدق می‌کند.

حال آن جملات (۱۱۸) را که شامل dx_p است گردآورده ω را به شکل

$$(121) \quad \omega = \alpha + \sum_{I_0} f_{I_0}(x) dx_{I_0} \wedge dx_p$$

می‌نویسیم که در آن $\alpha \in Y_{p-1}$ ، هر I_0 یک اندیس $(k-1)$ بعدی صعودی در $\{1, \dots, p\}$ است، و $I = (I_0, p)$. بنا بر (۱۲۰)، قضیه ۳۸.۱۰ توابعی چون $F_I \in \mathcal{C}''(E)$ را به دست می‌دهد که

$$(122) \quad D_p F_I = f_I, \quad D_j F_I = 0 \quad (p < j \leq n).$$

قرار می‌دهیم

$$(123) \quad \beta = \sum_{I_0} F_{I_0}(x) dx_{I_0},$$

و تعریف می‌کنیم $d\beta^{k-1} = \omega - (-1)^{k-1} \gamma$ چون β یک فرم $(k-1)$ بعدی است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\gamma &= \omega - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^p (D_j F_I)(x) dx_{I_0} \wedge dx_j \\ &= \alpha - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p-1} (D_j F_I)(x) dx_{I_0} \wedge dx_j,\end{aligned}$$

که بوضوح در Y_{p-1} است. چون $d\omega = 0$ و $d^2\beta = 0$ ، خواهیم داشت $d\gamma = 0$. پس فرض استقرای ما نشان می‌دهد که به ازای یک فرم $(k-1)$ بعدی در E مثل μ ، $\gamma = d\mu$. چنانچه $\omega = d\lambda$ نتیجه می‌گیریم که $\lambda = u + (-1)^{k-1} \beta$. این برهان را به استقرا به پایان خواهد برد.

۴۰۰۱۰ قضیه k ای را که $1 \leq k \leq n$ ثابت می‌گیریم. فرض می‌کنیم $E \subset R^n$ مجموعه‌ای بازی باشد که در آن هر فرم k بعدی بسته کامل است. T را یک $\mathcal{G}$ نگاشت $1-1$ از E بروی مجموعه بازی چون $U \subset R^n$ می‌انگاریم که معکوسش S نیز از رده $\mathcal{G}$ است. در این صورت، هر فرم k بعدی بسته در U در U کامل خواهد بود. توجه کنید که هر مجموعه باز محدب E ، بنابر قضیه ۳۹۰۱۰، در فرض حاضر صدق می‌کند. رابطه بین E و U را می‌توان با گفتن آنکه اینها $\mathcal{G}$ معادل هستند بیان نمود. پس هر فرم بسته در هر مجموعه که با یک مجموعه باز محدب $\mathcal{G}$ معادل باشد کامل خواهد بود.

برهان. فرض کنیم ω یک فرم k بعدی در U با این خاصیت باشد که $d\omega = 0$. بنابر قضیه ۲۲۰۱۰ (پ) ω_T یک فرم k بعدی در E است که برای آن $d(\omega_T) = 0$ از اینرو، به ازای یک فرم $(k-1)$ بعدی در E مانند λ ، $\omega_T = d\lambda$. به استناد قضیه ۲۳۰۱۰ و کاربرد دیگری از قضیه ۲۲۰۱۰ (پ)،

$$\omega = (\omega_T)_S = (d\lambda)_S = d(\lambda_S).$$

چون λ_S یک فرم $(k-1)$ بعدی در U است، ω در U کامل خواهد بود.

۴۱۰۱۰ تبصره. در کاربردها، جگرها (ر.ک. تعریف ۱۷۰۲) اغلب قلمروهای پارامتری مناسبتری از سادکها هستند. اگر تمام بحث ما به جای سادکها بر جگرها استوار می‌بود، محاسبات برهان قضیه استوکس ساده‌تر می‌شد. (این عمل به این نحو در کتاب اسپواک

شده است.) دلیل رجحان سادکها آن است که تعریف کرانه یک سادک جهتدار آسانتر و طبیعی تر از کرانه یک حجره به نظر می آید. (ر.ک. تمرین ۰۱۹). همچنین، افراز مجموعه‌ها به سادکها (به نام "مثلث بندی") نقش مهمی در توپولوژی ایفا می کند، و میان بعضی از جنبه‌های توپولوژی، از یک سو، و فرمهای دیفرانسیل، از سوی دیگر، روابط نیرومندی وجود دارند. به این روابط در بخش ۳۵.۱۰ اشاره شده است. کتاب سینگر^۱ و تورپ^۲ حاوی مقدمه مناسبی بر این موضوع است.

چون هر حجره را می شود مثلث بندی کرد، می توان آن را به عنوان یک زنجیر در نظر گرفت. در مثال ۳۲.۱۰ این کار برای بعد ۲ شده است؛ برای بعد ۳، ر.ک. تمرین ۰۱۸. لم پوانکاره (قضیه ۳۹.۱۰) را می توان به چند طریق اثبات کرد. مثلاً، ر.ک. صفحه ۹۴ کتاب اسپواک یا صفحه ۲۸۰ کتاب فلمینگ^۳. در تمرینهای ۲۴ و ۲۷ به دو برهان ساده برای حالاتی خاص اشاره شده است.

آنالیز برداری

این فصل را با چند کاربرد از مطالب قبل در قضایای مربوط به آنالیز برداری در R^3 پایان می دهیم. اینها حالاتی خاص از قضایایی در مورد فرمهای دیفرانسیل هستند، لیکن عموماً با اصطلاحات متفاوتی بیان شده اند. لذا، با مشکل ترجمه از یک زبان به زبان دیگر روبرو خواهیم بود.

۴۲.۱۰ میدانهای برداری. فرض کنیم $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ یک نگاشت پیوسته از مجموعه‌ای $E \subset R^3$ بتوی R^3 باشد. چون F به هر نقطه E یک بردار مربوط می کند، F را گاهی، بویژه در فیزیک، یک میدان برداری می نامند. به هر چنین F ی فرم ۱ بعدی

$$\lambda_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \quad (124)$$

و فرم ۲ بعدی

$$\omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy \quad (125)$$

مربوط می شوند. در اینجا، و تا پایان این فصل، از نماد مرسوم (x, y, z) به جای (x_1, x_2, x_3) استفاده خواهیم کرد.

بعکس، واضح است که هر فرم I بعدی λ در E به ازای میدانی برداری چون F در E به صورت λ_F است، و هر فرم 2 بعدی ω به ازای F به شکل ω_F می باشد. لذا، در R^3 ، بررسی فرمهای 1 بعدی و 2 بعدی به موازات میدانهای برداری ادامه خواهد یافت.

حانجه $u \in \mathcal{C}'(E)$ یک تابع حقیقی، باشد، گزادیان آن

$$\nabla u = (D_1 u)e_1 + (D_2 u)e_2 + (D_3 u)e_3$$

نمونهای است از یک میدان برداری در E .

حال فرض می کنیم F یک میدان برداری در E از رده $\mathcal{C}'$ باشد. تاو آن $\nabla \times F$ میدانی است برداری که در E با

$$\nabla \times F = (D_2 F_3 - D_3 F_2)e_1 + (D_3 F_1 - D_1 F_3)e_2 + (D_1 F_2 - D_2 F_1)e_3$$

تعریف می شود، و دیورژانس آن تابع حقیقی $\nabla \cdot F$ است که در E با

$$\nabla \cdot F = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3$$

تعریف می گردد.

این کمیتها تعبیرهای فیزیکی متفاوتی دارند. برای تفصیل بیشتر، خواننده را به کتاب کلوا^۱ ارجاع می دهیم.

در اینجا چند رابطه بین گزادیانها، تاوها، و دیورژانسها بیان می شوند.

۴۳.۱۰ قضیه. فرض کنیم E مجموعه $\mathcal{C}^2$ بازی در R^3 بوده، $u \in \mathcal{C}''(E)$ ، و G یک میدان برداری در E از رده $\mathcal{C}''$ باشد.

(آ) هرگاه $F = \nabla u$ ، آنگاه $\nabla \times F = 0$.

(ب) هرگاه $F = \nabla \times G$ ، آنگاه $\nabla \cdot F = 0$.

علاوه براین، هرگاه E با مجموعه محدب $\mathcal{C}''$ معادل باشد، (آ) و (ب) عکس

دارند، که در آنها فرض می کنیم F یک میدان برداری در E از رده $\mathcal{C}''$ می باشد:

(آ') هرگاه $\nabla \times F = 0$ ، آنگاه به ازای u در $\mathcal{C}''(E)$ ، $F = \nabla u$ ؛

(ب') هرگاه $\nabla \cdot F = 0$ ، آنگاه به ازای یک میدان برداری چون G در E از رده $\mathcal{C}''$ ، $F = \nabla \times G$.

برهان. اگر تعریفهای ∇u ، $\nabla \times F$ ، و $\nabla \cdot F$ را با فرمهای دیفرانسیل λ_F و ω_F که با (۱۲۴) و (۱۲۵) داده شده اند مقایسه کنیم، چهار حکم زیر را خواهیم داشت:

$$F = \nabla u \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lambda_F = du$$

$$\nabla \times F = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad d\lambda_F = 0$$

$$F = \nabla \times G \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \omega_F = d\lambda_G$$

$$\nabla \cdot F = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad d\omega_F = 0$$

حال اگر $F = \nabla u$ ، $\lambda_F = du$ ، در نتیجه، $d\lambda_F = d^2u = 0$ (قضیه ۲۰.۱۰)، که به این معنی است که $\nabla \times F = 0$ پس (آ) ثابت شده است.

و اما در باب (آ)، فرض این را می‌گوئید که $d\lambda_F = 0$ در E . بنا بر قضیه ۲۰.۱۰، به ازای یک فرم ۰ بعدی مانند u ، $\lambda_F = du$ ، در نتیجه، $F = \nabla u$. برهانهای (ب) و (ب) دقیقاً به یک شکل نتیجه می‌شوند.

۴۴.۱۰ عنصرهای حجم. فرم k بعدی

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

را عنصر حجم در R^k نام نهاده‌اند. غالباً "آن را با dV (یا، در صورتی که نمودن بعد به طور صریح مطلوب نماید، با dV_k) نشان می‌دهند، و نماد

$$(126) \quad \int_{\Phi} f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{\Phi} f dV$$

زمانی به کار می‌رود که Φ یک سطح k بعدی به طور مثبت جهتدار در R^k و f بربرد Φ تابعی پیوسته باشد.

دلیل استفاده از این اصطلاح بسیار روشن است: هرگاه D یک قلمرو پارامتری در R^k و Φ یک $\mathcal{C}^1$ -نگاشت ۱-۱ از D بتوی R^k با ژاکوبی مثبت J_{Φ} باشد، آنگاه سمت چپ (۱۲۶)، به استناد (۳۵) و قضیه ۹.۱۰، برابر است با

$$\int_D f(\Phi(u)) J_{\Phi}(u) du = \int_{\Phi(D)} f(x) dx.$$

بخصوص، وقتی $f = 1$ ، (۱۲۶) حجم Φ را تعریف می‌کند. ما پیشتر حالت خاصی از این را در (۳۶) دیدیم.

نماد معمول برای dV_2 علامت dA خواهد بود.

۴۵.۱۰ قضیه گرین. فرض کنیم E مجموعه‌ای باز در R^2 بوده، $\alpha \in \mathcal{C}'(E)$ ، $\beta \in \mathcal{C}'(E)$ ،

Ω یک زیر مجموعه بسته E با کرانه به طور مثبت جهتدار $\partial\Omega$ ، بصورتی که در بخش ۳۱.۱۰ توصیف شده، باشد. در این صورت،

$$(127) \quad \int_{\partial\Omega} (\alpha dx + \beta dy) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right) dA.$$

برهان. قرار می دهیم $\lambda = \alpha dx + \beta dy$ در این صورت،

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_2\alpha) dy \wedge dx + (D_1\beta) dx \wedge dy \\ &= (D_1\beta - D_2\alpha) dA, \end{aligned}$$

و (۱۲۷) با

$$\int_{\partial\Omega} \lambda = \int_{\Omega} d\lambda,$$

یکی است، که بنابر قضیه ۳۳.۱۰ درست می باشد.

به ازای $\alpha(x, y) = -y$ و $\beta(x, y) = x$ (۱۲۷) به صورت

$$(128) \quad \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x dy - y dx) = A(\Omega),$$

یعنی مساحت Ω ، در خواهد آمد.

با فرض $\alpha = 0, \beta = x$ فرمول مشابهی به دست می آید. مثال ۱۲.۱۰ (ب) حالت خاصی از این را شامل است.

۴۶.۱۰ عنصرهای سطح در R^3 . فرض کنیم Φ یک سطح ۲ بعدی در R^3 از رده $\mathcal{C}^1$ و با قلمرو پارامتری $D \subset R^2$ باشد. به هر نقطه $(u, v) \in D$ بردار

$$(129) \quad N(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{e}_3$$

را مربوط می کنیم. ژاکوبیهای در (۱۲۹) در حکم معادله

$$(130) \quad (x, y, z) = \Phi(u, v)$$

می باشند.

اگر f تابع پیوسته ای بر $\Phi(D)$ باشد، انتگرال سطح f روی Φ مساوی

$$(131) \quad \int_{\Phi} f dA = \int_D f(\Phi(u, v)) |N(u, v)| du dv$$

تعریف می شود.

بویژه، وقتی $f = 1$ ، مساحت Φ ، یعنی

$$(132) \quad A(\Phi) = \int |N(u, v)| du dv$$

به دست خواهد آمد .

بحث زیر نشان می‌دهد که (۱۳۱) و حالت خاص (۱۳۲) تعریفهای معقولی هستند . همچنین ، ویژگیهای هندسی بردار N را شرح خواهد داد .

می‌نویسیم $\Phi = \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3$ ، نقطه $p_0 = (u_0, v_0) \in D$ را ثابت می‌گیریم ، قرار می‌دهیم $N = N(p_0)$ ، و نیز

$$(133) \quad \alpha_i = (D_1 \varphi_i)(p_0), \quad \beta_i = (D_2 \varphi_i)(p_0) \quad (i = 1, 2, 3).$$

و فرض می‌کنیم $T \in L(R^2, R^3)$ تبدیل خطی باشد که با

$$(134) \quad T(u, v) = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i u + \beta_i v) e_i$$

تعریف می‌شود . توجه کنید که ، بنابر تعریف ۱۱۰۹ ، $T = \Phi'(p_0)$.

حال فرض می‌کنیم رتبه T مساوی ۲ باشد . (هرگاه ۱ یا ۰ باشد ، $N = 0$ و صفحه مماس مذکور در زیر به یک خط یا یک نقطه بدل می‌شود .) در این صورت ، برد نگاشت مستوی

$$(u, v) \rightarrow \Phi(p_0) + T(u, v)$$

صفحه Π ، به نام صفحه مماس به Φ در p_0 ، خواهد بود . [ممکن است خواننده بخواهد Π را ، به جای p_0 ، صفحه مماس در $\Phi(p_0)$ بنامد . اگر Φ یک به یک نباشد ، این کار مشکلاتی تولید خواهد کرد .]

چنانچه (۱۳۳) را در (۱۲۹) به کار ببریم ، خواهیم داشت

$$(135) \quad N = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) e_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_3,$$

و (۱۳۴) نشان می‌دهد که

$$(136) \quad Te_1 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i, \quad Te_2 = \sum_{i=1}^3 \beta_i e_i.$$

حال محاسبه‌ای ساده به

$$(137) \quad N \cdot (Te_1) = 0 = N \cdot (Te_2)$$

منجر می‌شود . در نتیجه ، N بر Π عمود خواهد بود . از اینروست که آن را قائم به Φ در p_0 می‌نامند .

خاصیت دوم N ، که آن نیز با یک محاسبه مستقیم و براساس (۱۳۵) و (۱۳۶) تحقیق می‌شود ، این است که در میانه تبدیل خطی R^3 که $\{e_1, e_2, e_3\}$ را به $\{Te_1, Te_2, N\}$ می‌برد $|N|^2 > 0$ است (تمرین ۳۰) . لذا ، سادک ۳ بعدی

$$(138) \quad [0, Te_1, Te_2, N]$$

به طور مثبت جهتدار خواهد بود.

خاصیت سوم N که به کار خواهیم برد نتیجه‌ای است از دو خاصیت اول؛ درمیان فوق‌الذکر، که مقدارش $|N|^2$ است، حجم متوازی السطوحی است به اضلاع $[0, Te_1]$ ، $[0, Te_2]$ ، و $[0, N]$. به استناد (۱۳۷)، $[0, N]$ به دو ضلع دیگر عمود است. بنابراین این، مساحت متوازی الاضلاع با رء سه‌ای

$$(139) \quad 0, Te_1, Te_2, T(e_1 + e_2)$$

برابر $|N|$ می‌باشد.

این متوازی الاضلاع نقش مربع یک‌در R^2 تحت T است. چنانچه E مستطیل دلخواهی در R^2 باشد، (از خطی بودن T) نتیجه می‌شود که مساحت متوازی الاضلاع $T(E)$ مساوی است با

$$(140) \quad A(T(E)) = |N| A(E) = \int_E |N(u_0, v_0)| du dv.$$

حال نتیجه می‌گیریم که (۱۳۲) درست است هرگاه که Φ مستوی باشد. برای توجیه تعریف (۱۳۲) در حالت کلی، D را به مستطیلهای کوچک تقسیم، نقطه (u_0, v_0) را در هریک اختیار، و Φ را در هر مستطیل با صفحه مماس نظیرش عوض می‌کنیم. در این صورت، مجموع مساحات متوازی الاضلاعهای حاصل، که از طریق (۱۴۰) به دست می‌آیند، یک تقریب برای $A(\Phi)$ خواهد بود. بالاخره، شخص می‌تواند (۱۳۱) را به وسیله (۱۳۲) با تقریب f به توابع پله‌ای توجیه نماید.

۴۷۰۱۰ مثال. فرض کنیم $0 < a < \pi$ ثابت باشد. K را حجره ۳ بعدی می‌انگاریم که با

$$0 \leq t \leq a, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

مشخص می‌شود. معادلات

$$x = t \cos u$$

$$(141) \quad y = (b + t \sin u) \cos v$$

$$z = (b + t \sin u) \sin v$$

نگاشتی چون Ψ از R^3 بتوی R^3 را که درون K یک‌به‌یک است وصف می‌کند بطوری که $\Psi(K)$ یک چنبره توپر می‌باشد. ژاکوبی آن عبارت است از

$$J_{\Psi} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} = t(b + t \sin u)$$

که بر K مثبت است جز روی وجه $t = 0$. چنانچه از J_{Ψ} روی K انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\text{vol}(\Psi(K)) = 2\pi^2 a^2 b.$$

مساوی حجم چنبره^۴ توپر ما.

حال زنجیر 2 بعدی $\partial\Psi = \Phi$ را در نظر می‌گیریم. (ر. ک. تمرین ۰۱۹) Ψ وجوه $u = 0$ و $u = 2\pi$ از K را بروی یک نوار استوانه‌ای می‌نگارد منتها با جهتهای مخالف. Ψ وجوه $v = 0$ و $v = 2\pi$ را بروی یک قرص مستدیر می‌نگاردا ما در جهتهای مخالف Ψ وجه $t = 0$ را بروی یک دایره می‌نگارد، که موجب 0 در زنجیر 2 بعدی $\partial\Psi$ می‌شود. (ژاکوبیه‌ای مربوطه صفرند.) از اینرو، Φ چیزی جز یک سطح 2 بعدی نیست که با گذاردن $t = a$ در (۱۴۱) به دست می‌آید، با قلمرو پارامتری D که مربعی است که با $0 \leq u \leq 2\pi$ و $0 \leq v \leq 2\pi$ تعریف می‌شود.

پس، بنابر (۱۲۹) و (۱۴۱)، قائم به Φ در D (u, v) بردار

$$N(u, v) = a(b + a \sin u)n(u, v)$$

است که در آن

$$n(u, v) = (\cos u)e_1 + (\sin u \cos v)e_2 + (\sin u \sin v)e_3.$$

چون $|n(u, v)| = 1$ ، داریم $|N(u, v)| = a(b + a \sin u)$ ، و اگر از این روی D انتگرال بگیریم، (۱۳۱) نتیجه می‌دهد که

$$A(\Phi) = 4\pi^2 ab.$$

مساوی مساحت سطح چنبره^۴ ما.

هرگاه $N = N(u, v)$ را به صورت یک پاره خط جهتدار از $\Phi(u, v) + N(u, v)$ بگیریم، آنگاه N به طرف خارج است، یعنی از $\Psi(K)$ دور می‌شود. این بدان علت است که وقتی $t = a$ ، $J_{\Psi} > 0$.

برای مثال، u و v را مساوی $\pi/2$ را برابر a اختیار می‌کنیم. این بزرگترین مقدار z را بر $\Psi(K)$ به دست می‌دهد، و $N = a(b + a)e_3$ برای این انتخاب (u, v) به طرف بالا خواهد بود.

۴۸.۱۰ انتگرالهای فرمهای 1 بعدی در R^3 . فرض کنیم γ یک $\mathcal{C}^1$ منحنی در مجموعه^۵ باز

$E \subset \mathbb{R}^3$ باشد، با بازه پارامتری $[0, 1]$ ، F را یک میدان برداری در E ، مثل بخش ۴۲.۱۰، می‌انگاریم، و λ_F را با (۱۲۴) تعریف می‌کنیم: انتگرال λ_F روی γ را می‌توان بطریقی که اینک توصیف می‌کنیم از نو نوشت.

به ازای هر $u \in [0, 1]$

$$\gamma'(u) = \gamma'_1(u)e_1 + \gamma'_2(u)e_2 + \gamma'_3(u)e_3$$

بردار مماس به γ در u نامیده می‌شود. $t = t(u)$ را برداریکه در جهت $\gamma'(u)$ تعریف می‌کنیم. لذا،

$$\gamma'(u) = |\gamma'(u)|t(u).$$

[اگر به ازای u ای $\gamma'(u) = 0$ ، قرار می‌دهیم $t(u) = e_1$ ؛ هر انتخاب دیگر به همین خوبی کارساز است.] بر طبق (۳۵)،

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda_F &= \sum_{i=1}^3 \int_0^1 F_i(\gamma(u)) \gamma'_i(u) du \\ (142) \quad &= \int_0^1 F(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du \\ &= \int_0^1 F(\gamma(u)) \cdot t(u) |\gamma'(u)| du. \end{aligned}$$

قضیه ۲۷.۰۶ خواندن $|\gamma'(u)| du$ را با نام عنصر طول قوس در امتداد γ توجیه می‌کند. نماد مرسوم برای آن ds است، و (۱۴۲) از نوبه شکل

$$(143) \quad \int_{\gamma} \lambda_F = \int_{\gamma} (F \cdot t) ds$$

نوشته می‌شود.

چون t یک برداریکه مماس به γ است، $F \cdot t$ مؤلفه مماسی F در امتداد γ نام دارد. طرف راست (۱۴۳) را باید به منزله اختصار برای آخرین انتگرال (۱۴۲) تلقی کرد. نکته آن است که F بر برد γ تعریف شده ولی t بر $[0, 1]$ تعریف گشته است. از اینرو، باید $F \cdot t$ را به طرز صحیحی تعبیر نمود. البته، اگر γ یک به یک باشد، $t(u)$ را می‌شود با $t(\gamma(u))$ عوض کرد و این مشکل مرتفع خواهد شد.

۴۹.۱۰ انتگرالهای فرمهای ۲ بعدی در $\mathbb{R}^3$. فرض کنیم Φ یک سطح ۲ بعدی در مجموعه باز

$E \subset R^3$ از رده $\mathcal{C}^1$ و با قلمرو پارامتری $D \subset R^2$ باشد. F را یک میدان برداری در E می‌انگاریم و ω_F را با (۱۲۵) تعریف می‌کنیم. مثل بخش قبل، نمایش متفاوتی از انتگرال ω_F روی Φ به دست می‌آوریم.

بر طبق (۳۵) و (۱۲۹)،

$$\begin{aligned}\int_{\Phi} \omega_F &= \int_{\Phi} (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) \\ &= \int_D \left\{ (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (F_2 \circ \Phi) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + (F_3 \circ \Phi) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} du dv \\ &= \int_D F(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) du dv.\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $n = n(u, v)$ بردار یک در جهت $N(u, v)$ باشد. [اگر به ازای $(u, v) \in D$ $N(u, v) = 0$ ، $n(u, v) = e_1$ را انتخاب می‌کنیم]. در این صورت، $N = |N|n$ و در نتیجه، انتگرال آخری به صورت

$$\int_D F(\Phi(u, v)) \cdot n(u, v) |N(u, v)| du dv$$

در می‌آید. بالاخره، این را بنا بر (۱۳۱) می‌توان به شکل

$$(144) \quad \int_{\Phi} \omega_F = \int_{\Phi} (F \cdot n) dA$$

نوشت.

با توجه به معنی $F \cdot n$ ، تذکری که در آخر بخش ۴۸.۱۰ داده شد در اینجا نیز قابل بیان است.

حال می‌توانیم شکل اصلی قضیه استوکس را بیان کنیم.

۵۰.۱۰ فرمول استوکس. هرگاه F یک میدان برداری از رده $\mathcal{C}^1$ در مجموعه E از R^3 و Φ یک سطح ۲ بعدی از رده $\mathcal{C}^2$ در E باشد، آنگاه

$$(145) \quad \int_{\Phi} (\nabla \times F) \cdot n dA = \int_{\partial\Phi} (F \cdot t) ds.$$

برهان. قرار می‌دهیم $H = \nabla \times F$ در این صورت، مثل وضعی که در برهان قضیه ۴۳.۱۰ بود، داریم

(146)

$$\omega_H = d\lambda_F.$$

بنابر این،

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} (\nabla \times F) \cdot n \, dA &= \int_{\Phi} (H \cdot n) \, dA = \int_{\Phi} \omega_H \\ &= \int_{\Phi} d\lambda_F = \int_{\partial\Phi} \lambda_F = \int_{\partial\Phi} (F \cdot t) \, ds. \end{aligned}$$

در اینجا از تعریف H استفاده کردیم، بعد (۱۴۴) را با H به عوض F به کار گرفتیم، سپس (۱۴۶) را اعمال نمودیم، بعد، که مرحله اصلی بود، قضیه ۳۳.۱۰ را به کار گرفتیم، و سرانجام (۱۴۳) را، که به نحو روشنی از منحنیها به زنجیرهای ۱ بعدی تعمیم داده شده بود، مورد استفاده قرار دادیم.

۵۱.۱۰ قضیه دیورژانس. هرگاه F یک میدان برداری از رده $\mathcal{Q}$ در مجموعه $E \subset R^3$ و Ω زیرمجموعه بسته‌ای از E با کرانه به طور مثبت جهتدار $\partial\Omega$ (بنحوی که در بخش ۳۱.۱۰ توصیف شد) باشد، آنگاه

$$(147) \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot F) \, dV = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) \, dA.$$

برهان. بنابر (۱۲۵)،

$$d\omega_F = (\nabla \cdot F) \, dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot F) \, dV.$$

لذا، به استناد قضیه ۳۳.۱۰، که در مورد فرم ۲ بعدی ω_F اعمال شده، و رابطه (۱۴۴)،

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot F) \, dV = \int_{\Omega} d\omega_F = \int_{\partial\Omega} \omega_F = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) \, dA.$$

تمرین

۱. H را یک مجموعه محدب فشرده در R^k با درونی ناتهی بینگارید. فرض کنید $f \in \mathcal{Q}(H)$ ، در متمم H قرار دهید $f(x) = 0$ ، و $\int_H f$ را مثل تعریف ۳۰.۱۰ تعریف نمایید. ثابت کنید $\int_H f$ از ترتیبی که با آن k انتگرالگیری صورت می‌گیرد مستقل است. راهنمایی: f را تابعی که بر R^k پیوسته‌اند و تکیه‌گاهشان در H است، بنحوی که در مثال ۴۰.۱۰ شد، تقریب نمایید.

به ازای $i = 1, 2, 3, \dots$ ، فرض کنید $\varphi_i \in \mathcal{C}(R^1)$ تکیه‌گاه در $(2^{-i}, 2^{1-i})$ داشته باشد، بطوری که $\int \varphi_i = 1$ قرار دهید.

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)] \varphi_i(y).$$

در این صورت، f تکیه‌گاه فشرده در R^2 دارد، f جز در $(0, 0)$ پیوسته است، و

$$\int dx \int dy f(x, y) = 1 \quad \text{ولی} \quad \int dy \int dx f(x, y) = 0$$

ملاحظه کنید که f در هر همسایگی $(0, 0)$ بی‌کران است.

۳. اگر F مثل F بوده در قضیه ۷۰۱ باشد، قرار دهید $F_1(x) = A^{-1}F(x)$ ، $A = F'(0)$

در این صورت، $F'_1(0) = I$ ، نشان دهید که در یکی از همسایگی‌های 0 ، به ازای

نگاشتهای اولیه‌ای چون $G_1, \dots, G_n$

$$F_1(x) = G_n \circ G_{n-1} \circ \dots \circ G_1(x).$$

این صورت دیگری از قضیه ۷۰۱ را به دست می‌دهد:

$$F(x) = F'(0)G_n \circ G_{n-1} \circ \dots \circ G_1(x).$$

(ب) ثابت کنید نگاشت $(x, y) \rightarrow (y, x)$ از R^2 بروی R^2 ، در هر همسایگی مبدأ

ترکیبی از دو نگاشت اولیه نیست. (این نشان می‌دهد که ضربه‌های B_i را نمی‌شود

از صورت قضیه ۷۰۱ حذف کرد.)

۴. به ازای $(x, y) \in R^2$ تعریف کنید

$$F(x, y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y).$$

ثابت کنید $F = G_2 \circ G_1$ که در آن

$$G_1(x, y) = (e^x \cos y - 1, y)$$

$$G_2(u, v) = (u, (1 + u) \tan v)$$

اولیه‌هایی در یکی از همسایگی‌های $(0, 0)$ اند.

ژاکوبیهای G_1 و F را در $(0, 0)$ محاسبه کنید. تعریف کنید

$$H_2(x, y) = (x, e^x \sin y),$$

و

$$H_1(u, v) = (h(u, v), v)$$

را طوری بیابید که در یکی از همسایگی‌های $(0, 0)$ ، $F = H_1 \circ H_2$ ،

۵. مشابه قضیه ۸۰۱ را که در آن K زیر مجموعه فشرده‌ای از یک فضای متریک دلخواه

است تنظیم و اثبات نمایید. (توابع φ_i آمده در برهان قضیه ۸.۱۰ را

تابعهایی از آن نوع که در تمرین ۲۲ فصل ۴ ساخته شد عوض کنید.)

۶. حاصل قضیه ۸.۱۰ را با نشان دادن اینکه توابع ψ_i را می شود مشتقپذیر، و حتی بی-
نهایت بار مشتقپذیر، کرد قوت بخشید. (از تمرین ۱ فصل ۸ در ساختن توابع کمکی
 φ_i استفاده نمایید.)

۷. (۱) نشان دهید که سادک Q^* کوچکترین زیر مجموعهٔ محدب R^* است که
حاوی $e_1, \dots, e_n, 0$ می باشد.

(ب) نشان دهید که نگاشتهای مستوی مجموعههای محدب را به مجموعههای محدب
می برزد.

۸. فرض کنید H متوازی الاضلاعی در R^2 باشد که رئوس $(1, 1)$ ، $(3, 2)$ ، $(4, 5)$ ،
و $(2, 4)$ اند. نگاشت مستوی T که $(0, 0)$ را به $(1, 1)$ ، $(1, 0)$ را به $(3, 2)$ ،
و $(0, 1)$ را به $(2, 4)$ می برد بیابید. نشان دهید که $J_T = 5$. با استفاده از
 T ، انتگرال

$$\alpha = \int_H e^{x-y} dx dy$$

را به انتگرالی روی I^2 بدل کرده، بدین ترتیب، α را محاسبه نمایید.

۹. بر مستطیل

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$(x, y) = T(r, \theta) \quad \text{را با معادلات}$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

تعریف کنید. نشان دهید که T این مستطیل را روی قرص بسته D به مرکز $(0, 0)$ و شعاع
 a می نگارد، T دزون مستطیل یک به یک است، و $J_T(r, \theta) = r$ چنانچه $f \in \mathcal{C}(D)$ ،
فرمول انتگرالگیری در مختصات قطبی را ثابت نمایید:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta)) r dr d\theta.$$

راهنمایی: فرض کنید D_0 درون D منهای بازه از $(0, 0)$ تا $(0, a)$ باشد. در وضع فعلی
قضیه ۹.۱۰ در مورد توابع پیوسته f به کار می رود که تکیه گاهشان در D_0 است. برای
برداشتن این قید مثل مثال ۴.۱۰ عمل نمایید.

۹. در تمرین ۹ فرض کنید $a \rightarrow \infty$ ، و ثابت کنید به ازای توابع پیوسته f که وقتی

$$|x| + |y| \rightarrow \infty \quad \text{به قدر کافی سریع نزول می کنند}$$

$$\int_{R^2} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta)) r dr d\theta.$$

(صورت دقیقتر را به دست آورید.) این را در مورد

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

به کار برده فرمول (۱۰۱) فصل ۸ را نتیجه بگیرید.

$$0 < s < \infty, \quad 0 < t < 1 \quad (u, v) = T(s, t) \quad ۱۱.$$

با فرض $u = s - st$ و $v = st$ تعریف کنید. نشان دهید که T نگاشتی ۱-۱ از این

نوار بروی ربع مثبت Q در R^2 است. نشان دهید که $J_T(s, t) = s$.

به ازای $x > 0, y > 0$

$$u^{x-1} e^{-u} v^{y-1} e^{-v}$$

را روی Q انتگرالگیری کنید، از قضیه ۱۰.۱ استفاده کرده انتگرال را به انتگرالی روی

نوار بدل نمایید، و از این راه فرمول (۹۶) فصل ۸ را نتیجه بگیرید.

(برای این کاربرد، قضیه ۱۰.۱ باید طوری تعمیم یابد که انتگرالهای مجازی خاصی

را در برگیرد. این تعمیم را به دست آورید.)

۱۲. فرض کنید I^* مجموعه تمام $u = (u_1, \dots, u_k) \in R^k$ هایی باشد که به ازای هر i ، $0 \leq u_i \leq 1$ ؛

Q^* را مجموعه تمام $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ هایی ببنگارید که $x_i \geq 0$ و $\sum x_i \leq 1$.

(I^* مکعب یک و Q^* سادک متعارف در R^k است.) $x = T(u)$ را با

$$x_1 = u_1$$

$$x_2 = (1 - u_1)u_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_k = (1 - u_1) \cdots (1 - u_{k-1})u_k$$

تعریف کنید. نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - u_i).$$

نشان دهید که T ، I^* را بروی Q^* می نگارد، T درون I^* یک به یک است، و معکوش

S درون Q^* با $x_1 = u_1$ و به ازای $i = 2, \dots, k$ ، با

$$u_i = \frac{x_i}{1 - x_1 - \dots - x_{i-1}}$$

تعریف می شود. نشان دهید که

$$J_T(u) = (1 - u_1)^{k-1} (1 - u_2)^{k-2} \dots (1 - u_{k-1})$$

و

$$J_S(x) = [(1 - x_1)(1 - x_1 - x_2) \dots (1 - x_1 - \dots - x_{k-1})]^{-1}.$$

۱۳. فرض کنید $r_1, \dots, r_k$ اعدادی صحیح و نامنفی باشند، ثابت کنید که

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k} dx = \frac{r_1! \dots r_k!}{(k + r_1 + \dots + r_k)!}.$$

راهنمایی: از تمرین ۱۲ و قضایا ۹۰.۱ و ۲۵.۸ استفاده نمایید.

توجه کنید که حالت خاص $r_1 = \dots = r_k = 0$ نشان می دهد که حجم Q^k مساوی $1/k!$ است.

۱۴. فرمول (۴۶) را ثابت کنید.

۱۵. هرگاه ω و λ بترتیب فرمهایی k بعدی و m بعدی باشند، ثابت کنید که

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{km} \lambda \wedge \omega.$$

۱۶. هرگاه $k \geq 2$ ، $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$ یک سادک k بعدی مستوی جهتدار باشد، مستقیماً از

تعریف عملگر کرانه‌ای ثابت کنید که $\partial^2 \sigma = 0$. از این نتیجه بگیرید که به ازای هر زنجیر $\partial^2 \Psi = 0$ ، Ψ^*

راهنمایی: بخاطر جهت، ابتدا این کار را برای $k=3$ ، $k=2$ انجام دهید. در حالت کلی، اگر $i < j$ ، فرض کنید σ_{ij} سادک $(k-2)$ بعدی باشد که با حذف p_i و p_j از σ به دست می آید. نشان دهید که هر $\sigma_{ij} = 0$ دوبار، با علامت مخالف، در $\partial^2 \sigma$ ظاهر می شود.

۱۷. قرار می دهیم $J^2 = \tau_1 + \tau_2$ که در آن

$$\tau_1 = [0, e_1, e_1 + e_2], \quad \tau_2 = -[0, e_2, e_2 + e_1].$$

توضیح: یک مربع یکه به طور مثبت جهتدار در R^2 می تواند به دو روش معکوس

نشان داده شود. J^2 مجموع ۴ سادک ۱ بعدی مستوی جهتدار است. این سادکها را پیدا

کنید. $\partial(\tau_1 - \tau_2)$ چیست؟

۱۸. سادک ۳ بعدی مستوی جهتدار

$$\sigma_1 = [0, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$$

در R^3 را در نظر بگیرید. نشان دهید که σ_1 (ملحوظ به شکل یک تبدیل خطی) دارای دترمینان یک است. لذا، σ_1 به طور مثبت جهتدار خواهد بود.

فرض کنید $\sigma_6, \dots, \sigma_2$ پنج سادک 3 بعدی جهتدار دیگر باشد که به این طریق به دست می آیند: پنج جایگشت (i_1, i_2, i_3) از $(1, 2, 3)$ ، متمایز از $(1, 2, 3)$ ، وجود دارد. به هر (i_1, i_2, i_3) سادک

$$s(i_1, i_2, i_3)[0, e_{i_1}, e_{i_1} + e_{i_2}, e_{i_1} + e_{i_2} + e_{i_3}]$$

را مربوط می کنیم که در آن s علامتی است که در تعریف دترمینان ظاهر می شود. (به این طریق بود که در تمرین ۱۷ از τ_1 به دست آمد.) نشان دهید که $\sigma_6, \dots, \sigma_2$ به طور مثبت جهتدار اند.

قرار دهید $J^3 = \sigma_1 + \dots + \sigma_6$ در این صورت، J^3 را می توان مکعب یکه به طور مثبت جهتدار در R^3 خواند.

نشان دهید که J^3 مجموع 12 سادک 2 بعدی مستوی جهتدار است. (این 12 مثلث سطح مکعب یکه J^3 را می پوشانند.)

نشان دهید که $x = (x_1, x_2, x_3)$ در برد σ_1 است اگر و فقط اگر $0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$ و نشان دهید که بردهای $\sigma_6, \dots, \sigma_2$ درونهای از هم جدا دارند، و اجتماع آنها J^3 را می پوشاند. (قس. تمرین ۱۳؛ توجه کنید که $3! = 6$)

۱۹. فرض کنید J^2 و J^3 همانهای بوده در تمرین ۱۷ و ۱۸ باشند. تعریف کنید

$$\begin{aligned} B_{01}(u, v) &= (0, u, v), & B_{11}(u, v) &= (1, u, v), \\ B_{02}(u, v) &= (u, 0, v), & B_{12}(u, v) &= (u, 1, v), \\ B_{03}(u, v) &= (u, v, 0), & B_{13}(u, v) &= (u, v, 1). \end{aligned}$$

اینها مستوی هستند و R^2 را بتوی R^3 می نگارند.

به ازای $i = 1, 2, 3$ و $r = 0, 1$ قرار دهید $\beta_{ri} = B_{ri}(J^2)$ هر یک زنجیر 2 بعدی جهتدار مستوی است. (ر.ک. بخش ۳۰.۱۰) تحقیق کنید که

$$\partial J^3 = \sum_{i=1}^3 (-1)^i (\beta_{0i} - \beta_{1i}),$$

که با تمرین ۱۸ مطابقت دارد.

۲۰. شرایطی بیان کنید که فرمول

$$\int_{\partial \omega} f d\omega = \int_{\omega} f \omega - \int_{\omega} (df) \wedge \omega$$

تحت آنها معتبر باشد، و نشان دهید که این فرمول انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء را تعمیم می دهد.

$$\bullet \text{ راهنمایی: } d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega$$

۲۱. مثل مثال ۳۶۰.۱۰، فرم ۱ بعدی

$$\eta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

را در $R^2 - \{0\}$ در نظر بگیرید.

(آ) محاسباتی انجام دهید که به فرمول (۱۱۳) ختم شود، و ثابت کنید که $d\eta = 0$.

(ب) فرض کنید به ازای r بزرگتر از ۰، $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ، و Γ را یک $\mathcal{C}^\infty$ -منحنی در $R^2 - \{0\}$ با بازه پارامتری $[0, 2\pi]$ بینگرید، با این شرط که $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$ ، بطوری که بازه های $[\gamma(t), \Gamma(t)]$ به ازای هر $t \in [0, 2\pi]$ شامل ۰ نباشند. ثابت کنید

$$\int_{\Gamma} \eta = 2\pi.$$

راهنمایی: به ازای $0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 1$ تعریف کنید

$$\Phi(t, u) = (1-u)\Gamma(t) + u\gamma(t).$$

در این صورت، Φ یک سطح ۲ بعدی در $R^2 - \{0\}$ است که قلمرو پارامتری آن مستطیل فوق-الذکر می باشد. بخاطر حذفیات (مثل مثال ۳۲۰.۱۰)،

$$\partial\Phi = \Gamma - \gamma.$$

قضیه استوکس را به کار برده نتیجه بگیرید که، بدلیل $d\eta = 0$ ،

$$\int_{\Gamma} \eta = \int_{\gamma} \eta.$$

(پ) $\Gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ را، که در آن $a > 0, b > 0$ ثابت اند، اختیار کنید. قسمت

(ب) را به کار برده نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 2\pi.$$

(ت) نشان دهید که در هر مجموعه باز محدبی که در آن $x \neq 0$

$$\eta = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right).$$

و نیز در هر مجموعه باز محدبی که در آن $y \neq 0$

$$\eta = d\left(-\arctan \frac{x}{y}\right),$$

توضیح دهید چرا این مطلب نماد $d\eta = \eta$ را، علیرغم اینکه η در $\{0\} - \mathbb{R}^2$ کامل نیست، توجیه می‌کند.

(ث) نشان دهید که (ب) را می‌توان از (ت) نتیجه گرفت.

(ج) اگر Γ یک منحنی دلخواه در $\{0\} - \mathbb{R}^2$ باشد، ثابت کنید

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \eta = \text{Ind}(\Gamma).$$

(برای تعریف شاخص یک منحنی، ر.ک. تمرین ۲۳ فصل ۰۸)

۲۲. مثل مثال ۰۳۷۰۱۰، ζ را در $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ با

$$\zeta = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{r^3}$$

که در آن $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ، مستطیلی است که با $0 \leq v \leq 2\pi$ ، $0 \leq u \leq \pi$ داده می‌شود، تعریف کنید، و Σ را سطح ۲ بعدی در $\mathbb{R}^3$ ، با قلمرو پارامتری D ، بینگارید که با

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

مشخص می‌شود.

(۱) ثابت کنید $d\zeta = 0$ در $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

(ب) فرض کنید S تحدید Σ به قلمرو پارامتری $D \subset E$ باشد. ثابت کنید

$$\int_S \zeta = \int_D \sin u \, du \, dv = A(S)$$

که در آن A ، همچون بخش ۰۴۳۰۱۰، نشانگر مساحت است. توجه کنید که این رابطه (۱۱۵) را به عنوان حالتی خاص دربردارد.

(۲) g, h_1, h_2, h_3 را $\mathcal{C}^\infty$ و تابعی بر $[0, 1]$ بینگارید که $g > 0$ ، فرض کنید $(x, y, z) = \Phi(s, t)$

سطح ۲ بعدی Φ ، با قلمرو پارامتری I^2 ، را با

$$x = g(t)h_1(s), \quad y = g(t)h_2(s), \quad z = g(t)h_3(s)$$

تعریف می‌کند. مستقیماً از (۳۵) ثابت کنید که

$$\int_{\partial D} \zeta = 0.$$

به شکل برد Φ توجه نمایید: به ازای s ثابت، $\Phi(s, t)$ روی یک بازه برخطی ماربر تغییر می‌کند. لذا، برد Φ در یک "مخروط" با رأس در مبدأ جای خواهد داشت.

(ت) E را یک مستطیل بسته در D بینگارید که اضلاع موازی اضلاع D است. فرض کنید

همچنین، $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ ، $f > 0$ ، Ω سطح ۲ بعدی با قلمرو پارامتری E باشد که با

$$\Omega(u, v) = f(u, v) \Sigma(u, v)$$

تعریف می شود. S را مثل S (ب) تعریف کرده ثابت کنید

$$\int_{\Omega} \zeta = \int_S \zeta = A(S).$$

(چون S "تصویر شعاعی" Ω بتوی کره یک است، این نتیجه خواندن $\int_{\Omega} \zeta$ را با نام "زاویه فضایی" مقابل برد Ω در مبدأ توجیه می نماید.)
راهنمایی: سطح 3 بعدی Ψ داده شده با

$$\Psi(t, u, v) = [1 - t + tf(u, v)] \Sigma(u, v)$$

را، که در $\bar{A} \cap E$ و $0 \leq t \leq 1$ ، در نظر می گیریم. به ازای v ثابت، نگاشت $(t, u) \rightarrow \Psi(t, u, v)$ یک سطح 2 بعدی مانند Φ است که می توان (پ) را در موردش اعمال کرد و نشان داد که $\int_{\Phi} \zeta = 0$. همین وضع برای وقتی u ثابت باشد برقرار است. بنابر (آ) و قضیه استوکس

$$\int_{\partial \Psi} \zeta = \int_{\Psi} d\zeta = 0.$$

(ث) قرار دهید $\lambda = -(z/r)\eta$ که در آن، مثل تمرین ۲۱،

$$\eta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

در این صورت، λ یک فرم 1 بعدی در مجموعه $W \subset \mathbb{R}^3$ است که در آن $x^2 + y^2 > 0$ با اثبات اینکه $d\lambda = \zeta$ نشان دهید که ζ در E کامل است.

(ج) (ت) را از (ث)، بدون استفاده از (پ)، نتیجه بگیرید.

راهنمایی: برای شروع، فرض می کنیم $0 < u < \pi$ بر E . بنابر (ث)

$$\int_S \zeta = \int_{\partial S} \lambda \quad \text{و} \quad \int_{\partial \Omega} \zeta = \int_{\partial \Omega} \lambda$$

با استفاده از قسمت (ت) تمرین ۲۱ و توجه به اینکه z/r در $\Sigma(u, v)$ و در $\Omega(u, v)$ یکی است، نشان دهید که دو انتگرال λ با هم برابرند.
(چ) آیا ζ در متمم هر خط مار بر مبدأ کامل است؟

۲۳. n را ثابت بگیرید. به ازای $1 \leq k \leq n$ تعریف کنید $q_k = (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{1/2}$ فرض کنید E_k مجموعه تمام $x \in \mathbb{R}^n$ هایی باشد که در آنها $r_k > 0$ ، و ω_k را فرم $(k-1)$ بعدی تعریف شده در E_k با

$$\omega_k = (r_k)^{-k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

بینگارید .

توجه کنید که ، با اصطلاحات تمرینهای ۲۱ و ۲۲ ، $\omega_2 = \eta$ ، همچنین ، توجه کنید که

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

(آ) ثابت کنید که در E_k ، $d\omega_k = 0$.

(ب) با نشان دادن اینکه

$$\omega_k = d(f_k \omega_{k-1}) = (df_k) \wedge \omega_{k-1}$$

که در آن $f_k(x) = (-1)^k g_k(x_k/r_k)$ و

$$g_k(t) = \int_{-1}^t (1-s^2)^{(k-3)/2} ds \quad (-1 < t < 1)$$

ثابت کنید ω_k ، به ازای $k = 2, \dots, n$ در E_{k-1} کامل است .

راهنمایی: f_k در معادلات دیفرانسیل

$$x \cdot (\nabla f_k)(x) = 0$$

و

$$(D_k f_k)(x) = \frac{(-1)^k (r_{k-1})^{k-1}}{(r_k)^k}$$

صدق می کند .

(پ) آیا ω_n در E_n کامل است ؟

(ت) توجه کنید که (ب) تعمیم قسمت (ث) تمرین ۲۲ است . سعی کنید چند تا از احکام

دیگر تمرینهای ۲۱ و ۲۲ را در مورد ω_n ، به ازای n دلخواه ، تعمیم دهید .

۲۴ . فرض کنید $\omega = \sum a_i(x) dx_i$ یک فرم ۱ بعدی از رده $\mathcal{G}^m$ در مجموعه باز و محدث $E \subset \mathbb{R}^n$ باشد .

بپذیرید که $d\omega = 0$ و ، با تکمیل شرح مختصر زیر ، ثابت کنید ω در E کامل است .

$p \in E$ را ثابت بگیرید . تعریف کنید

$$f(x) = \int_{[p,x]} \omega \quad (x \in E).$$

قضیه استوکس را در مورد سادکهای ۲ بعدی جهتدار مستوی $[p, x, y]$ در E به کار

برید . نتیجه بگیرید که به ازای $x \in E, y \in E$

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \int_0^1 a_i((1-t)x + ty) dt.$$

لذا ، $(D_i f)(x) = a_i(x)$.

۲۵ . فرض کنید ω یک فرم 1 بعدی در مجموعه $E \subset R^n$ باشد بطوری که به ازای هر منحنی

بسته γ در E ، از رده $\mathcal{G}'$ ،

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

باتعلیل از بخشی از آنچه مختصراً " در تمرین ۲۴ گفته شد ، ثابت کنید ω در E کامل است .

۲۶ . فرض کنید ω یک فرم 1 بعدی در $R^3 - \{0\}$ از رده $\mathcal{G}'$ باشد و $d\omega = 0$. ثابت کنید ω در $R^3 - \{0\}$ کامل است .

راهنمایی : هر منحنی به طور پیوسته مشتق پذیر و بسته در $R^3 - \{0\}$ کرانه یک سطح 2 بعدی در $R^3 - \{0\}$ است . قضیه استوکس و تمرین ۲۵ را به کار ببرید .

۲۷ . فرض کنید E یک حجره 3 بعدی باز در R^3 با اضلاع موازی محورهای مختصات باشد . فرض کنید $(a, b, c) \in E$ و ، به ازای $i=1, 2, 3$ ، $f_i \in \mathcal{G}'(E)$ ،

$$\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy,$$

و نیز فرض کنید $d\omega = 0$ در E . تعریف کنید

$$\lambda = g_1 dx + g_2 dy$$

که در آن به ازای $(x, y, z) \in E$

$$g_1(x, y, z) = \int_c^z f_2(x, y, s) ds - \int_b^y f_3(x, t, c) dt$$

$$g_2(x, y, z) = - \int_c^z f_1(x, y, s) ds.$$

ثابت کنید $d\lambda = \omega$ در E .

این انتگرالها را وقتی ω حساب کرده بدین ترتیب شکل λ را که در قسمت (ث) تمرین ۲۲ ظاهر شده پیدا نمایید .

۲۸ . $a > 0 > b$ را ثابت بگیرید و ، به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $a \leq r \leq b$ ، تعریف کنید

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

(برد Φ یک طوق در R^2 است .) قرار دهید $\omega = x^3 dy$ و هر دوی

$$\int_{\partial\Omega} \omega \quad \text{و} \quad \int_{\Omega} d\omega$$

را برای تحقیق در برابر بودنشان محاسبه نمایید.

۲۹. وجود تابع α با خواص لازم در برهان قضیه ۳۸.۱۰ را اثبات، و ثابت کنید تابع حاصل F از رده $\mathcal{C}^6$ است. (هر دو حکم در صورتی که E یک حجره^۱ باز یا یک گوی باز باشد بدیهی است، زیرا در این صورت α را می توان ثابت گرفت. ر.ک. قضیه ۰۴۲.۹)

۳۰. اگر N بردار داده شده با (۱۳۵) باشد، ثابت کنید

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{bmatrix} = |N|^2.$$

همچنین، صحت معادله (۱۳۷) را تحقیق نمایید.

۳۱. فرض کنید $E \subset \mathbb{R}^3$ باز باشد، $g \in \mathcal{C}''(E)$ ، $h \in \mathcal{C}''(E)$ ، و میدان برداری

$$F = g \nabla h$$

را در نظر می گیریم.

(۱) ثابت کنید

$$\nabla \cdot F = g \nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h)$$

که در آن $\nabla^2 h = \nabla \cdot (\nabla h) = \sum \partial^2 h / \partial x_i^2$ "لاپلاسین" h نام دارد.

(ب) هرگاه Ω یک زیر مجموعه^۲ بسته^۳ E با کرانه^۴ به طور مثبت جهتدار $\partial\Omega$ باشد (مثل قضیه ۵۱.۱۰)، ثابت کنید

$$\int_{\Omega} [g \nabla \cdot h + (\nabla g) \cdot (\nabla h)] dV = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial h}{\partial n} dA$$

که در آن (همانطور که رسم است) $\partial h / \partial n$ را به جای $(\nabla h) \cdot \mathbf{n}$ نوشتیم. (لذا، $\partial h / \partial n$ مشتق جهتی h در جهت قائم برونسویه $\partial\Omega$ ، به نام مشتق قائم h ، می باشد.) و h را با هم عوض کرده فرمول حاصل را از اولی کم کنید تا

$$\int_{\Omega} (g \nabla^2 h - h \nabla^2 g) dV = \int_{\partial\Omega} \left(g \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial g}{\partial n} \right) dA$$

حاصل شود.

این دو فرمول را معمولاً "اتحادهای گرین" می خوانند.

(پ) فرض کنید h در E توافقی باشد؛ این یعنی که $g, \nabla^2 h = 0$ را مساوی یک اختیار کرده نتیجه بگیرید که

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n} dA = 0.$$

g را برابر h اختیار کرده نتیجه بگیرید که $h = 0$ در Ω هرگاه $h = 0$ بر $\partial\Omega$.

(ت) نشان دهید که اتحادهای گرین در R^2 نیز معتبرند.

۳۲. δ را بین ۰ و ۱ ثابت بگیرید. فرض کنید D مجموعهٔ R^2 در (θ, t) هایی باشد که $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq t \leq \delta$ و Φ را سطح ۲ بعدی در R^3 با قلمرو پارامتری D ، بینگارید که با

$$\begin{aligned} x &= (1 - t \sin \theta) \cos 2\theta \\ y &= (1 - t \sin \theta) \sin 2\theta \\ z &= t \cos \theta \end{aligned}$$

که در آنها $(x, y, z) = \Phi(\theta, t)$ ، مشخص می شود. توجه کنید که $\Phi(0, -t) = \Phi(0, t)$ و Φ بر مابقی D یک به یک است.

برد $M = \Phi(D)$ ی Φ به نوار موبیوس^۱ معروف است. این ساده ترین نمونهٔ یک سطح جهت ناپذیر می باشد.

احکام مختلفی را که در توضیحات زیر آمده اند اثبات کنید: قرار دهید

$$\mathbf{p}_1 = (0, -\delta), \mathbf{p}_2 = (\pi, -\delta), \mathbf{p}_3 = (\pi, \delta), \mathbf{p}_4 = (0, \delta), \mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_1$$

و فرض کنید $\gamma_i = \Phi \circ \gamma_i$ ، $i = 1, \dots, 4$ ، $\gamma_i = [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}]$ در این صورت،

$$\partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4.$$

قرار می دهیم $\mathbf{a} = (1, 0, -\delta), \mathbf{b} = (1, 0, \delta)$ در این صورت،

$$\Phi(\mathbf{p}_1) = \Phi(\mathbf{p}_3) = \mathbf{a}, \quad \Phi(\mathbf{p}_2) = \Phi(\mathbf{p}_4) = \mathbf{b}$$

و $\partial\Phi$ را می توان به شکل زیر توصیف کرد:

Γ مارپیچ وازاز $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ بالا می رود؛ تصویرش در صفحهٔ (x, y) دارای عددگردشی $+1$ حول مبدا^۲ است. (ر.ک. تمرین ۲۳، فصل ۰.۸)

$$\Gamma_2 = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

Γ_3 مارپیچ وار از a به b بالا می رود؛ تصویرش در صفحه (x, y) دارای عدد گردشی -1 حول مبدأ می باشد.

$$\Gamma_4 = [b, a]$$

$$\text{لذا، } \partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_3 + 2\Gamma_2.$$

اگر در امتداد Γ_1 از a به b برویم و در امتداد "پال" M ادامه داده تا به a بازگردیم، منحنی پیموده شده

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_3$$

است، که می توان آن را روی بازه پارامتری $[0, 2\pi]$ با معادلات

$$x = (1 + \delta \sin \theta) \cos 2\theta$$

$$y = (1 + \delta \sin \theta) \sin 2\theta$$

$$z = -\delta \cos \theta$$

نیز نمایش داد.

بایستی تأکید شود که $\partial\Phi \neq \Gamma$ ؛ فرض کنید η فرم 1 بعدی باشد که در تمرینهای ۲۱ و ۲۲ مطرح شد. چون $d\eta = 0$ ، قضیه استوکس نشان می دهد که

$$\int_{\partial\Phi} \eta = 0.$$

اما، با اینکه Γ کرانه "هندسی" M است، داریم

$$\int_{\Gamma} \eta = 4\pi.$$

برای احتراز از این ابهام، اغلب فرمول استوکس (قضیه ۵۰.۱۰) فقط برای سطوح جهت پذیر Φ بیان می شود.

نظریهٔ لبگ

هدف در این فصل آن است که مفهومیهای اساسی نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری لبگ معرفی و، بی آنکه خطوط اصلی کار با جزئیات نسبتاً "بدیهی" تیره شوند، چند قضیهٔ قطعی در یک محدودهٔ نسبتاً "کلی اثبات گردند". از اینرو، برهانها فقط در بعضی از حالات و آنهم به اختصار آمده و برخی از احکام ساده‌تر بی برهان ذکر شده‌اند. بهر حال، خواننده آشنا با فنون به کار رفته در فصلهای پیش یقیناً "در بیان مطالب ذکر نشده مشکل نخواهد داشت".

نظریهٔ انتگرال لبگ را می‌توان به چند طریق عرضه کرد. یکی از این طریقه‌ها در اینجا مطرح خواهد شد. برای طرق دیگر، خواننده را به مقالات تخصصی‌تر در باب انتگرالگیری که در کتابنامه ذکر شده‌اند ارجاع می‌دهیم.

توابع مجموعه‌ای

اگر A و B دو مجموعه باشند، برای مجموعهٔ تمام x هایی که $x \in A$ ، $x \notin B$ می‌نویسیم $A - B$. نماد $A - B$ جزئیست $B \subset A$ را ایجاب نمی‌کند. ما مجموعهٔ تهی را با 0 نشان می‌دهیم، و می‌گوییم A و B از هم جدا اند در صورتی که $A \cap B = 0$.

۱۰۱۱ تعریف. خانوادهٔ $\mathcal{R}$ از مجموعه‌ها را یک حلقه نامیم هرگاه $A \in \mathcal{R}$ و $B \in \mathcal{R}$ ایجاب کنند که

$$(1) \quad A \cup B \in \mathcal{R}, \quad A - B \in \mathcal{R}.$$

چون $A \cap B = A - (A - B)$ ، در صورت حلقه بودن $\mathcal{R}$ نیز داریم $A \cap B \in \mathcal{R}$.

حلقه $\mathcal{R}$ را یک σ -حلقه خوانیم هرگاه وقتی $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ، $A_n \in \mathcal{R}$ ،

$$(2) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

چون

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

در صورت σ -حلقه بودن $\mathcal{R}$ نیز خواهیم داشت

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

۲۰۱۱ تعریف. می‌گوییم ϕ یک تابع مجموعه‌ای تعریف شده بر $\mathcal{R}$ است هرگاه ϕ به هر $A \in \mathcal{R}$ عدد $\phi(A)$ از دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی را نسبت دهد. ϕ جمعپذیر است اگر که $A \cap B = 0$ ایجاب کند که

$$(3) \quad \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$$

و ϕ به طور شمارشپذیر جمعپذیر است هرگاه $A_i \cap A_j = 0$ ($i \neq j$) ایجاب کند که

$$(4) \quad \phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

ما همیشه فرض می‌کنیم ϕ برد شامل هم ∞ و هم $-\infty$ نباشد؛ زیرا، در غیر این صورت، طرف راست (۳) بی‌معنی می‌شد. همچنین، توابع مجموعه‌ای را که مقدارشان فقط ∞ یا $-\infty$ است مستثنی می‌نماییم.

جالب است توجه کنیم که سمت چپ (۴) از ترتیبی که با آن A_n ها آرایش یافته‌اند مستقل است. از اینرو، قضیه تجدید آرایش نشان خواهد داد که طرف راست (۴) در صورت همگرا بودن به طور مطلق همگراست؛ در صورت همگرا نبودن، مجموعه‌های جزئی به ∞ یا $-\infty$ میل خواهند کرد.

در حالت جمعپذیر بودن ϕ ، خواص زیر بسهولت قابل تحقیق‌اند:

$$(5) \quad \phi(0) = 0;$$

$$(6) \quad \phi(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \phi(A_1) + \dots + \phi(A_n)$$

در صورتی که اگر $i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$ ،

$$(7) \quad \phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2),$$

هرگاه به ازای هر A ، $\phi(A) \geq 0$ ، و $A_1 \subset A_2$ نگاه

$$(8) \quad \phi(A_1) \leq \phi(A_2).$$

بخاطر (۸) است که اغلب توابع مجموعه‌ای جمعپذیر نامنفی یکنوا خوانده می‌شوند.

هرگاه $B \subset A$ و $|\phi(B)| < +\infty$ ،

$$(9) \quad \phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B).$$

۳.۱۱ قضیه. فرض کنیم ϕ بر حلقه $\mathcal{R}$ به طور شمارشپذیر جمعپذیر باشد. همچنین،

$A \in \mathcal{R}$ ، $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ و $A_n \in \mathcal{R}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

در این صورت، وقتی $n \rightarrow \infty$

$$\phi(A_n) \rightarrow \phi(A).$$

برهان. قرار می‌دهیم $B_1 = A_1$ و

$$B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

پس، به ازای $i \neq j$ ، $B_i \cap B_j = \emptyset$ ، $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$ و $A = \bigcup B_n$ در نتیجه،

$$\phi(A_n) = \sum_{i=1}^n \phi(B_i)$$

و

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i).$$

ساختن اندازه لبه

۴.۱۱ تعریف. فرض کنیم R^p فضای اقلیدسی p بعدی باشد. منظور از بازه در R^p یعنی

مجموعه نقاطی چون $x = (x_1, \dots, x_p)$ که

$$(10) \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, p),$$

و یا مجموعه نقطاتی که با (۱۰) که در آن بعضی یا تمام علامات $\leq$ با عوض شده مشخص می شود. این امکان را که به ازای هر مقدار $a_i = b_i$ ، a_i مردود نمی دانیم؛ بویژه، مجموعه تهی را جزو بازه ها به حساب می آوریم.

هرگاه A اجتماع تعدادی متناهی بازه باشد، A را یک مجموعه مقدماتی خواهیم نامید.

چنانچه I یک بازه باشد، بی توجه به امکان تساوی در هر یک از نامساویهای (۱۰)، تعریف می کنیم

$$m(I) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i).$$

هرگاه $A = I_1 \cup \dots \cup I_n$ و این بازه ها دو به دو از هم جدا باشند، قرار می دهیم

$$(11) \quad m(A) = m(I_1) + \dots + m(I_n).$$

فرض کنیم $\mathcal{G}$ خانواده تمام زیر مجموعه های مقدماتی R^p باشد.

در این مرحله باید خواص زیر تحقیق شوند:

$$(12) \quad \mathcal{G} \text{ یک حلقه است، اما یک } \sigma \text{ حلقه نیست؛}$$

$$(13) \quad \text{هرگاه } A \in \mathcal{G}, A \text{ اجتماع تعدادی متناهی بازه از هم جدا است؛}$$

هرگاه $A \in \mathcal{G}$ ، $m(A)$ به وسیله (۱۱) کاملاً تعریف می شود؛ یعنی، اگر دو تجزیه A

به بازه های از هم جدا به کار روند، هر دو یک مقدار برای $m(A)$ به دست می دهند؛

$$(14) \quad m \text{ بر } \mathcal{G} \text{ جمعپذیر است.}$$

توجه کنید که اگر $p = 1, 2, 3$ ، m ، بترتیب طول، مساحت، و حجم خواهد بود.

۵.۱۱ تعریف. تابع مجموعه ای جمعپذیر و نامنفی ϕ تعریف شده بر $\mathcal{G}$ را منتظم نامیم اگر که مطلب

زیر درست باشد: به ازای هر $A \in \mathcal{G}$ و هر $\varepsilon > 0$ مجموعه هایی چون $F \in \mathcal{G}$ و $G \in \mathcal{G}$ موجود باشند

بطوری که F بسته باشد، G باز باشد، $F \subset A \subset G$ ، و

$$(16) \quad \phi(G) - \varepsilon \leq \phi(A) \leq \phi(F) + \varepsilon.$$

۶.۱۱ چند مثال

(۱) تابع مجموعه ای m منتظم است

واضح است که اگر A یک بازه باشد، شرطهای تعریف ۵.۱۱ برقرارند. حالت کلی از

(۱۳) نتیجه خواهد شد.

(ب) R^p را مساوی R^1 گرفته، فرض می‌کنیم α تابعی صعودی باشد که به ازای هر x حقیقی تعریف شده است. قرار می‌دهیم

$$\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-),$$

$$\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-),$$

$$\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+),$$

$$\mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+).$$

در اینجا $[a, b]$ مجموعه $a \leq x < b$ است، و از این قبیل. این حالات باید بخاطر ناپیوستگیهای احتمالی α تمیز داده شوند. اگر μ برای مجموعه‌های مقدماتی به صورت (۱۱) تعریف شده باشد، μ بر $\mathcal{E}$ منتظم است. اثباتش درست مثل اثبات (۱) خواهد بود.

هدف بعدی ما آن است که نشان دهیم هر تابع مجموعه‌ای منتظم بر $\mathcal{E}$ را می‌توان به یک تابع مجموعه‌ای به طور شمارشپذیر جمعپذیر بر یک σ -حلقه که شامل $\mathcal{E}$ است تعمیم داد.

۷.۱۱ تعریف. فرض کنیم μ بر $\mathcal{E}$ جمعپذیر، منتظم، نامنفی، و متناهی باشد. پوششهای شمارشپذیر مجموعه دلخواه $E \subset R^n$ مرکب از مجموعه‌های مقدماتی A_n را در نظر می‌گیریم:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

تعریف می‌کنیم

$$(17) \quad \mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

$\inf$ روی تمام پوششهای شمارشپذیر E مرکب از مجموعه‌های مقدماتی باز گرفته می‌شود. $\mu^*(E)$ اندازه خارجی E متناظر μ نامیده می‌شود.

واضح است که به ازای هر E ، $\mu^*(E) \geq 0$ ، و اگر $E_1 \subset E_2$ ،

$$(18) \quad \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2).$$

۸.۱۱ قضیه

(۱) به ازای هر $A \in \mathcal{E}$ ، $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(ب) هرگاه $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ،

$$(19) \quad \mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

توجه کنید که $(\bar{\cdot})$ این طور می گوید که μ^* تعمیم μ از $\mathcal{E}$ به خانواده تمام زیر مجموعه های R^p است. خاصیت (۱۹) را خاصیت زیر جمع پذیری می نامند.

برهان. $A \in \mathcal{E}$ و $\varepsilon > 0$ را اختیار می کنیم.

منتظم بودن μ نشان می دهد که A در یک مجموعه مقدماتی باز مانند G قرار دارد بطوری که $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$. چون $\mu^*(A) \leq \mu(G)$ و چون ε دلخواه بود، خواهیم داشت

$$(20) \quad \mu^*(A) \leq \mu(A).$$

تعریف μ^* نشان می دهد که دنباله های مانند $\{A_n\}$ از مجموعه های مقدماتی باز وجود دارد که اجتماعشان شامل A است و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

منتظم بودن μ نشان می دهد که A شامل مجموعه مقدماتی بسته ای مثل F است بطوری که $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$ و چون F فشرده است، به ازای N داریم

$$F \subset A_1 \cup \dots \cup A_N.$$

لذا،

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^N \mu(A_i) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

این همراه با (۲۰) قسمت (۱) را ثابت می کند.

حال فرض می کنیم $E = \bigcup E_n$ و این طور می انگاریم که به ازای هر n ، $\mu^*(E_n) < +\infty$ به ازای $\varepsilon > 0$ معلوم، پوششهایی مثل $\{A_{nk}\}$ ، $k = 1, 2, 3, \dots$ ، از E_n مرکب از مجموعه های مقدماتی باز وجود دارند بطوری که

$$(21) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

پس

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

و (۱۹) نتیجه خواهد شد. البته، در حالت استثنایی، یعنی اگر به ازای $\mu^*(E_n) = +\infty$ بدیهی خواهد بود. (۱۹)

۹.۱۱ تعریف. به ازای هر $A \subset R^p$ و $B \subset R^p$ تعریف می‌کنیم

$$(22) \quad S(A, B) = (A - B) \cup (B - A),$$

$$(23) \quad d(A, B) = \mu^*(S(A, B)).$$

هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A, A_n) = 0$ ، می‌نویسیم

$$A_n \rightarrow A.$$

اگر دنباله‌ای چون $\{A_n\}$ از مجموعه‌های مقدماتی باشد بطوری که $A_n \rightarrow A$ ، می‌گوییم A به‌طور متناهی μ -اندازه‌پذیر است و می‌نویسیم $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. هرگاه A اجتماع گرد آیه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های به‌طور متناهی μ -اندازه‌پذیر باشد، می‌گوییم $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ، μ -اندازه‌پذیر است و می‌نویسیم $A \in \mathcal{M}(\mu)$. $S(A, B)$ "تفاضل متقارن" A و B نام دارد. خواهیم دید که $d(A, B)$ اصولاً "یک تابع فاصله‌است".

قضیه زیر ما را به تعمیم مورد نظر μ می‌رساند.

۱۰.۱۱ قضیه. $\mathcal{M}(\mu)$ یک σ -حلقه و μ^* بر $\mathcal{M}(\mu)$ به‌طور شمارش‌پذیر جمع‌پذیر است.

قبل از اثبات این قضیه چند خاصیت $S(A, B)$ و $d(A, B)$ را شرح می‌دهیم. داریم

$$(24) \quad S(A, B) = S(B, A), \quad S(A, A) = 0;$$

$$(25) \quad S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B);$$

$$(26) \quad \left. \begin{array}{l} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array} \right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2).$$

صحت (۲۴) واضح است، و (۲۵) از

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \quad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C)$$

نتیجه می‌شود. اولین فرمول (۲۶) از

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2)$$

به دست می‌آید. و اما، اگر برای متمم E بنویسیم E^c ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) &= S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \\ &\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2); \end{aligned}$$

و، در صورت توجه به

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c,$$

آخرین فرمول (۲۶) به دست خواهد آمد.

بنابر (۲۳)، (۱۹)، و (۱۸)، این خواص $S(A, B)$ نتیجه می‌دهند که

$$(27) \quad d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, A) = 0,$$

$$(28) \quad d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

$$(29) \quad \left. \begin{aligned} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{aligned} \right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2).$$

روابط (۲۷) و (۲۸) نشان می‌دهند که $d(A, B)$ در شرطهای تعریف ۱۵.۲ صدق می‌کند، جز آنکه $d(A, B) = 0$ تساوی $A=B$ را ایجاب نخواهد کرد. به عنوان مثال، هرگاه $\mu = m$ ، A شمارشپذیر، و B تهی باشد، داریم

$$d(A, B) = m^*(A) = 0;$$

برای اثبات این مطلب، n مین نقطه A را با بازه‌های مانند I_n که

$$m(I_n) < 2^{-n}\epsilon$$

می‌پوشانیم.

اما اگر دو مجموعه A و B را در صورتی معادل تعریف کنیم که

$$d(A, B) = 0,$$

زیر مجموعه‌های R^p به رده‌های هم ارزی تقسیم می‌شود، و $d(A, B)$ مجموعه‌ای این رده‌های هم ارزی را به یک فضای متری بدل می‌کند. در این صورت، $\mathcal{M}_F(\mu)$ به عنوان بست $\mathcal{F}$ به دست می‌آید. این تعبیر برای اثبات لازم نیست، لکن ایده اصلی را توضیح خواهد داد. به یک خاصیت دیگر $d(A, B)$ ، یعنی

$$(30) \quad |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B),$$

در صورتی که حداقل یکی از $\mu^*(A)$ ، $\mu^*(B)$ متناهی باشد، نیاز خواهیم داشت. برای اثبات آن فرض می‌کنیم $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ پس (۲۸) نشان می‌دهد که

$$d(A, 0) \leq d(A, B) + d(B, 0);$$

یعنی،

$$\mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B).$$

چون $\mu^*(B)$ متناهی است، نتیجه می‌شود که

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B).$$

برهان قضیه ۱۰۰۱۱. فرض کنیم $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$ و $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ را قسمی اختیار می‌کنیم که $A_n \in \mathcal{E}$, $B_n \in \mathcal{E}$, $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$ و (۲۹) و (۳۰) نشان می‌دهند که

$$(31) \quad A_n \cup B_n \rightarrow A \cup B,$$

$$(32) \quad A_n \cap B_n \rightarrow A \cap B,$$

$$(33) \quad A_n - B_n \rightarrow A - B,$$

$$(34) \quad \mu^*(A_n) \rightarrow \mu^*(A),$$

و $\mu^*(A) < +\infty$ زیرا $d(A_n, A) \rightarrow 0$. بنابر (۳۱) و (۳۳)، $\mathfrak{M}_F(\mu)$ یک حلقه است. بر طبق (۷)،

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

با فرض $n \rightarrow \infty$ ، بنابر (۳۴) و قضیه ۸۰۱۱ (۱)، خواهیم داشت

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

هرگاه $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $\mu^*(A \cap B) = 0$.

از اینجا نتیجه می‌شود که μ^* بر $\mathfrak{M}_F(\mu)$ جمعپذیر است.

حال فرض می‌کنیم $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. پس A را می‌توان به صورت اجتماع گردآیه شمارپذیری

از مجموعه‌های از هم جدا $\mathfrak{M}_F(\mu)$ نشان داد. زیرا که اگر $A = \bigcup A'_n$ با این خاصیت که $A'_1 = A'_1$ می‌نویسیم $A'_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$

$$A_n = (A'_1 \cup \dots \cup A'_n) - (A'_1 \cup \dots \cup A'_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

لذا،

$$(35) \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

نمایش مطلوب می‌باشد. بنابر (۱۹)،

$$(36) \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

از سوی دیگر $A_n \supset A_1 \cup \dots \cup A_n$ و بنابر جمعپذیری μ^* بر $\mathfrak{M}_F(\mu)$ خواهیم داشت

$$(37) \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \dots + \mu^*(A_n).$$

معادلات (۳۶) و (۳۷) ایجاب خواهند کرد که

$$(38) \quad \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

فرض کنیم $\mu^*(A)$ متناهی باشد. قرار می دهیم $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ ، در این صورت،
(۳۸) نشان می دهد که، وقتی $n \rightarrow \infty$

$$d(A, B_n) = \mu^*\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \rightarrow 0.$$

در نتیجه، $B_n \rightarrow A$ و چون $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ ، به آسانی دیده می شود که $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.
پس نشان داده ایم که اگر $A \in \mathcal{M}(\mu)$ و $\mu^*(A) < +\infty$ و $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ ،
حال واضح است که μ^* بر $\mathcal{M}(\mu)$ به طور شمارش پذیر جمع پذیر است. زیرا که اگر
$$A = \bigcup A_n,$$

که در آن $\{A_n\}$ دنباله ای از مجموعه های از هم جدای $\mathcal{M}(\mu)$ باشد، نشان داده ایم که
(۳۸) در صورتی که به ازای هر n $\mu^*(A_n) < +\infty$ برقرار و در حالت دیگر بدیهی است.
بالاخره، باید نشان دهیم که $\mathcal{M}(\mu)$ یک σ -حلقه است. گوییم اگر $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ ،
 $n = 1, 2, 3, \dots$ ، واضح است که $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ (قضیه ۱۲.۲). فرض کنیم $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ،
و $B \in \mathcal{M}(\mu)$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

که در آنها $A_n, B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. در این صورت، اتحاد

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

نشان می دهد که $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$ و چون

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < +\infty,$$

پس $A_n \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ لذا $A_n - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ و $A - B \in \mathcal{M}(\mu)$ زیرا $A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$.

حال اگر $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ، $\mu(A)$ را جایگزین $\mu^*(A)$ می کنیم. پس μ ، که در اصل فقط بر
 $\mathcal{M}$ تعریف شده، به یک تابع مجموعه ای به طور شمارش پذیر جمع پذیر σ -حلقه $\mathcal{M}(\mu)$ تعمیم
می یابد. این تابع مجموعه ای تعمیم یافته یک اندازه نام دارد. حالت خاص $\mu = m$ اندازه
لیگ بر R^n خوانده می شود.

۱۱.۱۱ چند تبصره

(آ) هرگاه A باز باشد، $A \in \mathcal{M}(\mu)$. زیرا هر مجموعه باز در R^p اجتماع گردآیه^۱ شمارشپذیری از بازه‌های باز است. برای اثبات این مطلب کافی است پایه^۲ شمارشپذیری بسازیم که اعضایش بازه‌هایی باز باشند.

با متممگیری نتیجه می‌شود که هر مجموعه بسته در $\mathcal{M}(\mu)$ است.

(ب) اگر $A \in \mathcal{M}(\mu)$ و $\varepsilon > 0$ ، مجموعه‌هایی مثل F و G هستند بطوری که

$$F \subset A \subset G,$$

F بسته است، G باز است، و

$$(39) \quad \mu(G - A) < \varepsilon, \quad \mu(A - F) < \varepsilon.$$

اولین نامساوی برقرار است، چرا که μ^* به وسیله پوششهای مرکب از مجموعه‌های مقدماتی باز تعریف شده بود. نامساوی دوم با متممگیری نتیجه خواهد شد.

(پ) می‌گوییم E یک مجموعه برل^۱ است هرگاه E را بتوان با تعدادی شمارشپذیر عمل به دست آورد، نقطه شروع مجموعه‌های باز باشد، و هر عمل عبارت باشد از گرفتن اجتماع، اشتراک، یا متمم. گردآیه^۲ $\mathcal{B}$ تمام مجموعه‌های برل در R^p یک σ -حلقه است؛ در واقع، این σ -حلقه کوچکترین σ -حلقه‌ای است که شامل تمام مجموعه‌های باز است. بنابر تبصره^۳ (آ)، اگر $E \in \mathcal{B}$ ، $E \in \mathcal{M}(\mu)$.

(ت) هرگاه $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ، مجموعه‌های برلی چون F و G هستند بطوری که $F \subset A \subset G$ و

$$(40) \quad \mu(G - A) = \mu(A - F) = 0.$$

این مطلب از (ب) با اختیار $\varepsilon = 1/n$ و فرض $n \rightarrow \infty$ به دست می‌آید.

چون $A \setminus F \cup (A - F) = A \setminus F$ می‌بینیم که هر $A \in \mathcal{M}(\mu)$ اجتماع یک مجموعه برل و مجموعه‌ای از اندازه صفر است.

مجموعه‌های برل به ازای هر μ ، اندازه پذیرند. اما مجموعه‌های از اندازه صفر [یعنی، مجموعه‌هایی چون E که برای آنها $\mu^*(E) = 0$] ممکن است به ازای μ های مختلف متفاوت باشند.

(ث) به ازای هر μ ، مجموعه‌های از اندازه صفر یک σ -حلقه تشکیل می‌دهند.

(ج) در حالت اندازه لیگ، هر مجموعه شمارشپذیر دارای اندازه صفر است. اما تعداد

شمارش‌ناپذیری (درواقع، کاملی) مجموعه از اندازه صفر وجود دارد. مجموعه کانتور را می‌توان به عنوان یک نمونه در نظر گرفت: با استفاده از نمادگذاری بخش ۴۴.۲، به آسانی دیده می‌شود که

$$m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

و چون $P = \bigcap E_n$ ، به ازای هر $p \in E_n$ ، در نتیجه $m(P) = 0$.

فضاهای اندازه

۱۲.۱۱ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه باشد، مجموعه‌ای که لزوماً "زیرمجموعه‌ای از یک فضای اقلیدسی یا درواقع یک فضای متری دلخواه نیست. X را یک فضای اندازه گوئیم هرگاه یک σ -حلقه مانند $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X (که مجموعه‌های اندازه‌پذیر خوانده می‌شوند) و یک تابع مجموعه‌ای به طور شمارش‌پذیر جمع‌پذیر و نامنفی μ (که یک اندازه نام دارد) که بر $\mathcal{M}$ تعریف شده وجود داشته باشد.

هرگاه، علاوه بر این، $X \in \mathcal{M}$ ، آنگاه X یک فضای اندازه‌پذیر خوانده خواهد شد. به عنوان مثال، می‌توانیم X را R^1 ، $\mathcal{M}$ را گردآیه تمام زیرمجموعه‌های لبک اندازه‌پذیر R^1 ، و μ را اندازه لبک بگیریم.

یا اینکه فرض کنیم X مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت، $\mathcal{M}$ گردآیه تمام زیرمجموعه‌های X ، و $\mu(E)$ تعداد عنصرهای E باشد.

مثال دیگر را نظریه احتمال به دست می‌دهد، به این ترتیب که پیشامدها را می‌توان به عنوان مجموعه‌هایی در نظر گرفت، و احتمال رخ دادن آنها یک تابع مجموعه‌ای جمع‌پذیر (یا به طور شمارش‌پذیر جمع‌پذیر) می‌باشد.

در بخشهای زیر همیشه سروکار ما با فضاهای اندازه‌پذیر است. باید تأکید کنیم که نظریه انتگرالگیری که بزودی مطرح می‌شود با فدا کردن کلیتی که اکنون به آن رسیده ایم و تحدید خود به اندازه لبک، مثلاً، "بریک بازه از خط حقیقی، به پیچیده‌تر نمی‌شود. درواقع، در وضعیت کلیتر، کیفیات اصلی نظریه با روشنی خیلی بیشتری بروز می‌کنند، وضعیتی که در آن می‌بینیم همه چیز فقط به جمع‌پذیری به طور شمارش‌پذیر μ بریک σ -حلقه بستگی دارد. جای آن است که نماد

را برای مجموعه عناصر x که از خاصیت P بهره‌مندند معرفی کنیم.

تابهای اندازه‌پذیر

۱۳۰۱۱ تعریف. فرض کنیم f تابعی باشد که بر فضای اندازه‌پذیر X تعریف شده است و مقادیرش در دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی اند. تابع f را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه مجموعه^۶

$$(42) \quad \{x | f(x) > a\}$$

به ازای هر a حقیقی اندازه‌پذیر باشد.

۱۴۰۱۱ مثال. هرگاه $X = R^p$ و $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu)$ بصورتی باشد که در تعریف ۹۰۱۱ آمده، آنگاه هر f پیوسته اندازه‌پذیر است، زیرا که در این صورت (۴۲) مجموعه بازی خواهد بود.

۱۵۰۱۱ قضیه. هریک از چهار شرط زیر سه شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

- (43) $\{x | f(x) > a\}$ به ازای هر a حقیقی اندازه‌پذیر است؛
 (44) $\{x | f(x) \geq a\}$ به ازای هر a حقیقی اندازه‌پذیر است؛
 (45) $\{x | f(x) < a\}$ به ازای هر a حقیقی اندازه‌پذیر است؛
 (46) $\{x | f(x) \leq a\}$ به ازای هر a حقیقی اندازه‌پذیر است.

برهان. روابط

$$\begin{aligned} \{x | f(x) \geq a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x | f(x) > a - \frac{1}{n} \right\}, \\ \{x | f(x) < a\} &= X - \{x | f(x) \geq a\}, \\ \{x | f(x) \leq a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x | f(x) < a + \frac{1}{n} \right\}, \\ \{x | f(x) > a\} &= X - \{x | f(x) \leq a\} \end{aligned}$$

بترتیب نشان می‌دهند که (۴۳) (۴۴)، (۴۴) (۴۵)، (۴۵) (۴۶)، و (۴۶) (۴۳) را ایجاب می‌کند.

درنتیجه، هریک از این شرطها را می‌توان به جای (۴۲) برای تعریف اندازه‌پذیری به کار برد.

۱۶۰۱۱ قضیه. هرگاه f اندازه پذیر باشد، $|f|$ نیز اندازه پذیر است.

برهان

$$\{x \mid |f(x)| < a\} = \{x \mid f(x) < a\} \cap \{x \mid f(x) > -a\}.$$

۱۷۰۱۱ قضیه. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد. به ازای هر $x \in X$ قرار

می‌دهیم

$$g(x) = \sup f_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

در این صورت، g و h اندازه پذیر خواهند بود.

البته، همین مطلب در مورد $\inf$ و $\liminf$ نیز درست است.

برهان

$$\{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a\},$$

$$h(x) = \inf g_m(x),$$

که در آن $g_m(x) = \sup f_n(x) \ (n \geq m)$.

چند نتیجه

(۱) هرگاه f و g اندازه پذیر باشد، $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ اندازه پذیرند.

چنانچه

$$(47) \quad f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = -\min(f, 0),$$

بخصوص نتیجه می‌شود که f^+ و f^- اندازه پذیرند.

(۲) حد یک دنباله همگرا از توابع اندازه پذیر اندازه پذیر است.

۱۸۰۱۱ قضیه. فرض کنیم f و g توابع حقیقی اندازه پذیری باشند که بر X تعریف شده‌اند،

F را بر R^2 حقیقی و پیوسته می‌انگاریم، و قرار می‌دهیم

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \quad (x \in X).$$

در این صورت، h اندازه‌پذیر خواهد بود.

بویژه، $f + g$ و fg اندازه‌پذیر می‌باشند.

برهان. فرض کنیم

$$G_a = \{(u, v) \mid F(u, v) > a\}.$$

در این صورت، G_a زیر مجموعه بازی از R^2 است، و می‌توانیم بنویسیم

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

که در آن $\{I_n\}$ دنباله‌ای از بازه‌های باز می‌باشد:

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n, c_n < v < d_n\}.$$

چون

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

اندازه‌پذیر است، نتیجه می‌شود که مجموعه

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

اندازه‌پذیر است. پس همین مطلب برای

$$\{x \mid h(x) > a\} = \{x \mid (f(x), g(x)) \in G_a\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\}$$

صحیح خواهد بود.

خلاصه آنکه، می‌توان این طور گفت که تمام اعمال معمولی آنالیز، به انضمام اعمال حدی، وقتی در مورد توابع اندازه‌پذیر به کار روند، به توابع اندازه‌پذیر ختم می‌شوند. به عبارت دیگر، تمام توابعی که معمولاً با آنها مواجهیم اندازه‌پذیر می‌باشند. اینک این مطلب بهر حال مطلب ناقصی است از مثال زیر (که مبتنی بر اندازه لبگ بر خط حقیقی است) دیده می‌شود: هرگاه $h(x) = f(g(x))$ ، که در آن f اندازه‌پذیر و g پیوسته است، آنگاه h الزاماً اندازه‌پذیر نیست. (برای جزئیات کار، خواننده را به کتاب مک‌شین^۱، صفحه ۲۴۱، ارجاع می‌دهیم.)

خواننده احتمالاً "متوجه شده است که در بحث ما از توابع اندازه‌پذیر ذکری از اندازه نکرده‌ایم. درواقع، رده توابع اندازه‌پذیر بر X فقط به هر حلقه $\mathfrak{A}$ (نماد تعریف ۱۲.۱۱ را به کار بردیم) بستگی دارد. به عنوان مثال، می‌توان از توابع برل — اندازه‌پذیر بر R^p سخن گفت، یعنی از توابعی چون f که برای آنها

$$\{x | f(x) > a\}$$

همیشه یک مجموعه برل است، بی‌آنکه به اندازه خاصی اشاره شده باشد.

توابع ساده

۱۹.۱۱ تعریف. فرض کنیم s یک تابع حقیقی باشد که بر X تعریف شده است. هرگاه برد s متناهی باشد، می‌گوییم s یک تابع ساده است. فرض کنیم $E \subset X$ و قرار می‌دهیم

$$(48) \quad K_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases}$$

K_E تابع مشخص E نام دارد.

فرض کنیم برد s از اعداد متمایز $c_1, \dots, c_n$ تشکیل شده باشد. قرار می‌دهیم

$$E_i = \{x | s(x) = c_i\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

در این صورت،

$$(49) \quad s = \sum_{i=1}^n c_i K_{E_i};$$

یعنی، هر تابع ساده یک ترکیب خطی متناهی از توابع مشخص می‌باشد. واضح است که s اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌های $E_1, \dots, E_n$ اندازه‌پذیر باشند. جالب این است که هر تابع را می‌توان با توابع ساده تقریب کرد:

۲۰.۱۱ قضیه. فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر X باشد. دنباله‌ای مانند $\{s_n\}$ از توابع ساده هست بطوری که به ازای هر $x \in X$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $s_n(x) \rightarrow f(x)$. هرگاه f اندازه‌پذیر باشد، $\{s_n\}$ را می‌توان دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر گرفت. چنانچه $f \geq 0$ ، ممکن است دنباله‌ای صعودی اختیار شود.

برهان. اگر $f \geq 0$ ، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، $i = 1, 2, \dots, n2^n$ تعریف می‌کنیم

$$E_{ni} = \left\{ x \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad F_n = \{x \mid f(x) \geq n\}.$$

قرار می‌دهیم

$$(50) \quad s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + nK_{F_n}.$$

در حالت کلی، فرض می‌کنیم $f^- - f^+ = f$ و مجموعه‌های قبلی را در مورد f^+ و f^- می‌سازیم. احتمالاً "متوجه شده‌اید که، در صورت کراندار بودن f ، دنباله $\{s_n\}$ داده شده با (۵۰) به طور یکنواخت به f همگراست.

انتگرالگیری

ما انتگرالگیری را بر فضای اندازه‌پذیر X ، که در آن $\mathfrak{M}$ ، σ -حلقه مجموعه‌های اندازه‌پذیر و μ اندازه است، تعریف می‌کنیم. خواننده‌ای که بخواهد حالت واقعی‌تری را تجسم کند می‌تواند X را خط حقیقی، یا یک بازه، و μ را اندازه لبگ m فرض نماید.

۲۱.۱۱ تعریف. فرض می‌کنیم

$$(51) \quad s(x) = \sum_{i=1}^n c_i K_{E_i}(x) \quad (x \in X, c_i > 0)$$

اندازه‌پذیر باشد، و این‌طور می‌انگاریم که $E \in \mathfrak{M}$. تعریف می‌کنیم

$$(52) \quad I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i).$$

اگر f اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، تعریف می‌کنیم

$$(53) \quad \int_E f d\mu = \sup I_E(s)$$

که در آن سوپریم روی تمام توابع ساده اندازه‌پذیر s ، که $0 \leq s \leq f$ گرفته شده است. طرف چپ (۵۳) **انتگرال لبگ** f ، نسبت به اندازه μ ، روی مجموعه E ، نامیده می‌شود. باید توجه داشت که ممکن است انتگرال مقدارش ∞ باشد.

به آسانی می‌شود تحقیق کرد که به ازای هر تابع اندازه‌پذیر ساده و نامنفی s

$$(54) \quad \int_E s d\mu = I_E(s).$$

۲۲.۱۱ تعریف. فرض کنیم f اندازه‌پذیر باشد، و دو انتگرال

$$(55) \quad \int_E f^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu$$

را، که در آنها f^+ و f^- به صورت (۴۷) تعریف شده‌اند، در نظر می‌گیریم. چنانچه دست کم یکی از انتگرالهای (۵۵) متناهی باشد، تعریف می‌کنیم

$$(56) \quad \int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

هرگاه دو انتگرال (۵۵) متناهی باشد، (۵۶) متناهی است و می‌گوییم f بر E انتگرالپذیر (یا مجموعپذیر) به معنی لبگ، نسبت به μ ، است و می‌نویسیم $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E . اگر $m = \mu$ ، نماد معمول چنین خواهد بود: $f \in \mathcal{L}$ بر E . این اصطلاح ممکن است کمی گیج‌کننده باشد؛ هرگاه (۵۶) مساوی $+\infty$ یا $-\infty$ شود، آنگاه، با اینکه f به معنی فوق انتگرالپذیر نیست، انتگرال f روی E تعریف شده است؛ f روی E انتگرالپذیر است فقط اگر که انتگرالش روی E متناهی باشد. با آنکه در بعضی حالات مطلوب پرداختن به حالت کلیتر است، لکن توجه ما اصلاً معطوف توابع انتگرالپذیر خواهد بود.

۲۳.۱۱ چند تبصره. خواص زیر واضح هستند:

(آ) هرگاه f بر E اندازه‌پذیر و کراندار باشد، و $\mu(E) < +\infty$ آنگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ؛

(ب) هرگاه به ازای $a \leq f(x) \leq b$ ، $x \in E$ و $\mu(E) < +\infty$ آنگاه

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E);$$

(پ) هرگاه $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ، و به ازای $x \in E$ ، $f(x) \leq g(x)$ آنگاه

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu;$$

(ت) هرگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ، آنگاه به ازای هر ثابت متناهی c ، $cf \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E و

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu;$$

(ث) هرگاه $\mu(E) = 0$ و f اندازه‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_E f d\mu = 0;$$

(ج) هرگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ، $A \in \mathcal{M}$ ، و $A \subset E$ آنگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر A .

۲۴.۱۱ قضیه

(آ) فرض کنیم f بر X اندازه‌پذیر و نامنفی باشد. به ازای $A \in \mathcal{M}$ تعریف می‌کنیم

$$(57) \quad \phi(A) = \int_A f d\mu.$$

در این صورت، ϕ بر $\mathcal{M}$ به طور شمارشپذیر جمعپذیر است.
(ب) همین نتیجه در صورتی که $f \in \mathcal{L}(\mu)$ برقرار است.

برهان. واضح است که (ب) از (آ) در صورتی که بنویسیم $f^+ - f^- = f$ و (آ) را در مورد f^+ و f^- اعمال کنیم نتیجه خواهد شد.

برای اثبات (آ) باید نشان دهیم که اگر $A_n \in \mathcal{M}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) به ازای $i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ داریم

$$(58) \quad \phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

گوییم هرگاه f یک تابع مشخص باشد، جمعپذیری ϕ به طور شمارشپذیر همان جمعپذیری μ به طور شمارشپذیر است، زیرا

$$\int_A K_E d\mu = \mu(A \cap E).$$

هرگاه f ساده باشد، آنگاه f به شکل (۵۱) است و نتیجه باز برقراری باشد.
در حالت کلی، به ازای هر تابع ساده s که $0 \leq s \leq f$ داریم

$$\int_A s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

پس، بر طبق (۵۳)،

$$(59) \quad \phi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

حال اگر به ازای n ، $\phi(A_n) = +\infty$ ، (۵۸) بدیهی است زیرا $\phi(A) \geq \phi(A_n)$. فرض کنیم به ازای هر n ، $\phi(A_n) < +\infty$.
برای $\varepsilon > 0$ داده شده می توان تابع اندازه پذیری را قسمی اختیار کرد که $0 \leq s \leq f$ و

$$(60) \quad \int_{A_1} s d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \varepsilon.$$

لذا،

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geq \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\varepsilon;$$

در نتیجه،

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \phi(A_1) + \phi(A_2).$$

از اینجا نتیجه می شود که به ازای هر n ،

$$(61) \quad \phi(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \phi(A_1) + \dots + \phi(A_n).$$

چون $A \supset A_1 \cup \dots \cup A_n$ ، (۶۱) ایجاب می کند که

$$(62) \quad \phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n),$$

و (۵۸) از (۵۹) و (۶۲) نتیجه خواهد شد.

نتیجه. هرگاه $A \in \mathcal{M}$ ، $B \subset A$ ، و $\mu(A - B) = 0$ ، آنگاه

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

چون $A = B \cup (A - B)$ ، این نتیجه از تبصره ۲۳.۱۱ (ث) حاصل خواهد شد.

۲۵.۱۱ چند تبصره. نتیجه قبل نشان می دهد که، در انتگرالگیری، مجموعه های از اندازه صفر قابل اغماضند.

می نویسیم $g \sim f$ بر E هرگاه مجموعه

$$\{x | f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

دارای اندازه صفر باشد.

پس $f \sim f$ ؛ $f \sim g$ ؛ f ایجاب می کند که $f \sim g$ و $g \sim h$ و $g \sim h$ ؛ g ایجاب می کند که $h \sim f$ یعنی،رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی می باشد.چنانچه $g \sim f$ بر E ، بوضوح خواهیم داشت

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

مشروط بر اینکه به ازای هر زیرمجموعه اندازه پذیر A از E انتگرالها وجود داشته باشند.هرگاه خاصیت p به ازای هر $x \in E - A$ برقرار باشد و $\mu(A) = 0$ ، معمولاً می گوئیم p تقریباً به ازای هر $x \in E$ برقرار است، یا اینکه p تقریباً همه جا بر E برقرار می باشد.

(البته، مفهوم "تقریباً همه جا" به اندازه خاص مورد نظر بستگی دارد. در کتابها

معمولاً "اندازه لبگ مورد نظر است مگر آنکه خلافش قید شده باشد.)

واضح است که اگر $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ، $f(x)$ باید تقریباً "همه جا بر E متناهی باشد". لذا، در بیشتر حالات، با این فرض که توابع داده شده از اول مقادیر متناهی دارند کلیتی از کف نخواهد رفت.

۲۶.۱۱ قضیه. هرگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ، آنگاه $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E و

$$(63) \quad \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

برهان. می نویسیم $E = A \cup B$ که در آن $f(x) \geq 0$ بر A و $f(x) < 0$ بر B . بنابر قضیه ۲۴.۱۱،

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty;$$

در نتیجه، $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$. چون $f \leq |f|$ و $-f \leq |f|$ ، می بینیم که

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu, \quad -\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu,$$

و (۶۳) نتیجه خواهد شد.

چون انتگرالپذیری f انتگرالپذیری $|f|$ را ایجاب می کند، غالباً "انتگرال لبگ انتگرال به طور مطلق همگرا نامیده می شود. البته، تعریف انتگرالهای به طور نامطلق همگرا میسر است و انجامش در بررسی چند موضوع لازم می شود. لکن این انتگرالها از چند تا از مفیدترین خواص انتگرال لبگ بی بهره اند و نقش نسبتاً کم اهمیت تری در آنالیز ایفا می کنند.

۲۷.۱۱ قضیه. فرض کنیم f بر E اندازه پذیر باشد، $|f| \leq g$ ، و $g \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E . در این

صورت، $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E .

برهان. داریم $g^+ \leq f^+$ و $f^- \leq g^-$.

۲۸.۱۱ قضیه همگرایی یکنوای لبگ. فرض کنیم $\{f_n\} \subset E$ را دنباله ای از توابع اندازه پذیر

می انگاریم بطوری که

$$(64) \quad 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in E).$$

فرض کنیم f با

$$(65) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in E),$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، تعریف شده باشد. در این صورت،

$$(66) \quad \int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu \quad (n \rightarrow \infty).$$

برهان. به استناد (۶۴) واضح است که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به ازای α ای

$$(67) \quad \int_E f_n d\mu \rightarrow \alpha.$$

و چون $\int f_n \leq \int f$ ، داریم

$$(68) \quad \alpha \leq \int_E f d\mu.$$

c را قسمی اختیار می‌کنیم که $0 < c < 1$ ، و فرض می‌کنیم s یک تابع اندازه‌پذیر ساده باشد بطوری که $0 \leq s \leq f$. قرار می‌دهیم

$$E_n = \{x | f_n(x) \geq cs(x)\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

بنابر (۶۴) $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ ؛ و، مطابق (۶۵)،

$$(69) \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

به ازای هر n

$$(70) \quad \int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu.$$

در روابط (۷۰) فرض می‌کنیم $n \rightarrow \infty$. چون انتگرال یک تابع مجموعه‌ای به طور شمارشپذیر جمعپذیر است (قضیه ۲۴۰۱۱)، (۶۹) نشان می‌دهد که می‌توان قضیه ۳۰۱۱ را در مورد آخرین انتگرال در (۷۰) به کار برد و نتیجه گرفت که

$$(71) \quad \alpha \geq c \int_E s d\mu.$$

با فرض $c \rightarrow 1$ می‌بینیم که

$$\alpha \geq \int_E s d\mu,$$

و (۵۳) ایجاب می‌کند که

$$(72) \quad \alpha \geq \int_E f d\mu.$$

قضیه از (۶۷)، (۶۸)، و (۷۲) نتیجه خواهد شد.

۲۹.۱۱ قضیه. فرض کنیم $f = f_1 + f_2$ که در آن $f_i \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ($i = 1, 2$). در این صورت،
 $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E و

$$(73) \quad \int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu.$$

یوهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f_1 \geq 0$ و $f_2 \geq 0$. اگر f_1 و f_2 ساده باشند، (۷۳) بسادگی از (۵۲) و (۵۴) نتیجه می‌شود. در غیر این صورت، دنباله‌های صعودی $\{s'_n\}$ و $\{s''_n\}$ از توابع ساده اندازه‌پذیر و نامنفی را که همگرا به f_1 و f_2 قرارند اختیار می‌کنیم. قضیه ۲۰.۱۱ میسر بودن این کار را نشان می‌دهد. قرار می‌دهیم $s_n = s'_n + s''_n$ پس

$$\int_E s_n \, d\mu = \int_E s'_n \, d\mu + \int_E s''_n \, d\mu,$$

و (۷۳) در صورتی که فرض کنیم $n \rightarrow \infty$ و به قضیه ۲۸.۱۱ متوسل شویم نتیجه خواهد شد.

حال فرض می‌کنیم $f_1 \geq 0$ و $f_2 \leq 0$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x | f(x) \geq 0\}, \quad B = \{x | f(x) < 0\}.$$

در این صورت، f ، f_1 ، $-f_2$ بر A نامنفی اند. در نتیجه،

$$(74) \quad \int_A f_1 \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A (-f_2) \, d\mu = \int_A f \, d\mu - \int_A f_2 \, d\mu.$$

به همین نحو، $-f$ ، f_1 ، $-f_2$ بر B نامنفی اند. در نتیجه،

$$\int_B (-f_2) \, d\mu = \int_B f_1 \, d\mu + \int_B (-f) \, d\mu,$$

یا

$$(75) \quad \int_B f_1 \, d\mu = \int_B f \, d\mu - \int_B f_2 \, d\mu,$$

و، در صورتی که (۷۴) را به (۷۵) بیفزاییم، (۷۳) نتیجه خواهد شد.
 در حالت کلی، E را می‌توان به چهار مجموعه E_i طوری تقسیم کرد که $f_1(x)$ و

$f_2(x)$ بر هر یک علامت ثابت داشته باشند. دو حالتی که تاکنون ثابت کردیم ایجاب می‌کنند که

$$\int_{E_i} f d\mu = \int_{E_i} f_1 d\mu + \int_{E_i} f_2 d\mu \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

و (۷۳) با افزودن این چهار معادله بهم نتیجه خواهد شد.
حال در وضعی هستیم که می‌توانیم قضیه ۲۸.۱۱ را برای سریها از نو تنظیم کنیم.

۳۰.۱۱ قضیه. فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$ هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد

$$(76) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in E),$$

آنگاه

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

برهان. مجموعه‌ای جزئی (۷۶) یک دنباله صعودی تشکیل می‌دهند.

۳۱.۱۱ قضیه فاتو^۱. فرض کنیم $E \in \mathfrak{M}$ هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد و

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in E),$$

آنگاه

$$(77) \quad \int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

در (۷۷) ممکن است نامساوی اکید برقرار شود. مثالی در تمرین ۵ آورده شده است.

برهان. به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ و $x \in E$ قرار می‌دهیم

$$g_n(x) = \inf f_i(x) \quad (i \geq n).$$

در این صورت، g_n بر E اندازمپذیر است، و

$$(78) \quad 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots,$$

$$(79) \quad g_n(x) \leq f_n(x),$$

$$(80) \quad g_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

بنابر (۷۸)، (۸۰)، و قضیه ۲۸.۱۱

$$(81) \quad \int_E g_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu,$$

پس (۷۷) از (۷۹) و (۸۱) نتیجه خواهد شد.

۳۲.۱۱ قضیه همگرایی تسلطی لبگ. فرض کنیم $\{f_n\} \cdot E \in \mathcal{M}$ رادیکالهای از توابع

اندازمپذیر می‌انگاریم بقسمی که، وقتی $n \rightarrow \infty$

$$(82) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in E).$$

هرگاه تابعی چون $g \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E چنان باشد که

$$(83) \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, x \in E),$$

آنگاه

$$(84) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

بخاطر (۸۳) می‌گوییم $\{f_n\}$ تحت تسلط g است، و درباره همگرایی تسلطی سخن

می‌گوییم. بنابر تبصره ۲۵.۱۱، اگر (۸۲) تقریباً "همه جا بر E برقرار باشد، نتیجه یکی خواهد بود.

برهان. ابتدا (۸۳) و قضیه ۲۷.۱۱ ایجاب می‌کنند که $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ و $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E .

چون $0 \leq f_n + g$ قضیه فاتو نشان می‌دهد که

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + g) d\mu,$$

یا

$$(85) \quad \int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

و چون $g - f_n \geq 0$ ، به همین نحو می بینیم که

$$\int_E (g - f) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (g - f_n) d\mu.$$

در نتیجه،

$$-\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[-\int_E f_n d\mu \right],$$

که همان

$$(86) \quad \int_E f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

می باشد .

حال وجود حد در (۸۴) و تساوی عنوان شده در آن از (۸۵) و (۸۶) نتیجه خواهد شد .

نتیجه. هرگاه $\mu(E) < +\infty$ ، $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت کراندار باشد ، و $f_n(x) \rightarrow f(x)$ بر E ، آنگاه (۸۴) برقرار خواهد بود .
یک دنباله به طور یکنواخت کراندار همگرا اغلب به طور کراندار همگرا نامیده می شود .

مقایسه با انتگرال ریمان

قضیه بعدی ما نشان می دهد که هر تابع که بر بازه ای انتگرال ریمان داشته باشد انتگرال لیگ نیز دارد ، و توابع انتگرال ریمان دار تابع شرایط پیوستگی نسبتاً " دقیق می باشند . بنا بر این ، قطع نظر از اینکه نظریه لیگ به ما توان انتگرالگیری از رده بسیار وسیعتری از توابع را می دهد ، شاید بزرگترین مزیتش در سهولتی باشد که بسیاری از اعمال حد را می شود با آن انجام داد . از این دیدگاه ، قضایای همگرایی لیگ را می توان به عنوان قلب و اساس نظریه لیگ ملحوظ داشت .

یکی از مشکلاتی که در نظریه ریمان با آن مواجهیم این است که حدود تابعهای انتگرال ریمان دار (یا حتی توابع پیوسته) ممکن است انتگرال ریمان نداشته باشند . این مشکل در این وضع تقریباً " رفع شده است ، زیرا حدود توابع اندازه پذیر همیشه اندازه پذیر می باشند .

فرض کنیم فضای اندازه X بازه $[a, b]$ از خط حقیقی ، با $\mu = m$ (اندازه لیگ) ، و

۳۳ خانواده زیر مجموعه‌های اندازه‌لیگ دار $[a, b]$ باشد. برای انتگرال لیگ f روی $[a, b]$ رسم این است که به جای

$$\int_X f dm$$

از نماد آشنای

$$\int_a^b f dx$$

استفاده می‌شود. در این وضع، برای آنکه انتگرالهای ریمان از انتگرالهای لیگ متمایز باشند، اولیها را با

$$\mathcal{R} \int_a^b f dx$$

نشان خواهیم داد.

۳۳.۱۱ قضیه

(آ) هرگاه $f \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$ ، آنگاه $f \in \mathcal{L}$ بر $[a, b]$ و

$$(87) \quad \int_a^b f dx = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

(ب) فرض کنیم f بر $[a, b]$ کراندار باشد. در این صورت، $f \in \mathcal{R}$ بر $[a, b]$ اگر و فقط اگر f بر $[a, b]$ تقریباً "همه جا پیوسته" باشد.

برهان. فرض کنیم f کراندار باشد. بنابر تعریف ۱۰.۶ و قضیه ۴.۶، دنباله‌ای مانند $\{P_k\}$ از افرازهای $[a, b]$ هست بطوری که P_{k+1} یک تطریف P_k است، فاصله بین نقاط مجاور P_k از $1/k$ کمتر است، و

$$(88) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} L(P_k, f) = \underline{\int} f dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} U(P_k, f) = \overline{\int} f dx.$$

(در این برهان، تمام انتگرالها روی $[a, b]$ گرفته شده‌اند.)

چنانچه $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = P_k$ و $x_0 = a$ و $x_n = b$ ، تعریف می‌کنیم

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a);$$

با استفاده از نمادهای آمده در تعریف ۱۰.۶، به ازای $x_{i-1} < x \leq x_i$ و $i \leq n$ قرار می‌دهیم

در این صورت، $L_k(x) = m_i$ و $U_k(x) = M_i$

$$(89) \quad L(P_k, f) = \int L_k dx, \quad U(P_k, f) = \int U_k dx,$$

و به ازای هر $x \in [a, b]$

$$(90) \quad L_1(x) \leq L_2(x) \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq U_2(x) \leq U_1(x),$$

زیرا P_{k+1} یک تقریف P_k است. بنابر (۹۰)، حدود

$$(91) \quad L(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(x), \quad U(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(x)$$

وجود خواهند داشت.

ملاحظه کنید که L و U توابعی اندازه‌پذیر و کراندار بر $[a, b]$ اند،

$$(92) \quad L(x) \leq f(x) \leq U(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

و، بنابر (۸۸)، (۹۰)، و قضیه همگرایی یکنوا،

$$(93) \quad \int L dx = \mathcal{R} \int f dx, \quad \int U dx = \mathcal{R} \int f dx.$$

تاکنون هیچ فرضی در مورد f نشده است جز آنکه f یک تابع حقیقی کراندار بر $[a, b]$ می‌باشد.

برای اتمام سرهان، توجه کنید که $f \in \mathcal{R}$ اگر و فقط اگر انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی مساوی باشند؛ در نتیجه، اگر و فقط اگر

$$(94) \quad \int L dx = \int U dx.$$

چون $L \leq U$ (۹۴) روی خواهد داد اگر و فقط اگر به ازای تقریباً " هر $x \in [a, b]$

$$L(x) = U(x) \quad (\text{تمرین ۱}).$$

در آن وضع، (۹۲) ایجاب خواهد کرد که، تقریباً " همه جا بر $[a, b]$ ،

$$(95) \quad L(x) = f(x) = U(x).$$

در نتیجه، f اندازه‌پذیر است، و (۸۷) از (۹۳) و (۹۵) حاصل خواهد شد.

بعلاوه، اگر x به هیچ P_k ای متعلق نباشد، خیلی ساده می‌شود دید که $U(x) = L(x)$ اگر و فقط اگر f در x پیوسته باشد. چون اجتماع مجموعه‌های P_k شمارش‌پذیر است، اندازه‌اش ۰ است، و ما نتیجه می‌گیریم که تقریباً " همه جا بر $[a, b]$ پیوسته است اگر و فقط اگر تقریباً "

همه جا $L(x) = U(x)$ ؛ در نتیجه، (همانطور که در بالا دیدیم) اگر و فقط اگر $f \in \mathcal{R}$ این برهان را تمام خواهد کرد.

ارتباط مأنوس موجود میان انتگرالگیری و مشتقگیری تا حدود زیاد به نظریهٔ لیگ نقل یافته است. هرگاه $f \in \mathcal{L}$ بر $[a, b]$ و

$$(96) \quad F(x) = \int_a^x f \, dt \quad (a \leq x \leq b),$$

آنگاه تقریباً "همه جا بر $[a, b]$ ، $F'(x) = f(x)$ ،

بعکس، هرگاه F در هر نقطه از $[a, b]$ مشتقپذیر باشد (در اینجا "تقریباً" همه جا "کافی نیست!") و $F' \in \mathcal{L}$ بر $[a, b]$ ، آنگاه

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) \, dt \quad (a \leq x \leq b).$$

برای برهانهای این دو قضیه، خواننده را به هر یک از آثار در باب انتگرالگیری که در کتابنامه ذکر شده ارجاع می دهیم.

انتگرالگیری از توابع مختلط

فرض کنیم f یک تابع مختلط باشد که بر فضای اندازه X تعریف شده است، و $f = u + iv$ که در آن u و v حقیقی اند. می گوییم f اندازه پذیر است اگر و فقط اگر هر دوی u و v اندازه پذیر باشند.

بسهولت می توان تحقیق کرد که مجموعها و حاصل ضربهای توابع اندازه پذیر مختلط نیز اندازه پذیرند. چون

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2},$$

قضیه ۱۸.۱۱ نشان می دهد که $|f|$ به ازای هر f مختلط اندازه پذیر اندازه پذیر می باشد. فرض کنیم μ اندازه های بر X ، E زیر مجموعهٔ اندازه پذیری از X ، و f تابع مختلطی بر X باشد. می گوییم $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E مشروط بر اینکه f اندازه پذیر باشد و

$$(97) \quad \int_E |f| \, d\mu < +\infty,$$

و، در صورت برقرار بودن (۹۷)، تعریف می کنیم

$$\int_E f \, d\mu = \int_E u \, d\mu + i \int_E v \, d\mu.$$

چون $|f| \leq |u| + |v|$ و $|v| \leq |f|$ ، واضح است که (۹۷) برقرار است اگر و فقط اگر $u \in \mathcal{L}(\mu)$ و $v \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E .

حال قضایای ۲۳.۱۱ (آ)، (ت)، (ث)، (ج)، ۲۴.۱۱ (ب)، ۲۶.۱۱، ۲۷.۱۱، ۲۹.۱۱ و ۳۲.۱۱ را می‌توان به انتگرالهای لبگ توابع مختلط تعمیم داد. اثباتها کاملاً "سر راستند". تنها برهان قضیه ۲۶.۱۱ جالب توجه است:

هرگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E ، عدد مختلطی مانند c هست، که $|c| = 1$ ، بطوری که

$$c \int_E f d\mu \geq 0.$$

قرار می‌دهیم $g = cf = u + iv$ که در آن u و v حقیقی‌اند. در این صورت،

$$\left| \int_E f d\mu \right| = c \int_E f d\mu = \int_E g d\mu = \int_E u d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

سومین تساوی فوق برقرار است چرا که تساویهای قبلی نشان می‌دهند که $\int g d\mu$ حقیقی می‌باشد.

توابع از رده $\mathcal{L}^2$

حال به عنوان کاربردی از نظریه لبگ، قضیه پارسوال را (که فقط برای توابع انتگرال ریمان‌دار در فصل ۸ ثابت شد) تعمیم داده قضیه ریس-فیشرا^۱ را برای مجموعه‌های معامدیکه از توابع اثبات می‌کنیم.

۳۴.۱۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای اندازه‌پذیر باشد. می‌گوییم تابع مختلط $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ بر X هرگاه f اندازه‌پذیر باشد و

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty.$$

چنانچه μ اندازه لبگ باشد، می‌گوییم $f \in \mathcal{L}^2$ به ازای $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (از حالا به بعد عبارت "بر X " را حذف خواهیم کرد) تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \left\{ \int_X |f|^2 d\mu \right\}^{1/2}$$

و $\|f\|$ را $\mathcal{L}^2(\mu)$ -نرم f می‌خوانیم.

۳۵.۱۱ قضیه. فرض کنیم $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. در این صورت، $fg \in \mathcal{L}(\mu)$ و

$$(98) \quad \int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\| \|g\|.$$

این نامساوی نامساوی شوارتز است که ما قبلاً "به آن در مورد سریها و انتگرالهای ریمان برخورد داریم. از این نامساوی چنین نتیجه می‌شود:

$$0 \leq \int_X (|f| + \lambda|g|)^2 \, d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_X |fg| \, d\mu + \lambda^2 \|g\|^2,$$

که به ازای هر λ حقیقی برقرار می‌باشد.

۳۶.۱۱ قضیه. هرگاه $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ، آنگاه $f+g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

برهان. نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \int |f|^2 + \int f\bar{g} + \int \bar{f}g + \int |g|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

۳۷.۱۱ تبصره. اگر فاصله بین دو تابع f و g در $\mathcal{L}^2(\mu)$ را مساوی $\|f-g\|$ تعریف کنیم، خواهیم دید که شرطهای تعریف ۱۵.۲ برقرارند جز آنکه $\|f-g\| = 0$ ایجاب نمی‌کند که به ازای هر x ، $f(x) = g(x)$ ، بلکه این تساوی فقط به ازای تقریباً "هر x برقرار می‌باشد. لذا، اگر توابعی را که فقط به مجموعه‌ای از اندازه صفرها هم فرق دارند یکی بگیریم، $\mathcal{L}^2(\mu)$ یک فضای متری خواهد بود.

حال $\mathcal{L}^2$ را بر بازهای از خط حقیقی، نسبت به اندازه لبگ، در نظر می‌گیریم.

۳۸.۱۱ قضیه. توابع پیوسته زیر مجموعه چگالی از $\mathcal{L}^2$ بر $[a, b]$ را تشکیل می‌دهند. به عبارت صریحتر، این یعنی که به ازای هر $f \in \mathcal{L}^2$ بر $[a, b]$ و هر $\varepsilon > 0$ ، تابع پیوسته‌ای مانند g بر $[a, b]$ هست بطوری که

$$\|f - g\| = \left\{ \int_a^b (f - g)^2 dx \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

برهان. می‌گوییم f در $\mathcal{L}^2$ به وسیله دنباله $\{g_n\}$ تقریب شده است هرگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ،

$$\|f - g_n\| \rightarrow 0$$

فرض کنیم A زیر مجموعه بسته‌ای از $[a, b]$ و K_A تابع مشخص آن باشد. قرار می‌دهیم

$$t(x) = \inf |x - y| \quad (y \in A)$$

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + nt(x)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

در این صورت، g_n بر $[a, b]$ پیوسته است، $g_n(x) = 1$ بر A و $g_n(x) \rightarrow 0$ بر B که در آن $B = [a, b] - A$ از اینرو، به استناد قضیه ۳۲۰۱۱،

$$\|g_n - K_A\| = \left\{ \int_B g_n^2 dx \right\}^{1/2} \rightarrow 0.$$

پس توابع مشخص مجموعه‌های بسته را می‌توان در $\mathcal{L}^2$ به وسیله تابعهای پیوسته تقریب کرد. بنابر (۳۹)، همین مطلب در مورد تابع مشخص هر مجموعه اندازه‌پذیر، و در نتیجه تابعهای اندازه‌پذیر ساده، صحیح است.

اگر $0 \leq f \in \mathcal{L}^2$ و $\{s_n\}$ را دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه‌پذیر نامنفی و ساده می‌انگاریم بقسمی که $s_n(x) \rightarrow f(x)$ چون $|f - s_n|^2 \leq f^2$ قضیه ۳۲۰۱۱ نشان خواهد داد که $\|f - s_n\| \rightarrow 0$.

حال می‌توان حالت کلی را نتیجه گرفت.

۳۹۰۱۱ تعریف. می‌گوییم دنباله $\{\phi_n\}$ از توابع مختلط یک مجموعه متعامد یک از توابع بر فضای اندازه X است هرگاه

$$\int_X \phi_n \bar{\phi}_m d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m). \end{cases}$$

بخصوص، باید داشته باشیم $\phi_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$. اگر $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و

$$c_n = \int_X f \bar{\phi}_n d\mu \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

مثل تعریف ۱۵۰۸ می‌نویسیم

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n.$$

تعریف سریهای فوریه مثلثاتی به همین نحو به $\mathcal{D}^2$ (یا حتی به $\mathcal{L}$) بر $[-\pi, \pi]$ تعمیم خواهند یافت. قضایای ۱۱.۸ و ۱۲.۸ (نامساوی بسل) به ازای هر $f \in \mathcal{D}^2(\mu)$ برقرارند. برهانها، کلمه به کلمه، مثل هم خواهند بود. حال می توان قضیه پارسوال را اثبات کرد.

۴۰.۱۱ قضیه. فرض کنیم

$$(99) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

که در آن $f \in \mathcal{D}^2$ بر $[-\pi, \pi]$ و s_n را مجموع جزئی n م (۹۹) می انگاریم. در این صورت،

$$(100) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0,$$

$$(101) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx.$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنابر قضیه ۳۸.۱۱، تابع پیوسته ای چون g هست

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بطوری که

علاوه بر این، به آسانی می بینیم که می توان طوری ترتیب داد که $g(-\pi) = g(\pi)$. پس g را می شود به یک تابع پیوسته متناوب تعمیم بخشید. بنابر قضیه ۱۶.۸، یک چند جمله ای مثلثاتی مانند T ، مثلاً "از درجه N "، هست بطوری که

$$\|g - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا، بنابر قضیه ۱۱.۸ (تعمیم یافته به $\mathcal{D}^2$)، $n \geq N$ ایجاب می کند که

$$\|s_n - f\| \leq \|T - f\| < \varepsilon,$$

و (۱۰۰) نتیجه می شود. معادله (۱۰۱)، مثل وضعی که در برهان قضیه ۱۶.۸ بود، از (۱۰۰) به دست خواهد آمد.

نتیجه. هرگاه $f \in \mathcal{L}^2$ بر $[-\pi, \pi]$ و

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

آنگاه $\|f\| = 0$.

لذا، اگر دو تابع در $\mathcal{L}^2$ یک سری فوریه داشته باشند، حداکثر بر مجموعهای از اندازه صفر با هم فرق دارند.

۴۱.۱۱ تعریف. فرض کنیم $f_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) می‌گوییم $\{f_n\}$ در $\mathcal{L}^2(\mu)$ به f همگراست هرگاه $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ می‌گوییم $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{L}^2(\mu)$ است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوری که $n \geq N$ و $m \geq N$ نامساوی $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ را ایجاب نمایند.

۴۲.۱۱ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{L}^2(\mu)$ باشد، تابعی چون $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که $\{f_n\}$ در $\mathcal{L}^2(\mu)$ به f همگراست. به عبارت دیگر، این قضیه می‌گوید که $\mathcal{L}^2(\mu)$ یک فضای متری تام می‌باشد.

برهان. چون $\{f_n\}$ یک دنباله کشی است، می‌توان دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ $k = 1, 2, 3, \dots$ چنان یافت که

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

تابعی مثل $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ را اختیار می‌کنیم. بنابر نامساوی شوارتز،

$$\int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})| d\mu \leq \frac{\|g\|}{2^k}.$$

لذا،

$$(102) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})| d\mu \leq \|g\|.$$

بنابر قضیه ۳۰.۱۱، در (۱۰۲) می‌توان جمع‌بندی و انتگرالگیری را با هم عوض کرد. از این نتیجه خواهد شد که، تقریباً "همه جا بر X ،

$$(103) \quad |g(x)| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty.$$

بنابر این، تقریباً "همه جا بر X ،

$$(104) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < +\infty;$$

زیرا هرگاه سری مذکور در (۱۰۴) بر مجموعه‌ای چون E با اندازه مثبت و اگر می‌بود، می‌شد $g(x)$ را بر زیر مجموعه‌ای از E با اندازه مثبت ناصفر گرفته بدین ترتیب تناقضی با (۱۰۳) به دست آورد.

ملاحظه می‌کنیم که چون مجموع جزئی k ام سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)),$$

که تقریباً "همه جا بر X همگراست، مساوی

$$f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x)$$

است، معادله

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$$

$f(x)$ را تقریباً "به ازای هر $x \in X$ تعریف می‌کند، و اینکه $f(x)$ در بقیه نقاط X چطور تعریف شود اهمیتی نخواهد داشت.

حال نشان می‌دهیم که این f از خواص مطلوب برخوردار است. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده است، و N را همانطور که در تعریف ۴۱.۱۱ معین شده اختیار می‌کنیم. چنانچه $n_k > N$ ، قضیه فاتو نشان می‌دهد که

$$\|f - f_{n_k}\| \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i} - f_{n_k}\| \leq \varepsilon.$$

لذا، $f - f_{n_k} \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ؛ و چون $f = (f - f_{n_k}) + f_{n_k}$ ، خواهیم دید که $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ، همچنین، از آنجا که ε دلخواه است،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| = 0.$$

بالاخره، نامساوی

$$(105) \quad \|f - f_n\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\|$$

نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ در $\mathcal{L}^2(\mu)$ به f همگراست؛ زیرا هرگاه n و n_k را به قدر کافی بزرگ بگیریم، هر یک از دو جمله سمت راست (۱۰۵) را می‌توان بدخواه کوچک نمود.

۴۳.۱۱ قضیه. ریس-فیشِر. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ بر X متعامدیکه باشد $\sum |c_n|^2 < \infty$ را همگرا نگاهشته قرار می‌دهیم $s_n = c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_n$. در این صورت، تابعی چون $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که $\{s_n\}$ در $\mathcal{L}^2(\mu)$ به f همگراست و

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n.$$

برهان. به ازای $n > m$

$$\|s_n - s_m\|_2^2 = |c_{m+1}|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

در نتیجه، $\{s_n\}$ یک دنباله کَشی در $\mathcal{L}^2(\mu)$ است. بنابر قضیه ۴۲.۱۱، تابعی مانند $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0.$$

حال اگر $n > k$

$$\int_X f \bar{\phi}_k d\mu - c_k = \int_X f \bar{\phi}_k d\mu - \int_X s_n \bar{\phi}_k d\mu.$$

در نتیجه،

$$\left| \int_X f \bar{\phi}_k d\mu - c_k \right| \leq \|f - s_n\| \cdot \|\phi_k\| + \|f - s_n\|.$$

با فرض $n \rightarrow \infty$ ملاحظه می‌کنیم که

$$c_k = \int_X f \bar{\phi}_k d\mu \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

و برهان تمام خواهد بود.

۴۴.۱۱ تعریف. مجموعه متعامدیکه $\{\phi_n\}$ را تمام نامندهرگاه، به ازای $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ، معادله‌ای

$$\int_X f \bar{\phi}_n d\mu = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

تساوی $\|f\| = 0$ را ایجاب نمایند.

در نتیجه قضیه ۴۵.۱۱ تمامیت دستگاه مثلثاتی از معادله پارسوال (۱۰۱) استنتاج

شد. بعکس، معادله پارسوال به ازای هر مجموعه متعامد یکه تام برقرار می باشد :

۴۵۰۱۱ قضیه. فرض کنیم $\{\phi_n\}$ یک مجموعه متعامدیکه تام باشد. هرگاه $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و

$$(106) \quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

آنگاه

$$(107) \quad \int_X |f|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

برهان. بنابر نامساوی بسل $\sum |c_n|^2$ همگراست. اگر قرار دهیم

$$s_n = c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n,$$

قضیه ریس-فیشر نشان می دهد که تابعی چون $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ هست بقسمی که

$$(108) \quad g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

و $\|g - s_n\| \rightarrow 0$ در نتیجه، $\|s_n\| \rightarrow \|g\|$ چون

$$\|s_n\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2,$$

خواهیم داشت

$$(109) \quad \int_X |g|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

حال (۱۰۶)، (۱۰۸)، و تمامیت $\{\phi_n\}$ نشان می دهند که $\|f - g\| = 0$ در نتیجه،

(۱۰۹) تساوی (۱۰۷) را ایجاب خواهد کرد.

از تلفیق قضایای ۴۳۰۱۱ و ۴۵۰۱۱ به نتیجه بسیار جالبی می رسیم و آن اینکه

هر مجموعه متعامدیکه تام تناظر ۱-۱ ی میان توابعی چون $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (که در آن تابعایی که تقریباً "همه جا مساویندیکه شده اند)، از یک طرف، و دنباله های $\{c_n\}$ که برای

آنها $\sum |c_n|^2$ همگراست، از طرف دیگر، برقرار می کند. نمایش

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

همراه با معادله پارسوال، نشان می دهد که $\mathcal{L}^2(\mu)$ را می توان به منزله یک فضای اقلیدسی

با بعد نامتناهی (فضای هیلبرت ^۱) در نظر گرفت که در آن هر نقطه f دارای مختصات c_n است و تابعهای ϕ_n بردارهای مختصات می باشند.

تمرین

۱. هرگاه $f \geq 0$ و $\int_E f d\mu = 0$ ثابت کنید تقریباً " همه جا بر E ، $f(x) = 0$ " را هتمایی :

فرض کنید E_n زیر مجموعه ای از E باشد که بر آن $f(x) > 1/n$ بنویسید $A = \bigcup E_n$ در این صورت ، $\mu(A) = 0$ ، اگر و فقط اگر به ازای هر n ، $\mu(E_n) = 0$.

۲. هرگاه به ازای هر زیر مجموعه انداز پذیر A از مجموعه انداز پذیر E ، $\int_A f d\mu = 0$ ، آنگاه ، تقریباً " همه جا بر E ، $f(x) = 0$ " .

۳. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع انداز پذیر باشد ، ثابت کنید مجموعه نقاطی چون x که در آنها $\{f_n(x)\}$ همگراست انداز پذیر است .

۴. هرگاه $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E و g بر E کراندار و انداز پذیر باشد ، آنگاه $fg \in \mathcal{L}(\mu)$ بر E .

۵. قرار می دهیم

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 1 & (\frac{1}{2} < x \leq 1), \end{cases} \\ f_{2k}(x) &= g(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ f_{2k+1}(x) &= g(1-x) & (0 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

نشان دهید که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

ولی

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

[قس . (۷۷)]

۶. فرض کنید

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (|x| \leq n), \\ 0 & (|x| > n). \end{cases}$$

در این صورت، $f_n(x) \rightarrow 0$ به طور یکنواخت بر R^1 ، ولی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n dx = 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

(به جای $\int_{R^1}$ می نویسیم $\int_{-\infty}^{\infty}$) پس همگرایی یکنواخت همگرایی تسلطی به معنی قضیه ۳۲.۱۱ را ایجاب نمی کند. لکن، بر مجموعه های با اندازه متناهی، دنباله های به طور یکنواخت همگرا از توابع کراندار در قضیه ۳۲.۱۱ صدق خواهند کرد.

۷. شرطی بیابید لازم و کافی که تحت آن $f \in \mathcal{Q}(\alpha)$ بر $[a, b]$ راهنمایی: مثال ۶.۱۱ (ب) و قضیه ۳۳.۱۱ را در نظر بگیرید.

۸. هرگاه $f \in \mathcal{Q}$ بر $[a, b]$ و $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، ثابت کنید تقریباً "همه جابر $[a, b]$ " $F'(x) = f(x)$.

۹. ثابت کنید تابع F داده شده با (۹۶) بر $[a, b]$ پیوسته است.

۱۰. هرگاه $\mu(X) < +\infty$ و $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ بر X ، ثابت کنید $f \in \mathcal{L}(\mu)$ بر X . این مطلب در صورتی که

$$\mu(X) = +\infty$$

درست نیست. به عنوان مثال، هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

آنجا $f \in \mathcal{L}^2$ بر R^1 ، اما $f \notin \mathcal{L}$ بر R^1 .

۱۱. هرگاه $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ بر X ، فاصله بین f و g را با

$$\int_X |f-g| d\mu$$

تعریف کنید. ثابت کنید که $\mathcal{L}(\mu)$ یک فضای متری تام است.

۱۲. فرض کنید

$$(T) \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq 1, |f(x, y)| \leq 1;$$

(ب) $f(x, y)$ ، به ازای x ثابت، تابع پیوسته ای از y باشد؛

(پ) $f(x, y)$ ، به ازای y ثابت، تابع پیوسته ای از x باشد.

قرار دهید

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy \quad (0 \leq x \leq 1).$$

آیا $\mathcal{L}$ پیوسته است؟

۱۳. تابعهای

$$f_n(x) = \sin nx \quad (n = 1, 2, 3, \dots, -\pi \leq x \leq \pi)$$

را نقاطی از $\mathcal{L}^2$ بگیرید. ثابت کنید مجموعه این نقاط بسته و کراندار است اما فشرده نمی باشد.

۱۴. ثابت کنید تابع مختلط f اندازه پذیر است اگر و فقط اگر $f^{-1}(V)$ به ازای هر مجموعه باز V در صفحه اندازه پذیر باشد.

۱۵. فرض کنید $\mathcal{H}$ حلقه تمام زیر مجموعه های مقدماتی $(0, 1]$ باشد. هرگاه $0 < a \leq b \leq 1$ تعریف کنید

$$\phi([a, b]) = \phi([a, b)) = \phi((a, b]) = \phi((a, b)) = b - a;$$

ولی، اگر $0 < b \leq 1$ تعریف کنید

$$\phi((0, b)) = \phi([0, b]) = 1 + b.$$

نشان دهید که این روابط تابع مجموعه ای جمع پذیر بر $\mathcal{H}$ را به ما می دهد که منتظم نیست و قابل تعمیم به یک تابع مجموعه ای به طور شمارش پذیر جمع پذیر بر یک σ -حلقه نمی باشد.

۱۶. فرض کنید $\{n_k\}$ یک دنباله صعودی از اعداد صحیح مثبت، و E مجموعه تمام x هایی در $(-\pi, \pi)$ باشد که در آنها $\{\sin n_k x\}$ همگراست. ثابت کنید $m(E) = 0$. راهنمایی: به ازای هر $A \subset E$

$$\int_A \sin n_k x \, dx \rightarrow 0$$

و

$$2 \int_A (\sin n_k x)^2 \, dx = \int_A (1 - \cos 2n_k x) \, dx \rightarrow m(A), \quad k \rightarrow \infty$$

۱۷. فرض کنید $E \subset (-\pi, \pi)$ ، $m(E) > 0$ و $\delta > 0$. با استفاده از نامساوی بسل ثابت کنید که حداکثر تعدادی متناهی عدد صحیح مانند n هست که به ازای هر $x \in E$ ، $\sin nx \geq \delta$.

۱۸. فرض کنید $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ، $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. ثابت کنید

$$\left| \int f \bar{g} \, d\mu \right|^2 = \int |f|^2 \, d\mu \int |g|^2 \, d\mu$$

اگر و فقط اگر عدد ثابتی چون c باشد قسمی که تقریباً "همه جا" $g(x) = cf(x)$.

(قس. قضیه ۰۳۵.۱۱)

کتابنامه

- ARTIN, E.: "The Gamma Function," Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.
- BOAS, R. P.: "A Primer of Real Functions," Carus Mathematical Monograph No. 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
- BUCK, R. C. (ed.): "Studies in Modern Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- : "Advanced Calculus," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- BURKILL, J. C.: "The Lebesgue Integral," Cambridge University Press, New York, 1951.
- DIEUDONNÉ, J.: "Foundations of Modern Analysis," Academic Press, Inc., New York, 1960.
- FLEMING, W. H.: "Functions of Several Variables," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.
- GRAVES, L. M.: "The Theory of Functions of Real Variables," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- HALMOS, P. R.: "Measure Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.
- : "Finite-dimensional Vector Spaces," 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1958.
- HARDY, G. H.: "Pure Mathematics," 9th ed., Cambridge University Press, New York, 1947.
- and ROGOSINSKI, W.: "Fourier Series," 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1950.
- HERSTEIN, I. N.: "Topics in Algebra," Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.
- HEWITT, E., and STROMBERG, K.: "Real and Abstract Analysis," Springer Publishing Co., Inc., New York, 1965.
- KELLOGG, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1940.
- KNOPP, K.: "Theory and Application of Infinite Series," Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1928.

- LANDAU, E. G. H.: "Foundations of Analysis," Chelsea Publishing Company, New York, 1951.
- MCSHANE, E. J.: "Integration," Princeton University Press, Princeton, N.J., 1944.
- NIVEN, I. M.: "Irrational Numbers," Carus Mathematical Monograph No. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.
- ROYDEN, H. L.: "Real Analysis," The Macmillan Company, New York, 1963.
- RUDIN, W.: "Real and Complex Analysis," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- SIMMONS, G. F.: "Topology and Modern Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
- SINGER, I. M., and THORPE, J. A.: "Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry," Scott, Foresman and Company, Glenview, Ill., 1967.
- SMITH, K. T.: "Primer of Modern Analysis," Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.
- SPIVAK, M.: "Calculus on Manifolds," W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.
- THURSTON, H. A.: "The Number System," Blackie & Son, Ltd., London-Glasgow, 1956.

فهرست علامات خاص

در جلو علامات زیر، معنی آنها به اختصار و همچنین شمارهء صفحه‌ای که در آن تعریف شده‌اند ذکر شده است.

۱۹	$x \cdot y$ حاصل ضرب داخلی	۳	$\in$ متعلق است به
۱۹	$ x $ نرم بردار x	۳	$\notin$ متعلق نیست به
۳۲	$\{x_n\}$ دنباله	۳	$<, >$ علامات شمول
۳۳	$\cup$ اجتماع	۳	Q میدان گویا
۳۴	$\cap$ اشتراک	۳	$<, \leq, \geq, >$ علامات نامساوی
۳۹	(a, b) قطعه	۴	$\sup$ کوچکترین کران بالایی
۳۹	$[a, b]$ بازه	۴	$\inf$ بزرگترین کران پایینی
۴۰	E^c متمم E	۱۰	R میدان حقیقی
۴۴	E' نقاط حدی E	۳۴، ۱۳	$-\infty, +\infty$ بی‌نهایتها
۴۴	$\bar{E}$ بست E	۱۶	$\bar{z}$ مزدوج مختلط
۶۰	$\lim$ حد	۱۶	$\operatorname{Re}(z)$ قسمت حقیقی
۱۲۱، ۶۰	$\rightarrow$ همگراست به	۱۶	$\operatorname{Im}(z)$ قسمت موهومی
۷۰	$\limsup$ حد بالایی	۱۷	$ z $ قدر مطلق
۷۰	$\liminf$ حد پایینی	۷۴، ۱۸	Σ علامت جمع‌بندی
۱۰۷	$g \circ f$ ترکیب	۱۹	R^k فضای اقلیدسی k بعدی
۱۱۶	$f(x+)$ حد سمت راست	۱۹	0 بردار پوچ

۲۹۷	I^k حجره k بعدی	۱۱۶	$f(x)$ حد سمت چپ
۲۹۹	Q^k سادک k بعدی	۱۳۷، ۱۲۸	f', f' مشتقها
۳۰۸	$\wedge$ علامت ضرب	$U(P, f), U(P, f, \alpha), L(P, f), L(P, f, \alpha)$	
۳۱۱	dx_i فرم k بعدی اساسی	۱۵۰، ۱۴۹	مجموعه‌های ریمن
۳۱۶	d عملگر مشتگیری	$\mathcal{R}, \mathcal{R}(\alpha)$	رده‌های توابعی که انتگرال
۳۱۸	ω_T تبدیل ω	۱۵۰، ۱۴۹	ریمن (اشتیلیس) دارند
۳۲۶	∂ عملگر کرانه‌ای	۱۸۲	$\ \cdot \ $ فضای توابع پیوسته
۳۴۱	$\nabla \times F$ تاور	۳۹۲، ۱۸۲، ۱۷۰	$\mathcal{G}(X)$ نرم
۳۴۱	$\nabla \cdot F$ دیورژانس	۲۱۶	$\exp$ تابع نمایی
۳۶۶	$\mathcal{G}$ حلقه مجموعه‌های مقدماتی	۲۲۸	D_N هسته دیریکله
۳۷۲، ۳۶۶	m اندازه لیگ	۲۳۳	$\Gamma(x)$ تابع گاما
۳۷۲، ۳۶۷	μ اندازه	۲۴۷	$\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متعارف
	$\mathcal{M}_F, \mathcal{M}$ خانواده‌های مجموعه‌های	۲۵۰	$L(X), L(X, Y)$ فضای تبدیلات خطی
۳۶۹	اندازه پذیر	۲۵۳	$[A]$ ماتریس
۳۷۴	$\{x P\}$ مجموعه با خاصیت P	۲۵۹	$D_f f$ مشتق جزئی
۳۷۶	f^+, f^- قسمت مثبت (منفی) f	۲۶۲	∇f گرادیان
۳۷۸	K_E تابع مشخص	۲۸۴، ۲۶۴	$\mathcal{G}', \mathcal{G}''$ رده‌های توابع مشتق‌پذیر
	$\mathcal{L}, \mathcal{L}(\mu), \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2(\mu)$ رده توابعی که	۲۸۱	$\det [A]$ دترمینان
۳۹۲، ۳۸۰	انتگرال لیگ دارند	۲۸۴	$J_i(x)$ ژاکوبی
		۲۸۴	$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ ژاکوبی

واژه نامه

فارسی به انگلیسی

test

integral

Cauchy's condensation

root

comparison

ratio

آزمون

انتگرال

تراکم کشی

ریشه

مقایسه‌ای

نسبت

union

intersection

axiom

partition

of unity

integral

upper

lower

line

improper

integration

by parts

اجتماع

اشتراک

اصل موضوع

افراز

واحد

انتگرال

بالایی

پایینی

خط

مجازی

انتگرالگیری

به طریقهء جزء به جزء

measure	اندازه
outer	خارجی
zero	صفر
contraction	انقباض
infimum	اینفیمم
interval	بازه
parameter	پارامتری
half-open	نیمباز
remainder	باقیمانده
into	بتو
range	برد
vector	برددار
null	پوچ
column	ستونی
normal	قائم
tangent	مماس
unit	یکه
onto	برو
cut	بریدگی
greatest lower bound	بزرگترین کران پایینی
closure	بست
uniform	یکنواخت
dimension	بعد
infinity	بی نهایت
base	پایه
countable	شمارشپذیر
basis	پایه

standard	متعارف
cover	پوشش
open	باز
span	پیمای
continuity	پیوستگی
uniform	یکنواخت
function	تابع
measurable	اندازه‌پذیر
vector-valued	برداری
Borel-measurable	برل - اندازه‌پذیر
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتق‌پذیر
uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته
uniformly differentiable	به طور یکنواخت مشتق‌پذیر
step	پله‌ای
continuous	پیوسته
from left	از چپ
from right	از راست
harmonic	توافقی
constant	ثابت
limit	حدی
linear	خطی
Riemann-integrable	ریمان - انتگرال‌پذیر
zeta	زتا
simple	ساده
increasing	صعودی
absolute value	قدر مطلق
bounded	کراندار
gamma	گاما

rational	گویا
Lebesgue-integrable	لیگ - انتگرالپذیر
logarithmic	لگاریتمی
orthogonal	متعامد
periodic	متناوب
trigonometric	مثلثاتی
summable	مجموعه‌پذیر
set	مجموعه‌ای
convex	محدب
coordinate	مختصی
differentiable	مشتق‌پذیر
characteristic	مشخص
inverse	معکوس
regular	منتظم
decreasing	نزولی
exponential	نمایی
one-to-one	یک به یک
monotonic	یکنوا
curl	تاو
transformation	تبدیل
linear	خطی
invertible	معکوس‌پذیر
completion	تکمیل
rearrangement	تجدید آرایش
restriction	تحدید
order	ترتیب
lexicographic	قاموسی
composition	ترکیب
linear	خطی

projection	تصویر
refinement	تظریف
common	مشترک
transitivity	تعدی
change of variable	تغییر متغیر
symmetric difference	تفاضل متقارن
almost everywhere	تقریباً "همه جا"
mean square approximation	تقریب میانگین مربعات
support	تکیه‌گاه
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک
extension	توسیع
Euler's constant	ثابت اویلر
algebra	جبر
uniformly closed	به طور یکنواخت بسته
self-adjoint	خود الحاقی
addition	جمع
summation by parts	جمع‌بندی به طریق جزء به جزء
additivity	جمع‌پذیری
countable	شمارش‌پذیر
orientation	جهت
positive	مثبت
negative	منفی
torus	چنبره
polynomial	چند جمله‌ای
product	حاصل ضرب (ضرب)

scalar	اسکالر
inner	داخلی
cell	حجره
volume	حجم
limit	حد
upper	بالایی
lower	پایینی
subsequential	زیر دنباله‌ای
left-hand	سمت چپ
right-hand	سمت راست
pointwise	نقطه به نقطه
ring	حلقه
reflexive property	خاصیت انعکاسی
family	خانواده
line	خط
real	حقیقی
circle	دایره
of convergence	همگرایی
determinant	دترمینان
interior	درون
extended real number system	دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی
sequence	دنباله
uniformly bounded	به طور یکنواخت کراندار
uniformly convergent	به طور یکنواخت همگرا
increasing	صعودی
bounded	کراندار
double	مضاعف

pointwise bounded	نقطه به نقطه کراندار
pointwise convergent	نقطه به نقطه همگرا
divergent	واگرا
convergent	همگرا
monotonic	یکنوا
differential	دیفرانسیل
divergence	دیورژانس
equivalence relation	رابطهء هم‌ارزی
rank	رتبه
root	ریشه
square	دوم
solid angle	زاویهء فضایی
chain	زنجیر
affine	مستوی
differentiable	مشتق‌پذیر
subcover	زیر پوشش
subadditivity	زیر جمع‌پذیری
subsequence	زیر دنباله
subset	زیر مجموعه
dense	چگال
proper	حقیقی
subfield	زیر میدان
jacobian	ژاکوبی
simplex	سادی
oriented	جهت‌دار

standard	متعارف
affine	مستوی
differentiable	مشتقپذیر
series	سری
absolutely convergent	به طور مطلق همگرا
power	توانی
binomial	دو جمله‌ای
alternating	متناوب
infinite	نامتناهی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
geometric	هندسی
surface	سطح
supremum	سوپریمم
$\mathcal{C}^n$ -equivalence	$\mathcal{C}^n$ -معادل
σ -ring	σ -حلقه
index	شاخص (اندیس)
increasing	صعودی
radius	شعاع
of convergence	همگرایی
plane	صفحه
complex	مختلط
tangent	مماس
multiplication	ضرب
flip	ضربه

length	طول
number	عدد
cardinal	اصلی
decimal	اعشاری
algebraic	جبری
real	حقیقی
winding	گردشی
irrational	گنگ
rational	گویا
finite	متناهی
positive	مثبت
complex	مختلط
negative	منفی
nonnegative	نامنفی
operator	عملگر
linear	خطی
identity	همانی
area element	عنصر سطح
distance	فاصله
diagonal process	فرایند قطری
form	فرم
of class $\mathcal{C}^k$	از رده $\mathcal{C}^k$
basic	اساسی
closed	بسته
differential	دیفرانسیل
exact	کامل
formula	فرمول

space	فضا
euclidean	اقلیدسی
measure	اندازه
measurable	اندازه‌پذیر
vector	برداری
null	پوچ
separable	جدایی‌پذیر
metric	متری
complete	تام
compact	فشرده
normal	نرمال
connected	همبند
rule	قاعده
anticommutative	پادتعویضپذیری
distributive	پخشپذیری
commutative	تعویضپذیری
chain	زنجیرهای
associative	شرکتپذیری
absolute value	قدر مطلق
part	قسمت
real	حقیقی
imaginary	موهومی
theorem	قضیه
implicit function	تابع ضمنی
inverse function	تابع معکوس
divergence	دیورژانس
mean value	مقدار میانگین
intermediate value	مقدار میانی

localization	موضعی سازی
existence	وجودی
dominated convergence	همگرایی تسلطی
monotone convergence	همگرایی یکنوا
uniqueness	یکتایی
diameter	قطر
segment	قطعه
domain	قلمرو
parameter	پارامتری
arc	قوس
bound	کران
upper	بالایی
lower	پایینی
uniform boundedness	کران داری یکنواخت
boundary	کرانه
sphere	کره
least upper bound	کوچکترین کران بالایی
property	خاصیت
gradient	گرادیان
collection	گردآیه
ball	گوی
laplacian	لاپلاسیان
logarithm	لگاریتم
matrix	ماتریس
column	

row	سطری
maximum	ماکزیمم
local	موضعی
origin	مبدأ
variable	متغیر
of integration	انتگرالگیری
complement	متمم
sum	مجموع
partial	جزئی
set	مجموعه
bounded above	از بالا کراندار
measurable	اندازه پذیر
disjoit	از هم جدا
separated	از هم جدا شده
open	باز
closed	بسته
empty	تهی
dense	چگال
at most countable	حداکثر شمارش پذیر
countable	شمارش پذیر
uncountable	شمارش ناپذیر
zero	صفر
compact	فشرده
perfect	کامل
bounded	کراندار
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
finite	متناهی
convex	محدب

independent	مستقل
elementary	مقدّماتی
nonempty	نا تهی
infinite	نامتناهی
dependent	نامستقل
relatively open	نسبتاً " باز
connected	همبند
criterion	محک
coordinates	مختصات
conjugate	مزدوج
initial-value problem	مسئله با مقدار اولیه
derivative	مشتق
partial	جزئی
directional	جهتی
normal	قائم
total	کلی
higher-order	مراتب بالاتر
differentiation	مشتقگیری
differential equation	معادله دیفرانسیل
inverse	معکوس
image	نقش
value	مقدار
intermediate	میانی
cube	مکعب
unit	یکه
curve	منحنی
rectifiable	با طول متناهی
closed	بسته
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر

space-filling	فضا پرکن
component	مؤلفه
tangential	مماسی
arithmetic mean	میانگین حسابی
field	میدان
vector	بردار
real	حقیقی
complex	مختلط
ordered	مرتب
minimum	مینیمم
discontinuity	ناپیوستگی
simple	ساده
inequality	نامساوی
triangle	مثلثی
norm	نرم
supremum	سوپریمم
image	نقش
inverse	معکوس
point	نقطه
condensation	تراکم
isolated	تنها
fixed	ثابت
limit	حدی
interior	درونی
saddle	زینی
mapping	نگاشت
primitive	اولیه
open	باز

continuously differentiable	به طور پیوسته مشتق‌پذیر
uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته
continuous	پیوسته
linear	خطی
affine	مستوی
inverse	معکوس
locally one-to-one	یک به یک موضعی
standard presentation	نمایش متعارف
graph	نمودار
Möbius band	نوار موبیوس
kernel	هسته
equicontinuity	همپیوستگی
neighborhood	همسایگی
convergence	همگرایی
dominated	تسلطی
absolute	مطلق
pointwise	نقطه به نقطه
uniform	یکنواخت
isomorphism	ایزومورفیسم
isometry	ایزومتري

واژه‌نامه

انگلیسی به فارسی

absolute value	قدر مطلق
addition	جمع
additivity	جمعپذیری
countable	شمارشپذیر
algebra	جبر
self-adjoint	خود الحاقی
uniformly closed	به طور یکنواخت بسته
almost everywhere	تقریباً " همه جا
arc	قوس
area element	عنصر سطح
arithmetic mean	میانگین حسابی
axiom	اصل موضوع
ball	گوی
base	پایه
countable	شمارشپذیر
basis	پایه
standard	متعارف
bound	کران

lower	پایینی
upper	بالایی
boundary	کرانه
cell	حجره
chain	زنجیر
affine	مستوی
differentiable	مشتق‌پذیر
change of variable	تغییر متغیر
" $\sim$ "-equivalence	" $\sim$ "-معادل
circle	دایره
of convergence	همگرایی
closure	بست
uniform	یکنواخت
collection	گردآیه
complement	متمم
completion	تتمیم
component	مؤلفه
tangential	مماسی
composition	ترکیب
linear	خطی
conjugate	مزدوج
continuity	پیوستگی
uniform	یکنواخت
contraction	انقباض
convergence	همگرایی
absolute	مطلق
dominated	تسلطی
pointwise	نقطه به نقطه

uniform	یکنواخت
coordinates	مختصات
cover	پوشش
open	باز
criterion	محک
Cauchy's	کشی
curl	تاو
curve	منحنی
closed	بسته
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر
rectifiable	با طول متناهی
space-filling	فضا پرکن
cut	بریدگی
derivative	مشتق
directional	جهتی
higher-order	مراتب بالاتر
normal	قائم
partial	جزئی
total	کلی
diagonal process	فرایند قطری
diameter	قطر
differential	دیفرانسیل
equation	معادله
differentiation	مشتقگیری
dimension	بعد
discontinuity	ناپیوستگی
simple	ساده
distance	فاصله

divergence	دیورژانس
domain	قلمرو
parameter	پارامتری
equicontinuity	همپیوستگی
equivalence relation	رابطه هم‌ارزی
Euler's constant	ثابت اویلر
extended real number system	دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی
extension	توسیع
family	خانواده
field	میدان
complex	مختلط
ordered	مرتب
real	حقیقی
vector	بردار
flip	ضربه
form	فرم
basic	اساسی
closed	بسته
differential	دیفرانسیل
exact	کامل
of class $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$	از رده $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$
formula	فرمول
function	تابع
absolute value	قدر مطلق
Borel-measurable	برل - اندازه پذیر
bounded	کراندار
characteristic	مشخص

constant	ثابت
continuous	پیوسته
from left	از چپ
from right	از راست
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتق‌پذیر
convex	محدب
coordinate	مختصی
decreasing	نزولی
exponential	نمایی
gamma	گاما
harmonic	توافقی
inverse	معکوس
Lebesgue-integrable	لبگ - انتگرال‌پذیر
limit	حدی
linear	خطی
logarithmic	لگاریتمی
measurable	اندازه‌پذیر
monotonic	یکنوا
one-to-one	یک به یک
orthogonal	متعامد
periodic	متناوب
rational	گویا
regular	منتظم
Riemann-integrable	ریمان - انتگرال‌پذیر
set	مجموعه‌ای
simple	ساده
step	پله‌ای
summable	مجموعه‌پذیر
trigonometric	مثلثاتی

uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته
uniformly differentiable	به طور یکنواخت مشتقپذیر
vector-valued	برداری
gradient	گرادیان
graph	نمودار
greatest lower bound	بزرگترین کران پایینی
image	نقش
inverse	معکوس
index	شاخص (اندیس)
increasing	صعودی
inequality	نامساوی
triangle	مثلثی
infimum	اینفیمم
infinity	بی نهایت
initial-value problem	مسئله با مقدار اولیه
integral	انتگرال
improper	مجازی
line	خط
lower	پایینی
upper	بالایی
integration	انتگرالگیری
by parts	به طریقهء جزء به جزء
interior	درون
intersection	اشتراک
interval	بازه
parameter	پارامتری
half-open	نیمباز

into	بتو
inverse	معکوس
image	نقش
isometry	یکمتری
isomorphism	یکریختی
jacobian	ژاکوبی
kernel	هسته
laplacian	لاپلاسی
least upper bound	کوچکترین کران بالایی
property	خاصیت
length	طول
limit	حد
left-hand	سمت چپ
lower	پایینی
pointwise	نقطه به نقطه
right-hand	سمت راست
subsequential	زیر دنباله‌ای
upper	بالایی
line	خط
real	حقیقی
logarithm	لگاریتم
mapping	نگاشت
affine	مستوی
continuous	پیوسته
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتق‌پذیر

inverse	معکوس
linear	خطی
locally one-to-one	یک به یک موضعی
open	باز
primitive	اولیه
uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته
matrix	ماتریس
column	ستونی
row	سطری
maximum	ماکزیمم
local	موضعی
mean square approximation	تقریب میانگین مربعی
measure	اندازه
outer	خارجی
zero	صفر
minimum	مینیمم
Möbius band	نوار موبیوس
multiplication	ضرب
neighborhood	همسایگی
norm	نرم
supremum	سوپریمم
number	عدد
algebraic	جبری
cardinal	اصلی
complex	مختلط
decimal	اعشاری
finite	متناهی
irrational	گنگ

negative	منفی
nonnegative	نامنفی
positive	مثبت
real	حقیقی
winding	گردشی
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک
onto	برو
operator	عملگر
identity	همانی
linear	خطی
order	ترتیب
lexicographic	قاموسی
orientation	جهت
negative	منفی
positive	مثبت
origin	مبداء
part	قسمت
imaginary	موهومی
real	حقیقی
partition	فراز
or unity	واحد
plane	صفحه
complex	مختلط
tangent	مماس
point	نقطه
condensation	تراکم
fixed	ثابت

interior	درونی
isolated	تنها
limit	حدی
saddle	زینی
polynomial	چند جمله‌ای
product	حاصل ضرب (ضرب)
inner	داخلی
scalar	اسکالر
projection	تصویر
radius	شعاع
of convergence	همگرایی
range	برد
rank	رتبه
rearrangement	تجدید آرایش
refinement	تظریف
common	مشترک
reflexive property	خاصیت انعکاسی
remainder	باقیمانده
restriction	تحدید
ring	حلقه
root	ریشه
square	دوم
rule	قاعده
anticommutative	پادتعویضپذیری
associative	شرکتپذیری
chain	زنجیرهای
commutative	تعویضپذیری
distributive	پخشپذیری

segment	قطعه
sequence	دنباله
bounded	کراندار
convergent	همگرا
divergent	واگرا
double	مضاعف
increasing	صعودی
monotonic	یکنوا
pointwise bounded	نقطه به نقطه کراندار
pointwise convergent	نقطه به نقطه همگرا
uniformly bounded	به طور یکنواخت کراندار
uniformly convergent	به طور یکنواخت همگرا
series	سری
absolutely convergent	به طور مطلق همگرا
alternating	متناوب
binomial	دوجمله‌ای
convergent	همگرا
divergent	واگرا
geometric	هندسی
infinite	نامتناهی
power	توانی
set	مجموعه
atmost countable	حداکثر شمارش‌پذیر
bounded	کراندار
above	از بالا
closed	بسته
compact	فشرده
connected	همبند
convex	محدب

countable	شمارش پذیر
dense	چگال
dependent	نامستقل
disjoint	از هم جدا
elementary	مقدماتی
empty	تهی
finite	متناهی
independent	مستقل
measurable	اندازه پذیر
nonempty	نا تهی
open	باز
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد یکه
perfect	کامل
relatively open	نسبتاً " باز
separated	از هم جدا شده
zero	صفر
σ -ring	σ -حلقه
simplex	سادک
affine	مستوی
differentiable	مشتق پذیر
oriented	جهت دار
standard	متعارف
solid angle	زاویه فضایی
space	فضا
connected	همبند
euclidean	اقلیدسی
measurable	اندازه پذیر
measure	اندازه

metric	متری
compact	فشرده
complete	تام
normal	نرمال
null	یوچ
separable	جدایی پذیر
vector	برداری
span	پیما
sphere	کره
standard presentation	نمایش متعارف
subadditivity	زیر جمعپذیری
subcover	زیر پوشش
subfield	زیر میدان
subsequence	زیر دنباله
subset	زیر مجموعه
dense	چگال
proper	حقیقی
sum	مجموع
partial	جزئی
summation by parts	جمع‌بندی به طریقهء جزء به جزء
support	تکیه‌گاه
supremum	سوپریمم
surface	سطح
symmetric difference	تفاضل متقارن
test	آزمون
Cauchy's condensation	تراکم کشی
comparison	مقایسه‌ای
integral	انتگرال

ratio	نسبت
root	ریشه
theorem	قضیه
divergence	دیورژانس
dominated convergence	همگرایی تسلطی
existence	وجودی
implicit function	تابع ضمنی
intermediate value	مقدار میانی
inverse function	تابع معکوس
localization	موضعی سازی
mean value	مقدار میانگین
monotone convergence	همگرایی یکنوا
uniqueness	یکتایی
torus	چنبره
transformation	تبدیل
invertible	معکوسپذیر
linear	خطی
transitivity	تعدی
uniform boundedness	کراننداری یکنواخت
union	اجتماع
unit	یکه
cube	مکعب
value	مقدار
intermediate	میانی
variable	متغیر
of integration	انتگرالگیری
vector	بردار

column	ستونی
normal	قائم
null	پوچ
tangent	مماس
unit	یکه
volume	حجم

فهرست راهنما

Abel, N.H.

آبل، ۹۳، ۲۱۰

Artin, E.

آرتین، ۲۳۲، ۲۳۷

test

آزمون

integral

انتگرال، ۱۷۰

Cauchy's condensation

تراکم کشی، ۷۷

root

ریشه، ۸۱

comparison

مقایسه‌ای، ۷۵

ratio

نسبت، ۸۲

Weierstrass

واپراشتراس، ۱۷۹

i

آی، ۱۶

Eberlein, W.F.

ابرلین، ۲۲۲

Green's identities

اتحادهای گرین، ۳۶۰

union

اجتماع، ۳۳

Spivak, M.

اسپیواک، ۳۳۰، ۳۴۰

Stark, E.L.

اشتارک، ۲۴۰

intersection

اشتراک، ۳۴

Stromberg, K.

اشترومبرگ، ۲۶

axiom

اصل موضوع، ۶

field axioms	اصول موضوع میدان، ۶
decimals	اعداد اعشاری، ۱۳
primes	اعداد اول، ۲۳۹
algebraic numbers	اعداد جبری، ۵۵
partition	افراز، ۱۴۸
of unity	واحد، ۳۰۴
intergal	انتگرال
Stieltjes	اشتیل یس، ۱۵۰
upper	بالایی، ۱۴۹، ۱۵۰
lower	پایینی، ۱۴۹، ۱۵۰
line	خط، ۳۰۹
Riemann	ریمان، ۱۴۹
Riemann-Stieltjes	ریمان - اشتیل یس، ۱۵۰
Lebesgue	لبگ، ۳۷۹
improper	مجازی، ۱۷۰
differentiation of	مشتقگیری از، ۱۶۳، ۲۸۶، ۳۹۱
integration	انتگرالگیری
of derivative	از مشتق، ۱۶۴، ۳۹۱
by parts	به طریقه جزء به جزء، ۱۶۴، ۱۷۰، ۱۷۲
measure	اندازه، ۳۷۲
outer	خارجی، ۳۶۷
zero(set of)	صفر (مجموعه با)، ۳۷۳، ۳۸۲
Lebesgue	لبگ، ۳۷۹
contraction	انقباض، ۲۶۶
e	ای، ۷۹
infimum	اینفیمم، ۴
interval	بازه، ۳۹، ۳۶۵
parameter	پارامتری، ۱۶۶

half-open	نیم باز، ۳۹
remainder	باقیمانده، ۲۵۵، ۲۹۵
Buck, R.C.	باک، ۲۳۶
into	بتو، ۳۰
range	برد، ۳۰، ۲۵۰
vector	برددار، ۱۹
null	پوچ، ۱۹
column	ستونی، ۲۵۳
normal	قائم، ۳۴۴
tangent	ماس، ۳۴۷
unit	یکه، ۲۶۲
onto	برو، ۳۰
cut	بریدگی، ۲۰
greatest lower bound	بزرگترین کران پایینی، ۴
closure	بست، ۴۴
uniform	یکنواخت، ۱۸۳، ۱۹۵
dimension	بعد، ۲۴۷
Bellman, R.	بلمن، ۲۳۹
infinity	بی نهایت، ۱۳
base	پایه، ۵۸
countable	شمارش پذیر، ۵۸
basis	پایه، ۲۴۷
standard	متعارف، ۲۴۷
cover	پوشش، ۴۵
open	باز، ۴۵
π	پی، ۲۲۰
span	پیما، ۲۴۶
continuity	پیوستگی، ۱۰۶

uniform

یکنواخت، ۱۱۲

function

تابع، ۳

measurable

اندازه‌پذیر، ۳۷۵

beta

بتا، ۲۳۳

vector-valued

بردار، ۱۰۵

derivative of

مشتق، ۱۳۷

Borel-measurable

برل - اندازه‌پذیر، ۳۷۸

continuously differentiable ۲۵۳ به طور پیوسته مشتق‌پذیر،

uniformly continuous ۱۱۲ به طور یکنواخت پیوسته،

uniformly differentiable ۱۴۱ به طور یکنواخت مشتق‌پذیر،

step ۱۵۹ پله‌ای،

continuous ۱۰۶ پیوسته،

from left از چپ، ۱۲۱

from right از راست، ۱۲۱

harmonic ۳۶۱ توافقی،

constant ۱۰۵ ثابت،

limit ۱۷۴ حدی،

linear ۲۴۹ خطی،

Riemann-integrable ۱۴۹ ریمان - انتگرال‌پذیر،

zeta ۱۷۲ زتا،

simple ۳۷۸ ساده،

increasing ۱۱۸ صعودی،

absolute value ۱۱۰ قدر مطلق،

bounded ۱۱۰ کراندار،

gamma ۲۳۱ گاما،

rational ۱۱۰ گویا،

Lebesgue-integrable ۳۸۰ لبگ - انتگرال‌پذیر،

logarithmic ۲۱۷ لگاریتمی،

orthogonal	متعامد، ۲۲۵
periodic	متناوب، ۲۲۱، ۲۳۰
trigonometric	مثلثاتی، ۲۱۹
summable	مجموع پذیر، ۳۸۰
set	مجموعه ای، ۳۶۳
convex	محدب، ۱۲۶
coordinate	مختصی، ۱۰۹
differentiable	مشتق پذیر، ۱۲۸، ۲۵۶
characteristic	مشخص، ۳۷۸
inverse	معکوس، ۱۱۳
regular	منتظم، ۳۶۶
component	مؤلفه، ۱۰۹
decreasing	نزولی، ۱۱۸
exponential	نمایی، ۲۱۵
nowhere differentiable	هیچ جا مشتق پذیر، ۱۸۵
one-to-one	یک به یک، ۳۰
monotonic	یکنوا، ۱۱۸، ۳۶۵
curl	تاو، ۲۴۱
transformation(see function; mapping)	تبدیل (ر.ک. تابع؛ نگاشت)
linear	خطی، ۲۴۹
invertible	معکوس پذیر، ۲۴۹
completion	تتمیم، ۱۰۲
rearrangement	تجدید آرایش، ۹۳
restriction	تحدید، ۱۲۳
order	ترتیب، ۳، ۲۱
lexicographic	قاموسی، ۲۸
Thurston, H.A.	ترستن، ۲۶
composition	ترکیب، ۱۰۷، ۱۳۰، ۱۵۶، ۲۵۰
linear	خطی، ۲۴۶

projection	تصویر، ۲۷۶
refinement	تطریف، ۱۵۱
common	مشترک، ۱۵۱
transitivity	تعدی، ۳۱
change of variables	تغییر متغیرها، ۱۶۲، ۳۰۵، ۳۱۸
symmetric difference	تفاضل مقارن، ۳۶۹
almost everywhere	تقریبا "همه جا"، ۳۸۲
mean square approximation	تقریب میانگین مربعی، ۲۲۶
support	تکیه‌گاه، ۲۹۹
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک، ۳۰
integrable functions	توابع انتگرالپذیر
spaces of	فضاهای، ۳۸۰، ۳۹۲
continuous functions	توابع پیوسته
space of	فضای، ۱۸۲
trigonometric functions	توابع مثلثاتی، ۲۱۹
Thorpe, J.A.	تورپ، ۳۴۰
extension	توسیع، ۱۲۳
Euler's constant	ثابت اویلر، ۲۳۸
algebra	جبر، ۱۹۵
uniformly closed	به طور یکنواخت بسته، ۱۹۵
self-adjoint	خود الحاقی، ۱۹۹
separation of points	جدا کردن نقاط، ۱۹۶
addition (see sum)	جمع (ر.ک. مجموع)
summation by parts	جمع‌بندی به طریقه جزء به جزء، ۸۰
additivity	جمع‌پذیری، ۳۶۴
countable	شمارش‌پذیر، ۳۶۴
orientation	جهت

positive	مثبت، ۳۲۴
negative	منفی، ۳۲۴
torus	چنبره، ۲۹۰، ۳۴۵
polynomial	چند جمله‌ای، ۱۰۹
Taylor	تیلور، ۲۹۵
trigonometric	مثلثاتی، ۲۲۴
product	حاصل ضرب (ضرب)
scalar	اسکالر، ۱۹
of real numbers	اعداد حقیقی، ۲۴
of complex numbers	اعداد مختلط، ۱۴
of transformations	تبدیلات، ۲۵۰
of functions	توابع، ۱۰۵
inner	داخلی، ۱۹
of determinants	دترمینانها، ۲۸۲
of series	سریها، ۹۰
of field elements	عنصرهای میدان، ۶
of forms	فرمها، ۳۱۳، ۳۱۵
Cauchy	کشی، ۹۰
of matrices	ماتریسها، ۲۵۴
cell	حجره، ۳۹
volume	حجم، ۳۱۰، ۳۴۲
limit	حد، ۶۰، ۱۰۳، ۱۷۴
upper	بالایی، ۷۰
lower	پایینی، ۷۰
subsequential	زیر دنباله‌ای، ۶۵
left-hand	سمت چپ، ۱۱۶
right-hand	سمت راست، ۱۱۶

pointwise	نقطه به نقطه، ۱۷۴
ring	حلقه، ۳۶۳
reflexive property	خاصیت انعکاسی، ۳۱
family	خانواده، ۳۳
line	خط، ۲۰
real	حقیقی، ۲۰
circle of convergence	دایره همگرایی، ۸۵
determinant	دترمینان، ۲۸۱
product of	ضرب، ۲۸۲
of an operator	یک عملگر، ۲۸۴
Dedekind	ددکیند، ۲۶
interior	درون، ۵۵
extended real number system	دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی، ۱۳
sequence	دنباله، ۳۲
uniformly bounded	به طور یکنواخت کراندار، ۱۸۷
uniformly convergent	به طور یکنواخت همگرا، ۱۷۸
of functions	توابع، ۱۷۴
increasing	صعودی، ۶۹
bounded	کراندار، ۶۱
Cauchy	کشی، ۶۶، ۱۰۰، ۳۹۶
double	مضاعف، ۱۷۵
pointwise bounded	نقطه به نقطه کراندار، ۱۸۷
pointwise convergent	نقطه به نقطه همگرا، ۱۷۴
divergent	واگرا، ۶۰
convergent	همگرا، ۶۰
monotonic	یکنوا، ۶۹
differential	دیفرانسیل، ۲۵۸

divergence	دیورژانس، ۳۴۱
Davis, P.J.	دیویس، ۲۳۲
equivalence relation	رابطهء هم‌ارزی، ۳۱
Robison, G.B.	ریسون، ۲۲۲
rank	رتبه، ۲۷۶
Newton's method	روش نیوتن، ۱۴۵
root	ریشه، ۱۱
square	دوم، ۲، ۱۰۰، ۱۴۵
Riemann, B.	ریمان، ۹۴، ۲۲۵
solid angle	زاویهء فضایی، ۳۵۷
chain	زنجیر، ۳۲۵
affine	مستوی، ۳۲۵
differentiable	مشتقپذیر، ۳۲۷
subcover	زیر پوشش، ۴۶
subadditivity	زیر جمعپذیری، ۳۶۸
subsequence	زیر دنباله، ۶۵
subset	زیر مجموعه، ۳
dense	چگال، ۱۰، ۴۰
proper	حقیقی، ۳
subfield	زیر میدان، ۱۰، ۱۶
jacobian	ژاکوبی، ۲۸۴
simplex	سادک، ۲۹۹
oriented	جهتدار، ۳۲۳
standard	متعارف، ۳۲۳
affine	مستوی، ۳۲۳
differentiable	مشتقپذیر، ۳۲۷

sereis	سری
absolutely convergent	به طور مطلق همگرا، ۸۸
power	توانی، ۸۵، ۲۰۸
binomial	دوجمله‌ای، ۲۴۳
Fourier	فوریه، ۲۲۵، ۲۲۶، ۳۹۵
alternating	متناوب، ۸۸
trigonometric	مثلثاتی، ۲۲۴
infinite	نامتناهی، ۷۵
divergent	واگرا، ۷۵
convergent	همگرا، ۷۵
geometric	هندسی، ۷۶
surface	سطح، ۳۰۷
supremum	سوپریمم، ۴
" $\mathcal{C}$ "-equivalence	" $\mathcal{C}$ "-معادل، ۳۳۹
σ -ring	σ -حلقه، ۳۶۴
Singer, I.M.	سینگر، ۳۴۰
index	شاخص (اندیس)
increasing	صعودی، ۳۱۱
of a curve	یک منحنی، ۲۴۳
radius	شعاع، ۳۹، ۴۰
of convergence	همگرایی، ۸۶، ۹۷
Schoenberg, I.J.	شونبرگ، ۲۰۴
plane	صفحه، ۲۰
complex	مختلط، ۲۰
tangent	مماس، ۳۴۴

multiplication(see product)	ضرب (ر.ک. حاصل ضرب)
flip	ضربه، ۳۰۱
length	طول، ۱۶۷
number	عدد
cardinal	اصلی، ۳۱
decimal	اعشاری، ۱۳
algebraic	جبری، ۵۵
real	حقیقی، ۱۰
winding	گردشی، ۲۴۴
irrational	گنگ، ۱، ۱۱، ۸۱
rational	گویا، ۱
finite	متناهی، ۱۴
positive	مثبت، ۹، ۱۰
complex	مختلط، ۱۴
negative	منفی، ۹
nonnegative	نامنفی، ۷۵
operator	عملگر
linear	خطی، ۲۴۹
identity	همانی، ۲۸۱
area element	عنصر سطح، ۳۴۳
distance	فاصله، ۳۸
Fine, N.J.	فاین، ۱۲۵
diagonal process	فرایند قطری، ۳۸، ۱۹۰
form	فرم، ۳۰۸
of class $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$	از رده $\mathcal{C}'\mathcal{C}''$ ، ۳۰۸
basic	اساسی، ۳۱۱
closed	بسته، ۳۳۳

product of	حاصل ضرب، ۳۱۳، ۳۱۵
differential	دیفرانسیل، ۳۰۸
exact	کامل، ۳۳۳
sum of	مجموع، ۳۱۰
derivative of	مشتق، ۳۱۶
formula	فرمول
Stirling's	استرلینگ، ۲۳۵، ۲۴۲
addition	جمع، ۲۱۵
space	فضا
euclidean	اقلیدسی، ۱۹
measure	اندازه، ۳۷۴
measurable	اندازه پذیر، ۳۷۴
vector	برداری، ۱۹، ۲۴۶
null	پوچ، ۲۷۶
of integrable functions	توابع انتگرال پذیر، ۳۸۰، ۳۹۲
of continuous functions	توابع پیوسته، ۱۸۲
separable	جدایی پذیر، ۵۷
metric	متری، ۳۸
complete	تام، ۶۹
compact	فشرده، ۴۶
normal	نرمال، ۱۲۶
connected	همبند، ۵۴
Hilbert	هیلبرت، ۴۰۰
Fleming, W.H.	فلمنینگ، ۳۴۰
Fourier, J.B.	فوریه، ۲۲۴
rule	قاعده
anticommutative	پادتعویض پذیری، ۳۱۱
distributive	پخش پذیری، ۷، ۲۴، ۳۵

commutative	تعویضپذیری، ۶، ۳۵
chain	زنجیره‌ای، ۱۳۰، ۲۵۸
associative	شرکتپذیری، ۶، ۳۵، ۳۱۴
L'Hospital's	هوپیتال، ۱۳۴، ۱۳۹
absolute value	قدر مطلق، ۱۷
part	قسمت
real	حقیقی، ۱۶
imaginary	موهومی، ۱۶
theorem	قضیه
fundamental...	اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۱۶۴، ۳۹۱
of calculus	
Stokes	استوکس، ۳۳۰، ۳۴۸
Stone-Weierstrass	استون - وایراشتراس، ۱۹۶، ۲۳۰، ۲۹۸
Helly's selection	انتخاب هلی، ۲۰۳
Baire's	بئر، ۵۹، ۱۰۱
Brouwer's	براوئر، ۲۴۵
Bohr-Mollerup	بوهر - مالرپ، ۲۳۳
Parseval's	پارسوال، ۲۳۰، ۲۴۰، ۳۹۵، ۳۹۸
implicit function	تابع ضمنی، ۲۷۱
inverse function	تابع معکوس، ۲۶۷
Taylor's	تیلور، ۱۳۶، ۱۴۳، ۲۱۳، ۲۹۵
divergence	دیورژانس، ۳۰۷، ۳۳۰، ۳۴۹
rank	رتبه، ۲۷۷
Riesz-Fischer	ریس - فیشر، ۳۹۸
Fatou's	فاتو، ۳۸۶
Fejér's	فجر، ۲۴۱
Green's	گرین، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۳۰، ۳۴۲
Lebesgue's	لیگ، ۱۸۸، ۲۰۲، ۳۸۳، ۳۸۷
mean value	مقدار میانگین، ۲۸۵

intermediate value	مقدار میانی، ۱۳۴
localization	موضعی سازی، ۲۳۰
Weierstrass	وایراشتراس، ۵۱، ۱۹۲
existence	وجودی، ۲۰۶
Heine-Borel	هاینه - برل، ۵۰
dominated convergence	همگرایی تسلطی، ۱۸۸، ۲۰۲، ۳۸۷
monotone convergence	همگرایی یکنوا، ۳۸۳
uniqueness	یکتایی، ۱۴۶، ۳۱۲
diameter	قطر، ۶۶
segment	قطعه، ۳۹
domain	قلمرو، ۳۰
parameter	پارامتری، ۳۰۸
arc	قوس، ۱۶۶
Cantor, G.	کانتور، ۲۶، ۲۸، ۲۲۵
bound	کران
upper	بالایی، ۴
lower	پایینی، ۴
uniform boundedness	کران داری یکنواخت، ۱۸۸
boundary	کرانه، ۳۲۶
sphere	کره، ۳۲۹، ۳۳۴، ۳۵۷
Kestelman, H.	کسلمن، ۲۰۲
Kellogg, O.D.	کلوگ، ۳۴۱
Knopp, K.	کنوپ، ۲۶، ۷۹
least upper bound	کوچکترین کران بالایی، ۴
property	خاصیت، ۵، ۲۱
Cunningham	کونینگهام، ۲۰۲
gradient	گرادیان، ۲۵۱، ۳۴۱

collection	گردآیه، ۳۳
ball	گوی، ۳۹
laplacian	لاپلاسین، ۳۶۰
Landau, E.G.	لاندو، ۲۶
Leibnitz, G.W.	لایب نیتز، ۸۸
Lebesgue	لیگ، ۲۲۵
logarithm	لگاریتم، ۲۷، ۲۱۷
Poincaré's lemma	لم پوانکاره، ۳۳۳، ۳۴۰
matrix	ماتریس، ۲۵۳
column	ستونی، ۲۶۲
row	سطری، ۲۶۲
product	ضرب، ۲۵۴
maximum	ماکزیمم، ۱۱۱
local	موضعی، ۱۳۲
origin	مبداء، ۱۹
variable of integration	متغیر انتگرالگیری، ۱۵۱
complement	متمم، ۴۰
sum	مجموع
of real numbers	اعداد حقیقی، ۲۲
of complex numbers	اعداد مختلط، ۱۴
of vectors	بردارها، ۱۹
of linear transformations	تبدیلات خطی، ۲۵۰
of functions	توابع، ۱۰۵
partial	جزئی، ۷۴، ۲۲۴
of oriented simplexes	سادکهای جهتدار،
of series	سریها، ۷۴
of field elements	عنصرهای میدان، ۶
of forms	فرمها، ۳۱۰

set

bounded above	از بالا کراندار، ۴
disjoint	از هم جدا، ۳۴
separated	از هم جدا شده، ۵۴
measurable	اندازه پذیر، ۳۶۹، ۳۷۴
open	باز، ۴۰
Borel	برل، ۳۷۳
closed	بسته، ۴۰
empty	تهی، ۳
dense	چگال، ۱۰، ۴۰
atmost countable	حداکثر شمارش پذیر، ۳۱
countable	شمارش پذیر، ۳۱
uncountable	شمارش ناپذیر، ۳۱، ۳۷، ۵۲
zero	صفر، ۱۲۲، ۱۴۴
compact	فشرده، ۴۶
perfect	کامل، ۴۰
Cantor	کانتور، ۵۲، ۱۰۰، ۱۶۹، ۲۰۳
bounded	کراندار، ۴۰
orthogonal ... of functions	متعامد از توابع، ۲۲۵
orthonormal	متعامد یکه، ۲۲۵، ۳۹۴، ۳۹۹
complete	تام، ۳۹۹
finite	متناهی، ۳۱
convex	محدب، ۳۹
independent	مستقل، ۲۴۶
elementary	مقدماتی، ۳۶۶
nonempty	نا تهی، ۳
infinite	نامتناهی، ۳۱
dependent	نامستقل، ۲۴۶
relatively open	نسبتاً "باز"، ۴۵

connected	همبند، ۵۴
Cauchy criterion	محک کشی، ۶۸، ۷۵، ۱۷۸
coordinates	مختصات، ۱۹، ۲۴۷
Mertens, F.	مرتسن، ۹۱
conjugate	مزدوج، ۱۶
initial-value problem	مسئله با مقدار اولیه، ۱۴۶، ۲۰۶
derivative	مشتق
partial	جزئی، ۲۵۹
directional	جهتی، ۲۶۳
of power series	سریهای توانی، ۲۰۹
normal	قائم، ۳۶۰
total	کلی، ۲۵۸
higher-order	مراتب بالاتر، ۱۳۶
of an integral	یک انتگرال، ۱۶۳، ۲۸۶، ۳۹۱
of a vector-valued function	یک تابع برداری، ۱۳۷
of a transformation	یک تبدیل، ۲۵۸
of a form	یک فرم، ۳۱۶
differentiation	مشتقگیری (ر.ک. مشتق)
differential equation	معادله دیفرانسیل، ۱۴۷، ۲۰۶
inverse of linear operator	معکوس عملگر خطی، ۲۴۹
value	مقدار، ۳۰
intermediate	میانی، ۱۱۶، ۱۲۵، ۱۳۴
McShane, E.J.	مک شین، ۳۷۷
unit cube	مکعب یکه، ۲۹۹
curve	منحنی، ۱۶۶
rectifiable	با طول متناهی، ۱۶۷
closed	بسته، ۱۶۶
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر، ۱۶۷
space-filling	فضا پرکن، ۲۰۴

component	مؤلفه
tangential	ماسی، ۳۴۷
of a function	یک تابع، ۱۰۹، ۲۵۹
arithmetic means	میانگینهای حسابی، ۹۸، ۲۴۱
field	میدان
vector	بررداری، ۳۴۰
real	حقیقی، ۱۰
complex	مختلط، ۱۴، ۲۲۲
ordered	مرتب، ۹، ۲۵
pair	جفت، ۱۴
k -tuple	k تایی، ۱۹
set	مجموعه، ۴، ۲۱، ۲۷
minimum	مینیمم، ۱۱۱
simple discontinuity	ناپیوستگی ساده، ۱۱۷
discontinuities	ناپیوستگیها، ۱۱۶
inequality	نامساوی
Bessel	بسل، ۲۲۷، ۳۹۵
Schwarz	شوارتز، ۱۸، ۱۷۰، ۳۹۳
triangle	مثلثی، ۱۷، ۲۰، ۳۸، ۱۷۱
Holder's	هولدر، ۱۷۰
norm	نرم، ۱۹، ۱۷۰، ۱۸۲، ۳۹۲
supremum	سوپریمم، ۱۸۲
of operator	عملگر، ۲۵۱
image	نقش، ۳۰
inverse	معکوس، ۳۰
point	نقطه
condensation	تراکم، ۵۸
isolated	تنها، ۴۰

fixed	ثابت، ۱۴۴
theorems	قضایای، ۱۴۴، ۲۴۵، ۲۶۶
limit	حدی، ۴۰
interior	درونی، ۴۰
saddle	زینی، ۲۹۰
mapping	نگاشت
primitive	اولیه، ۳۰۱
open	باز، ۱۲۴، ۲۷۰
continuously differentiable	به طور پیوسته مشتقپذیر، ۲۶۴
uniformly continuous	به طور یکنواخت پیوسته، ۱۱۲
continuous	پیوسته، ۱۰۶
linear	خطی، ۲۴۹
affine	مستوی، ۳۲۲
inverse	معکوس، ۱۱۲
locally one-to-one	یک به یک موضعی، ۲۷۰
standard presentation	نمایش متعارف، ۳۱۲
graph	نمودار، ۱۲۳
Möbius band	نوار موبیوس، ۳۶۱
Nijenhuis, A.	نیجن هویس، ۲۷۰
Niven, I.	نیون، ۸۱، ۲۳۹
Havin, V.P.	هاوین، ۱۳۹
Herstein, I.N.	هراشتاین، ۸۱
kernel	هسته
Dirichlet's	دیریکله، ۲۲۸
Fejér's	فجر، ۲۴۱
equicontinuity	همپیوستگی، ۱۸۹
neighborhood	همسایگی، ۳۹
convergence	همگرایی

of integral	انتگرال، ۱۶۹
dominated	تسلطی، ۲۸۷
of sequences	دنباله‌ها، ۶۰
of series	سریها، ۷۴
radius of	شعاع، ۸۶، ۹۷
bounded	کراندار، ۳۸۸
absolute	مطلق، ۸۸
of integral	انتگرال، ۱۶۹
pointwise	نقطه به نقطه، ۱۷۴
uniform	یکنواخت، ۱۷۸
Hewitt, E.	هیوویت، ۲۶
isomorphism	یکریختی، ۲۶
isometry	یکمتری، ۱۰۲، ۲۰۶