بسم الله الرحمن الرحیم

ادامه فصل ۲۷- میدان الکتریکی (حل چند مثال)

- میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوسته بار
- میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه باردار با چگالی ثابت
- تدبیرهای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار یکنواخت
- میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار
- میدان الکتریکی ناشی از خط نامتناهی بار
- بار نقطه ای در میدان الکتریکی

تدبیرهای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار یکنواخت

در اینجا به راهنمای کلی برای یافتن میدان الکتریکی $\vec{E}$ ناشی از یک خط باردار یکنواخت، چه به صورت دایره‌ای و چه به صورت خط راست، در نقطهٔ P می‌پردازیم. راهبرد کلی، انتخاب یک عنصر دیفرانسیلی dq از بار، یافتن $d\vec{E}$ ناشی از آن عنصر، و انتگرالگیری از $d\vec{E}$ روی تمام خط باردار است.

مرحلهٔ ۱. اگر خط باردار دایره‌ای باشد، ds را طول کمان یک عنصر دیفرانسیلی از توزیع بار در نظر می‌گیریم. اگر خط باردار مستقیم باشد، محور x را روی خط و dx را طول یک عنصر دیفرانسیلی از آن اختیار می‌کنیم. این عنصر را روی شکل مشخص می‌کنیم.

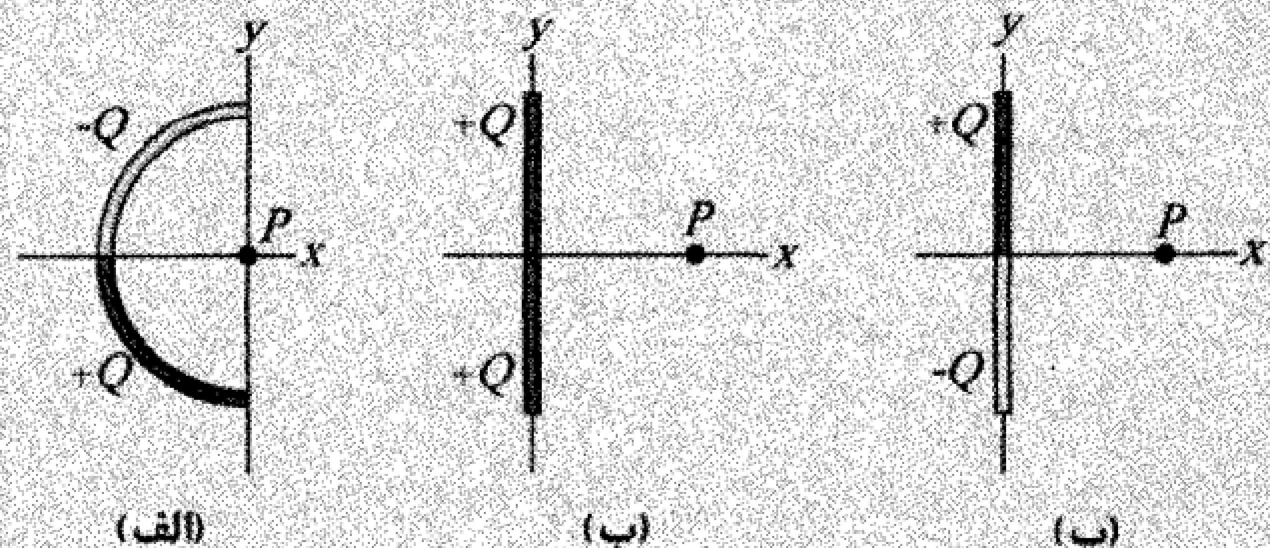
مرحلهٔ ۲. رابطهٔ بار dq عنصر دیفرانسیلی را با عنصر طول به صورت $dq = \lambda\, ds$ یا $dq = \lambda\, dx$ ، در نظر می گیریم. dq و λ را مثبت اختیار می‌کنیم. حتی اگر بار الکتریکی در واقع منفی باشد. (علامت بار در مرحلهٔ بعد به کار می‌آید.)

مرحلهٔ ۳. میدان $d\vec{E}$ ایجاد شده در نقطهٔ P توسط dq را با معادلهٔ ۱۸–۳، که در آن q با λds یا با λdx جایگزین شده است بیان می‌کنیم. اگر بار روی خط مثبت باشد، آنگاه در نقطهٔ P بردار $d\vec{E}$ را در جهت دور شدن از dq ، و اگر این بار منفی باشد، آن بردار را به سوی dq رسم می‌کنیم.

مرحلهٔ ۴. همیشه باید در جستجوی هرگونه تقارن در مسئله باشیم. اگر نقطهٔ P روی محور تقارن توزیع بار باشد، میدان $d\vec{E}$ ناشی از dq را به مؤلفه‌هایی عمود و موازی محور تقارن تجزیه می‌کنیم. آنگاه عنصر دیفرانسیلی دیگر dq' را که نسبت به خط تقارن، قرینهٔ dq است تجزیه می‌کنیم. در نقطهٔ P بردار $d\vec{E}'$ را که این عنصر قرینه ایجاد می‌کند، رسم و آن را به مؤلفه‌ها تجزیه می‌کنیم. یکی از مؤلفه‌های ایجاد شده توسط dq *مؤلفهٔ خنثی شونده* است؛ این مؤلفه با مؤلفهٔ متناظری که توسط dq' ایجاد شده خنثی می‌شود و دیگر نیازی به در نظرگرفتن آن نیست. مؤلفهٔ دیگر ایجاد شده توسط dq یک *مؤلفهٔ جمع شونده* است؛ این مؤلفه باید با مؤلفهٔ متناظری که توسط dq ایجاد شده جمع شود. مؤلفه‌های جمع شوندهٔ همهٔ عنصرهای دیفرانسیلی را با انتگرالگیری جمع می‌کنیم.

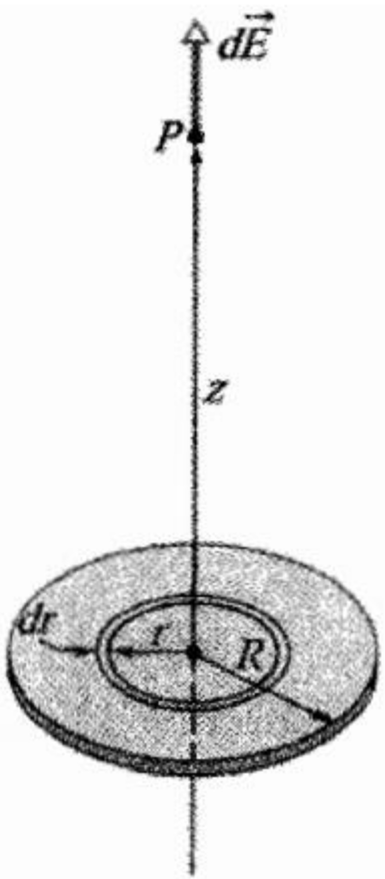
مساله

نکتهٔ ***وارسی*** **۲** شکل زیر، سه میلهٔ نارسانا را نشان می‌دهد، که یکی دایره‌ای و دو تای دیگر خط راست هستند. هر یک از میله‌ها دارای بار یکنواخت با بزرگی Q روی نیمهٔ بالایی و بار دیگری روی نیمهٔ پایین آن است. برای هر میله، جهت میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P چگونه است؟



مساله: میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

شکل ۱۸–۱۳، یک قرص پلاستیکی دایره‌ای به شعاع R را نشان می‌دهد که دارای بار سطحی مثبت با چگالی σ روی سطح خارجی آن است (به جدول ۱۸–۲ نگاه کنید). میدان الکتریکی در نقطهٔ P ، به فاصلهٔ z از قرص، در امتداد محور مرکزی آن چیست؟



شکل ۱۸–۱۳ قرصی به شعاع R و بار مثبت یکنواخت. شعاع حلقهٔ نشان داده شده r و پهنای شعاعی آن dr است. این حلقه، میدان الکتریکی دیفرانسیلی $d\vec{E}$ را در نقطهٔ P واقع بر محور مرکزی ایجاد می‌کند.

روش کار این است که قرص را به حلقه‌های هم‌مرکز تخت تقسیم و سپس میدان الکتریکی در نقطهٔ P را با جمع کردن (یعنی، با انتگرالگیری) سهم تمام حلقه‌ها محاسبه می‌کنیم. شکل ۱۸–۱۳ ، یکی از این حلقه‌ها را به شعاع r و پهنای شعاعی dr نشان می‌دهد. چون σ ، بار الکتریکی در یکای سطح است، بار روی حلقه برابر است با

$$dq = \sigma\, dA = \sigma\,(۲\pi r\, dr) \qquad (۲۲–۱۸)$$

که در آن dA مساحت عنصر دیفرانسیلی حلقه است.

مسئلهٔ مربوط به میدان الکتریکی ناشی از یک حلقهٔ باردار را پیشتر حل کرده‌ایم. با قراردادن dq از معادلهٔ ۱۸–۲۲ به جای q در معادلهٔ ۱۸–۱۶، و جایگزینی R در معادلهٔ ۱۸–۱۶ با r ، میدان الکتریکی dE در نقطهٔ P ناشی از حلقهٔ تخت به دست می‌آید

$$dE = \frac{z\,\sigma\,۲\pi r\, dr}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\,(z^{۲}+r^{۲})^{۳/۲}}$$

که می‌توان آن را چنین نوشت

$$dE=\frac{\sigma z}{۴\varepsilon_{\circ}}\frac{۲r\,dr}{(z^{۲}+r^{۲})^{۳/۲}} \qquad (۲۳-۱۸)$$

حال E را با انتگرالگیری روی سطح قرص، یعنی با انتگرالگیری نسبت به متغیر r از $r=\circ$ تا $r=R$، به دست می‌آوریم. توجه کنید که z در این انتگرالگیری ثابت می‌ماند. از آنجا به دست می‌آوریم

$$E=\int dE=\frac{\sigma z}{۴\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{R}(z^{۲}+r^{۲})^{-۳/۲}(۲r)\,dr \qquad (۲۴-۱۸)$$

برای حل این انتگرال،آن را با قراردادن $X=(z^{۲}+r^{۲})$ ، $m=-\frac{۳}{۲}$ و $dX=(۲r)\,dr$ به شکل $\int X^{m}dX$ می‌نویسیم. برای این انتگرال داریم

$$\int X^{m}\,dX=\frac{X^{m+۱}}{m+۱}$$

و بنابراین معادلهٔ ۱۸–۲۴ چنین می‌شود

$$E=\frac{\sigma z}{۴\varepsilon_0}\left[\frac{(z^۲+r^۲)^{-۱/۲}}{-\frac{۱}{۲}}\right]_0^R \qquad (۱۸–۲۵)$$

با قرار دادن حدود انتگرال در معادلهٔ ۱۸–۲۵ و مرتب کردن آن، به دست می‌آوریم

$$E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_0}\left(۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right) \quad \text{(قرص باردار)} \quad (۱۸–۲۶)$$

که بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک قرص تخت باردار دایره‌ای، در نقطه‌هایی روی محور مرکزی آن است. (در محاسبهٔ انتگرال، فرض کردیم که $z\geq 0$).

اگر در حالی که z را متناهی نگه داشته‌ایم، R را به سمت بینهایت میل دهیم $(R \to \infty)$ ، جملهٔ دوم درون پرانتز معادلهٔ ۱۸–۲۶ به سمت صفر میل می‌کند، و معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$E = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰} \quad \text{(ورقه نامتناهی)} \qquad (۲۷-۱۸)$$

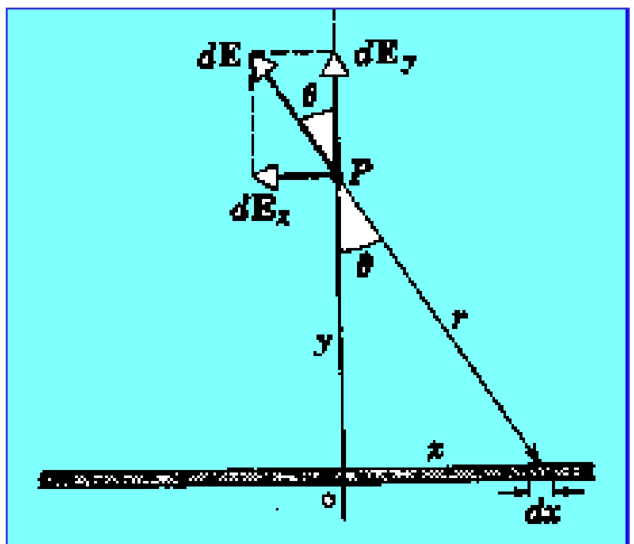
این، میدان الکتریکی حاصل از یک ورقهٔ باردار یکنواخت نامتناهی است که در یک طرف نارسانایی از قبیل پلاستیک قرار گرفته است. خطهای میدان الکتریکی برای چنین وضعیتی در شکل ۱۸–۳ نشان داده شده است.

همچنین اگر در حالی که R را متناهی نگهداشته‌ایم در معادلهٔ ۱۸–۲۶ مقدار z را به سمت صفر میل دهیم $(z \to ۰)$ ،به همان معادلهٔ ۱۸–۲۷ می‌رسیم. این نشان می‌دهد که در نقطه‌های بسیار نزدیک به قرص، میدان الکتریکی ایجاد شده توسط قرص همان میدان حاصل از قرصی است که به طور نامتناهی گسترش یافته است.

مثال: میدان الکتریکی ناشی از خط نامتناهی بار

- مثال:

خط نامتناهی بار. شکل زیر بخشی از یک خط نامتناهی بار را که چگالی بار خطی آن (یعنی بار واحد طول که برحسب کولن بر متر اندازه‌گیری می‌شود) مقدار ثابت λ است، نشان می‌دهد. میدان $\mathbf{E}$ را در فاصلهٔ y از این خط محاسبه کنید.



حل مثال

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{y^2 + x^2}$$

$$dE_x = -dE\sin\theta \quad , \quad dE_y = dE\cos\theta$$

$$E_x = \int dE_x = -\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \sin\theta\, dE \quad ,$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \cos\theta\, dE$$

بار نقطه ای در میدان الکتریکی

در چهار بخش گذشته به یکی از دو کار پیش روی خود پرداختیم: با داشتن یک توزیع بار معین، میدان الکتریکی حاصل از آن را در فضای پیرامون به دست آوردیم. در اینجا به کار دوم می‌پردازیم: تعیین اینکه برای یک ذرهٔ باردار وقتی که در میدان الکتریکی ایجاد شده توسط بارهای ساکن یا در حال حرکت آهسته‌ای قرار گیرد، چه رخ می‌دهد؟

آنچه رخ می‌دهد این است که بر ذرهٔ باردار یک نیروی الکترواستاتیکی اثر می‌کند که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

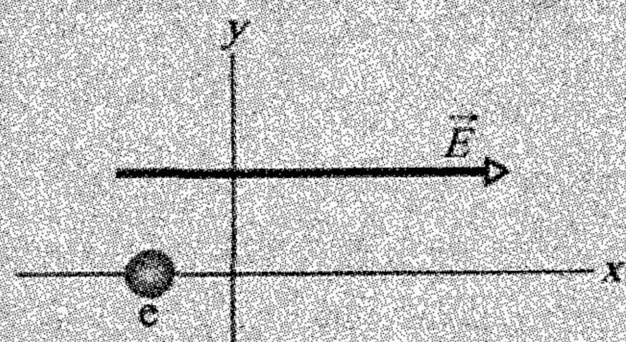
$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (۲۸-۱۸)$$

که در آن q بار ذره (شامل علامت آن) و $\vec{E}$ میدان الکتریکی است که ذره‌های دیگر در محل ذرهٔ مورد نظر ایجاد کرده‌اند. (این میدان، میدان الکتریکی ایجاد شده توسط خود ذره *نیست*)؛ برای تمایز این دو میدان، میدان وارد بر ذره در معادلهٔ۱۸–۲۸، اغلب میدان *خارجی* نامیده می‌شود. معادلهٔ ۱۸–۲۸ حاکی از آن است که

> ☞ نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}$ وارد بر یک ذرهٔ باردار که در میدان خارجی $\vec{E}$ قرار گرفته، در صورتی که بار q ذره مثبت باشد در جهت $\vec{E}$ و در صورتی که q منفی باشد، در جهت مخالف آن است.

سئوال:

✔ **نکتهٔ *وارسی* ۳** (الف) در شکل زیر، جهت نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون ناشی از میدان الکتریکی خارجی نشان داده شده چگونه است؟ (ب) اگر الکترون پیش از روبه رو شدن با میدان خارجی، در جهت موازی محور y حرکت کند، در چه جهتی شتاب خواهد گرفت؟ (پ) حال اگر الکترون در ابتدا رو به سمت راست در حرکت باشد، آیا تندی آن افزایش می‌یابد یا کاهش، یا ثابت می‌ماند؟



۳– (الف) به طرف چپ؛ (ب) به طرف چپ؛ (پ) کاهش،

دلیل؟