به نام خدا

سرفصل های درس محاسبات عددی

فصل ۱- مروری بر پیش نیازها (خطاها و مفاهیم اساسی)

فصل ۲- درونیابی

فصل ۳- معادلات غیرخطی و حل آن

فصل ۴- مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

فصل ۵- حل عددی دستگاه های معادلات خطی

فصل ۶- حل عددی دستگاه های معادلات دیفرانسیل

منابع

۱- محاسبات عددی (دکتر کرایه چیان)

۲- آنالیز عددی ۱ و ۲ (چنی و کینکید) (ترجمه: دکتر فائزه توتونیان و دکتر منصوره صائمی)

۳- محاسبات عددی (دکتر نحوی (صفتی شریف))

۴- آنالیز عددی ۱ (دکتر اسماعیل بابلیان (انتشارات دانشگاه پیام نور))

فصل ۱ (مروری بر پیش‌نیازها - خطاها و مفاهیم اساسی)

مقدمه

بسیاری از مسائل ریاضی را نمی‌توان به طور تحلیلی حل نمود و جواب دقیق آن‌ها را به دست آورد. برای همین بایستی از روش‌های تقریبی (عددی) استفاده نمود.

خطاهای ریاضی هنگامی به وجود می‌آیند که ما آنچه را که ناستاهی یا پیوسته باشد را اختیار کرده و آن را متناهی یا گسسته سازیم.

قضیه تیلور

فرض کنید f و مشتقات آن تا مرتبه‌ی $n+1$ بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in [a,b]$. آنگاه برای هر $x \in [a,b]$، عددی مانند $\xi(x)$ بین x_0 و x وجود دارد به طوری که

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (1)$$

که

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

و

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

$P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور مرتبه‌ی n تابع f در مجاورت نقطه‌ی x_0 و $R_n(x)$ جمله‌ی باقیمانده یا خطای برشی متناظر با $P_n(x)$ نامیده می‌شود. در حالت $x_0 = 0$ این قضیه را قضیه‌ی مکلورن نیز می‌نامند. وقتی $n \to \infty$ آنگاه در (۱)، اگر $R_n(x) \to 0$ در این صورت

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots$$

که سری تیلور تابع f در مجاورت x_0 و در نقطه‌ی x نامیده می‌شود. همین طور

$$|R_2(0/1)| = \left| \frac{(0/1-0)^3}{3!} f^{(3)}(\xi(x)) \right| \qquad 0 < \xi(x) < 0/1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}} \longrightarrow f^{(3)}(\xi(x)) = \frac{36}{125}(\xi(x)+1)^{-\frac{14}{5}}$$

$$\Rightarrow |R_2(0/1)| = \frac{(0/001)}{6} \left| \frac{36}{125}(\xi(x)+1)^{-\frac{14}{5}} \right|$$

$$0 < \xi(x) < 0/1$$

$$0+1 < (\xi(x)+1) < 1+0/1$$

$$1 < (\xi(x)+1) < 1/1$$

$$1 = 1^{\frac{14}{5}} < (\xi(x)+1)^{\frac{14}{5}} < (1/1)^{\frac{14}{5}}$$

$$(1/1)^{-\frac{14}{5}} < (\xi(x)+1)^{-\frac{14}{5}} < 1^{-1} = 1$$

$$\frac{36}{125} \times (1/1)^{-\frac{14}{5}} < \frac{36}{125}(\xi(x)+1)^{-\frac{14}{5}} < \frac{36}{125} \times 1 = \frac{36}{125}$$

$$\left| \frac{36}{125}(\xi(x)+1)^{-\frac{14}{5}} \right| < \frac{36}{125} = 0/288$$

$$\Rightarrow |R_2(0/1)| = \frac{0/001}{6} \left| \frac{36}{125}(\xi(x)+1)^{-\frac{14}{5}} \right| < \frac{0/001}{6} \times 0/288$$

$$= 0/0000048$$

این خطا، خطای برشی نامیده می‌شود. این نوع خطا به واسطه‌ی تقریب‌هایی که در فرمول‌های ریاضی به کار برده می‌شود، تولید می‌شود.

$$f(x)=f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

سری مکلورن تابع f نامیده می‌شود.

مثال- با استفاده از فرمول تیلور، $(1,1)^{\frac{1}{5}}$ را با استفاده از سه جمله‌ی اول بسط تیلور محاسبه کنید و کران بالایی برای قدر مطلق خطا بیابید.

حل- تعریف می‌کنیم $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{5}}$. اگر قرار دهیم $x=0,1$ خواهیم داشت

$$f(0,1)=(1,1)^{\frac{1}{5}}$$

حال بسط تیلور تابع f را در نقطه‌ی $x=0,1$ و حول نقطه‌ی $x_0=0$ می‌نویسیم

$$f(x)\simeq f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

$$x_0=0$$

$$f(0)=(0+1)^{\frac{1}{5}}=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}}\longrightarrow f'(0)=\frac{1}{5}=0,2$$

$$f''(x)=\frac{-4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}}\longrightarrow f''(0)=-\frac{4}{25}$$

$$f(0,1)\simeq f(0)+(0,1-0)f'(0)+\frac{(0,1)^2}{2!}f''(0)$$

$$=1+0,2\times 0,1-\frac{4}{25}\times\frac{(0,1)^2}{2}=1,0192$$

داشتیم

$$f(x)=P_2(x)+R_2(x)$$

از طرفی

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

که $\xi(x)$ عددی بین x و x_0 می‌باشد.

توجه ۱: در انتخاب تابع f باید به این نکته توجه داشت که تابعی باید انتخاب شود که عددی که قرار است محاسبه شود در برد تابع قرار گرفته شود، یعنی به ازای عددی مانند x، $f(x)$ عدد مورد نظر باشد، در این صورت نتیجه می‌شود که یافتن تابع f و نقطه‌ی x به طور همزمان انجام خواهد گرفت.

توجه ۲: برای انتخاب x_0 باید به نکات زیر دقت کرد:

۱) نقطه‌ی x_0 باید متعلق به دامنه‌ی توابع f، f'، f'' و ... باشد.

۲) محاسبه‌ی f، f'، f'' و ... در نقطه‌ی x_0 در صورت امکان نیازی به ماشین حساب نداشته باشد.

۳) x_0 تا اندازه‌ی ممکن به x نزدیک اختیار شود (برای کاهش خطای برشی و افزایش سرعت تخمین عدد مورد نظر)

حساب کامپیوتری

برای آن که بدانیم محاسبات در یک کامپیوتر چگونه انجام می‌شود، ابتدا لازم است بدانیم نمایش اعداد در کامپیوترها چگونه است. اغلب کامپیوترها از حساب ممیز شناور استفاده می‌کنند. در کامپیوتری که از مبنای B استفاده می‌کند، نمایش عدد غیرصفر x به صورت ممیز شناور نرمال شده چنین است

$$fl(x) = \pm 0/d_1 d_2 \cdots d_k \cdots \times B^e \quad , \quad x \neq 0$$

که در آن $1 \leq d_1 \leq B-1$ و $0 \leq d_i \leq B-1$ ، $i = 2, 3, \ldots, k, \ldots$. در این نمایش، کسر $0/d_1 d_2 \cdots d_k \cdots$ ماتیس و e یک عدد صحیح است، نما نامیده می‌شود.

به عنوان مثال فرض کنید $B=10$ و فرض کنید عدد حقیقی مفروض x به عنوان یک متغیر ورودی به کامپیوتر داده شده باشد. ابتدا عدد را به صورت بسط اعشاری نامتناهی زیر می‌نویسیم:

$$x = \pm 0/d_1 d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^{e} \qquad (*)$$

که در آن $1 \le d_1 \le 9$ و $0 \le d_i \le 9$ ، $i=2,3,\ldots$.

فرض کنید این کامپیوتر از حساب k رقمی استفاده کند، به عبارت دیگر ماانتیس آن در شکل ممیز شناور نرمال شده، k رقم داشته باشد. در این صورت عدد به صورت زیر ذخیره می‌شود

$$fl(x) = \pm 0/d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^{n} \qquad (**)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود به علت محدودیتی که در نمایش اعداد در کامپیوترها داریم، نمی‌توانیم با $(*)$ کار کنیم و ناگزیر باید $(**)$ که تقریبی از $(*)$ است را جایگزین آن نماییم. خطایی که به واسطه‌ی این مطالب رخ می‌دهد، خطای گرد شده نامیده می‌شود.

در ذخیره شدن x به شکل $(**)$ کامپیوترها به دو صورت زیر عمل می‌کنند:

۱- **برش زدن (قطع کردن)** - k رقم اول در $(*)$ حفظ و بقیه‌ی ارقام حذف می‌شوند.

۲- **گرد کردن** - اگر در $(*)$، $d_{k+1} \ge 5$، یک واحد به d_k اضافه و سپس از برش زدن استفاده می‌شود ($d_{k+1}, \ldots$ حذف می‌شوند)، در غیر این صورت مشابه حالت برش زدن عمل می‌کنیم.

مثال - شکل ممیز شناور نرمال شده‌ی عدد $x=\frac{8}{3}$ در کامپیوتر با ماانتیس ۷ رقم را به روش‌های برش زدن و گرد کردن به دست آورید.

حل -

$$\frac{8}{3} = 2.666666667\ldots = 0.2666666667\ldots \times 10^{1}$$

$$\simeq 0.2666666 \times 10^{1} \longrightarrow \text{با برش زدن}$$

$$\simeq 0.2666667 \times 10^{1} \longrightarrow \text{با گرد کردن}$$

تعریف - هر یک از ارقام d_1، d_2، ... ، d_k در (**) را ارقام بامعنی x می‌نامند و چون اهمیت این ارقام از چپ به راست کم می‌شود.

دو منبع اصلی خطاهای گرد شده عبارتند از :

۱- جمع کردن یک عدد خیلی کوچک با یک عدد خیلی بزرگ یا تفریق کردن یک عدد خیلی کوچک از یک عدد خیلی بزرگ.

۲- تفریق دو عدد نزدیک به هم.

مثال - در یک کامپیوتر اعشاری چهار رقمی که از برش زدن استفاده می‌کند، اعداد $x_1 = 0.1246 \times 10^1$ و $x_2 = 0.32900 \times 10^{-1}$ را با هم جمع کنید.

حل -

$$x_1 + x_2 = 0.1246 \times 10^1 + 0.32900 \times 10^{-1}$$

$$= 0.1246 \times 10^1 + 0.00329 \times 10^1$$

$$= 0.12789 \times 10^1$$

در حساب چهار رقمی

$$fl(x_1 + x_2) = 0.1278 \times 10^1$$

$$|(x_1 + x_2) - fl(x_1 + x_2)| = 0.0009 \longrightarrow$$

خطای گرد شده که ناشی از جمع زدن یک عدد خیلی بزرگ و یک عدد خیلی کوچک می‌باشد.

تمرین تحویلی (مثال ۲۰ کتاب)

ریشه های معادله‌ی زیر را در حساب پنج رقمی محاسبه کنید.

$$x^2 - 40x + 2 = 0$$

خطای مطلق ـ خطای نسبی ـ خطای درصد

فرض کنید x یک عدد حقیقی و x^* تقریبی برای آن باشد. این خطاها به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

خطای مطلق : $e = |x - x^*|$

خطای نسبی : $Re = \dfrac{|x - x^*|}{|x|}, \quad x \neq 0$

$= \dfrac{e}{|x|}, \quad x \neq 0$

خطای درصد :

$100 \times Re$

مثال - اگر $x = \frac{1}{3}$ و $x^* = 0{,}3333$ تقریبی برای آن باشد، آنگاه خطای مطلق برابر است با

$$e = \left|\frac{1}{3} - 0{,}3333\right| = \frac{1}{3} - 0{,}3333 = \frac{1}{3}(1 - 0{,}9999)$$

$$= \frac{1}{3} \times 10^{-4}$$

و خطای نسبی

$$R_e = \frac{e}{|x|} = \frac{\frac{1}{3} \times 10^{-4}}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$$

و خطای درصد

$$10^{-4} \times 100 = 10^{-2} = 0{,}01$$

یا $0{,}01\%$ است.

مثال - دو کارمند بانک را در نظر بگیرید که اولی در جابجایی یک میلیون تومان پول، ۵۰۰ تومان کم آورده و دومی در جابجایی پانصد هزار تومان، ۵۰۰ تومان اضافه آورده است. دقت کدام کارمند بیشتر است؟

خطای مطلق کارمند اول $= 500 =$ خطای مطلق کارمند دوم

$$Re_1 = \frac{|(10^6 - 999{,}500)|}{10^6} = \frac{500}{10^6} = 0{,}00005$$

$$Re_2 = \frac{|500'000 - 500'500|}{500000} = \frac{500}{500'000} = \frac{1}{10^3} = 0/001$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود $Re_1 < Re_2$

و این یعنی کارمند اول بهتر از کارمند دوم عمل کرده است.

توجه: برای تعیین میزان دقت، از خطای نسبی استفاده می‌کنیم نه خطای مطلق.

ارقام اعشار درست

فرض کنید x^* تقریبی برای x باشد. اگر k بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد به طوری که

$$e = |x - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-k} = 0/5 \times 10^{-k}$$

آن گاه گفته می‌شود x^* دارای k رقم اعشار درست است. همچنین گفته می‌شود x^* و x تا k رقم اعشار مطابقت دارند.

مثال- هر یک از اعداد $x^* = \frac{22}{7}$ و $x^* = \frac{355}{113}$ تقریبی برای عدد $R = 3/1415926\ldots$ هستند. این تقریبات چند رقم اعشار درست دارند؟

حل- داریم

$$\frac{22}{7} = 3/142857142$$

$$\left|R - \frac{22}{7}\right| = 0/0012644\ldots = 0/126449\ldots \times 10^{-2} < 0/5 \times 10^{-2}$$

$\frac{22}{7}$ دو رقم اعشار درست دارد.

$$\left|R - \frac{355}{113}\right| = 0/0000002 = 0/27 \times 10^{-6} < 0/5 \times 10^{-6}$$

$\frac{355}{113}$، ۶ رقم اعشار درست دارد.

* $\frac{355}{113}$ تقریب بهتری برای R است.

ارقام بامعنی درست

فرض کنید x^* تقریبی برای x باشد. اگر بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد به طوری که

$$R_e(x^*) = \frac{|x-x^*|}{|x|} = \frac{e}{|x|} < 5\times 10^{-s} \quad , \quad x \neq 0$$

آنگاه گفته می‌شود که x^* دارای s رقم بامعنی درست است. همچنین گفته می‌شود که x^* و x تا s رقم بامعنی باهم مطابقت دارند.

مثال - فرض کنید $x=123.45$ و $x^*=124.35$. آنگاه دو عدد تا دو رقم بامعنی باهم مطابقت دارند، زیرا

$$R_e(x^*) = \frac{|x-x^*|}{|x|} = \frac{|123.45-124.35|}{123.45} = \frac{0.9}{123.45}$$

$$= 0.007290 4$$

$$= 0.7290 4\times 10^{-2} < 5\times 10^{-2} \Rightarrow s=2$$

تمرین تحویلی - با استفاده از فرمول تیلور، $\frac{1}{5}(1.1)$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

تمرین های فصل ۱

۱- با استفاده از فرمول هلکورن، $\sin 10^\circ$ را با دقت چهار رقم اعشار درست محاسبه کنید.

۲- تقریب تابع $f(x)=e^x$ را در $[-1,1]$ با چندجمله‌ای تیلور آن ($P_n(x)$) در نظر بگیرید. مطلوبست تعیین n به شرطی که

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

۳- کامپیوتری اعشاری در نظر بگیرید که از حساب ۵ رقمی استفاده می‌کند. در این کامپیوتر $1-\cos 5^\circ$ را با ۵ رقم بامعنی محاسبه کنید.

۴- کامپیوتری را در نظر بگیرید که محاسبات را در سیستم اعشاری و با ۸ رقم انجام می‌دهد. فرض کنید بخواهیم ۰٫۳۳۳۳۳۳۳۳ را چهار بار با خودش جمع کنیم. نتیجه چیست و چه نوع خطایی رخ می‌دهد؟

۵- یک تقریب برای $\sqrt{2}$، عدد $\frac{577}{408}$ است. این تقریب چند رقم اعشار درست و چند رقم بامعنی درست دارد؟

۶- معادله‌ی $x^2 + 242.14x + 6.2949 = 0$ را با استفاده از کامپیوتری اعشاری که از حساب ممیز شناور استفاده می‌کند، حل کنید.

اندکی بیاندیش!
هیچ کس دلسوز تو جز خودت نیست.
پس همچون یک مسئول به کارهای خودت رسیدگی کن.

«حضرت امام سجاد علیه‌السلام»

فصل دوم : درونیابی و تقریب توابع

درونیابی، یعنی محاسبه ی مقادیر یک تابع جدولی در نقاطی که در جدول نیستند. بسیاری از روندهای درونیابی، نام ریاضیدانان معروفی چون گاوس، نیوتن، بسل، استرلینگ وغیره را به خود گرفته اند. نیاز به درونیابی در مطالعات اولیه ی ستاره شناسی، زمانی آغاز شد که می خواستند حرکت اجرام سنگین آسمانی را از وعده های متناوب تعیین نمایند. امروزه، ماشین های حساب و کامپیوترها، مقادیر را با استفاده از روش هایی که در فصل بعد توصیف می شوند، حساب می کنند. پس چرا باید یک فصل طولانی را به موضوعی اختصاص دهیم که تقریباً کهنه است؟ برای این امر، چهار دلیل وجود دارد. اولاً، روش های درونیابی مبنای بسیاری از روندهای دیگری هستند که مطالعه خواهیم کرد که از جمله عبارتند از مشتق گیری و انتگرال گیری عددی و روش های حل برای معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی. ثانیاً، این روش ها، نظریه ی مهمی را در مورد چندجمله ای ها و نیز دقت روش های عددی توضیح می دهند. ثالثاً، درونیابی با چند جمله ای ها، آشنایی مناسبی به چند روش برای رسم منحنی های هموار است و بالاخره، تاریخ، خود جذابیت خاصی دارد.

مثال. اتومبیلی را در نظر بگیرید که سرعت آن در زمان های مختلف در جدول زیر ثبت شده است:

t(min)	0	1	2	7	10	25
v(Km/h)	0	20	50	80	180	90

درصورتی که فرمولی وجود نداشته باشد که سرعت را با زمان ربط دهد، چگونه می توان سرعت اتومبیل را در $t=8$

تخمین زد؟ تخمین سرعت در زمانی بین $t=0$ و $t=25$ یک مسأله‌ی درونیابی و در زمانی خارج از

این بازه، یک مسأله‌ی برونیابی نامیده می‌شود.

ابتدا، مسأله را در حالت خاص، یعنی درونیابی خطی بررسی می‌کنیم.

درونیابی خطی

فرض کنید $f(x_i)$ و $f(x_{i+1})$ به ترتیب مقادیر f در نقاط x_i و x_{i+1} باشند. تابع خطی $p(x)$ که نمودار آن از دو نقطه‌ی

$(x_i, f(x_i))$ و $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ می‌گذرد، عبارت است از:

$$p(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) \qquad (1)$$

زیرا به سادگی می‌توان دید که

$$p(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \ , \ p(x_i) = f(x_i)$$

اکنون برای هر x که $x_i < x < x_{i+1}$ داریم: $f(x) \approx p(x)$

در مثال اتومبیل اگر $x_i = 7$ و $x_{i+1} = 10$ آنگاه داریم:

$$p(x) = \frac{x-10}{7-10} f(7) + \frac{x-7}{10-7} f(10)$$

$$= \frac{x-10}{-3}(80) + \frac{x-7}{3}(180)$$

حال اگر $x = 8$ خواهیم داشت:

$$p(8) = \frac{8-10}{-3}(80) + \frac{8-7}{3}(180)$$

$$= \frac{2}{3}(80) + \frac{1}{3}(180) = 113.333$$

که نشان دهنده‌ی مقدار تقریبی سرعت اتومبیل در $t=8$ است.

درونیابی چندجمله‌ای

فرض کنید مقادیر یک تابع f در نقاط متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ به صورت جدول زیر در دست باشد. مسأله، عبارت است از یافتن مقدار تقریبی $f(x)$ که x نقطه‌ای است بین نقاط x_0 تا x_n و $x \neq x_i$، $i=0,1,\dots,n$.

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

برای این منظور، یک چندجمله‌ای $p(x)$ بنا می‌کنیم که از $n+1$ نقطه‌ی $(x_i, f(x_i))$، $i=0,1,\dots,n$ بگذرد که در این صورت $p(x_i)=f(x_i)$. حال برای $x \neq x_i$، داریم $f(x) \approx p(x)$.

ابتدا وجود و یکتایی چندجمله‌ای را ثابت می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱ـ فرض کنید نقاط $(x_i, f(x_i))$، $i=0,1,\dots,n$ که x_iها متمایزند، مفروض باشند. آن‌گاه یک و تنها یک چندجمله‌ای $p(x)$، حداکثر از درجه‌ی n، وجود دارد به طوری که

$$p(x_i)=f(x_i), \quad i=0,1,\dots,n \tag{۲}$$

اثبات. چندجمله‌ای $L_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}, \quad i=0,1,\dots,n \tag{۳}$$

این چندجمله‌ای‌ها از درجه‌ی n هستند و خاصیت زیر را دارند.

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

حال چندجمله‌ای $P(x)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i) \qquad (۴)$$

$P(x)$ از درجه‌ی حداکثر n است و بسادگی می‌توان دید که شرط (۲) نیز برقرار است. به این ترتیب، وجود $P(x)$ ثابت می‌شود.

حال نشان می‌دهیم $P(x)$ یکتاست. فرض کنید $Q(x)$ نیز چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n با خاصیت زیر باشد:

$$Q(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

تعریف می‌کنیم

$$H(x) = P(x) - Q(x)$$

واضح است که $H(x)$ چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n است و داریم:

$$H(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

به عبارت دیگر، $H(x)$ دارای $n+1$ ریشه است و این ممکن نیست مگر آن که

$$H(x) \equiv 0$$

و لذا $P(x) \equiv Q(x)$.

تبصره ۱ـ $P(x)$ چندجمله‌ای تابع $f(x)$ را در نقاط x_i ، $i=0,1,\dots,n$ درونیابی می‌کند، هرگاه شرط (۲) برقرار باشد، یعنی $P(x_i)=f(x_i)$ ، $i=0,1,\dots,n$

تبصره ۲ ـ چندجمله‌ای $L_i(x)$ تعریف شده در (۳) را چندجمله‌ای های لاگرانژ و $P(x)$ تعریف شده با (۴) را چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ می‌نامند.

مثال. چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ مربوط به تابع جدولی زیر را تعیین کنید و به کمک آن $y(0/1)$ را تخمین بزنید.

x_i	-1	0	1
y_i	2	1	3

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= 2 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 1 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2$$

$$y(0/1) \approx P(0/1) = 1 + \frac{1}{2}(0/1) + \frac{3}{2}(0/01)$$

$$= 1/065$$

معایب روش لاگرانژ:

۱ـ با بزرگ شدن n ، حجم عملیات این روش زیاد می‌شود و با اضافه کردن نقاط جدید از محاسبات قبلی استفاده چندانی نمی‌شود.

۲ـ درجه‌ی چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ، پس از اتمام عملیات مشخص می‌شود.

با اضافه کردن نقطه‌ی (۲,۸) به تابع جدولی مربوط به مثال قبل، چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ را به

دست آورید و $y(0.1)$ را تخمین بزنید.

خطا در چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ

سوالی که مطرح می‌شود این است که برای نقاط $x\in[a,b]$ ، $x\neq x_i$ ، $i=0,1,\dots,n$ ، $P(x)$

چه اندازه به $f(x)$ نزدیک است. به عبارت دیگر اگر تابع خطا را به صورت

$$E(x)=f(x)-P(x)\ ,\qquad a\le x\le b \qquad (1)$$

تعریف کنیم یک کران بالا برای $E(x)$ چیست؟ قضیه‌ی زیر پاسخی به این سوال است.

قضیه‌ی ۲- اگر چندجمله‌ای $P(x)$، تابع $f\in C^{n+1}[a,b]$ را در نقاط $x_i\in[a,b]$ ، $i=0,1,\dots,n$

درونیابی کند، آن‌گاه خطای درونیابی عبارت است از

$$E(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c(x)) \qquad (2)$$

$\alpha=\min_{0\le i\le n} x_i$ ، $\beta=\max_{0\le i\le n} x_i$ ($c(x)$ نقطه‌ای است در بازه‌ی شامل نقاط x_i و نقطه‌ی x) ، $c(x)\in[\alpha,\beta]$

اثبات- قضیه را در حالت $n=1$ ثابت می‌کنیم. یعنی، نشان می‌دهیم که اگر تابع خطی $P(x)$ تابع $f(x)$

را در دو نقطه‌ی x_0 و x_1 که $a\le x_0\le x_1\le b$ درونیابی کند، آن‌گاه

$$E(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\,f''(c(x)) \qquad (3)$$

فرض کنید x نقطه‌ای دلخواه در بازه‌ی $[a,b]$ و از این پس ثابت باشد. اگر $x=x_0$ یا $x=x_1$ ،

آن‌گاه بنا به (۱) و (۳) حکم ثابت است. پس فرض کنید $x_0 < x < x_1$. تابع $g(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(t) = f(t) - p(t) - \frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)}E(x), \quad a \le t \le b \qquad (۴)$$

این تابع بر بازه‌ی $a \le t \le b$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم

$$g(x) = f(x) - p(x) - E(x) = 0$$
$$g(x_0) = f(x_0) - p(x_0) - 0 = 0$$
$$g(x_1) = f(x_1) - p(x_1) - 0 = 0$$

لذا بنا بر قضیه‌ی رُل، نقطه‌ای در بازه‌ی (x_0, x) مانند d_0 وجود دارد به طوری که

$$g'(d_0) = 0$$

همین طور، نقطه‌ای در بازه‌ی (x, x_1) مانند d_1 وجود دارد به طوری که

$$g'(d_1) = 0$$

حال مجدداً، قضیه‌ی رُل را برای تابع $g'(t)$ در بازه‌ی $d_0 \le t \le d_1$ به کار می‌بریم. با توجه به این قضیه، نقطه‌ای مانند $c(x)$ در بازه‌ی (d_0, d_1) وجود دارد به طوری که

$$g''(c) = 0$$

اکنون از رابطه‌ی (۴) داریم

$$g''(t) = f''(t) - p''(t) - \frac{2}{(x-x_0)(x-x_1)} E(x)$$

چون $p(t)$ خطی است، $p''(t)=0$ و از $g''(c)=0$، (۳) نتیجه می‌شود و اثبات تمام است.

تذکر- با استفاده از قضیه رُل تعمیم یافته، می‌توان فرمول خطای (۲) را برای هر n ثابت نمود.

مثال- چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه‌ی ۲ را چنان بیابید که مقادیرش در سه نقطه‌ی $x_0=0$ و $x_1=\frac{1}{6}$ و $x_2=\frac{1}{2}$ با مقادیر تابع $f(x)=\sin \pi x$ در این نقاط، برابر باشد. اگر قرار دهیم $E(x)=p(x)-f(x)$، کران بالایی برای $|E(x)|$ به دست آورید.

حل-

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$= 0 + L_1(x)\left(\frac{1}{2}\right) + L_2(x)(1)$$

$$= \frac{1}{2} L_1(x) + L_2(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} = -9x(2x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} = x(6x-1)$$

پس از جایگذاری خواهیم داشت

$$p(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

داریم

$$E(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{3!} f'''(c)$$

$$f'(x) = \pi\cos\pi x, \quad f''(x) = -\pi^2\sin\pi x, \quad f'''(x) = -\pi^3\cos\pi x$$

بنابراین

$$|E(x)| \le \frac{\pi^3}{6}\left|x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2})\right| \le \frac{\pi^3}{6}\max_{0\le x\le 0.5}\left|x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2})\right|$$

فرض کنید

$g(0.349) = 0.0097805091$

$g(0.1075) = 0.0002921$

$$g(x) = x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2}) \to g'(x) = 0 \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{12+\sqrt{(12)^2-4\times 36}}{72} = 0.349 \\ x_2 = \dfrac{12-\sqrt{(12)^2-4\times 36}}{72} = 0.1075 \end{cases}$$

و $M = \max_{0\le x\le 0.5}|g(x)|$. با استفاده از مشتق تابع g و انجام محاسبات لازم درمی‌یابیم

که $M \approx 0.0097805 < 0.01$ لذا

$$|E(x)| \le \frac{\pi^3}{6}M < \frac{\pi^3}{600}$$

$$|E(x)| \le 0.0505043383$$

تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز و $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ مقادیر تابع f در این نقاط باشند.

تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی صفر تابع f را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f[x_k] = f(x_k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n$$

و تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی اول تابع f به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \qquad k=0,1,\dots,n-1$$

همچنین طور تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی دوم به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}, \quad k=0,1,\dots,n-2$$

به طور کلی، تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی j چنین است

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+j}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, n-j$$

* تفاضلات تقسیم شده نسبت به متغیرها، متقارن است؛ یعنی برای مثال، برای دو متغیر x_0 و x_1 داریم

$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$ و برای سه متغیر x_0، x_1 و x_2 داریم:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_0, x_2, x_1] = \dots$$

مقادیر تابع $f(x) = \sin x$ (x برحسب درجه) به صورت زیر داده شده است. مقدار تقریبی $\sin 22^\circ$ را حساب کنید. همچنین کوچکترین کران را برای خطای $E(22^\circ)$ به دست آورید.

x	۲۰	۲۵	۳۰
$f(x)$	۰٫۳۴۲۰۲	۰٫۴۲۲۶۲	۰٫۵۰۰۰۰۰

تمرین ۹- ثابت کنید اگر $z_0, z_1, \dots, z_n$، ترتیب جدیدی از نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ باشد، آنگاه

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[z_0, z_1, \dots, z_n]$$

فرض کنید $f(x_i)$ ، مقادیر تابع f ، در $n+1$ نقطه‌ی متمایز x_i ، $i=0,1,2,\dots,n$ در دست باشد. چندجمله‌ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه‌ی n ، که $f(x)$ را در نقاط x_i درونیابی می‌کند، چنین است

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

چندجمله‌ای $p(x)$ ، چندجمله‌ای درونیاب نیوتن نامیده می‌شود.

قبلاً نشان دادیم که یک و تنها یک چندجمله‌ای $p(x)$ حداکثر از درجه‌ی n وجود دارد بطوری که $p(x_i)=f(x_i)$ ، $i=0,1,\dots,n$. این چندجمله‌ای را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_n$ را طوری تعیین می‌کنیم که شرط درونیابی برقرار باشد. پس

$$p(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) + 0 \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_0, x_1, x_2]$$

به طور کلی می‌توان نشان داد که $a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$. پس $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب نیوتن است و قضیه ثابت می‌شود.

تمرین ۱۰ چندجمله‌ای درونیاب نیوتن $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ را در نقاط $x_0 = 0$ ، $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ به دست آورده و کران بالای برای $|f(x) - p(x)|$ به دست آورید. (چندجمله‌ای درونیاب نیوتن)

تذکر- اگر چندجمله‌ای $P_{n-1}(x)$ تابع f را در n نقطه‌ی متمایز $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ و چندجمله‌ای $P_n(x)$ ، f را در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ درونیابی کند، آنگاه رابطه‌ی بازگشتی زیر را داریم:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

از این خاصیت نتیجه می‌شود که اگر مقادیر یک تابع را به صورت جدولی داشته باشیم و چندجمله‌ای درونیاب نیوتن متناظر را به دست آورده باشیم، آنگاه با افزودن یک نقطه به انتهای جدول، چندجمله‌ای درونیاب جدید را می‌توان با استفاده از اطلاعات قبلی به دست آورد. این خاصیت در چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ وجود ندارد.

اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$f[x_0, x_0] = \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

همین طور تعریف می‌کنیم

(می‌توان نشان داد)

$$f[x_0, x_0, x_0] = \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0+h, x_0+2h] = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

خطا در چندجمله‌ای درونیاب نیوتن

با توجه به یکتایی چندجمله‌ای درونیاب، برای تابع مفروض f، خطای چندجمله‌ای درونیاب نیوتن، همان خطای چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ می‌باشد.

تفاضلات متناهی

فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و مقادیر آن در نقاط مساوی الفاصله ی

$$x_i = a + ih \ , \quad i = 0, 1, \dots, n \ , \quad h = \frac{b-a}{n}$$

معلوم باشد. تعریف می‌کنیم

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \ , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$
$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \ , \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

و به طور کلی

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i \ , \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \ , \quad i = 0, 1, \dots, n-k-1$$

اعداد $\Delta^k f_i$ را تفاضلات پیشروی تابع f می‌نامند.

متناظراً تفاضلات پسروی تابع f به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \ , \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} \ , \quad i = 2, 3, \dots, n$$

و به طور کلی

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1} \quad , k=0,1,\dots,n-1, \quad i=k+1,k+2,\dots,n$$

دو جدول زیر جدول های تفاضلات تابع f (برای $n=3$) هستند.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

x	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

قضیه ۴- با مفروضات قضیه ۳ در مورد تابع f، داریم

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] = \frac{\Delta^j f_k}{j!\, h^j}$$

اثبات- اثبات به استقرا بر روی j است. به ازای $j=1$، داریم

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

که نشان می‌دهد قضیه برای $j=1$ برقرار است. فرض کنید قضیه برای عدد صحیح و مثبت $j=m$ برقرار باشد. برای $j=m+1$ داریم

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}, x_{k+m+1}] =$$

$$= \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+m+1}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m}]}{x_{k+m+1} - x_k}$$

$$= \frac{\frac{\Delta^m f_{k+1}}{m!\,h^m} - \frac{\Delta^m f_k}{m!\,h^m}}{(m+1)h} = \frac{\Delta^{m+1} f_k}{(m+1)!\,h^{m+1}}$$

پس، بنا به اصل استقرا، قضیه برای همه‌ی اعداد صحیح مثبت برقرار است.

چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن

چندجمله‌ای درونیاب نیوتن به صورت زیر است:

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

که در آن x_iها، لزوماً هم فاصله نیستند. حال اگر این نقاط هم‌فاصله باشند، بنا بر قضیه‌ی ۴ داریم:

$$f[x_0,x_1] = \frac{\Delta f_0}{h}, \quad f[x_0,x_1,x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}, \quad \ldots, \quad f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$

قرار می‌دهیم

$$\frac{x-x_0}{h} = s$$

پس

$$(x-x_0) = sh$$
$$(x-x_1) = (x-x_0-h) = sh-h = (s-1)h$$
$$(x-x_2) = (x-x_1-h) = (s-1)h-h = (s-2)h$$
$$\vdots$$
$$(x-x_{n-1}) = (s-n+1)h$$

بنابراین، چندجمله‌ای درونیاب نیوتن به شکل زیر درمی‌آید

$$p(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$P(x_s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

که در آن نماد ( ) ، ضریب دوجمله‌ای نیوتن است.

مشابهاً می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن به شکل زیر است

$$P(x_s) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

که در آن

$$\frac{x - x_n}{h} = s$$

* برای درونیابی در نقاط ابتدای جدول از چندجمله‌ای درونیاب پیشرو و برای درونیابی در نقاط انتهای جدول از چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن استفاده می‌شود.

خطا در چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن

قبلاً نشان دادیم که خطا در چندجمله‌ای درونیاب نیوتن (لاگرانژ) چنین است

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c(x))$$

حال اگر x_iها هم فاصله باشند و قرار دهیم $s = \frac{x-x_0}{h}$ خواهیم داشت:

$$E(x_s) = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(c(x_s))$$

تمرین ۱۱ـ چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را با استفاده از فرمول تفاضلات پیشروی نیوتن به دست

آورید.

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	1	3	8

درونیابی با اسپلاین‌ها

تعریف – تابع S تعریف شده بر بازه‌ی $[a,b]$ یک اسپلاین درجه‌ی k با گره‌های $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ نامیده می‌شود، هرگاه

(الف) – در هر زیربازه‌ی $[x_i,x_{i+1}]$ ، $i=0,1,\dots,n-1$ ، S یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی k باشد.

(ب) – $S, S', S'', \dots, S^{(k-1)}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشند، به عبارت دیگر $S\in C^{k-1}[a,b]$.

پس، یک اسپلاین درجه‌ی k تابعی است قطعه به قطعه چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی k که $k-1$ بار بر $[a,b]$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است. از این رو می‌نویسیم

$$S(x)=S_i(x)\ ,\ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

که هر مؤلفه‌ی S_i یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی k است.

مثال –

(الف)

$$S(x)=\begin{cases} 7x+4 & -1\le x<0 \\ 4-4x & 0\le x\le 3 \end{cases}$$

تابع تعریف شده در $x=0$ پیوسته است و هر دو مؤلفه‌ی آن خطی است و لذا یک اسپلاین خطی بر $[-1,3]$ می‌باشد.

(ب)

$$S(x) = \begin{cases} x^4 + 5x^2 + 8 & -5 \leq x \leq 0 \\ 5x^4 + 7x^3 + 2x + 9 & 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

تابع تعریف شده در (ب)، اسپلاین نیست، زیرا در $x=0$ پیوسته نیست.

درونیابی با اسپلاین‌های درجه‌ی سه

اغلب برای درونیابی از اسپلاین‌های درجه‌ی سه استفاده می‌شود. بنابراین، فرض کنید مقادیر یک تابع f در $n+1$ نقطه‌ی (گره) $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ داده شده باشد و برابر f_i، $i=0,1,\dots,n$ باشد.

می‌خواهیم اسپلاین درجه‌ی ۳، $S(x)$ را به دست آوریم به طوری که

$$S(x_i) = f(x_i), \quad i=0,1,\dots,n$$

و علاوه بر این، تابع S شرایط زیر را داشته باشد

$$S(x) = S_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i=0,1,\dots,n-1$$

که $S_i(x)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ (حداکثر از درجه‌ی ۳) است.

در گره x_i که مشترک در دو بازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ و $[x_i, x_{i+1}]$ است برای پیوستگی و هموار بودن اسپلاین باید برای $i=1,2,\dots,n-1$ شرایط زیر برقرار باشند

(الف) $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$

(ب) $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$

(ج) $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$

از آنجایی که در بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ ، $s''_i(x)$ یک تابع خطی است ، بنابر فرمول لاگرانژ داریم:

$(x_i, s''_i(x_i))$

$(x_{i+1}, s''_i(x_{i+1}))$

$$s_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} s''_i(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} s''_i(x_{i+1}) \quad , x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (۱)$$

قرار می‌دهیم

$$m_i = \frac{1}{6} s''_i(x_i) , \quad h_i = x_{i+1} - x_i \qquad (۲)$$

پس

$$s''_i(x) = -\frac{6(x - x_{i+1})}{h_i} m_i + \frac{6(x - x_i)}{h_i} m_{i+1} \qquad (۳)$$

با دوبار انتگرال‌گیری داریم

$$s'_i(x) = -\frac{3(x - x_{i+1})^2}{h_i} m_i + \frac{3(x - x_i)^2}{h_i} m_{i+1} + c_i \qquad (۴)$$

$$s_i(x) = -\frac{(x - x_{i+1})^3}{h_i} m_i + \frac{(x - x_i)^3}{h_i} m_{i+1} + c_i(x - x_i) + d_i \qquad (۵)$$

از معادله‌ی بالا و شرط درونیابی نتیجه می‌شود که

$$s_i(x_i) = h_i^2 m_i + d_i = f_i$$

$$s_i(x_{i+1}) = h_i^2 m_{i+1} + c_i h_i + d_i = f_{i+1}$$

بنابراین

$$\begin{cases} d_i = f_i - h_i^2 m_i \\ c_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + h_i(m_i - m_{i+1}) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \qquad (۶)$$

اگر در رابطه‌ی (۶) m_i و m_{i+1} معلوم باشند ، آن‌گاه $S(x)$ در بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ به صورت (۵) است

که c_i و d_i با روابط (۶) داده می‌شوند.

برای یافتن این کمیت ها، از شرط پیوستگی مشتق در نقاط گره ای یعنی شرط (ب) استفاده می کنیم.

پس از (۴) داریم

$$S'_{i-1}(x) = -\frac{3(x-x_i)^2}{h_{i-1}} m_{i-1} + \frac{3(x-x_{i-1})^2}{h_{i-1}} m_i + C_{i-1} \quad , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (7)$$

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$$

حال از (۴)، (۶)، (۷) و شرط (ب) پس از اختصار نتیجه می شود که

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} = f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (8)$$

دستگاه (۸) یک دستگاه خطی شامل $n-1$ معادله و $n+1$ مجهول $m_0, m_1, \ldots, m_n$ است. برای آن که تعداد معادلات و مجهولات برابر باشند دو معادله ی دیگر لازم است. این دو معادله را معمولاً به یکی از سه طریق زیر تعریف می کنند:

(الف) $m_0 = m_n = 0$ ، یعنی $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. در این صورت، اسپلاین را اسپلاین مکعبی طبیعی می نامند.

(ب) اسپلاین را طوری تعیین می کنیم که $S'(a) = f'(a)$ و $S'(b) = f'(b)$. در این صورت اسپلاین را مقید می نامند. البته در این حالت $f'(a)$ و $f'(b)$ مفروض هستند.

(پ) $S^{(k)}(a) = S^{(k)}(b)$ ، $k = 0, 1, 2$. در این صورت، اسپلاین را متناوب می نامند.

توجه کنید که در این حالت، شرط $f(a)=f(b)$ لزوماً باید برقرار باشد.

در حالت (الف)، یعنی اسپلاین طبیعی، دستگاه (۸) یک دستگاه سه قطری به شکل زیر است

$$Am=b$$

$$A=\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$m=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1] \\ f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}] \end{bmatrix}$$

چون ماتریس ضرایب، یک ماتریس غالب قطری اکید است، این دستگاه دارای جواب یکتا می‌باشد. در این صورت $S(x)$ در بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ به طور یکتا از (۵) و (۶) به دست می‌آید.

اسپلاین طبیعی در حالت خاص

اگر گره‌ها در بازه‌ی $[a,b]$ هم فاصله باشند و $h=x_{i+1}-x_i$ ، $\forall i$ ، آنگاه دستگاه (۸) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=2f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]=\frac{1}{h^2}\Delta^2 f_{i-1}\ ,\quad i=1,2,\dots,n-1 \qquad (9)$$

مثال ـ مقادیر تابع f به صورت جدول زیر در دست است

x	-1	0	1
$f(x)$	1	2	-1

معادلات اسپلاین مکعبی طبیعی تابع f را در گره های $x_0=-1$ ، $x_1=0$ و $x_2=1$ در بازه‌ی مرکب، به دست آورید.

حل ـ در اینجا $n=2$ و گره ها هم فاصله هستند و $h=1$. لذا دستگاه (۹) به صورت زیر در می‌آید.

$$\left[\ m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=2f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]=\frac{1}{h^2}\Delta^2 f_{i-1}\ ,\quad i=1,2,\dots,n-1\ \right] \qquad (9)$$

$$m_0+4m_1+m_2=\Delta^2 f_0$$

برای اسپلاین طبیعی داریم: $m_0=m_2=0$ پس

$$4m_1=\Delta^2 f_0$$

$$\Delta^2 f_0=f_2-2f_1+f_0=-1-4+1=-4$$

لذا $m_1=-1$. پس از معادلات (۶) نتیجه می‌شود

$$\left[\begin{cases} d_i=f_i-h_i^2 m_i \\ c_i=\dfrac{f_{i+1}-f_i}{h_i}+h_i(m_i-m_{i+1}),\quad i=0,1,\dots,n-1 \end{cases}\right] \qquad (6)$$

$$d_0=f_0-h^2 m_0=f_0=1$$

$$c_0=\frac{f_1-f_0}{h}+h(m_0-m_1)=\frac{2-1}{1}+(0+1)=1+1=2$$

$$d_1 = f_1 - h^2 m_1 = 2 + 1 = 3$$

$$c_1 = \frac{f_2 - f_1}{h} + h(m_1 - m_2) = \frac{-1-2}{1} + (-1-0) = -3 - 1 = -4$$

حال از معادله (۵) داریم

$$s_0(x) = -\frac{(x-x_1)^3}{h} m_0 + \frac{(x-x_0)^3}{h} m_1 + c_0(x-x_0) + d_0$$

$$= (x+1)^3(-1) + 2(x+1) + 1$$

$$= -(x+1)^3 + 2(x+1) + 1 = -(x+1)^3 + 2x + 3$$

$$s_1(x) = -\frac{(x-x_2)^3}{h} m_1 + \frac{(x-x_1)^3}{h} m_2 + c_1(x-x_1) + d_1$$

$$= -(x-1)^3(-1) + (x-0)^3(0) + (-4)(x-0) + 3$$

$$= (x-1)^3 - 4x + 3$$

$$s(x) = \begin{cases} -(x+1)^3 + 2x + 3 & -1 \le x < 0 \\ (x-1)^3 - 4x + 3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

تمرین ۱۲- مقادیر تابع f به صورت جدول زیر در دست است

x	-1	0	1	3
$f(x)$	0	4	5	8

(الف) معادلات اسپلاین مکعبی طبیعی تابع f را در گره‌های $x_0 = -1$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ و $x_3 = 3$ درونیابی می‌کند به دست آورید. (ب) تقریب اسپلاین مکعبی مقید این تابع را به دست آورید.

خطا در اسپلاین درونیاب

قضیه- فرض کنید $f \in C^4[a,b]$. آن‌گاه

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x) \right| \leq C h^{4-k} \quad , k=0,1,2$$

که $h = \max\{h_i\}$ و C ثابتی است مستقل از h که تنها به تابع f وابسته است.

این قضیه بیان می‌کند که وقتی $h \to 0$، آن‌گاه نه تنها $S(x)$ به $f(x)$ می‌گراید، بلکه مشتقات S نیز به مشتقات f می‌گرایند.

برازش داده‌ها

فرض کنید (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ... و (x_n,y_n) یک مجموعه از جفت مشاهدات باشند. فرض کنید x_iها دقیق محاسبه شده باشند ولی y_iها دارای خطا باشند. ساده‌ترین منحنی مناسب داده‌ها، خط راست به صورت

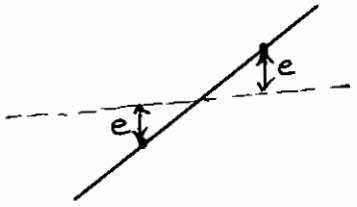
$$Y = a + bx \qquad (*)$$

است. این روش، روش حداقل مربعات گاوس نامیده شده است. بنابراین، مسأله تعیین a و b می‌باشد. می‌خواهیم بهترین خط راست به صورت $(*)$ را که مناسب داده‌ها باشد به دست آوریم. یکی از شرایط برازش یک منحنی به داده‌ها این است که فرآیند مبهم نباشد. همچنین می‌خواهیم انحراف‌های نقاط از خط به نوعی مینیمم باشند. انحراف‌ها به وسیله‌ی فواصل نقاط تا خط سنجیده می‌شوند. ابتدا فرض می‌کنیم بتوان انحراف‌ها را با

مینیمم ساختن مجموع آنها مینیمم ساخت ولی این یک محک مناسب نیست. حالت فقط دو نقطه را در نظر بگیریم.

واضح است که بهترین خط، خطی است که از دو نقطه می‌گذرد ولی هر خطی که از نقطهٔ میانی پاره خط واصل بین آنها

بگذرد، مجموع خطاهای مساوی صفر خواهد داشت.



چطور می‌توان مجموع اندازه‌های خطاها را مینیمم ساخت؟ این نیز کافی نیست و این امر را حالت سه نقطه

نشان می‌دهد. فرض کنید دو نقطه، مقدار x یکسان داشته باشند (که یک وضعیت غیرعادی نیست؛

زیرا آزمایش‌ها اغلب تکرار می‌شوند). واضح است که بهترین خط از متوسط آزمون‌های تکرار شده می‌گذرد.

امّا هر خط که بین خطوط نقطه‌چین قرار می‌گیرد همان مجموع اندازه‌های فواصل قائم را خواهد داشت. ما یک نتیجهٔ بدون

ابهام می‌خواهیم. در نتیجه نمی‌توانیم از این به عنوان مبنای کارهایمان استفاده نماییم.

ممکن است این محک را بپذیریم که اندازه‌ی (قدر مطلق) خطای قائم را مینیمم سازیم (محک مینیماکس). این محک

نیز نامناسب است. زیرا تابع قدر مطلق در مبدا (0,0) مشتق ندارد. محک متداول، مینیمم سازی مجموع

مربعات خطاهاست که آن را «اصل کمترین مربعات» می‌نامند. روش کمترین مربعات، علاوه بر دادن

نتیجهٔ منحصر بفرد برای یک مجموعهٔ داده شده از داده ها ، با اصل همسانی ماکزیمم در آمار مطابقت دارد.

(اگر خطاهای سنجش ، توزیع نرمال داشته و انحراف معیار برای تمام داده ها ثابت باشد ، می توان نشان داد

که خط معین شده به وسیلهٔ مینیمم سازی مجموع مربعات ، دارای شیب و عرض از مبدایی است که همسانی

رویداد ماکزیمم دارند.)

محک کمترین مربعات ایجاب می کند که

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b\, x_i)^2$$

مینیمم باشد. در مینیمم S ، دو مشتق جزئی $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$ هر دو صفرند. بنابراین داریم

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + b x_i)) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - (a + b x_i)) = 0$$

دستگاه دو معادله ی فوق را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

این دو معادله را معادلات نرمال می نامند. از حل دستگاه اخیر ، a و b و در نتیجه خط کمترین توان های دوم

به دست می آید.

مثال - دانشجویان در آزمایشگاه فیزیک اثر دما را روی مقاومت آزمایش کردند. نتایج حاصل به صورت جدول زیر ثبت شده است. می‌خواهیم بهترین خط که معادله‌ی مقاومت برحسب دما را نشان دهد را به دست آوریم.

T (سانتی‌گراد)	۲۰٫۵	۳۲٫۷	۵۱٫۰	۷۳٫۲	۹۵٫۷
R (اهم)	۷۶۵	۸۲۶	۸۷۳	۹۴۲	۱۰۳۲

$$\boxed{R = a + bT}$$

حل -

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i + b(5) = \sum_{i=1}^{5} y_i \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \end{cases}$$

$$n = 5, \quad \sum_{i=1}^{5} T_i = ۲۷۳٫۱, \quad \sum_{i=1}^{5} T_i^2 = ۱۸۶۰۷٫۲۷, \quad \sum_{i=1}^{5} R_i = ۴۴۳۸$$

$$\sum_{i=1}^{5} T_i R_i = ۲۵۴۹۴۲٫۵$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{cases} ۲۷۳٫۱\, a + 5b = ۴۴۳۸ \\ ۱۸۶۰۷٫۲۷ a + ۲۷۳٫۱\, b = ۲۵۴۹۴۲٫۵ \end{cases}$$

$$b = ۳٫۳۹۵, \quad a = ۷۰۲٫۲$$

بنابراین

$$R = ۷۰۲٫۲ + ۳٫۳۹۵T$$

برازش داده‌ها با چندجمله‌ای

روش کمترین توان‌های دوم را می‌توان برای برازش توسط چندجمله‌ای‌ها توسعه داد. فرض کنید داده‌ها

$$\{(x_i, y_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

باشند و بخواهیم بهترین چندجمله‌ای مناسب داده‌ها به صورت

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

را بیابیم که $n > m+1$. همان طور که در مورد خط راست دیدیم باید تابع

$$E(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - P(x_i)|^2$$

مینیمم شود. پس باید

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0 , \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

و از این جا نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i) = 0 , \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

یا

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{k+j} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i , \quad k = 0, 1, \ldots, m \qquad (*)$$

معادلات (*) معادلات نرمال هستند که یک دستگاه خطی شامل $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول $a_0, a_1, \ldots, a_m$ است. این دستگاه به شکل ماتریسی چنین است

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & & & & \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ماتریس ضرایب این دستگاه متقارن است. می‌توان نشان داد که اگر x_iها متمایز باشند، این دستگاه، دارای جواب یکتا است (چرا؟) و لذا می‌توان روش حذفی گاوس را برای حل آن به کار برد.

تمرین ۱۳- فرض کنید یک مهندس الکترونیک، داده های تجربی زیر و متشکل از اندازه‌ی جریان در یک سیم الکتریکی برای ولتاژهای مختلف را جمع آوری کرده باشد.

ولتاژ = x	۰	۲	۵	۷	۹	۱۳	۲۴
جریان = y	۰	۶	۷٫۹	۸٫۵	۱۲	۲۱٫۵	۳۵

می‌خواهیم معادلات نرمال را برای این داده‌ها متناظر با بهترین برازش داده‌ها توسط (الف) یک خط راست و (ب) چندجمله ای درجه‌ی دو به دست آوریم.

برازش نمایی

گاهی داده‌های تجربی (x_i, y_i) طوری هستند که رابطه‌ی بین x_iها و y_iها نمایی است. به عبارت دیگر تابعی که این کمیت‌ها را به هم ربط می‌دهد نمودارش نزدیک به نمودار تابعی به صورت

$$y = ce^{bx} \qquad (*)$$

است. در این حالت نیز می‌توان با روش کمترین توان های دوم، بهترین منحنی به صورت (*) که داده‌ها را برازش کند، به دست آورد. امّا در این حالت، دستگاه معادلات حاصل برای یافتن b و c غیرخطی است. برای رفع این مشکل می‌توان از فرآیند خطی سازی استفاده کرد. به این صورت که با گرفتن لگاریتم از رابطه‌ی (*) خواهیم

داشت

$$\ln y = \ln c + b x$$

حال قرار می‌دهیم

$$Y = \ln y \ , \ a = \ln c$$

در این صورت خواهیم داشت

$$Y = a + b x \qquad (**)$$

که معادله‌ی یک خط راست در دستگاه تبدیل یافته است. اکنون روش کمترین توان‌های دوم را برای یافتن بهترین خط به صورت (**) که داده‌های تبدیل یافته $(x_i, \ln y_i)$ را برازش کند به کار می‌بریم تا a و b و از آنجا منحنی به صورت (*) به دست آید.

تقریب توابع

تابع $y = e^x$ $\quad 0 \le x \le 1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم این تابع را با یک چندجمله‌ای درجه‌ی دو به صورت

$$P(x) = a + bx + cx^2$$

تقریب بزنیم. باز هم می‌توان روش کمترین توان‌های دوم را به کار برد. اگر $[0,1]$ را به $n=1$ قسمت مساوی تقسیم کنیم و n نقطه‌ی x_i ($i=1,2,\dots,n$) را در این بازه انتخاب کنیم، آن‌گاه n داده به صورت نقاط (x_i, y_i) که $y_i = e^{x_i}$، خواهیم داشت. بنابر آنچه در مورد برازش چندجمله‌ای دیدیم a، b و

که از دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum e^{x_i} \\ \sum x_i e^{x_i} \\ \sum x_i^2 e^{x_i} \end{bmatrix}$$

طرفین دستگاه معادلات بالا را بر n تقسیم نموده و سپس وقتی $n \to \infty$، با توجه به تعریف انتگرال

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} e^x \, dx$$

با محاسبه‌ی انتگرال‌های دو طرف، خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه خواهیم داشت

$$a = 1{,}0130 \,, \quad b = 0{,}8513 \,, \quad c = 0{,}8390$$

لذا

$$P(x) = 1{,}0130 + 0{,}8513x + 0{,}8390x^2$$

با رسم نمودار معادلات $y = e^x$ و $y = 1{,}0130 + 0{,}8513x + 0{,}8390x^2$ در $[0,1]$

میزان دقت روش مشخص می‌شود.

تمرین های فصل دوم

۱- مقادیر تابع $f(x) = \sin x$ (x بر حسب درجه) بصورت زیر داده شده است. مقدار تقریبی $\sin 24^\circ$ را حساب کنید. همچنین کران بالایی برای قدرمطلق خطای آن $|E(24^\circ)|$ به دست آورید.

x	۲۰	۲۵	۳۰
$f(x)$	۰٫۳۴۲۰۲	۰٫۴۲۲۶۲	۰٫۵۰۰۰۰

۲- نشان دهید تابع تعریف شده بصورت زیر یک اسپلاین درجه‌ی ۲ است.

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 + 2(x-1) + 7(x-1)^2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

۳- مقادیر a، b، c و d را طوری تعیین کنید که تابع

$$S(x) = \begin{cases} 4 + 3x - 8x^3 & 0 \le x \le 1 \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

یک اسپلاین مکعبی با گره‌های ۰، ۱ و ۲ باشد و $\int_0^2 (S''(x))^2 dx$ مینیمم باشد.

۴- ضرایب تابع $g(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x$ را طوری تعیین کنید که نمودار g از نزدیک نقاط داده شده در جدول زیر بگذرد.

x	۰	۱	۲	۳
y	۵	۵۴	۹۹	۱۸۱

۵- بهترین منحنی به شکل $y = ce^{ax}$ بیابید که داده‌های جدول زیر را برازش کند.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۳	۸	۲۲	۶۰

۶- با روش خطی سازی، بهترین منحنی (تابع هایپربولیک) به صورت

$$y = \frac{a}{x} + b$$

که داده های زیر را برازش کند، بیابید.

x	۰/۵	۰/۸	۱/۲	۱/۵
y	۷/۰	۶/۰	۵/۸	۵/۶

۷- با روش خطی سازی، بهترین منحنی (تابع هایپربولیک) به صورت

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

که داده های زیر را برازش کند بیابید.

x	-۱	۰	۰/۵	۲	۳
y	۱	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۶

قضیه‌ی رُل - فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$،

آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$.

کاربرد قضیه‌ی رُل

مثال - نشان دهید معادله‌ی $x^3+2x+a=0$ که در آن a یک عدد حقیقی است، بیش از یک ریشه‌ی حقیقی ندارد.

حل - فرض کنید معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی x_1 و x_2 باشد. تعریف می‌کنیم

$$f(x)=x^3+2x+a$$

داریم $f(x_1)=f(x_2)=0$. لذا بنابر قضیه رُل، چون f تابعی پیوسته بر $[x_1,x_2]$ و مشتق‌پذیر بر (x_1,x_2) می‌باشد، پس عددی مانند $c\in(x_1,x_2)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$. امّا

$$f'(x)=3x^2+2\geq 2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

پس برای هر عدد حقیقی، از جمله تمام مقادیر (x_1,x_2)، $f'(x)\neq 0$. این تناقض نشان می‌دهد که معادله حداکثر یک ریشه‌ی حقیقی دارد. (در حقیقت، بنابر قضیه‌ی اساسی جبر، دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.)

برای اینکه نشان دهیم معادله‌ی $f(x)=0$ روی $[a,b]$ دارای ریشه‌ی منحصر به فرد است، می‌توانیم از یکی از راه‌های زیر استفاده کنیم:

۱- رسم منحنی $y=f(x)$ روی $[a,b]$ و مشاهده‌ی عینی این مطلب.

۲- تبدیل معادله‌ی $f(x)=0$ به $y_1(x)=y_2(x)$ و رسم منحنی‌های y_1 و y_2 در $[a,b]$. درصورتی که نقطه‌ی تقاطع y_1 و y_2 در $[a,b]$ منحصر به فرد باشد، معادله‌ی $f(x)=0$ نیز در $[a,b]$ ریشه‌ی منحصر به فرد خواهد داشت.

۳- استفاده از قضیه‌ی رُل.

فصل سوم: معادلات غیرخطی و حل عددی

در این فصل، هدف، تعیین یک یا چند ریشه از معادله‌ی

$$f(x)=0$$

می‌باشد. در اغلب موارد، یافتن جواب واقعی امکان‌پذیر نیست و از این رو باید از روش‌های عددی استفاده شود.

تعریف- فرض کنیم $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ به طوری که $g(\alpha)\neq 0$ و $m\in\mathbb{N}$. اگر $m>1$ می‌گوییم α ریشه‌ی تکراری معادله‌ی $f(x)=0$ است و مرتبه‌ی تکرار آن m است و اگر $m=1$، α را ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ می‌نامیم.

روش دوبخشی (منصف- تنصیف- Bisection)

فرض می‌کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$. در این صورت αای بر بازه‌ای (a,b) وجود دارد به طوری که $f(\alpha)=0$.

در روش تنصیف (و نیز در سایر روش‌های بعدی) فرض می‌کنیم ریشه‌ی α منحصر به فرد است. در این روش دنباله‌ای مانند $\{x_n\}_n$ می‌سازیم به طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$.

در روش دوبخشی بازه‌ی $[a,b]$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. ریشه‌ی α در یکی از این دو قسمت قرار دارد. قسمتی که ریشه در آن قرار دارد را اختیار می‌کنیم و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم. در هر مرحله، نقطه‌ی وسط بازه‌ای را که ریشه در آن قرار دارد به عنوان تقریبی از ریشه‌ی α در نظر

می‌گیریم که هرچه تعداد تکرارها بیشتر شود این تقریب، دقیق‌تر می‌شود. البته این عمل را نمی‌توان بی‌نهایت بار انجام داد؛ بلکه معیارهایی برای توقف الگوریتم در نظر می‌گیریم که بعداً شرح داده می‌شوند.

مثال- برای تعیین تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $x+\cos x=0$ که در بازه‌ی $(-1,0)$ قرار دارد، از روش منصف استفاده کنید و معیار توقف را $|x_n-\alpha|<0.01$ در نظر بگیرید.

n	a	b	c	$sf(a)$	$sf(b)$	$sf(c)$
۱	-1	0	-0.5	$-$	$+$	$+$
۲	-1	-0.5	-0.75	$-$	$+$	$-$
۳	-0.75	-0.5	-0.625	$-$	$+$	$+$
۴	-0.75	-0.625	-0.6875	$-$	$+$	$+$
۵	-0.75	-0.6875	-0.7188	$-$	$+$	$+$
۶	-0.75	-0.7188	-0.7344	$-$	$+$	$+$
۷	-0.75	-0.7344	-0.7422	$-$	$+$	

$$f(x)=x+\cos x\ ,\quad f(-1)=-1+\cos(-1)<0\ ,\quad f(0)=0+\cos(0)=1>0$$

$$f(-0.5)=-0.5+\cos(-0.5)>0\ ,\quad f(-0.75)=-0.75+\cos(-0.75)<0$$

$$f(-0.625)=-0.625+\cos(-0.625)>0\ ,\quad f(-0.6875)=-0.6875+\cos(-0.6875)>0$$

$$f(-0.7188)=-0.7188+\cos(-0.7188)>0\ ,\quad f(-0.7344)=-0.7344+\cos(-0.7344)>0$$

$$|x_n-\alpha|=|-0.7422-\alpha|<\frac{|b-a|}{2}=\frac{|-0.7344+0.75|}{2}=0.0078<0.01$$

در قضیه‌ی زیر، نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده توسط روش منصف به ریشه‌ی α همگرا است. یعنی، روش منصف، یک روش همیشه همگرا است.

قضیه - دنباله‌ی $\{x_n\}$ که از الگوریتم روش منصف حاصل می‌شود، به ریشه‌ی α همگرا است.

برهان - در تکرار اول، ریشه‌ی α یا در بازه‌ی (a, x_1) قرار دارد یا در بازه‌ی (x_1, b). در هر دو صورت، فاصله‌ی ریشه‌ی α از نقطه‌ی x_1 از نصف طول بازه‌ی $[a, b]$ کمتر است. یعنی

$$|x_1 - \alpha| < \frac{b-a}{2}$$

در تکرار دوم، x_2 یا نقطه‌ی وسط (a, x_1) است و یا نقطه‌ی وسط (x_1, b). طول هر دو بازه‌ی (a, x_1) و (x_1, b) مساوی $\frac{b-a}{2}$ است و فاصله‌ی ریشه‌ی α از نقطه‌ی x_2 از نصف این مقدار یعنی از $\frac{b-a}{4}$ کمتر است. پس

$$|x_2 - \alpha| < \frac{b-a}{2^2}$$

بنابراین، پس از انجام n تکرار از روش تنصیف خواهیم داشت:

$$0 < |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \qquad (*)$$

در نتیجه

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n}$$

امّا $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی فشار داریم: $\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$ و یا $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. یعنی $\{x_n\}$ به α همگرا است.

نامساوی (*) یک کران برای خطای مطلق تقریب x_n از ریشه‌ی α به دست می‌دهد.

* توجه کنید که این کران خطا، پیش از محاسبه‌ی x_n، قابل محاسبه است. از این رو، کران خطای $\frac{b-a}{2^n}$ را یک «کران خطای پیشین» برای تقریب x_n از ریشه‌ی α می‌نامیم.

* فرض کنید بخواهیم تعداد تکرارهای الگوریتم روش منصف را تعیین کنیم، به گونه‌ای که خطای مطلق ریشه‌ی محاسبه‌شده از مقدار از قبل تعیین شده‌ی ε کمتر باشد. یعنی: $|x_n-\alpha|<\varepsilon$. برای این منظور کافی است داشته باشیم:

$$\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon$$

$$2^{-n}\le\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$-n\ln 2\le \ln\varepsilon-\ln(b-a)$$

$$n\ge\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}$$

بنابراین، اگر $n=\left[\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]+1$، آنگاه

$$|x_n-\alpha|\underset{\text{(اکید)}}{<}\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon$$

* برقراری نامساوی (*) یک شرط کافی برای آن است که خطای مطلق x_n از مقدار ε کمتر باشد، ولی این شرط همیشه لازم نیست.

معیارهای توقف برای روش‌های این فصل

الف) اگر $\varepsilon > 0$ عدد کوچک مفروضی باشد، محاسبه‌ی مقادیر تقریبی x_n را تا جایی ادامه می‌دهیم که نامساوی $|f(x_n)| < \varepsilon$ برقرار باشد.

ب) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ و x_n را به عنوان تقریبی از ریشه‌ی α در نظر می‌گیریم. اگر α، خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد، عملیات را وقتی متوقف می‌کنیم که $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \varepsilon$.

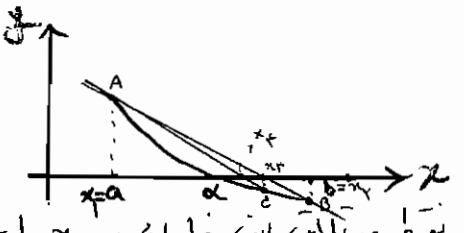
ج) $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ (برای روش منصف، از این شرط، استفاده می‌کنیم.)

د) گاهی اوقات از ما خواسته می‌شود که اجرای الگوریتم را پس از انجام m تکرار، متوقف کنیم و x_m را به عنوان تقریب مطلوب در نظر بگیریم.

درونیابی یا روش نابجایی (False Position)

برای تعیین ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$، یکی دیگر از روش‌های تکراری، درونیابی خطی، بین دو نقطه‌ی a و b است به طوری که $f(a)f(b)<0$ یعنی α یکی از ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ بین دو مقدار a و b قرار دارد. در این روش، خط واصل بین $A=(a,f(a))$ و $B=(b,f(b))$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



نقطه‌ی تلاقی این خط با محور xها، جواب معادله در این تکرار خواهد بود.

بنابراین داریم

$$y=0 \rightarrow x=x_3$$

$$-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}=x_3-a$$

$$x_3=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$$

سپس یکی از بازه های $[a,x_3]$ یا $[x_3,b]$ را برحسب اینکه ریشه در کدام بازه باشد، انتخاب می‌کنیم.

بنابراین با ادامه‌ی روند فوق داریم:

$$x_4=x_1-\frac{x_3-x_1}{f(x_3)-f(x_1)}f(x_1)$$

این روند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که $|f(x_n)|<\varepsilon$. بنابراین فرمول کلی روش به شکل زیر خواهد بود

$$x_n=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

* ویژگی مهم این روش، همگرایی تضمین شده‌ی آن است و می‌تواند جایگزین خوبی برای روش منصف باشد. البته تعداد عملیات آن از روش منصف بیشتر است.

* در این روش برخلاف روش منصف، وقتی تعداد تکرارها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، ممکن است طول بازه‌ها به سمت صفر میل نکند. اما می‌توان نشان داد که برای هر تابع پیوسته‌ی $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ به طوری که $f(a)f(b)<0$، این روش نیز همگراست.

* **تمرین:** ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^3+x^2-3x-3=0$ را با روش نایجایی به دست آورید. ($\varepsilon=10^{-3}$)

روش تکرار نقطه‌ی ثابت

تعریف - فرض کنید تابع f در $[a,b]$ تعریف شده باشد. اگر x_0 ای در این بازه باشد به طوری که $f(x_0)=x_0$، آن‌گاه x_0 را نقطه‌ی ثابت تابع $f(x)$ می‌نامند.

مثال - تابع $f(x)=x^3-8x+10$ را در نظر بگیریم. برای این تابع داریم $f(2)=2$. پس $x_0=2$ یک نقطه‌ی ثابت این تابع است.

- فرض کنید $\alpha\in[a,b]$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ باشد. در روش تکرار نقطه‌ی ثابت برای تعیین α، ابتدا معادله را به صورت $x=g(x)$ می‌نویسیم، یعنی تابع g را طوری تعریف می‌کنیم که اگر $f(\alpha)=0$ آن‌گاه $g(\alpha)=\alpha$ و برعکس. در این صورت، یافتن ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$، معادل یافتن نقطه‌ی ثابت تابع g است.

برای به دست آوردن نقطه‌ی ثابت g، یعنی α، نقطه‌ی x_0 را به عنوان تقریبی برای آن انتخاب نموده و دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_{n+1}=g(x_n)\quad , \quad n=0,1,\dots \qquad (1)$$

تحت شرایط مناسب، این دنباله دارای حد است و

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$$

به عبارت دیگر، حد دنباله، نقطه‌ی ثابت g یا ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است.

شرایط تابع g

قضیه‌ی ۲- (الف) فرض کنید تابع g در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\in[a,b]$، یعنی تابع g بازه‌ی $[a,b]$ را به خودش نقش کند.

(ب) عددی مانند $0<k<1$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|g'(x)|\leq k<1,\quad \forall x\in[a,b]$$

در این صورت $g(x)$ دارای یک و تنها یک نقطه‌ی ثابت $\alpha\in[a,b]$ است و به ازای هر نقطه‌ی آغازین $x_0\in[a,b]$، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با (۱) همگرا به α است.

اثبات- اگر $g(a)=a$ یا $g(b)=b$، آنگاه g دارای نقطه‌ی ثابت a یا b است. پس، فرض کنید که $g(a)\neq a$ و $g(b)\neq b$. از آنجایی که $g(a)\in[a,b]$ و $g(b)\in[a,b]$ داریم $g(a)-a>0$ و $g(b)-b<0$. حال تابع $h(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x)=g(x)-x$$

تابع h در $[a,b]$ پیوسته و $h(a)<0<h(b)$. پس، بنا بر قضیه‌ی مقدار میانی، αای در بازه‌ی (a,b) وجود دارد به طوری که $h(\alpha)=0$ و در این صورت $g(\alpha)=\alpha$ به این ترتیب وجود نقطه‌ی ثابت برای g ثابت می‌شود.

حال نشان می‌دهیم α یکتا است. فرض کنید $\alpha'\in[a,b]$ نیز نقطه‌ی ثابت g باشد. در این صورت

بنا به قضیه‌ی میانگین c ای در بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$|\alpha-\alpha'| = |g(\alpha)-g(\alpha')| = |g'(c)|\,|\alpha-\alpha'| \leq k|\alpha-\alpha'|$$

بنابراین

$$(1-k)|\alpha-\alpha'| \leq 0$$

چون $k<1$ پس $1-k>0$ پس باید $\alpha=\alpha'$.

برای اثبات همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ به α، قرار می‌دهیم

$$e_n = \alpha - x_n, \quad n=0,1,\dots$$

که e_n خطا در تکرار n ام است. از آنجایی که $x_0\in[a,b]$ داریم $x_1=g(x_0)\in[a,b]$ و به استقرا داریم $x_n\in[a,b]$، $\forall n\geq 1$. حال چون $\alpha=g(\alpha)$ و $x_n=g(x_{n-1})$، بنابر قضیه‌ی حد از میانگین داریم

$$e_n = \alpha - x_n = g(\alpha)-g(x_{n-1}) = g'(c_n)(\alpha-x_{n-1}), \quad x_{n-1}<c<\alpha$$

یا

$$e_n = g'(c_n)\,e_{n-1}$$

از اینجا

$$|e_n| = |g'(c_n)|\,|e_{n-1}| \leq k|e_{n-1}|$$

و به استقرا به سادگی می‌توان نشان داد که

$$0 \le |e_n| \le K^n |e_0| \qquad (3)$$

که $e_0 = \alpha - x_0$: خطای اولیه است. از (۲) نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

و اثبات قضیه، کامل می‌شود.

تعریف - در قضیه‌ی بالا، تابع g را که توسط آن دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تولید می‌شود، تابع تکرار می‌نامند.

آزمون توقف - اگر شرایط قضیه‌ی تکرار نقطه‌ی ثابت برقرار باشد، آن‌گاه در تولید جملات دنباله، توسط رابطه‌ی $x_{n+1} = g(x_n)$ ، $n = 0, 1, \ldots$ ، تکرارها را تا آن جا ادامه می‌دهیم که به ازای mای داشته باشیم

$$|x_m - x_{m-1}| < \varepsilon$$

که $\varepsilon > 0$ از قبل انتخاب می‌شود. در این صورت x_m را تقریبی برای ریشه‌ی معادله با دقت ε می‌نامیم.

مثال - معادله‌ی زیر را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت و با دقت $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-3}$ ($\varepsilon = 10^{-4}$) حل کنید.

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

حل - داریم $f(1) = -1$ و $f(2) = 5$. لذا معادله در بازه‌ی $[1, 2]$ دارای یک ریشه است.

ریشه‌های معادله، طول نقاط تلاقی منحنی‌های $y = x + 1$ و $y = x^3$ هستند و با رسم آن‌ها، معلوم می‌شود که معادله تنها یک ریشه دارد. معادله را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت

$$x = x^3 - 1 = g(x) \ , \ x = \sqrt[3]{x+1} = g(x) \ , \ x = \frac{1}{x^2-1} = g(x) \ , \ x = \frac{x+1}{x^2} = g(x)$$

به سادگی می‌توان دید که شکل مناسب تابع g عبارت است از

$$g(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

زیرا برای هر $x \in [1,2]$ داریم $g(x) \in [1,2]$ و

$$0 < g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}} < 1 \ , \ \forall x \in [1,2]$$

داریم

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1+x_n} \ , \ n = 0,1,2,\ldots$$

با انتخاب $x_0 = 1,2$ و $\varepsilon = 10^{-4}$ ، نتایج زیر به دست می‌آید:

n	x_n
۱	۱,۳۰۰۵۹
۲	۱,۳۲۰۱۲
۳	۱,۳۲۳۸۴
۴	۱,۳۲۴۵۵
۵	۱,۳۲۴۶۹
۶	۱,۳۲۴۷۱

$$x_0 = 1,2 \ , \ x_1 = g(x_0) = g(1,2) = \sqrt[3]{1+1,2} \simeq 1,30059$$

$$|x_1 - x_0| = |1,30059 - 1,2| = 0,10059 \not< 10^{-4}$$

$$x_2 = g(x_1) = g(1,30059) = \sqrt[3]{1+1,30059} = \sqrt[3]{2,30059} \simeq 1,32019$$

$$|x_2 - x_1| = |1,32019 - 1,30059| = 0,0196 \not< 10^{-4}$$

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{1+x_2} = \sqrt[3]{1+1{,}32019} = \sqrt[3]{2{,}32019} \simeq 1{,}32386$$

$$|x_3 - x_2| = |1{,}32386 - 1{,}32019| \simeq 0{,}00367 \not< 10^{-4}$$

$$x_4 = g(x_3) = \sqrt[3]{1+x_3} = \sqrt[3]{1+1{,}32386} = \sqrt[3]{2{,}32386} \simeq 1{,}32455$$

$$|x_4 - x_3| = |1{,}32455 - 1{,}32386| = 0{,}00069 \not< 10^{-4}$$

$$x_5 = g(x_4) = \sqrt[3]{1+x_4} = \sqrt[3]{1+1{,}32455} = \sqrt[3]{2{,}32455} \simeq 1{,}32469$$

$$|x_5 - x_4| = |1{,}32469 - 1{,}32455| = 0{,}00014 \not< 10^{-4}$$

$$x_6 = g(x_5) = \sqrt[3]{1+x_5} = \sqrt[3]{1+1{,}32469} \simeq 1{,}32471$$

$$|x_6 - x_5| = |1{,}32471 - 1{,}32469| = 0{,}00002 = 0{,}2\times 10^{-4} < 10^{-4}$$

بنابراین تقریب به دست آمده برای ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ ، $x_6 = 1{,}32471$ می‌باشد

تعریف- فرض کنید $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

قرار می‌دهیم $e_n = x_n - \alpha$ و $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$. اگر عدد حقیقی $P \geq 1$ و عدد مثبت $C \neq 0$ وجود داشته باشند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^P} = C$$

آن‌گاه گفته می‌شود که مرتبه‌ی همگرایی x_n به α برابر P است. واضح است که هرچه P بزرگتر باشد،

قضیه‌ی مقدار میانگین برای توابع پیوسته:
فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

آهنگ همگرایی، سریعتر است.

آهنگ همگرایی روش تکرار نقطه‌ی ثابت - فرض کنید α نقطه‌ی ثابت تابع g یا ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ باشد و g در $[a,b]$ در شرایط قضیه‌ی تکرار نقطه‌ی ثابت صدق کند. داریم

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)\, g'(c_n) \longrightarrow \text{(قضیه‌ی مقدار میانگین)}$$

یا

$$e_{n+1} = e_n\, g'(c_n), \qquad \alpha < c_n < x_n$$

فرض کنید g' در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $g'(x) \neq 0$، $\forall x \in [a,b]$. داریم

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(c_n)$$

از آنجایی که $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ پس $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$. در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} g'(c_n) = g'(\lim_{n\to\infty} c_n) = g'(\alpha)$$

پس برای n به قدر کافی بزرگ

$$e_{n+1} \approx g'(\alpha)\, e_n$$

که نشان می‌دهد خطا در هر گام متناسب است با خطا در گام قبلی. در چنین حالتی گفته می‌شود که همگرایی از مرتبه‌ی اول یا خطی است. هر قدر $|g'(\alpha)|$ کوچکتر باشد، e_n سریعتر به سمت صفر میل می‌کند. به ویژه، سریعترین حالت وقتی است که $g'(\alpha)=0$. در این صورت برای تعیین مرتبه‌ی همگرایی، فرض کنید g'' در بازه‌ی $[a,b]$

پیوسته باشد. بنا به فرمول تیلور داریم

$$g(x)=g(\alpha)+(x-\alpha)g'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2}g''(d), \qquad \alpha<d<x$$

از اینجا

$$g(x_n)-g(\alpha)=(x_n-\alpha)g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2}g''(d_n), \qquad \alpha<d_n<x_n$$

با توجه به اینکه $g'(\alpha)=0$ نتیجه می‌شود

$$e_{n+1}=\frac{e_n^2}{2}g''(d_n)$$

یا

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2}=\frac{1}{2}g''(d_n) \qquad \alpha<d_n<x_n$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}g''(d_n)=\frac{1}{2}g''(\lim_{n\to\infty}d_n)=\frac{1}{2}g''(\alpha)$$

اگر $g''(\alpha)\neq 0$، آنگاه می‌توان گفت که

$$e_{n+1}\approx\frac{1}{2}g''(\alpha)e_n^2$$

در این حالت، همگرایی را از مرتبه‌ی دوم می‌نامند. به همین ترتیب، می‌توان همگرایی از مرتبه‌های بالاتر را تعریف نمود.

روند Δ^2- ایتکن - به طوری که دیدیم همگرایی روش تکرار نقطه‌ی ثابت، عموماً از مرتبه‌ی یک است و لذا سرعت همگرایی روش نسبتاً کند می‌باشد. روند Δ^2- ایتکن راهکاری است که برای شتاب دادن به سرعت همگرایی روش تکرار نقطه‌ی ثابت به کار می‌رود و اساس آن پیش بینی نقطه‌ی ثابت α با استفاده از سه تکرار متوالی x_n، x_{n+1} و x_{n+2} است. در روش تکرار نقطه‌ی ثابت دیدیم که اگر $g'(\alpha)\neq 0$ و آن گاه

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx g'(\alpha)$$

متشابهاً

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \approx g'(\alpha)$$

بنابراین

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \approx \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

یا

$$\frac{x_{n+2}-\alpha}{x_{n+1}-\alpha} \approx \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}$$

از اینجا

$$\alpha \approx x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

ملاحظه می‌شود که با سه تکرار متوالی، تقریبی برای α به دست می‌آید. از این تقریب می‌توان برای تکرار بعدی استفاده نمود. پس، تعریف می‌کنیم

$$\hat{x}_{n+2} = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}, \quad n=0,3,6,\dots \qquad (*)$$

با بکارگیری تفاضلات متناهی

$$\hat{x}_{n+2} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

اکنون با استفاده از $\hat{x}_{n+2}$ که تقریبی برای α است، می‌توان تقریبهای $x_{n+3}=g(\hat{x}_{n+2})$ ،

$x_{n+4}=g(x_{n+3})$ و $x_{n+5}=g(x_{n+4})$ را به دست آورد و سپس با سه تکرار x_{n+3} ، x_{n+4} ، x_{n+5}

از فرمول (*) ، $\hat{x}_{n+5}$ را به دست آورد و به همین ترتیب ادامه داد. می‌توان نشان داد دنباله‌ی $\{\hat{x}_{n+2}\}$

که از (*) به دست می‌آید نیز همگرا به α است ، اما آهنگ همگرایی آن خطی سریعتر است. در حقیقت ،

قضیه‌ی زیر را داریم .

```
1:  x1 = g(x0)
    x2 = g(x1)
    x̂ = x0 - (x1-x0)^2 / (x2-2x1+x0)
    if |x̂ - x2| < ε then print x̂   otherwise set x0 = g(x̂) , Goto 1
```

فرض کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تولید شده توسط $x_{n+1}=g(x_n)$ همگرا به α ، نقطه‌ی ثابت

g باشد و همگرایی آن خطی باشد. در این صورت دنباله‌ی $\{\hat{x}_{n+2}\}$ تعریف شده با (*) نیز همگرا به α

است و همگرایی آن سریعتر است ، به این مفهوم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0 .$$

تعریف می‌کنیم $e_n = x_n - \alpha$ و $\hat{e}_n = \hat{x}_n - \alpha$. از (*) نتیجه می‌شود که

$$\hat{e}_{n+2} = e_n - \frac{(e_{n+1}-e_n)^2}{e_{n+2}-2e_{n+1}+e_n} = \frac{e_{n+2}e_n - e_{n+1}^2}{e_{n+2}-2e_{n+1}+e_n}$$

یا

$$\frac{\hat{e}_{n+2}}{e_{n+2}} = \frac{e_n - \frac{e_{n+1}^2}{e_{n+2}}}{e_{n+2}-2e_{n+1}+e_n}$$

از طرفی بنا بر فرض داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = c, \quad |c|<1 \qquad (**)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(\alpha), \quad |g'(\alpha)| \le c_1 < 1 \right)$$

رابطه‌ی $(**)$ معادل است با اینکه بنویسیم

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = c + \delta_n$$

که در آن $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ پس $e_{n+1} = (c+\delta_n)\, e_n$. بنابراین

$$\frac{\hat{e}_{n+2}}{e_{n+2}} = \frac{e_n - \dfrac{e_{n+1}}{c+\delta_{n+1}}}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n} =$$

$$\frac{e_n - \dfrac{(c+\delta_n)e_n}{c+\delta_{n+1}}}{(c+\delta_{n+1})(c+\delta_n)e_n - 2(c+\delta_n)e_n + e_n}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{e}_{n+2}}{e_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \dfrac{c+\delta_n}{c+\delta_{n+1}}}{(c+\delta_{n+1})(c+\delta_n) - 2(c+\delta_n) + 1} = \frac{0}{(c-1)^2} = 0$$

و اثبات تمام است.

مثال- ریشه‌ی منفی معادله‌ی $x^2+x-2=0$ را به دست آورید.

حل- همان طور که می‌دانیم با استفاده از دستور ۵، ریشه‌ی منفی معادله، $x=-2$ است. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x=\frac{2}{x}-1$$

تعریف می‌کنیم $g(x)=\frac{2}{x}-1$. به سادگی می‌توان نشان داد که این تابع در بازه‌ی $[-2,5\ ,-1,5]$ شرایط قضیه‌ی تکرار نقطه‌ی ثابت را دارد. با انتخاب $x_0=-1,5$ از فرمول

$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{2}{x_n}-1, \qquad n=0,1,\dots$$

متتابع با $\epsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3}$ به صورت جدول زیر حاصل می‌شود

n	x_n	e_n
۱	-۲,۳۳۳۳	۰,۳۳۳۳
۲	-۱,۸۵۷۱	۰,۱۴۲۹
۳	-۲,۰۷۶۹	۰,۰۷۶۹
۴	-۱,۹۶۳۰	۰,۰۳۷۰
۵	-۲,۰۱۸۹	۰,۰۱۸۹
⋮	⋮	⋮
۱۱	-۲,۰۰۰۳	۰,۰۰۰۳
۱۲	-۱,۹۹۹۹	۰,۰۰۰۱

در این جدول $e_n=|2-x_n|$. با توجه به ستون آخر ملاحظه می‌شود که همگرایی خطی است و خطا در هر گام تقریباً نصف می‌شود.

اکنون با روش ۵ اتکین مسأله را حل می‌کنیم. داریم

$$x_1 = g(x_0) = \frac{۲}{-۱,۵} - ۱ = -۲,۳۳۳۳۳$$

$$x_۲ = g(x_1) = -۱,۸۵۷۱۴$$

$$\hat{x}_۲ = -۱,۵ - \frac{(-۲,۳۳۳۳۳ + ۱,۵)^۲}{-۱,۸۵۷۱۴ - ۲(-۲,۳۳۳۳۳) - ۱,۵} = -۲,۰۳۰۳۰$$

$$x_۳ = g(\hat{x}_۲) = \frac{۲}{-۲,۰۳۰۳۰} - ۱ = -۱,۹۸۵۰۷$$

$$x_۴ = g(x_۳) = \frac{۲}{-۱,۹۸۵۰۷} - ۱ = -۲,۰۰۷۵۲$$

$$x_۵ = g(x_۴) = \frac{۲}{-۲,۰۰۷۵۲} - ۱ = -۱,۹۹۶۲۵$$

$$\hat{x}_۵ = -۱,۹۸۵۰۷ - \frac{(-۲,۰۰۷۵۲ + ۱,۹۸۵۰۷)^۲}{-۱,۹۹۶۲۵ - ۲(-۲,۰۰۷۵۲) - ۱,۹۸۵۰۷} = -۲,۰۰۰۰۲$$

$$x_۶ = g(\hat{x}_۵) = -۱,۹۹۹۹۹, \quad x_۷ = g(x_۶) = -۲,۰۰۰۰۰, \quad x_۸ = g(x_۷)$$

$$= -۲,۰۰۰۰۰$$

خلاصه‌ی نتایج روش ۵ اتکین با همان دقت $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ خطا طبق جدول زیر است:

n	$\hat{x}_n$	e_n
۲	-۲,۰۳۰۳۰	۰,۰۳۰۳۰
۵	-۲,۰۰۰۰۲	۰,۰۰۰۰۲
۸	-۲,۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰

توجه کنید که در اینجا خطا در هر گام متناسب با مربع خطا در گام قبلی است، یعنی همگرایی از مرتبه‌ی ۲ است.

روش نیوتن - رافسون

فرض کنید α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)$ و x_0 تقریبی برای آن باشد. با فرض آن که f در یک همسایگی x_0 شامل α مشتق‌پذیر باشد، بنا بر فرمول تیلور می‌توان نوشت

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(\eta) \quad , \quad x_0 < \eta < x \qquad (1)$$

در (۱) قرار می‌دهیم $x = \alpha$، آنگاه

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0) f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2!} f''(\eta) \quad , \quad x_0 < \eta < \alpha$$

یا اگر $f'(x_0) \neq 0$، می‌توان نوشت

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (\alpha - x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2!} \frac{f''(\eta)}{f'(x_0)} \qquad (2)$$

اگر x_0 به اندازه‌ی کافی به α نزدیک باشد، می‌توان از جمله‌ی دوم طرف راست (۲) چشم‌پوشی نمود و در نتیجه خواهیم داشت

$$\alpha - x_0 \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

یا

$$\alpha \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

پس، $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ تقریب دیگری برای α است، اگر آن را x_1 بنامیم، داریم

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (3)$$

عموماً x_1 تقریب بهتری از x_0 است. با قرار دادن x_1 به جای x_0 در (۱) به دلیل مشابه خواهیم داشت

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

و با ادامه‌ی این روند، فرمول نیوتن-رافسون زیر به دست می‌آید

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \dots \qquad (۴)$$

تحت شرایط مناسب برای تابع f، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$، تعریف شده در (۴) همگرا به α است، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

مثال- تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $(2x+1)^2 = 4\cos\pi x$ را که در بازه‌ی $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ قرار دارد، را با دقت $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ محاسبه کنید.

حل-

$$f(x) = (2x+1)^2 - 4\cos\pi x = 0$$

و

$$f'(x) = 4(2x+1) + 4\pi\sin\pi x$$

بنابراین، فرمول تکرار روش نیوتن عبارت است از

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(2x_n+1)^2 - 4\cos\pi x_n}{4(2x_n+1) + 4\pi\sin\pi x_n}$$

اگر نقطه‌ی وسط بازه‌ی $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ را به عنوان نقطه‌ی اولیه در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$x_0 = 0.29167$, $x_1 = 0.28726$, $x_2 = 0.28724$, $|x_2 - x_1| < \epsilon$

تقریب ریشه‌ی معادله

همگرایی روش نیوتن - رافسون

قضیه - فرض کنید α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ باشد و f، f' و f'' در یک همسایگی از α مانند $I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته باشند و $f'(\alpha) \neq 0$. در این صورت اگر نقطه‌ی آغازین x_0 به قدر کافی به α نزدیک اختیار شود، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تولید شده توسط فرمول نیوتن، همگرا به α است یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \qquad (1)$$

همچنین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \qquad (2)$$

مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن - رافسون

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|} \quad ; \quad e_n = x_n - \alpha$$

که نشان می‌دهد مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن - رافسون، حداقل برابر با ۲ است.

هیچ گاه به کمتر از آن‌چه که سزاوارتان است، رضایت ندهید.
شما مسئول اصلی کیفیت زندگی‌تان هستید.

تعبیر هندسی روش نیوتن - رافسون

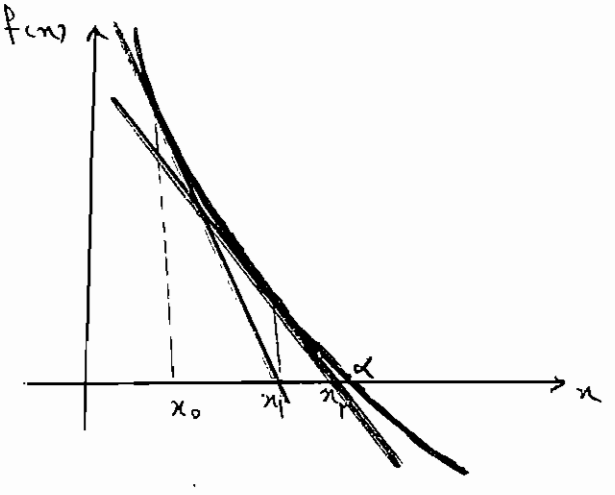
خط مماس در نقطه‌ی به طول x_0 بر منحنی $y=f(x)$ محور xها را در نقطه‌ای به طول x_1 قطع می‌کند. داریم

$$\overset{\overset{f(x_1)}{\parallel}}{0} - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

همین طور، مماس بر منحنی در نقطه‌ی به طول x_1، محور xها را در نقطه‌ی به طول x_2 قطع می‌کند. داریم

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

ملاحظه می‌شود که با ادامه دادن این عمل، فرمول تکراری روش نیوتن به دست می‌آید.



محاسبه‌ی ریشه‌های تکراری با روش نیوتن

تعریف- گفته می‌شود که α ، ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ با مرتبه‌ی تکرار m است هرگاه

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$$

امّا $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

- اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ و مرتبه‌ی تکرار آن m باشد، در این صورت باز هم می‌توان نشان داد که دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف‌شده با فرمول نیوتن

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ ,\quad k=0,1,\dots$$

با شرایط ذکرشده در قضیه، همگرا است، ولی سرعت همگرایی از مرتبه‌ی دوم نبوده بلکه همگرایی خطی است. برای آن‌که در حالت ریشه‌های تکراری، همگرایی از مرتبه‌ی دوم (حداقل دو) باشد، می‌توان از فرمول نیوتن تصحیح‌شده

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\ ,\quad k=0,1,\dots$$

استفاده نمود که در آن m مرتبه‌ی تکرار ریشه است.

تمرین — معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$f(x)=x^4-4x^2+4=(x^2-2)^2=0$$

یک ریشه‌ی این معادله، $\sqrt{2}$ و مرتبه‌ی تکرار آن ۲ است. تقریبی از این ریشه با روش نیوتن استاندارد و روش نیوتن تصحیح‌شده به دست آورید. (روش نیوتن استاندارد، در ۱۰ تکرار و روش نیوتن اصلاح‌شده در ۳ تکرار و $\epsilon=10^{-4}$) $x_0=1.5$ و $|x_n-x_{n-1}|<\epsilon$

مثال: اگر α ریشه‌ی تکراری مرتبه‌ی m از معادله‌ی $f(x)=0$ باشد و x_0 به اندازه‌ی کافی به α نزدیک باشد، دنباله‌ی $\{x_n\}$ که از فرمول تکرار $x_{n+1} = x_n - \frac{m f(x_n)}{f'(x_n)}$ حاصل می‌شود، همگرایی از مرتبه‌ی حداقل دو دارد.

حل: داریم

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{m f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \alpha - m \frac{(x_n-\alpha)^m q(x_n)}{(x_n-\alpha)^m q'(x_n) + m(x_n-\alpha)^{m-1} q(x_n)}$$

$$= x_n - \alpha - m \frac{(x_n-\alpha)\, q(x_n)}{q'(x_n)(x_n-\alpha) + m q(x_n)}$$

$$= \frac{(x_n-\alpha)^2 q'(x_n)}{(x_n-\alpha) q'(x_n) + m q(x_n)}$$

بنابراین

$$\frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)^2} = \frac{q'(x_n)}{(x_n-\alpha) q'(x_n) + m q(x_n)}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|q'(\alpha)|}{m|q(\alpha)|}$$

درصورتی که $q'(\alpha) \neq 0$، مرتبه‌ی همگرایی $\{x_n\}$ دو است و درغیراین صورت، مرتبه‌ی همگرایی بیشتر از دو است.

* این پیرایش روش نیوتن، ظاهراً مشکل ریشه‌های تکراری را حل می‌کند. ولی درعمل، مرتبه‌ی تکرار ریشه‌ی α

معلوم نیست و روش فوق نمی‌تواند مشکل را حل کند. برای رفع این مشکل، روش دیگری معرفی می‌کنیم: بدین ترتیب که در فرمول تکرار روش نیوتن به جای تابع $f(x)$ از تابع $\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت:

$$\mu(x)=\frac{(x-\alpha)^m q(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}q(x)+(x-\alpha)^m q'(x)}$$

$$=\frac{(x-\alpha)\,q(x)}{m q(x)+(x-\alpha)q'(x)}$$

بنابراین $\mu(\alpha)=0$ و $\mu'(\alpha)\neq 0$ و در نتیجه، α ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $\mu(x)=0$ می‌باشد.

لذا، دنباله‌ی $\{x_n\}$ که از فرمول تکرار $x_{n+1}=x_n-\frac{\mu(x_n)}{\mu'(x_n)}$ به دست می‌آید، در صورتی که x_0 به اندازه‌ی کافی به α نزدیک باشد، همگرایی از مرتبه‌ی حداقل دو خواهد داشت. در برهان قضیه‌ی زیر، این مطلب را به طور مستقیم اثبات می‌کنیم.

قضیه - اگر α ریشه‌ی تکراری مرتبه‌ی m از معادله‌ی $f(x)=0$ باشد و x_0 به اندازه‌ی کافی به α نزدیک باشد، دنباله‌ی $\{x_n\}$ که از فرمول تکرار $x_{n+1}=x_n-\frac{\mu(x_n)}{\mu'(x_n)}$ که در آن $\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$، حاصل می‌شود مرتبه‌ی همگرایی حداقل دو دارد.

برهان - اولاً α نقطه‌ی ثابت $g(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}$ می‌باشد و $g'(x)=\frac{\mu(x)\mu''(x)}{[\mu'(x)]^2}$. امّا، $\mu(\alpha)=0$ و $\mu'(\alpha)=\frac{1}{m}$. در نتیجه، $g'(\alpha)=0$. پس مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ که از فرمول تکراری مذکور به دست می‌آید، حداقل دو خواهد بود.

* در این روش اصلاح شده، فرمول تکرار عبارت است

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mu(x_n)}{\mu'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)\, f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n) f''(x_n)} \quad *$$

ملاحظه می‌شود که این فرمول، مستقل از مرتبه‌ی تکرار ریشه‌ی α است.

یکی از معایب این روش آن است که مشتق دوم تابع f باید محاسبه شود و در محاسبات مورد استفاده قرار گیرد.

در عمل نیز در فرمول *، وقتی n بزرگ می‌شود، تفاضل دو عدد کوچک در مخرج کسر وجود دارد و خطای گرد کردن ممکن است باعث به وجود آمدن نتایج بسیار نادقیقی شود.

روش وتری

(برای روش اصلاح شده‌ی دوم)

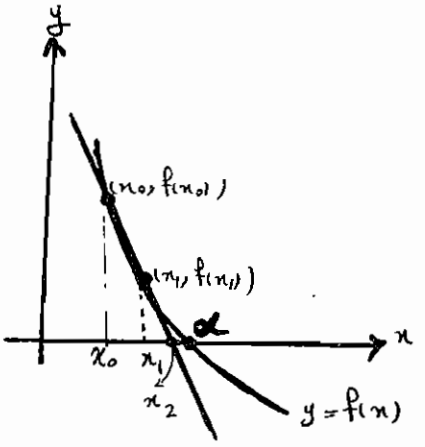
یکی از معایب روش‌های نیوتن و اصلاح شده‌ی نیوتن این است که در برخی موارد، محاسبه‌ی $f'(x)$ یا $f''(x)$ ممکن نیست و یا اگر ممکن باشد با دشواری‌هایی همراه است. برای رفع این مشکل می‌توانیم از تقریب‌های مشتق استفاده کنیم. در روش وتری، تقریب

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

را در فرمول تکراری روش نیوتن جایگزین می‌کنیم. پس فرمول تکراری روش وتری عبارت است از

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = x_n - \frac{f(x_n)\,(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

* برای استفاده از فرمول تکرار روش وتری به دو نقطه‌ی اولیه‌ی x_0 و x_1 نیاز داریم. در واقع، در فرمول تکرار روش وتری x_{n+1}، طول نقطه‌ی حاصل از برخورد وتر واصل نقاط $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ و $(x_n, f(x_n))$ با محور xها است.



- همان طور که در قضیه‌ی بعد، گفته می‌شود، دنباله‌ی $\{x_n\}$ که از روش وتری به دست می‌آید، در صورت همگرایی، دارای مرتبه‌ی همگرایی $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$ است. بنابراین، روش وتری از روش نیوتن کندتر ولی از روش های تنصیف و نابجایی سریعتر است.

- توجه داریم که فرمول روش وتری را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

امّا در عمل، مشاهده شده است که این فرمول از نظر محاسباتی ناپایدار است.

قضیه- فرض کنید α ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد و f، f' و f'' در یک همسایگی از α مانند I، پیوسته باشند و $f'(x) \neq 0$ ، $\forall x \in I$. در این صورت اگر تقریبهای x_0 و x_1 به قدر کافی نزدیک به α انتخاب شوند، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با فرمول وتری

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

همگرا به α است و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c$$

که $c \neq 0$ ثابت و $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. به عبارت دیگر مرتبه‌ی همگرایی روش $p \simeq 1.6$ است.

اثبات- (مشابه اثبات قضیه‌ی نیوتن است و از ارائه‌ی آن صرف نظر می‌کنیم.)

مثال- معادله‌ی $\cos 2x = x$ را با روش وتری و با دقت $\varepsilon = 10^{-4}$ حل کنید.

(معیار توقف را $|f(x_n)| < \varepsilon$ در نظر بگیرید.)

حل- تعریف می‌کنیم $f(x) = \cos 2x - x$ در این صورت داریم $f(0)f(\frac{\pi}{4}) < 0$ و لذا معادله دارای یک ریشه در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{4}]$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که معادله فقط یک ریشه دارد.

داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{(\cos 2x_n - x_n) - (\cos 2x_{n-1} - x_{n-1})} (\cos 2x_n - x_n) \quad , n = 1, 2, \dots$$

با انتخاب $x_0 = 0$ و $x_1 = 0.5$ خواهیم داشت

n	x_n
۰	۰
۱	۰.۵
۲	۰.۵۲۰۹۹۷
۳	۰.۵۱۴۸۹۸
۴	۰.۵۱۴۹۳۳

داریم $|f(x_4)| < 10^{-4}$.

تمرین های فصل سوم : حل عددی معادلات غیرخطی

۱- معادله‌ی $e^x \sin x + 25x + 1 = 0$ مفروض است. نشان دهید این معادله دارای یک ریشه‌ی منفی در $[-1,0]$ است. این ریشه را به کمک روش دوبخشی با ۵ تکرار تقریب بزنید و خطای تقریب را برآورد کنید.

۲- معادله‌ی $f(x) = 2x^2 - 1 - \sin x = 0$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این معادله دارای یک ریشه‌ی منحصر به فرد در $[0,1]$ است.

ب) اگر بخواهیم این ریشه را با روش دوبخشی و با دقت $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ به دست آوریم چند تکرار لازم است؟

۳- اولین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $e^{-x} - \cos x = 0$ را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت به دست آورید.

($\epsilon = 10^{-4}$ در نظر بگیرید.)

۴- کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $2\cos(2x) - x = 0$ را با روش تکرار نقطه‌ی ثابت و با دقت $\epsilon = 0.0001$ به دست آورید.

۵- معادله‌ی $e^x - 3x^2 = 0$ را در نظر بگیرید. این معادله دارای دو ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی می‌باشد. با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت، ریشه‌های مثبت را با دقت $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ محاسبه کنید.

۶- فرض کنید $k > 1$ یک عدد صحیح و a عدد حقیقی مثبت باشد و دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تعریف شده با

$$x_{n+1} = \frac{x_n^k + k a x_n}{k x_n^{k-1} + a} \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

همگرا باشد. اولاً حد دنباله را بیابید. ثانیاً k را طوری تعیین کنید که مرتبه‌ی همگرایی، حداقل دو باشد.

تمرین های فصل چهارم

۱- مقادیر تابع f به صورت جدول زیر در دست است

x	۱	۱٫۱	۱٫۲	۱٫۳	۱٫۴
$f(x)$	۱٫۲۱۸	۱٫۲۴۹	۱٫۲۷۸	۱٫۳۰۵	۱٫۳۲۹

الف) $f'(1.2)$ را با استفاده از فرمولی که خطای آن $O(h^4)$ است، محاسبه کنید.

ب) تقریبی برای $f'(1.2)$ با استفاده از برونیابی ریچاردسون به دست آورید به طوری که دقت آن $O(h^4)$ باشد.

۲- تابع $f(x) = (\sin x)^{\frac{9}{2}}$ را بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $|f^{(4)}(x)| \leq 70$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ب) کوچکترین مقدار n را تعیین کنید به طوری که در محاسبه‌ی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ با روش سیمپسون، قدرمطلق خطا از 10^{-4} بیشتر نباشد.

۳- با استفاده از فرمول گاوس - لژاندر سه نقطه‌ای

الف) تقریبی برای

$$\int_1^3 x^x\,dx$$

ب) تقریبی برای

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

به دست آورید.

۴- با روشی مناسب، تقریبی برای انتگرال زیر ارائه دهید.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\ln x}}\,dx$$

$$\begin{cases} f(x) = x \longrightarrow \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0 \\ f(x) = x \longrightarrow w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1) = -w_1 + 0 + w_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -w_1 + w_3$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \longrightarrow \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ f(x) = x^2 \longrightarrow w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1) = w_1 + 0 + w_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad w_1 + w_3 = \frac{2}{3}$$

پس داریم :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 2 \\ -w_1 + w_3 = 0 \\ w_1 + w_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

از حل دستگاه سه معادله و سه مجهول فوق بالا داریم :

$$w_1 = \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{4}{3}, \quad w_3 = \frac{1}{3}$$

پس

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3}\left[f(-1) + 4f(0) + f(1)\right].$$

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt \simeq F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}95725+0{,}61652$$
$$=1{,}57377$$

بنابراین $I \simeq 0{,}78688$.

با استفاده از فرمول سه نقطه‌ای گاوس-لژاندر داریم:

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt \simeq \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}F(0)+\frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$
$$=0{,}54857+0{,}71111+0{,}31084=1{,}57053$$

درنتیجه $I \simeq 0{,}78527$.

توجه:
$$I=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\simeq 0{,}785398$$
همان‌طور که ملاحظه می‌شود، جواب به دست آمده از روش گاوس-لژاندر سه نقطه‌ای دقیق‌تر است.

مثال- ضرایب w_1، w_2، w_3 را طوری تعیین کنید که فرمول انتگرال گیری

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_1 f(-1)+w_2 f(0)+w_3 f(1)$$

بالاترین درجه‌ی دقت را داشته باشد.

حل- با توجه به اینکه سه مجهول داریم، باید سه معادله تشکیل دهیم تا این مجهولات را حساب نماییم.

$$\begin{cases} f(x)=1 \longrightarrow \int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1}=1-(-1)=2 \\ f(x)=1 \longrightarrow w_1 f(-1)+w_2 f(0)+w_3 f(1)=w_1\times 1+w_2\times 1+w_3\times 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = w_1+w_2+w_3$$

به طریق مشابه می‌توان فرمول گاوس-لژاندر سه نقطه‌ای را نیز به دست آورد:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$= \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

مثال- مقدار انتگرال زیر را با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس-لژاندر و همچنین سه نقطه‌ای گاوس-لژاندر تخمین بزنید.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

حل- ابتدا $[0,1]$ را به $[-1,1]$ تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$a = 0 \,,\; b = 1$$

پس

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} = \frac{t+1}{2}$$

با این تغییر متغیر، $[0,1]$ به $[-1,1]$ تبدیل می‌شود.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2} \times \frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{(t+1)^2}{4}}\,dt$$

با فرض $F(t) = \dfrac{1}{1+\frac{(t+1)^2}{4}}$ و استفاده از فرمول‌های دو نقطه‌ای و سه نقطه‌ای گاوس داریم:

$$f(x)=x \Rightarrow \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \Rightarrow \qquad w_1x_1+w_2x_2=0 \qquad (3)$$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \qquad w_1x_1^2+w_2x_2^2=\frac{2}{3} \qquad (4)$$

$$f(x)=x^3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \Rightarrow \qquad w_1x_1^3+w_2x_2^3=0 \qquad (5)$$

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی غیرخطی بالا، معادله‌ی (۳) را در x_1^2 ضرب و از معادله‌ی (۵) کم می‌کنیم.

خواهیم داشت

$$x_2(x_2-x_1)(x_2+x_1)=0$$

به سادگی می‌توان دید که تنها رابطه‌ی $x_2=-x_1$ با معادلات دیگر سازگار است. پس با قرار دادن

$x_2=-x_1$ به دست می‌آوریم

$$w_1=w_2=1 \quad , \quad x_1^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}} \ , \ x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

لذا

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (6)$$

اکنون فرمول (۶) درصورتی که $f(x)$ چند جمله‌ای با درجه‌ی حداکثر سه باشد، برقرار است. حال برای

هر تابع دیگر f که بر بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (7)$$

فرمول (۷)، فرمول انتگرال‌گیری دو نقطه‌ای گاوس - لژاندر نامیده می‌شود.

حال چون $2n$ پارامتر در رابطه‌ی (**) وجود دارد، n گره x_i و n وزن w_i، این پارامترها را طوری تعیین می‌کنیم که فرمول (**) برای همه‌ی چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی $2n-1$ یک فرمول درست باشد.

(چون چندجمله‌ای‌های ثابت را هم در نظر می‌گیریم (توان صفر) پس در کل $2n$ شرط می‌شود.)

بدون آن که از کلیت مسأله کاسته شود می‌توان بازه‌ی انتگرال‌گیری را $[-1,1]$ در نظر گرفت، زیرا با تبدیل

$$x = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{(b+a)}{2}$$

می‌توان بازه‌ی $[-1,1]$ روی محور t را به بازه‌ی $[a,b]$ روی محور x نقش نمود و برعکس. لذا روش گاوس را برای انتگرال‌هایی به صورت

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

بررسی می‌کنیم.

ابتدا فرض کنید $n=2$. در این صورت می‌خواهیم گره‌های x_1 و x_2 را در $[-1,1]$ و وزن‌های مثبت w_1 و w_2 را طوری تعیین کنیم که فرمول

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \qquad (1)$$

درحالتی که $f(x)$ چندجمله‌ای تا درجه‌ی $2n-1=3$ باشد، یک فرمول درست باشد. بنابراین در (1) به ترتیب $f(x)=1$، $f(x)=x$، $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$f(x)=1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} dx = 2 \Rightarrow \qquad w_1+w_2=2 \qquad (2)$$

انتگرال‌گیری با روش گاوس

فرمول‌های نیوتن - کاتس بر این اساس که نقاط گره‌ای در بازه‌ی انتگرال‌گیری، هم فاصله باشند به دست می‌آیند. دیدیم که فرمول ذوزنقه‌ای به صورت

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad (*)$$

است که در آن

$$w_i = h, \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad w_0=w_n=\frac{h}{2}, \quad h=\frac{b-a}{n}, \quad x_i=a+ih, \ i=1,2,\dots,n-1$$

همین طور فرمول سیمپسون نیز به صورت (*) است که در آن n زوج است و

$$w_i=\frac{4h}{3}, \quad i=1,3,\dots,n-1, \quad w_i=\frac{2h}{3}, \quad i=2,4,\dots,n-2$$

و $w_0=w_n=\frac{h}{3}$.

خطا در فرمول ذوزنقه‌ای $E_T=\frac{-(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$ و در فرمول سیمپسون $E_S=\frac{-(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$. لذا، فرمول ذوزنقه‌ای برای همه‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی اول به صورت $f(x)=ax+b$ یک فرمول درست یا بدون خطاست، زیرا $f''(x)=0$. همین طور فرمول سیمپسون برای همه‌ی چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی سه یک فرمول درست است. به همین دلیل گفته می‌شود که درجه‌ی دقت فرمول انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای برابر ۱ و درجه‌ی دقت فرمول انتگرال‌گیری سیمپسون برابر ۳ است. به طور کلی تعریف زیر را داریم:

تعریف - درجه‌ی دقت یک فرمول انتگرال‌گیری عددی برابر n است، هرگاه فرمول، برای همه‌ی چندجمله‌ای‌های تا درجه‌ی n یک فرمول بدون خطا باشد.

گاوس نشان داد که اگر شرط هم فاصله بودن نقاط x_i در بازه‌ی انتگرال‌گیری حذف شود، می‌توان فرمول‌های انتگرال‌گیری با بالاترین درجه‌ی دقت را به دست آورد. پس هدف در روش گاوس به دست آوردن فرمولی به صورت

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \qquad (**)$$

با این ویژگی است. در این فرمول، x_i ها و w_i ها به ترتیب گره‌ها و وزن‌ها نامیده می‌شوند.

و خطای این فرمول عبارت است از

$$EI = \frac{h^3}{24} \times n\, f''(\eta) = \frac{h^3}{24} \times \frac{b-a}{h}\, f''(\eta) = \frac{(b-a)h^2}{24}\, f''(\eta) = O(h^2)$$

$a < \eta < b$

با فرض آنکه f'' در $[a,b]$ پیوسته باشد.

<u>مثال</u> مقدار تقریبی انتگرال زیر را با روش نقطه‌های میانی به دست آورید. ($h=0.1$)

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

حل- توجه کنید که تابع $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ در $x=0$، حد پایین انتگرال، تعریف نشده ولی انتگرال موجود است و مقدار آن برابر است با $I=1$.

با انتخاب $h=0.1$ نقاط میانی عبارتند از

$$\frac{x_0+x_1}{2},\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{x_4+x_5}{2},\ \frac{x_5+x_6}{2},\ \frac{x_6+x_7}{2},\ \frac{x_7+x_8}{2},$$

$$\frac{x_8+x_9}{2},\ \frac{x_9+x_{10}}{2}$$

$$I \simeq 0.1 \sum_{i=0}^{n-1=9} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{2}}} = 0.9024612.$$

توجه کنید که خطا زیاد و در حدود ۱۰٪ است. علت این امر آن است که تابع $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ در نزدیک $x=0$، مقادیر بزرگ اختیار می‌کند و این مقادیر در فرمول انتگرال‌گیری منظور نمی‌شود.

<u>تمرین</u> انتگرال زیر را با روش‌های ذوزنقه‌ای، سیمپسون و نقطه‌های میانی تقریب بزنید. ($h=0.1$)

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$$

بنا بر خطای دستور نقطه‌ی میانی ساده چنین است

$$EM = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) , \qquad a < \eta < b$$

اگر قرار دهیم $h=b-a$ آنگاه ملاحظه می‌شود که خطای روش $O(h^3)$ است.

دستور نقطه‌ی میانی مرکب

فرض کنید $[a,b]$ را به n زیربازه با طول مساوی تقسیم کرده‌ایم. در این صورت داریم

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

$$x_i = x_0 + ih \; ; \quad h = \frac{b-a}{n}$$
$$= x_{i-1} + h$$

در این صورت بنا بر فرمول نقطه‌ی میانی ساده داریم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \left((x_{i+1}-x_i) f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24} f''(\eta_i) \right)$$

$$\begin{cases} x_i < \eta_i < x_{i+1} \\ i=0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{1}{24} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + \frac{h^3}{24} n f''(\eta).$$

با فرض پیوستگی f'' در $[a,b]$

بنابراین فرمول نقطه‌ی میانی مرکب عبارت است از:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right)$$

دستور نقطه‌ی میانی

فرض کنید بخواهیم تقریبی برای $\int_a^b f(x)\,dx$ ارائه دهیم. اگر تابع f در a یا b تعریف نشده باشد ولی انتگرال موجود باشد، نمی‌توان از دستورهای ذوزنقه‌ای و سیمپسون برای محاسبه‌ی انتگرال استفاده نمود. زیرا این فرمول‌ها از دسته‌ی فرمول‌های نیوتن-کاتس بسته می‌باشند. در چنین حالاتی باید از فرمول‌های باز نیوتن-کاتس استفاده شود. برای به دست آوردن یک فرمول باز در ساده‌ترین حالت، تابع $f(x)$ در انتگرال (1) را در $[a,b]$ با تابع ثابت $P(x)=f(\frac{a+b}{2})$ تقریب می‌زنیم. پس

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (*)$$

فرمول $(*)$ دستور نقطه‌ی میانی ساده نامیده می‌شود. برای محاسبه‌ی خطای این دستور کافی است (با فرض اینکه f به قدر کافی مشتق‌پذیر باشد) از فرمول تیلور f حول نقطه‌ی $\frac{a+b}{2}$ استفاده کنیم

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}f''(\xi),$$

$$\frac{a+b}{2}<\xi<x$$

خطا عبارت است از

$$E.I=\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)dx$$
$$+\int_a^b\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}f''(\xi)\,dx$$

انتگرال اول در سمت راست، برابر صفر است. برای انتگرال دوم، با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\int_a^b\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}f''(\xi)\,dx=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$$

مثال تقریبی از $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ را به روش سیمپسون مرکب و به ازای $h=\frac{1}{4}$ حساب کنید.

$$h=\frac{b-a}{n}\ ,\quad \frac{1}{4}=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}\Rightarrow n=4$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\simeq \frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4\right)=\frac{0{,}25}{3}\left(1+4\times 0{,}941176+2\times 0{,}8+\right.$$

$$\left.4\times 0{,}64+0{,}5\right)\simeq 0{,}785398$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}\simeq 0{,}785398\ ,\quad EI=\frac{\pi}{4}-0{,}785398\simeq 0{,}000001$$

$$EI=\frac{-(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)=\frac{-1}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)=O(h^4).$$

مثال حدود h را چنان تعیین کنید که برای تخمین $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$ داشته باشیم: $|ES(h)|<10^{-3}$

$$ES(h)=\frac{-(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)\ ,\quad b-a=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\ ,\quad f(x)=\sin x$$

$$f'(x)=\cos x\ ,\quad f''(x)=-\sin x\ ,\quad f'''(x)=-\cos x\ ,\quad f^{(4)}(x)=\sin x$$

$$|ES(h)|=\left|-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)\right|=\left|\frac{-(\frac{\pi}{2}-0)}{180}h^4\sin(\eta)\right|=\frac{\pi}{360}h^4\,|\sin(\eta)|$$

$$<\frac{\pi}{360}h^4\underset{\text{باید}}{<}10^{-3}\Rightarrow h^4<\frac{360}{\pi}\times 10^{-3}=0{,}114591559\Rightarrow h<0{,}5818194344$$

پس $h\leq 0{,}58$ تا نامساوی برقرار شود.

* قاعده‌ی انتگرال‌گیری سیمپسون برای توابع چندجمله‌ای تا درجه‌ی ۳ دقیق است، زیرا همواره داریم $f^{(4)}(x)=0$ و در نتیجه $ES(h)=0$.

دستور سیمپسون مرکب

در اینجا $[a,b]$ را به $2n$ زیربازه با طول مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $h=\frac{b-a}{2n}$. فرض کنید

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{2i-2}<x_{2i-1}<x_{2i}<\cdots<x_{2n-2}<x_{2n-1}<x_{2n}=b$$

افراز $[a,b]$ باشد. بنابراین بنا بر دستور سیمپسون ساده داریم

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx=\frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right)-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta_i)\ ,\quad x_{2i-2}<\eta_i<x_{2i}$$

لذا

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx=\frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right]-\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{n}f^{(4)}(\eta_i)$$

پس

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\cdots+2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}\right)\quad (*)$$

فرمول $(*)$ دستور سیمپسون مرکب نامیده می‌شود. با فرض اینکه $f^{(4)}$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند η در $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{n}f^{(4)}(\eta_i)=n\,f^{(4)}(\eta)$$

پس خطا در دستور سیمپسون مرکب عبارت است از

$$ES=\frac{-nh^5}{90}f^{(4)}(\eta)=\frac{-(b-a)}{180}h^4f^{(4)}(\eta)=O(h^4).$$

توجه شود با استفاده از فرمول خطای روش ذوزنقه‌ای مرکب داریم

$$EI = \frac{-h^2}{12}(b-a)\,f''(\eta) = \frac{-(0.25)^2}{12}(1-0)\left(\frac{6\eta^2-2}{(1+\eta^2)^4}\right) \qquad 0<\eta<1$$

$$= (0.0052083333)\left(\frac{2-6\eta^2}{(1+\eta^2)^3}\right)$$

چون $0<\eta<1$ پس $1<1+\eta^2<2$ پس

$1<(1+\eta^2)^3<8$ پس $\frac{1}{8}<\frac{1}{(1+\eta^2)^3}<1$

از طرفی $0<6\eta^2<6$ پس $-6<-6\eta^2<0$

$-4<2-6\eta^2<2$ پس

$$\frac{-1}{2}=\frac{-4}{8}<\frac{-4}{(1+\eta^2)^3}<\frac{2-6\eta^2}{\boxed{(1+\eta^2)^3}}<\frac{2}{(1+\eta^2)^3}<2$$

مثبت است

$$\Rightarrow \left|\frac{2-6\eta^2}{(1+\eta^2)^3}\right|<2$$

پس $|EI|<0.0052083333\times 2=0.0104166666$

مثال- تقریبی از $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ را به روش ذوزنقه‌ای مرکب و به ازای $h=0.25$ حساب کرده و خطای آن را نیز حساب کنید.

حل-

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right)+f(x_n)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{n}\ ,\quad h=0.25 \Rightarrow 0.25=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n} \Rightarrow n=4$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{0.25}{2}\left[f(x_0)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)+f(x_4)\right]$$

$$=a=0\ ,\quad x_1=x_0+h=0.25\ ,\quad x_2=x_0+2h=0+2\times 0.25=0.5$$

$$,=x_0+3h=0+3\times 0.25=0.75\ ,\quad x_4=x_0+4h=0+4\times 0.25=1=b$$

$$(x_0)=f(0)=\frac{1}{1+0^2}=1\ ,\quad f(x_1)=f(0.25)=\frac{1}{1+(0.25)^2}\simeq 0.941176$$

$$x_2)=f(0.5)=\frac{1}{1+(0.5)^2}=0.8\ ,\quad f(x_3)=f(0.75)=\frac{1}{1+(0.75)^2}=0.64$$

$$x_4)=f(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{0.25}{2}\left(1+2(0.941176+0.8+0.64)+0.5\right)=0.782795\simeq 0.7828$$

$$EI=\frac{-(b-a)h^2}{12}f''(\eta)=\frac{-1}{12}(0.25)^2 f''(\eta)\simeq -0.0005 f''(\eta)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\simeq 0.7853981\simeq 0.7854$$

$$EI\simeq 0.7854-0.7828=0.0026$$

دستور ذوزنقه‌ای مرکب

برای محاسبه‌ی $\int_a^b f(x)dx$ ، بازه‌ی $[a,b]$ را به n زیربازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i=1,2,\dots,n$

با طول مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم $h=\frac{b-a}{n}$. بنا به دستور ذوزنقه‌ای ساده در بازه‌ی

$[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i) \qquad x_{i-1}<\eta_i<x_i$$

پس

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right) - \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i)$$

بنابراین

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{n-1}+f_n\right) \qquad (*)$$

فرمول $(*)$ را دستور ذوزنقه‌ای مرکب می‌نامیم. خطای این تقریب عبارت است از

$$EI = \frac{-h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i) \underset{\downarrow}{=} \frac{-nh^3}{12}f''(\eta) = \frac{-h^2}{12}(b-a)f''(\eta) = O(h^2)$$

با فرض پیوسته بودن
f'' روی $[a,b]$

$$EI = \frac{-h^2}{12}(b-a)f''(\eta) = O(h^2)$$

بنابراین

فرمول اخیر، خطای دستور ذوزنقه‌ای مرکب است.

قضیه مقدار میانگین در انتگرال ها

اگر f و g دو تابع باشند که بر $[a,b]$ پیوسته و g در این بازه تغییر علامت ندهد، آنگاه عددی مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

دستور سیمپسون ساده

حال فرض کنید $n=2$. پس $h=\frac{b-a}{2}$ و $x_0=a$ ، $x_2=b$ ، $x_1=\frac{a+b}{2}$. در این صورت

$$p(x_s)=f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

پس

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_{x_0}^{x_2}\left(f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)dx$$

داریم $s=\frac{x-x_0}{h}$ و $dx=hds$ و

$$x=x_0 \Rightarrow s=0 \ , \quad x=x_2 \Rightarrow s=2$$

پس

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\int_0^2\left(f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)ds$$
$$=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+f_2\right)$$

فرمول اخیر، دستور سیمپسون ساده نامیده می‌شود.

خطا در دستور سیمپسون ساده

برای محاسبه‌ی خطای تقریب دستور سیمپسون ساده داریم

$$EI=\int_{x_0}^{x_2}\frac{s(s-1)(s-2)}{6}h^3 f'''(c(x))\,dx=\frac{h^4}{6}\int_0^2 s(s-1)(s-2)f'''(c(x_s))\,ds$$

در اینجا $s(s-1)(s-2)$ در بازه‌ی $[0,2]$ تغییر علامت می‌دهد و لذا از قضیه‌ی مقدار میانگین در انتگرال‌ها نمی‌توان استفاده کرد. اما ثابت می‌شود که

$$EI=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)=O(h^5) \ , \quad a<\eta<b$$

فرمول اخیر، خطای دستور سیمپسون ساده است.

بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_1} (f_0 + s\Delta f_0)\,dx$$

داریم $s = \frac{x - x_0}{h}$ پس $dx = h\,ds$ و

$$x = x_0 \Rightarrow s = 0 \quad , \quad x = x_1 \Rightarrow s = 1$$

پس

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_0^1 (f_0 + s\Delta f_0)\,h\,ds = h\left(f_0 s + \frac{s^2}{2}\Delta f_0\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \qquad (*)$$

فرمول (*) دستور ذوزنقه‌ای ساده نامیده می‌شود.

خطا در دستور ذوزنقه‌ای ساده

خطای درونیابی خطی عبارت است

$$E(x_s) = \frac{s(s-1)}{2} h^2 f''(c(x_s))$$

لذا

$$EI = \int_{x_0}^{x_1} \frac{s(s-1)}{2} h^2 f''(c(x_s))\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{s(s-1)}{2} f''(c(x_s))\,h^3\,ds$$

انتگرال اخیر قابل محاسبه نمی‌باشد زیرا c به s وابسته است، امّا رابطه‌ی دقیق آن مشخص نیست. با توجه به اینکه تابع $s(s-1)$ در $[0,1]$ تغییر علامت نمی‌دهد با فرض اینکه f'' روی $[0,1]$ پیوسته باشد با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین در انتگرال‌ها داریم

$$EI = \frac{h^3}{2} f''(\eta) \int_0^1 s(s-1)\,ds = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) = O(h^3), \qquad 0 < \eta < 1$$

فرمول اخیر فرمول خطای دستور ذوزنقه‌ای ساده است.

حال فرض کنید مقادیر f در نقاط $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ معلوم باشد. فرض کنید $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در این نقاط باشد. تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx$$

در این صورت خطای انتگرال‌گیری عبارت است از

$$EI = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)-P(x)\big)\,dx = \int_a^b E(x)\,dx$$

که $E(x)$ خطای درونیابی است.

فرمول‌های انتگرال‌گیری نیوتن - کاتس

این دسته از فرمول‌ها به دو دسته‌ی باز و بسته تقسیم می‌شوند. در فرمول‌های بسته، از هر دو نقطه‌ی a و b که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ی انتگرال‌گیری هستند، استفاده می‌کنیم. اگر در فرمول نیوتن - کاتس، از یکی از نقاط a یا b و یا هر دو استفاده نشود، فرمول باز خواهد بود.

حال بازه‌ی $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$h=\frac{b-a}{n}, \quad x_i = x_0+ih = a+ih, \quad i=0,1,\dots,n$$

فرض کنید $P(x_s)$ چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن باشد. داریم

$$P(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

با انتخاب مقادیر n، می‌توان روش‌های مختلف انتگرال‌گیری را محاسبه نمود.

دستور ذوزنقه‌ای ساده

در این روش فرض می‌کنیم $n=1$. یعنی بازه‌ی $[a,b]$ را تقسیم نمی‌کنیم. خواهیم داشت

$$x_0=a, \quad x_1=b, \quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{1}=b-a$$

در این صورت $P(x_s)$ تابعی خطی خواهد بود:

$$P(x_s)=f_0+s\Delta f_0$$

انتگرال‌گیری عددی

در این بخش، هدف محاسبه‌ی انتگرال‌های معین به شکل

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

است وقتی

الف) تابع اولیه‌ی f در دست نباشد.

ب) به دست آوردن تابع اولیه‌ی f به سادگی امکان‌پذیر نباشد.

ج) مقادیر متناظر f واقع در $[a,b]$ در دست باشد.

برای مثال یافتن مقدار دقیق انتگرال‌های زیر امکان‌پذیر نیست

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \quad , \quad \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$ را می‌توان به دست آورد ولی محاسبه‌ی آن طولانی است.

از طرفی اگر $h=0.2$ فرض کنیم داریم:

$$f'(2) \simeq \frac{f(a+0.2)-f(a-0.2)}{2\times 0.2} = \frac{f(2.2)-f(1.8)}{0.4}$$

$$= 7.4385$$

حال با استفاده از فرمول بروزنیابی ریچاردسون داریم:

$$f'(2.0) \simeq \frac{4D_{h/2}f - D_h f}{3} = \frac{4\times 7.4015 - 7.4385}{3}$$

$$= 7.3892$$

اگر به روش مستقیم $f'(2)$ را محاسبه کنیم داریم:

$$f'(2.0) = e^{2.0} = 7.3891$$

از مقایسه‌ی سه تخمین به دست آمده با مقدار دقیق، نتیجه می‌گیریم که روش بروزنیابی ریچاردسون بسیار دقیق است.

با فرض اینکه h کوچک باشد پس $f''(\xi_1) \simeq f''(\xi_2)$ و می‌توان از جمله‌ی دوم در (***) صرف نظر نمود. بنابراین

$$3f'(a) \simeq 4D_{\frac{h}{2}}f - D_h f$$

و یا

$$f'(a) \simeq \frac{4D_{\frac{h}{2}}f - D_h f}{3}$$

اگر قرار دهیم

$$D^{(1)}_{h/2} f = \frac{4D_{h/2}f - D_h f}{3}$$

همانند بخش قبل به راحتی می‌توان نشان داد که $D^{(1)}_{h/2} f$ تخمین دقیق‌تری برای $f'(a)$ است.

تمرین - نشان دهید خطای تخمین اخیر، $O(h^4)$ است در حالی که هر یک از تخمین‌های $D_h f$ و $D_{\frac{h}{2}} f$ دارای خطای $O(h^2)$ هستند.

مثال - تابع $f(x)=e^x$ و مقادیر آن مطابق جدول در دست است، $f'(2)$ را بیابید.

x	۱٫۸	۱٫۹	۲	۲٫۱	۲٫۲
$f(x)$	۶٫۰۴۹۶	۶٫۶۸۵۹	۷٫۳۸۹۱	۸٫۱۶۶۲	۹٫۰۲۵۰

حل - همان‌طور که ملاحظه می‌شود فاصله‌ی بین هر دو گره متوالی ۰٫۱ می‌باشد.

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$$f'(2) \simeq \frac{f(2.1) - f(1.9)}{0.2} = \frac{8.1662 - 6.6859}{0.2}$$

$$= 7.4015$$

برونیابی ریچاردسون

برونیابی ریچاردسون راهکاری است که با استفاده از آن می‌توان با ترکیب دو تخمین که برای مشتق یک تابع در یک نقطه در دست است، تخمینی دقیق‌تر به دست آورد.

برای توضیح بیشتر مطلب، می‌دانیم اگر f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1), \quad a-h < \xi_1 < a+h$$

قرار می‌دهیم

$$D_h f = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

پس

$$f'(a) = D_h f - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1), \quad a-h < \xi_1 < a+h \quad (*)$$

حال در فرمول $(*)$، طول گام را نصف می‌کنیم یعنی h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل می‌کنیم:

$$f'(a) = D_{\frac{h}{2}} f - \frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f'''(\xi_2), \quad a-\frac{h}{2} < \xi_2 < a+\frac{h}{2} \quad (**)$$

که در آن

$$D_{\frac{h}{2}} f = \frac{f(a+\frac{h}{2}) - f(a-\frac{h}{2})}{h}$$

حال اگر رابطه‌ی $(**)$ را در ۴ ضرب کرده و رابطه‌ی $(*)$ را از آن کم کنیم، خواهیم داشت

$$4f'(a) - f'(a) = 4D_{\frac{h}{2}} f - \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_2) - D_h f + \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)$$

$$3f'(a) = (4D_{\frac{h}{2}} f - D_h f) + \frac{1}{6}h^2\left[f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)\right] \quad (***)$$

مثال - تابع $f(x)=e^x$ و مقادیر آن را مطابق جدول زیر در نظر بگیرید

x	۱,۸	۱,۹	۲	۲,۱	۲,۲
$f(x)$	۶,۰۴۹۶	۶,۶۸۵۹	۷,۳۸۹۱	۸,۱۶۶۲	۹,۰۲۵۰

فرض کنید بخواهیم تقریبی برای $f'(2)$ بدست آوریم. به ازای $h=0,1$ داریم:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f_{i+1}-f_i}{2h}$$

$$f'(2) \simeq \frac{f(2,1)-f(1,9)}{2\times 0,1} = \frac{8,1662-6,6859}{0,2}$$

$$= 7,4015$$

که خطای برشی این تقریب، $O(h^2)$ است.

همچنین داریم

$$f(x_{i+1}) = f(x_i+h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + O(h^4)$$

و

$$f(x_{i-1}) = f(x_i-h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + O(h^4)$$

از جمع دو رابطه ی بالا داریم

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2} + O(h^2)$$

و یا

$$f''_i \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

خطای تقریب اخیر نیز $O(h^2)$ می باشد.

می توان نشان داد

$$f'''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}_i = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} + O(h^2)$$

$$f'_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

$$f''_i = \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2} + O(h^4)$$

$$f'''_i = \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3} + O(h^4)$$

فصل چهارم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

مشتق‌گیری عددی

در این بخش، محاسبه‌ی مشتق یک تابع را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم

الف) تابع به صورت فرمولی در دست است، امّا فرمول پیچیده است.

ب) مقادیر یک تابع در چند نقطه به صورت جدولی در دست است.

در هر دو حالت می‌توان فرض کرد که مقادیر تابع f به صورت زیر داده شده است

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

فرمول‌های مشتق با استفاده از فرمول تیلور

فرض کنید تابع f در $[a,b]$ به قدر کافی مشتق‌پذیر باشد و x_i، $i=0,1,\dots,n$، نقاط هم فاصله در این بازه باشند. فرض کنید $x_{i+1}=x_i+h$ و $h>0$ و ثابت است. بنابر فرمول تیلور داریم

$$f(x_{i+1})=f(x_i+h)=f(x_i)+h f'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1), \qquad x_i<\xi_1<x_{i+1}$$

و یا

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+h f'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+O(h^3)$$

همین طور

$$f(x_{i-1})=f(x_i-h)=f(x_i)-h f'(x_i)+\frac{h^2}{2!}f''(x_i)+O(h^3)$$

از تفریق دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}+O(h^2)$$

و یا

$$f'_i\approx\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$$

و خطای تقریب بالا (خطای برشی) $O(h^2)$ است.

نمادهای O و o

تعریف O: فرض کنید f یک تابع و k یک عدد حقیقی مثبت باشد و داشته باشیم

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^k} = c \neq 0$$

در این صورت می‌گوییم $f(h)$ متناسب با h^k (از مرتبه‌ی h^k) است و می‌نویسیم

$$f(h) = O(h^k)$$

مثال. اگر $f(x) = x^4 + 2x^2$ آنگاه $f(x) = O(x^2)$. واضح است که هرچه k بزرگتر باشد، وقتی $x \to 0$، $f(x)$ سریعتر به صفر میل می‌کند.

تعریف o: فرض کنید f یک تابع و k یک عدد حقیقی مثبت باشد و داشته باشیم

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h^k} = 0$$

در این صورت می‌گوییم $f(h) = o(h^k)$. یعنی وقتی $h \to 0$، $f(h)$ سریعتر از h^k به صفر میل می‌کند.

مثال. برای o کوچک داریم: $1-\cos x = o(x)$، زیرا

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

توجه کنید که $1-\cos x = O(x^2)$.

مقدمه

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ و b یک بردار $n\times 1$ باشد. هدف، یافتن برداری مانند x می‌باشد، به طوری که داشته باشیم

$$Ax=b$$

که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

قضیه- دستگاه $Ax=b$، دارای جواب یکتاست اگر و تنها اگر $\det(A)\neq 0$.

روش‌های حل دستگاه‌های خطی

این روش‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند:

۱- روش‌های مستقیم: در این گونه از روش‌ها، با فرض آن که دستگاه $Ax=b$ دارای جواب باشد، با تعداد متناهی عمل (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) جواب به دست می‌آید.

۲- روش‌های تکراری: در این روش‌ها، با یک حدس اولیه برای x شروع می‌کنیم (تقریب اولیه برای جواب دستگاه) و با استفاده از آن، تقریب بعدی را برای جواب دستگاه می‌سازیم. با توجه به معیار توقف، ساختن تقریب‌ها را ادامه می‌دهیم تا به تقریب دلخواه برای جواب دستگاه برسیم.

روش‌های مستقیم

۱- روش حذفی گاوس

در این روش ابتدا با اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس افزوده ی $[A \vdots b]$ ، ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل می‌کنیم.

- دستگاه بالا مثلثی زیر را در نظر بگیرید

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

و یا

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ddots$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

$$a_{nn}x_n = b_n$$

با استفاده از سطر آخر دستگاه معادلات بالا می‌توان x_n را محاسبه کرد

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

و از سطر قبل از آن می‌توان با داشتن x_n ، x_{n-1} را محاسبه کرد

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

بهمین ترتیب می‌توان، تمام x_i ها ($i=1,2,\dots,n-2$) را محاسبه نمود. همان طور که ملاحظه شد، ابتدا x_n، سپس x_{n-1}، ... و در نهایت x_1 با استفاده از جایگزینی x_i های بدست آمده در مراحل قبل، محاسبه می‌شوند. برای همین، به این روش، روش جایگزینی پسرو و رگرسیونی. می‌توان نشان داد اگر A یک ماتریس پایین مثلثی باشد، ابتدا x_1، سپس x_2 و ... و در نهایت x_n با جایگزینی پیشرو به دست می‌آیند.

مثال- دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \\ -5x_3 = -15 \end{cases}$$

با استفاده از معادله آخر، داریم:

$$x_3 = 3$$

با استفاده از معادله‌ی دوم و $x_3 = 3$ داریم:

$$-2x_2 = -7 + x_3 = -7 + 3 = -4$$

$$x_2 = 2$$

و در نهایت با استفاده از معادله‌ی اول، داریم:

$$2x_1 = 5 - 3x_2 + x_3 = 5 - 6 + 3 = 2$$

$$x_1 = 1$$

اعمال سطری مقدماتی

دستگاه $Ax=b$ را در نظر بگیرید. سه عمل زیر معروف به اعمال سطری مقدماتی هستند که روی یک دستگاه مانند دستگاه $Ax=b$ اعمال می‌شوند. این اعمال، این خاصیت را دارند که جواب دستگاه اصلی $Ax=b$ را تغییر نمی‌دهند.

۱- ضرب معادله‌ای از دستگاه در یک عدد ناصفر

۲- افزودن مضربی از یک معادله به معادله‌ی دیگر

۳- تعویض دو سطر (یا دو معادله‌ی) یک دستگاه با هم.

همان‌طور که گفته شد، با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، دستگاه $Ax=b$ را به دستگاه دیگری مانند $Rx=c$ تبدیل می‌کنیم که در آن R، یک ماتریس بالا مثلثی است و در عین حال، جواب دستگاه $Ax=b$ را خواهد داشت.

ماتریس افزوده: دستگاه $Ax=b$ را در نظر بگیرید. ماتریس زیر که از قرار گرفتن بردار b در کنار A، ساخته می‌شود، ماتریس افزوده‌ی متناظر با دستگاه $Ax=b$ نامیده می‌شود

$$[A \vdots b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

عناصر لولا: درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را عناصر لولای ماتریس A می‌نامند.

مثال- دستگاه زیر را با روش حذف گاوس، حل کنید.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

حل- ابتدا ماتریس افزوده‌ی متناظر با دستگاه بالا را تشکیل می‌دهیم

$$[A \vdots b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

همان‌طور که گفته شد، باید با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، ماتریس A را به یک ماتریس بالاسلتی تبدیل کنیم. به عبارت دیگر باید، عناصر زیر قطر اصلی A را، صفر کنیم. این کار را با استفاده از عناصر لولا در هر ستون انجام می‌دهیم. یعنی برای صفر کردن عنصر ۱، در محل (۲،۱)، از عنصر لولای ۲ در محل (۱،۱) استفاده می‌کنیم. کافی است، $-\frac{1}{2}$ سطر اول را به سطر دوم اضافه کنیم، تا این اتفاق بیفتد.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 6-\frac{9}{2}\ \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \longrightarrow$$

حال باید درایه‌ی واقع در سطر سوم و ستون اول را با استفاده از عنصر لولای ستون اول، صفر کنیم.

یعنی عنصر ۲، در محل (۱و۲). کافی است $-\frac{3}{2}$ سطر اول را به سطر سوم اضافه کنیم، تا این اتفاق بیفتد.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{-7}{2} \end{array}\right]$$

حال باید درایه واقع در محل (۲و۳) یعنی (۱-) را به کمک عنصر لولای ستون دوم، یعنی (۰)، صفر کنیم توجه کنید که چون این عنصر، صفر است، هر مضربی از آن که به سطر سوم اضافه شود، صفر خواهد بود و اثری در مقدار (۱-) نخواهد گذاشت. از طرف دیگر اگر بخواهیم عنصر (۱-) را با عنصر (۲)، واقع در همان (۲و۱)، صفر کنیم، باید $\frac{1}{2}$ برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه کنیم که این امر باعث می‌شود عنصر (۱و۳) که اکنون صفر است به $\frac{1}{2}$ افزایش یابد، یعنی بالامثلثی بودن ماتریس به دست آمده از بین می‌رود. تنها عمل سطری مقدماتی که می‌تواند ما را کمک کند تا به یک ماتریس بالامثلثی برسیم، تعویض دو سطر است. کافی است سطر دوم و سوم را با هم عوض کنیم خواهیم داشت

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

حال با استفاده از جایگزینی پسرو، جواب دستگاه را به دست می‌آوریم

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$$

$$-x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$-x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \quad x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$$

$$x_2 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow 2x_1 = 9 - (2x_2 + x_3) = 9 - (4+3) = 2$$

$$x_1 = 1$$

- توجه کنید بین دستگاه های معادل (دستگاه هایی که جواب یکسان دارند) از علامت تساوی استفاده نمی شود زیرا آن ها، ماتریس ضرایب و بردار سمت راست یکسان ندارند تا دو دستگاه مساوی باشند، بلکه جواب های یکسانی دارند. برای همین از علامت ($\rightarrow$) بین آن ها استفاده می شود.

۲- روش گاوس - ژوردن

در این روش ماتریس افزوده ی $[A \vdots b]$ را با استفاده از اعمال سطری مقدماتی به ماتریس $[I \vdots C]$ تبدیل می کنیم که در آن، I ماتریس همانی $n \times n$ است با فرض اینکه A یک ماتریس $n \times n$ باشد. یعنی در هر ستون، علاوه بر این که درایه های زیر قطر اصلی را صفر می کنیم، درایه های بالای قطر اصلی را نیز صفر می کنیم و درایه های روی قطر اصلی را نیز، ۱ می کنیم.

توجه - برای دستگاه $Ax=b$ سه حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد

۱- دستگاه جواب داشته باشد و جواب آن منحصر به فرد باشد. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که دترمینان A، مخالف صفر باشد.

۲- دستگاه، بی‌نهایت جواب داشته باشد.

۳- دستگاه جواب نداشته باشد. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود، دستگاه، ناسازگار است.

مثال- دستگاه زیر را به روش گاوس - ژوردن حل کنید.

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3+x_4 &= -2\\
x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= -10\\
2x_1+3x_2+4x_3+x_4 &= 4\\
3x_1+4x_2+x_3+2x_4 &= -10
\end{aligned}$$

حل-

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
1 & 2 & 3 & 4 & -10\\
2 & 3 & 4 & 1 & 4\\
3 & 4 & 1 & 2 & -10
\end{array}\right]
\xrightarrow[\text{به سطر دوم اضافه می‌کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را}}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 1 & 2 & 3 & -8\\
2 & 3 & 4 & 1 & 4\\
3 & 4 & 1 & 2 & -10
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم اضافه می‌کنیم}]{\text{(-2) برابر سطر اول را به}}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 1 & 2 & 3 & -8\\
0 & 1 & 2 & -1 & 8\\
3 & 4 & 1 & 2 & -10
\end{array}\right]
\xrightarrow[\text{را به سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{\text{(-3) برابر سطر اول}}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 1 & 2 & 3 & -8\\
0 & 1 & 2 & -1 & 8\\
0 & 1 & -2 & -1 & -4
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{دوم را به سطر اول اضافه می‌کنیم}]{(-1)\text{ برابر سطر}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{را به سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{(-1)\text{ برابر سطر دوم}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{به سطر چهارم اضافه می‌کنیم}]{(-1)\text{ برابر سطر دوم را}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

توجه کنید که عنصر لولا در ستون سوم، صفر شده است. پس باید سطر سوم را با سطر چهارم تعویض کرد. (سطری که عنصر لولای صفر دارد، با سطرهای پایین‌تر از خود قابل تعویض است.)

چرا؟)

$$\xrightarrow[\text{چهارم با هم}]{\text{تعویض سطر سوم و}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{به سطر اول اضافه می‌کنیم}]{(-\frac{1}{4})\text{ برابر سطر سوم را}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{به سطر دوم می‌افزاییم}]{(\frac{1}{2})\text{ برابر سطر سوم را}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر سوم را در } (-\frac{1}{4})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } (-\frac{1}{4})]{\text{سطر چهارم را در}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{را با سطر اول جمع می‌زنیم}]{\text{سطر چهارم}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم اضافه می‌کنیم}]{\text{قرینه‌ی سطر چهارم را به}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{به سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{\text{قرینه‌ی سطر چهارم را}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

بنابراین جواب دستگاه، عبارت است از

$$x_1 = 1 \,,\; x_2 = -2 \,,\; x_3 = 3 \,,\; x_4 = -4$$

توجه - در جبر خطی، ثابت می‌شود اگر با اعمال سطری مقدماتی نتوان ماتریس افزوده‌ی $[A \,\vdots\, b]$ را به $[I \,\vdots\, C]$ تبدیل کرد، به عبارت دیگر اگر یک یا چند سطر ماتریس A به صفر تبدیل شود، آنگاه این ماتریس قابل تبدیل به ماتریس همانی نبوده و دستگاه، یا دارای جواب نیست و یا بی‌نهایت

جواب دارد.

مثال- دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{دوم جمع می‌زنیم}]{\text{سطر اول را با سطر}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{را با سطر سوم جمع می‌زنیم}]{(-2)\text{ برابر سطر اول}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[(\frac{1}{3})\text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر دوم را در}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{را به سطر اول اضافه می‌کنیم}]{(-2)\text{ برابر سطر دوم}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{را به سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{(-3)\text{ برابر سطر دوم}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که ماتریس A به I تبدیل نشد و از طرفی روی متغیر x_3 هیچ شرطی نداشته نشده است. معادله‌ی $0=0$ همیشه برقرار است و x_3 آزاد و دلخواه است. پس دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. با توجه به اینکه x_3 می‌تواند هر مقداری را اختیار کند. (هر متغیر دیگری را هم می‌توان

آزاد در نظر گرفت.)

فرض کنید $x_3 = t$ دلخواه باشد در این صورت x_1 و x_2 به صورت زیر بر اساس x_3 محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \frac{5}{3}t \\ x_2 = 1 - \frac{2}{3}t \\ x_3 = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

دلخواه

مثال- دستگاه زیر را حل کنید.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر اول را در } (\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{دوم جمع می‌زنیم}]{\text{سطر اول را با سطر}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جمع می‌زنیم}]{\text{قرینه‌ی سطر اول را با سطر سوم}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر دوم را در } (\frac{1}{3})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{دوم را با سطر اول جمع می‌زنیم}]{\text{۲ برابر سطر}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{با سطر سوم جمع می‌زنیم}]{\text{۳ برابر سطر دوم را}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

بنابراین داریم

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

معادله‌ی سوم، یک معادله‌ی ناسازگار است زیرا $0 \neq 4$. بنابراین دستگاه $Ax=b$ دارای جواب نمی‌باشد.

روش گاوس-ژوردن برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس

قضیه- فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. اگر ماتریسی مانند B، وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم

$$AB = BA = I$$

آنگاه B، معکوس ماتریس A است.

- می‌خواهیم معکوس ماتریس A، یعنی B را محاسبه کنیم. باید داشته باشیم

$$AB = I$$

و یا

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم اگر ماتریس A ، در ستون iام ماتریس B ضرب شود، ستون iام ماتریس همانی را می‌دهد

یعنی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{مکان } i\text{ام} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

هدف، یافتن ماتریس B و یا به عبارت دیگر یافتن ستون به ستون ماتریس B است. با توجه به دستگاه معادله‌ی اخیر، یافتن ستون‌های B ، معادل با حل n دستگاه معادله‌ی خطی به صورت فوق است. اگر همه‌ی این n دستگاه را بخواهیم با روش حذفی گاوس - ژوردن حل کنیم، باید با اعمال سطری مقدماتی یکسان A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم، پس مفید است که تمام بردارهای سمت راست این n دستگاه را در کنار هم نوشته و برای یک بار، اعمال سطری مقدماتی را بر A اعمال نماییم. یعنی ماتریس افزوده‌ی زیر را در نظر بگیریم

$$[A \,\vdots\, I]$$

و سعی کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم، زمانی که A به I تبدیل شد، ماتریس سمت راست،

ماتریس A^{-1} خواهد بود. زیرا ستون اول این ماتریس با توجه به آنچه گفته شد، ستون اول ماتریس B و ... و ستون n ام آن ستون n ام ماتریس B خواهد بود و B، همان A^{-1} است.

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]$$

در حقیقت، برای اینکه، مطمئن شویم A^{-1} را درست محاسبه کرده‌ایم، کافی است آن را در A ضرب کنیم درصورتی که $AA^{-1}=I$ شد، در این صورت A^{-1}، را درست محاسبه کرده‌ایم.

مثال- معکوس ماتریس زیر را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

حل-

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر اول را در } (\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{دوم اضافه می‌کنیم}]{\text{قرینه‌ی سطر اول را به سطر}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{سوم اضافه می‌کنیم}]{\text{قرینه‌ی سطر اول را به سطر}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر دوم را در } \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{اول جمع می‌کنیم}]{\text{سطر دوم را با سطر}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{(-4)\text{ برابر سطر دوم را به}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{سطر سوم را در } (-\frac{2}{3})}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{سطر اول اضافه می‌کنیم}]{(-\frac{5}{4})\text{ برابر سطر سوم را به}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{دوم اضافه می‌کنیم}]{\frac{1}{4}\text{ سطر سوم را به سطر}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

بنابراین $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. حال اگر AA^{-1} را محاسبه کنیم، خواهیم دید $AA^{-1} = I$.

روش های تکراری

روش تکراری ژاکوبی

دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

فرض کنیم $a_{ii} \neq 0$ ، $\forall i$. دستگاه فوق را به شکل زیر می‌نویسیم

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right)$$

یا به صورت فشرده

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

حال اعداد $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ را به عنوان حدس های اولیه به ترتیب برای مجهولات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ انتخاب نموده و فرمول های تکراری زیر را می نویسیم

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)$$

یا به صورت فشرده

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad , i=1,2,\dots,n$$

که در آن $k=0,1,\dots,n$.

تعداد مراحل محاسبه x_i ها را آنقدر ادامه می‌دهیم که داشته باشیم :

$$|x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon , \quad i=1,2,\dots,n$$

که در آن $\varepsilon>0$ داده شده است .

روش تکراری گاوس - سایدل

این روش، مشابه روش ژاکوبی است ، با این تفاوت که به محض اینکه در تکراری ، مجهولی به دست آمد

در همان تکرار از آن برای محاسبه ی مجهولات بعدی استفاده می‌شود . پس خواهیم داشت

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) , \quad i=1,2,\dots,n$$

مثال - دستگاه زیر را با روش گاوس - سایدل و با معیار توقف $\varepsilon = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$ حل کنید .

$$20x_1 + x_2 - x_3 = 17$$

$$x_1 - 10x_2 + x_3 = 13$$

$$-x_1 + x_2 + 10x_3 = 18$$

(حدس اولیه را $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ در نظر بگیرید)

حل -

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right), \quad i=1,2,\dots,n$$

بنابراین

$$x_1^{(1)} = \frac{\left(b_1 - \sum_{j=2}^{3} a_{1j}\, x_j^{(0)}\right)}{20} = \frac{17-(1\times 0+(-1)\times 0)}{20}$$

$$= \frac{17}{20} = 0{,}85$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\left(b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j}\, x_j^{(1)} - \sum_{j=3}^{3} a_{2j}\, x_j^{(0)}\right)}{a_{22}} = \frac{(13-(1)\times(0{,}85)-(+1)\times(0))}{-10}$$

$$= -1{,}215$$

$$x_3^{(1)} = \frac{\left(b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}\, x_j^{(1)}\right)}{a_{33}} = \frac{(18-(-1)\times(0{,}85)-(1)\times(-1{,}215))}{10} = 2{,}0065$$

ملاحظه می‌شود که

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = |0{,}85 - 0| \not< \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = |(-1{,}215 - 0)| = 1{,}215 \not< \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = |2{,}0065 - 0| \not< \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

اگر روند بالا را تکرار کنیم بعد از ۴ مرحله به جواب مطلوب می‌رسیم

$$x_1^{(4)} = 0{,}99999, \quad x_2^{(4)} = -1{,}00000, \quad x_3^{(4)} = 2{,}00000$$

و خواهیم داشت $|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| < \varepsilon,\ |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| < \varepsilon,\ |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| < \varepsilon$

فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. اگر عددی (حقیقی یا مختلط) مانند λ و برداری مخالف صفر مانند x وجود داشته باشد به طوری که

$$Ax = \lambda x$$

آنگاه λ را یک مقدار ویژه‌ی A و x را بردار ویژه‌ی متناظر با λ می‌نامیم. معادله‌ی بالا معادل است با

$$(A - \lambda I)x = 0$$

یعنی باید $x \neq 0$ را بیابیم که در معادله‌ی اخیر، صدق کند. اگر $\det(A-\lambda I) \neq 0$، در این صورت بنا بر قضیه‌ی دستگاه بالا، فقط و فقط یک جواب دارد. با توجه به اینکه $x = 0$ جواب دستگاه بالاست، پس تنها جواب این دستگاه $x = 0$ خواهد بود. امّا بنا بر تعریف x، این بردار باید مخالف صفر باشد. این حالت، زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $\det(A - \lambda I) = 0$. با استفاده از این خاصیت، می‌توان مقادیر ویژه و در نتیجه بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس را محاسبه نمود.

مثال- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

حل- ابتدا $\det(A-\lambda I)=0$ را تشکیل می‌دهیم

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -7 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

دترمینان بالا را می‌توان بر اساس هر کدام از سطرها یا ستون ها بسط داد. با بسط دترمینان بالا برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)\overset{(-1)^{1+1}}{\vee}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}+(+2)\overset{(-1)^{1+2}}{\vee}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3-\lambda \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ -7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(-3-\lambda)-2\right]+(-2)\left[2(-3-\lambda)+7\right]$$

$$=(2-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda)-4+2\lambda-4(-3-\lambda)-14$$

$$=(-3-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-4\right]+2\lambda-18$$

$$=(-3-\lambda)\left[2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-4\right]+2\lambda-18$$

$$=-(3+\lambda)\left[-2-3\lambda+\lambda^2\right]+2\lambda-18$$

$$=-\left[-6-9\lambda+3\lambda^2-2\lambda-3\lambda^2+\lambda^3-2\lambda+18\right]$$

$$=-\left[\lambda^3-13\lambda+12\right]=-(\lambda-1)\left[\lambda^2+\lambda-12\right]=0$$

($\lambda=1$ ریشه‌ی $\lambda^3-13\lambda+12=0$ است)

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1 \\ \lambda^2+\lambda-12=0\end{cases}$$

$$\lambda^2+\lambda-12=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\times12}}{2}=\frac{-1\pm7}{2} \quad \begin{cases}\lambda=\frac{-8}{2}=-4\\ \lambda=\frac{6}{2}=3\end{cases}$$

پس $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=-4$ و $\lambda_3=3$ ریشه‌های معادله‌ی

$\det(A-\lambda I)=0$ هستند، که همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می‌باشند.

حال می‌خواهیم بردارهای ویژه، متناظر با مقادیر ویژه را محاسبه کنیم. ابتدا بردار ویژه‌ی A متناظر با

$\lambda_1=1$ را محاسبه می‌کنیم. با پایه داشته باشیم $Ax=\lambda x=x$ و یا

$$\begin{bmatrix}2&2&0\\2&1&1\\-7&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

و یا

$$\begin{cases}2x_1+2x_2=x_1\\2x_1+x_2+x_3=x_2\\-7x_1+2x_2-3x_3=x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1+2x_2=0\\2x_1+x_3=0\\-7x_1+2x_2-4x_3=0\end{cases}$$

اگر روند حذفی گاوس را روی مسأله پیاده کنیم خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\2&0&1&0\\-7&2&-4&0\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-4&1&0\\0&16&-4&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-4&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases}x_1+2x_2=0\\-4x_2+x_3=0\\0=0\end{cases}$$

چون معادله‌ی سوم، معادله‌ای است که همیشه برقرار است، پس در واقع دو معادله و سه مجهول داریم. یکی از مجهولات را به دلخواه انتخاب می‌کنیم، مثلاً فرض می‌کنیم $x_3=1$، در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{cases} -4x_2 = -x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \\ x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

در واقع دستگاه مذکور، بی‌نهایت جواب دارد. از بین این جواب‌ها، هر جوابی را برای X_1 می‌توان اختیار کرد به شرطی که $X_1 \neq 0$ (یعنی تمام مؤلفه‌های X_1، با هم صفر نشوند.)

به همین ترتیب می‌توان بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی λ_2 و λ_3 را به دست آورد که عبارتند از

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(در دو حالت اخیر هم، دستگاه $AX_i = \lambda_i X_i$ ($i = 2, 3$) بی‌نهایت جواب دارد که یکی را به دلخواه اختیار کرده‌ایم.)

نرم‌ها

از نرم‌ها برای تعیین بزرگی یا اندازه‌ی بردارها و ماتریس‌ها استفاده می‌شود. این نرم‌ها به ترتیب به صورت $\|x\|$ و $\|A\|$ نمایش داده می‌شوند.

نرم‌های برداری (مثال)

۱- نرم ۱ برای بردار x که به فرم $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ می‌باشد، عبارت است از $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

۲- نرم ۲ (نرم اقلیدسی) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

۳- نرم بی‌نهایت $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

نرم‌های ماتریسی

متناظر با نرم‌های بالا برای بردارها، برای ماتریس $A = (a_{ij})$ نرم‌های ماتریسی به صورت زیر تعریف می‌شوند

۱- نرم ۱

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

۲- نرم بی‌نهایت

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

۳- نرم ۲

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

که در آن $\rho(A^TA)$، ماکزیمم مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A^TA از نظر قدر مطلق می‌باشد.

روش توانی برای محاسبه‌ی بزرگترین مقدار ویژه‌ی یک ماتریس از نظر قدر مطلق و بردار ویژه‌ی متناظر با آن

قضیه- فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد به طوری که

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n|$$

فرض کنید بردارهای ویژه‌ی متناظر، x_1 ، x_2 ، ... و x_n ، مستقل خطی باشند. اگر $u_0 \in \mathbb{R}^n$ برداری دلخواه باشد، دنباله‌ی $\{u_r\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u_{r+1} = A u_r \ , \ r = 0, 1, \dots$$

در این صورت

$$\lambda_1 = \lim_{r \to \infty} \frac{(u_{r+1})_i}{(u_r)_i}$$

که در آن $(u_r)_i$ مؤلفه‌ی iام بردار u_r است. همچنین وقتی $r \to \infty$ ، u_r به سمت x_1 ، بردار ویژه‌ی متناظر با λ_1 ، میل می‌کند.

با توجه به قضیه‌ی بالا، الگوریتم روش توانی به صورت خواهد بود:

بردار دلخواه u_0 را در $\mathbb{R}^n$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $u_1 = A u_0$. فرض می‌کنیم

$$\mu_1 = \max_{1 \le i \le n} |(u_1)_i| = \| u_1 \|_\infty$$

در این صورت قرار می‌دهیم

$$w_1 = \frac{u_1}{\mu_1}$$

این عمل، نرمالیزه کردن بردار u_1 نامیده می‌شود. سپس قرار می‌دهیم

$$u_2 = A w_1$$

و بعد از روی u_2 ، μ_2 و w_2 را می‌سازیم. این روند را آنقدر تکرار می‌کنیم که معیار توقف

برقرار شود.

معیار توقف - معمولاً یکی از شرایط زیر را به عنوان معیار توقف در نظر می‌گیرند

$$\max_{1\le i\le n} \left| (w_{r+1})_i - (w_r)_i \right| < \varepsilon \quad , \quad r=0,1,\dots$$

که معادل است با

$$\| w_{r+1} - w_r \|_\infty < \varepsilon$$

$$| \mu_{r+1} - \mu_r | < \varepsilon \quad , \quad r=0,1,\dots$$

مثال - بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدر مطلق و بردار ویژه‌ی متناظر با آن را با استفاده از روش توانی و با معیار توقف $\max_{1\le i\le n} \left| (w_{r+1})_i - (w_r)_i \right| < 0.001$ به دست آورید ($r=0,1,\dots$)

(بردار اولیه‌ی u_0 را $u_0 = [1,1]^T$ در نظر بگیرید.)

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل -

$$u_1 = A u_0 = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 = \max\{|۵|, |۷|\} = ۷$$

$$w_1 = \frac{u_1}{\mu_1} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} \\ ۱ \end{bmatrix} ,$$

از طرفی $\mu_0 = \max\{|1|,|1|\} = 1$ پس $w_0 = u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. در این صورت داریم

$$\max_{1\le i\le 2}\{|(w_1)_i - (w_0)_i|\} \not< 0.001$$

بنابراین u_2 را محاسبه می‌کنیم

$$u_2 = Aw_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{7} \\ \frac{45}{7} \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \max\left\{\left|\frac{27}{7}\right|, \left|\frac{45}{7}\right|\right\} = \frac{45}{7}$$

پس

$$w_2 = \frac{u_2}{\mu_2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\max_{1\le i\le 2}\{|(w_2)_i - (w_1)_i|\} \not< 0.001$$

اگر همین روند را ادامه دهیم، به دست می‌آوریم

$$\mu_{10} = 6.00147, \quad w_{10} = \begin{bmatrix} 0.50036 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11} = 6.00073, \quad w_{11} = \begin{bmatrix} 0.50018 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با انتخاب $\varepsilon = 0.001$، ملاحظه می‌شود که

$$\max_{1\le i\le 2}\{|(w_{11})_i - (w_{10})_i|\} < \varepsilon$$

پس خواهیم داشت

$$|\lambda_1| \simeq 6.00073, \quad x_1 \simeq [0.50018 \quad 1]^T$$

تمرینات فصل پنجم: دستگاه معادلات خطی

۱- دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = \frac{47}{60} \end{cases}$$

الف) معکوس ماتریس ضرایب را با استفاده از روش حذفی گاوس - ژوردن محاسبه کنید.

ب) جواب دستگاه را به کمک قسمت (الف) به دست آورید.

۲- دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

جواب دستگاه را با روش تکراری گاوس - سایدل و با دقت $\epsilon = 0.01$ به دست آورید.

(حدس اولیه را $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}] = [0, 0, 0]^T$ در نظر بگیرید.)

۳- ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

الف) مقادیر ویژه و بردار ویژه‌ی متناظر با بزرگترین مقدار ویژه‌ی A از نظر قدرمطلق را به روش مستقیم محاسبه نمایید.

ب) با روش توان، بزرگترین مقدار ویژه‌ی A (از نظر قدرمطلق) و بردار ویژه‌ی نظیر آن را با دقت $\epsilon = 0.01$ به دست آورید. بردار اولیه را $u_0 = [0, 0, 1]^T$ در نظر بگیرید. (شرط توقف را روی W_i ها در نظر بگیرید.)

هر روزی که می‌آید، این شما هستید که انتخاب می‌کنید چگونه بگذرد.

موفق باشید

ز) جنبه جدید بودن و نوآوری تحقیق از منظر دانشجو :

بر اساس تحقیقات انجام شده، تا کنون پژوهشی مبنی بر اندازه گیری داروهای تریامترن و متوپرولول با استفاده از روش قالب گیری مولکولی گزارش نشده است.

تاریخ / امضای دانشجو

ط) اظهار نظر استاد راهنما: (این قسمت توسط استاد راهنما تکمیل گردد)

جنبه جدید بودن و نوآوری تحقیق از نظر استاد راهنما :

با بررسی متون مشخص شد داروهای تریامترن و متوپرولول به روش قالب مولکولی اندازه گیری نشده است.

تاریخ / امضاء استاد راهنما

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

مقدمه

یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول در حالت کلی به فرم

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

نوشته می‌شود که در آن (۲) را شرط اولیه می‌نامند. معادله‌ی (۱) همراه با شرط (۲) یک مسأله‌ی مقدار اولیه نامیده می‌شود. منظور از حل عددی چنین معادلاتی، تعیین مقادیر تقریبی تابع مجهول $y=y(x)$ است.

برای انجام این کار، بازه‌ای که علاقه‌مند به تعیین مقادیر تابع بر روی آن هستیم را توسط نقاط $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ افراز کرده و فرض می‌کنیم فواصل افراز برابر با ثابت h باشد.

به عبارت دیگر

$$x_i = a + ih \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

مقدار h را طول گام می‌نامیم.

۱- روش اویلر

در این روش بسط تیلور تابع y را در نقطه‌ی x_n و حول نقطه‌ی x_{n-1} تا مشتقات مرتبه‌ی اول می‌نویسیم

$$y(x_n) = y(x_{n-1}+h) \simeq y(x_{n-1}) + h\,y'(x_{n-1})$$

و یا

$$y(x_n) \simeq y(x_{n-1}) + h\,f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))$$

حال اگر y_n تقریبی از $y(x_n)$ باشد یعنی

$$y_n = y_{n-1} + h\,f(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n=1,2,\dots$$

این فرمول، فرمول اویلر خواهد بود.

مثال ۵ - مطلوب است حل عددی مسأله مقدار اولیه زیر داده شده با $h=0.2$ و با استفاده از روش اویلر.

($y(1)$ را تخمین بزنید.)

$$\begin{cases} y' = y + x - 1 & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_n = y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1	1	1.04	1.128	1.2736	$\boxed{1.48832}$

$$y(1) \simeq y_5 = 1.48832$$

تمرین- با استفاده از روش اویلر مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با طول گام $h=0.1$ حل نمایید.

($y(1)$ را تخمین بزنید.)

$$\begin{cases} y' = \sin 2x - y \tan x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

۲- روش اویلر بهبود یافته

اگر در فرمول اویلر

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

به جای $f(x_0, y_0)$ که شیب منحنی جواب مسأله در نقطه‌ی (x_0, y_0) است، میانگین شیب‌ها را در دو نقطه‌ی (x_0, y_0) و $(x_1, y(x_1))$ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))\right]$$

که فرمول اویلر بهبود یافته نامیده می‌شود. در این فرمول $y(x_1)$ مجهول است، اما می‌توان آن را با مقدار تقریبی آن از فرمول ساده‌ی اویلر، تخمین زد. یعنی

$$y(x_1) \simeq y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

(۲)

پس می‌توان نوشت

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, z_1)\right]$$

$$z_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

مثال- جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را با روش اویلر بهبود یافته و با طول گام $h = 0.2$ به دست آورید.

$$y' = x^2 + y \ , \ y(0) = 1 \ , \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (x_0, y_0) = (0, 1)$$

k	x_k	z_k	y_k
۱	۰.۲	۱.۲	۱.۲۲۴
۲	۰.۴	۱.۵۱۴۱	۱.۴۷۶۸
۳	۰.۶	۱.۸۴۸۹	۱.۹۰۲۴
۴	۰.۸	۲.۳۵۴۹	۲.۴۲۶۲
۵	۱.۰	۳.۰۳۹۴	۳.۱۳۶۸

۳- روش سری تیلور

فرض کنید $y(x)$ جواب تحلیلی (دقیق) مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ باشد. با فرض آنکه $y(x)$ در نقطه‌ی x_0 به قدر کافی مشتق‌پذیر باشد، بنابر فرمول تیلور می‌توان نوشت

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(c), \qquad x_0 < c < x$$

از اینکه $y'(x) = f(x, y)$ پس $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ برای یافتن $y''(x_0)$ و سایر مشتقات y باید از y' نسبت به x مشتق‌گیری نماییم. مثلاً

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) = f_x(x, y) + y'(x) f_y(x, y)$$

پس $y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\, f(x_0, y_0)$.

حال اگر هدف محاسبه‌ی مقدار تقریبی $y(x_n)$ باشد و داشته باشیم $x_n = x_0 + nh$

ابتدا با استفاده از بسط تیلور مقدار $y(x_1)$ را تخمین می‌زنیم

$$y(x_1) = y(x_0) + (x_1 - x_0)y'(x_0) + \cdots + \frac{(x_1 - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$

$$+ \frac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(c), \quad x_0 < c < x_1$$

با توجه به اینکه $x_1 - x_0 = h$ پس

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(c), \quad x_0 < c < x_1$$

اگر از خطای برشی صرف نظر کنیم y_1 که تقریبی از $y(x_1)$ است به دست می‌آید

$$y_1 = y(x_0) + hy'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0)$$

حال با استفاده از y_1، می‌توان تقریبی از $y(x_2)$ که آن را با y_2 نشان می‌دهیم، به دست آوریم

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \cdots + \frac{h^n}{n!} y_1^{(n)}$$

به همین ترتیب، روند را ادامه می‌دهیم تا y_n که تقریبی از $y(x_n)$ است، به دست آید.

مثال- جواب مسأله مقدار اولیه‌ی زیر را از $x=0$ تا $x=0.2$ با طول گام $h=0.1$ و با استفاده از فرمول تیلور مرتبه‌ی ۳ به دست آورید.

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

حل- داریم $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$ و

$$y'' = 2x + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 2\times 0 + 2\times 1\times y'(0) = 2\times 1\times 1 = 2$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = 2 + 2(1)^2 + 2\times 1\times 2 = 2 + 2 + 4 = 8$$

$$y(0.1) \simeq y_1 = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0)$$

$$= 1 + (0.1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(2) + \frac{(0.1)^3}{6}(8) = 1.113333$$

$$y'(0/1) \simeq (0/1)^2 + (y(0/1))^2 = 1/245061$$

$$y''(0/1) \simeq 2(0/1) + 2(1/111333)(1/245061) = 2/967355$$

$$y'''(0/1) \simeq 2 + 2(1/245061)^2 + 2(1/111333)(2/967355) = 11/69579$$

$$y(0/2) \simeq y_2 = y_1 + h\,y'_1 + \frac{h^2}{2}\,y''_1 + \frac{h^3}{6}\,y'''_1 = 1/252626$$

۴- روش های رانگ-کوتا

در این روش ها، فرمول هایی برای به دست آوردن جواب تقریبی مساله ی مقدار اولیه ی

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a_1 \le x \le b_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

جستجو می کنیم که از دقت بالا برخوردار بوده، بدون اینکه نیاز باشد طول گام را خیلی کوچک اختیار کرد و همچنین نیازی به محاسبه ی مشتق های نسبی تابع f در این گونه روش ها نمی باشد.

روش رانگ-کوتای مرتبه ی دو

فرمول رانگ-کوتای مرتبه ی دو به شکل زیر است

$$y_{i+1} = y_i + Ak_1 + Bk_2, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

که در آن

$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h\,f(x_i + ah, y_i + bk_1)$$

در فرمول های بالا a و b و A و B مجهول هستند که باید به دست آیند. برای این منظور کافی است بسط تیلور y_{i+1} را حول نقطه ی x_i تا مشتقات مرتبه ی سوم بنویسیم. سپس بسط تیلور دو متغیره ی $f(x_i+ah, y_i+bk_1)$ را حول نقطه ی (x_i, y_i) تا مشتقات مرتبه ی دوم نوشته و از رابطه ی

$$y_{i+1} = y_i + Ak_1 + Bk_2$$

ضرایب توان های مساوی h را متحد با هم قرار دهیم. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{cases} A+B=1 \\ aB=bB=\frac{1}{2} \end{cases}$$

یک جواب برای معادلات بالا چنین است

$$A=B=\frac{1}{2}\ ,\ a=b=1$$

لذا فرمول رانگ کوتای مرتبه ی دو به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ k_1=hf(x_i,y_i) \\ k_2=hf(x_i+h,\ y_i+k_1) \\ i=0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

خطای موضعی این روش $O(h^3)$ است، زیرا با فرمول تیلور مرتبه ی دو از احاطه دقت برابری می کند.

<u>توجه</u>: فرمول رانگ کوتای مرتبه ی دو، همان فرمول اویلر بهبود یافته می باشد.

<u>مثال</u> با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه ی دو، تقریبی برای $y(1)$ بدست آورید.

$$\begin{cases} y'=\sin 2x-y\tan x \\ y(0)=1 \end{cases}\quad ,\quad h=0.1$$

x_n	y_n
0.0	1.00000000
0.1	1.00491673
0.2	1.01899521
0.3	1.04032680
0.4	1.06583069
0.5	1.09139887
0.6	1.11209049
0.7	1.12236772
0.8	1.11636296
0.9	1.08816615
1.0	1.03211909

تمرین: مطلوب است حل عددی مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی $\begin{cases} y' = \dfrac{\quad}{y(1+x^3)} \\ y(0)=1 \end{cases}$ به ازای $h=0.2$ و به دست آوردن تقریبی برای $y(0.4)$.

روش رانگ کوتای مرتبه‌ی چهار

معمولترین روش از دسته‌ی روش‌های رانگ-کوتا، روش رانگ - کوتای مرتبه‌ی چهار می‌باشد که بر پایه‌ی چندجمله‌ای تیلور مرتبه‌ی چهار شکل می‌گیرد، به این ترتیب لازم است $y(x)$ دارای پنج مشتق پیوسته باشد.

فرمول این روش به صورت زیر است

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1 \quad , \quad y_{i+1} \simeq y(x_{i+1})$$

می‌توان نشان داد که خطای برشی این روش، $O(h^5)$ است و به همین دلیل نتایج حاصل از آن بسیار دقیق است.

مثال- مطلوب است حل عددی مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی $\begin{cases} y' = 2x(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ با $h=0.1$ روی $[0,1]$ از روش رانگ کوتای مرتبه‌ی چهار.

x_n	y_n
0.0	0.000000000
0.1	0.010050167
0.2	0.040810770
0.3	0.094174265
0.4	0.173510814
0.5	0.284025256
0.6	0.433328995
0.8	0.896478467
0.9	1.247902590
1.0	1.718270175

معادلات مرتبه بالاتر و دستگاه های معادلات دیفرانسیل

یک دستگاه از مسائل مقدار اولیه مرتبه ی اول از مرتبه ی m در حالت کلی به شکل زیر است

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad , y_1(a) = \alpha_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad , y_2(a) = \alpha_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad , y_m(a) = \alpha_m \end{cases} \quad \text{و} \quad \underline{a \le x \le b}$$

می توان روش های عددی گفته شده در قسمت های قبل را برای حل دستگاه بالا به کار برد.

- در حالت خاص، یک دستگاه دو معادله با دو مجهول y_1, y_2 را به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \quad , y_1(x_0) = y_{01} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \quad , y_2(x_0) = y_{02} \end{cases} \qquad a \le x \le b \qquad (8)$$

فرمول های اویلر و رانگ کوتا برای این دستگاه به صورت زیر است

اویلر

$$\begin{cases} (y_1)_{i+1} = (y_1)_i + h\, f_1(x_i, (y_1)_i, (y_2)_i) \\ (y_2)_{i+1} = (y_2)_i + h\, f_2(x_i, (y_1)_i, (y_2)_i) \end{cases}$$

فرمول رانگ کوتای مرتبه ی دو

$$(y_1)_{i+1} = (y_1)_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$(y_2)_{i+1} = (y_2)_i + \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

$$k_1 = h\, f_1(x_i, (y_1)_i, (y_2)_i) \quad , \quad L_1 = h\, f_2(x_i, (y_1)_i, (y_2)_i)$$

$$k_2 = h\, f_1(x_i + h, (y_1)_i + k_1, (y_2)_i + L_1)$$

$$L_2 = h\, f_2(x_i + h, (y_1)_i + k_1, (y_2)_i + L_1)$$

توجه کنید، k_2 و L_2 زمانی قابل محاسبه اند که k_1 و L_1 هر دو محاسبه شده باشند.

فرمول رانگ کوتای مرتبه ی چهار

$$(y_1)_{i+1} = (y_1)_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$(y_2)_{i+1} = (y_2)_i + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$k_1 = h\, f_1(x_i, (y_1)_i, (y_2)_i) \quad , \quad L_1 = h\, f_2(x_i, (y_1)_i, (y_2)_i)$$

$$k_2 = h\, f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, (y_1)_i + \frac{k_1}{2}, (y_2)_i + \frac{L_1}{2}\right)$$

$$L_2 = h\, f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, (y_1)_i + \frac{k_1}{2}, (y_2)_i + \frac{L_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h\, f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, (y_1)_i + \frac{k_2}{2}, (y_2)_i + \frac{L_2}{2}\right)$$

$$L_3 = h\, f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, (y_1)_i + \frac{k_2}{2}, (y_2)_i + \frac{L_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h\, f_1(x_i + h, (y_1)_i + k_3, (y_2)_i + L_3)$$

$$L_4 = h\, f_2(x_i + h, (y_1)_i + k_3, (y_2)_i + L_3)$$

ملاحظه می‌شود تا زمانی که L_1 و k_1 محاسبه نشوند نمی‌توان k_2 و L_2 را محاسبه کرد.

اگر k_2 و L_2 محاسبه نشوند نمی‌توان k_3 و L_3 را محاسبه کرد و اگر k_3 و L_3 محاسبه نشوند، قادر به محاسبه‌ی k_4 و L_4 نخواهیم بود.

<u>تمرین</u> برای دستگاه دو معادله و دو مجهول

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \qquad y_1(x_0) = y_{01}, \quad y_2(x_0) = y_{02}$$

فرمول اویلر بهبود یافته را به دست آورید و با استفاده از آن دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y + t, & x(0) = 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + 3, & y(0) = -5 \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \ , \ h = 0/2$$

کاربرد دستگاه‌ها

<u>مثال</u> در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر، $y(0.2)$ را با روش رانگ‌کوتای مرتبه‌ی ۴ و با طول گام $h=0.1$ تخمین بزنید.

$$y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

حل- مسأله‌ی داده شده یک مسأله‌ی از مرتبه دوم می‌باشد. تمام روش‌هایی که تاکنون برای حل مسائل مقدار اولیه دیده‌ایم، از مرتبه‌ی دوم بوده‌اند. برای این منظور کافی است از تغییر متغیر استفاده کنیم، قرار می‌دهیم

$$z = y' \Rightarrow z' = y'' \Rightarrow z' = 5y' - 4y = 5z - 4y$$

در این صورت معادله‌ی مرتبه‌ی دوم داده شده به یک دستگاه از دو معادله‌ی مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = 5z - 4y, & z(0) = 2 \end{cases}$$

در اینجا با توجه به نمادگذاری انجام شده داریم:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = z \\ f_2(x, y, z) = 5z - 4y \end{cases}$$

(۱۰)

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = h f_1(x_i, y_i, z_i) \\ L_1 = h f_2(x_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = h f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}\right) \\ L_2 = h f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_3 = h f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}\right) \\ L_3 = h f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_4 = h f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + L_3) \\ L_4 = h f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = z \quad , \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2) \\ f_2(x, y, z) = 5z - 4y \quad , \quad h = 0.1 \quad , \quad y(0.2) = ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = h f_1(x_0, y_0, z_0) = h z_0 = 0.1 \times 2 = \underline{0.2} \\ L_1 = h f_2(x_0, y_0, z_0) = h(5z_0 - 4y_0) = 0.1(\cancel{5 \times 2 - 4 \times 1}^{\,14}) = \underline{0.4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_2 = h f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = 0.1\left(z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = 0.1\left(2 + \frac{0.4}{2}\right) \\ \qquad = 0.1(2.2) \\ \qquad = \underline{0.22} \\ L_2 = h f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = h\left(5\left(z_0 + \frac{L_1}{2}\right) - 4\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right)\right) \\ \qquad = 0.1\left[\cancel{5\left(2 + \frac{0.4}{2}\right)}^{\,11} - \underbrace{4\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)}_{4.4}\right] = \underline{0.66} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_3 = h f_1\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) \\ L_3 = h f_2\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_3 = h\left(z_0 + \frac{L_2}{2}\right) = 0/1\left[2 + \frac{0/22}{2}\right] = 0/1\left[2 + 0/22\right] = 0/1 \times 2/22 = \underline{0/222} \\ L_3 = h\left(5\left(z_0 + \frac{L_2}{2}\right) - 6\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right)\right) = 0/1\left[5 \times (2/22) - 6\left(1 + \frac{0/22}{2}\right)\right] \end{cases}$$

$$= 0/1[4/44] = \underline{0/444}$$

$$\begin{cases} k_4 = h f_1(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + L_3) = h \times (z_0 + L_3) = 0/1(2 + 0/444) = \underline{0/2444} \\ L_4 = h f_2(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + L_3) = h \times \left[5(z_0 + L_3) - 6(y_0 + k_3)\right] \end{cases}$$

$$= 0/1\left[5 \times 2/444 - 6(1 + 0/222)\right]$$

$$= 0/1 \times [12/22 - 7/332]$$

$$= \underline{0/4888}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}\left(0/2 + 2(0/22 + 0/222) + 0/2444\right) = \underline{1/2218} \\ z_1 = z_0 + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) = 2 + \frac{1}{6}\left(0/4 + 2(0/44 + 0/444) + 0/4888\right) = \underline{2/4428} \end{cases}$$

که در آن $\begin{cases} y_1 \simeq y(x_1) = y(0/1) \\ z_1 \simeq z(x_1) = z(0/1) \end{cases}$. حال با استفاده از (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2)

را به دست می‌آوریم

$$(x_1, y_1, z_1) = (0/1,\ 1/2218,\ 2/4428)$$

$$\begin{cases} k_1 = h f_1(x_1, y_1, z_1) = h z_1 = 0/1 \times 2/4428 = \underline{0/24428} \\ L_1 = h f_2(x_1, y_1, z_1) = h\left[5(z_1) - 6y_1\right] = 0/1\left[5 \times 2/4428 - 6 \times 1/2218\right] \end{cases}$$

$$= \underline{0/48856}$$

$$\begin{cases} k_2 = h f_1\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}, z_1 + \frac{L_1}{2}\right) = h\left(z_1 + \frac{L_1}{2}\right) = 0/1\left[2/4428 + \frac{0/48856}{2}\right] \\ L_2 = h f_2\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}, z_1 + \frac{L_1}{2}\right) = h\left[5\left(z_1 + \frac{L_1}{2}\right) - 6\left(y_1 + \frac{k_1}{2}\right)\right] \end{cases}$$

$$= \underline{0/2678708}$$

$$= 0/1\left[5 \times 2/678708 - 6\left(1/2218 + \frac{0/24428}{2}\right)\right]$$

$$= \underline{0/534714}$$

$$k_3 = hf_1\left(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_2}{2}, z_1+\frac{l_2}{2}\right) = 0{,}1\left(z_1+\frac{l_2}{2}\right) = 0{,}1\left[2{,}4248 + \frac{0{,}5347612}{2}\right]$$

$$= \underline{0{,}2711508}$$

$$l_3 = hf_2\left(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{k_2}{2}, z_1+\frac{l_2}{2}\right) = h\left[5\left(z_1+\frac{l_2}{2}\right) - 4\left(y_1+\frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$= (0{,}1)\left[5\times(2{,}7115508) - 4\left(1{,}2412 + \frac{0{,}2478708}{2}\right)\right]$$

$$= (0{,}1)(5{,}4230172) = \underline{0{,}5423017}$$

$$k_4 = hf_1(x_1+h, y_1+k_3, z_1+l_3) = (0{,}1)(z_1+l_3) = (0{,}1)(2{,}4248 + 0{,}5423017$$

$$= \underline{0{,}2985017}$$

$$l_4 = hf_2(x_1+h, y_1+k_3, z_1+l_3) = (0{,}1)\left[5(z_1+l_3) - 4(y_1+k_3)\right]$$

$$= (0{,}1)\left[5\times(2{,}9850172) - 4(1{,}2412 + 0{,}2711508\right.$$

$$= 0{,}1 \times 5{,}9702032 = \underline{0{,}5970203}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2(k_2+k_3) + k_4\right)$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{6}\left(l_1 + 2(l_2+l_3) + l_4\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = 1{,}2412 + \frac{1}{6}\left(0{,}2424248 + 2(0{,}2478708 + 0{,}2711508) + 0{,}2985017\right) \\ z_2 = 2{,}4248 + \frac{1}{6}\left(0{,}4848052 + 2(0{,}5347612 + 0{,}5423017) + 0{,}5970203\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 1{,}4918194 \\ z_2 = 2{,}9834359 \end{cases}$$

که در آن $y_2 \simeq y(0{,}2)$ و $z_2 \simeq z(0{,}2)$.

تمرین‌های فصل سیستم

۱- مسأله مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$y' = x^2 - y^2, \qquad y(1.5) = 1.8$$

الف) مقدار تقریبی $y(2)$ را با روش اویلر و با طول گام $h = 0.25$ تخمین بزنید.

ب) مقدار تقریبی $y(2)$ را با روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی دو و با طول گام $h = 0.25$ تخمین بزنید.

پ) با روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی ۴ و با طول گام $h = 0.5$، $y(2)$ را تقریب بزنید.

۲- جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad 0 \le t \le 1$$

را با روش RK4 (رانگ-کوتای مرتبه‌ی ۴) و با فرض $h = 0.5$ به‌دست آورید.