

# فصل ۱۸ - میدان الکتریکی

(۱) مقدمه

(۲) میدان الکتریکی

(۳) خطوط نیرو

(۴) حل چند مثال در خصوص محاسبه میدان الکتریکی

توزیع بارهای مختلف

(۵) بار نقطه ای در میدان الکتریکی

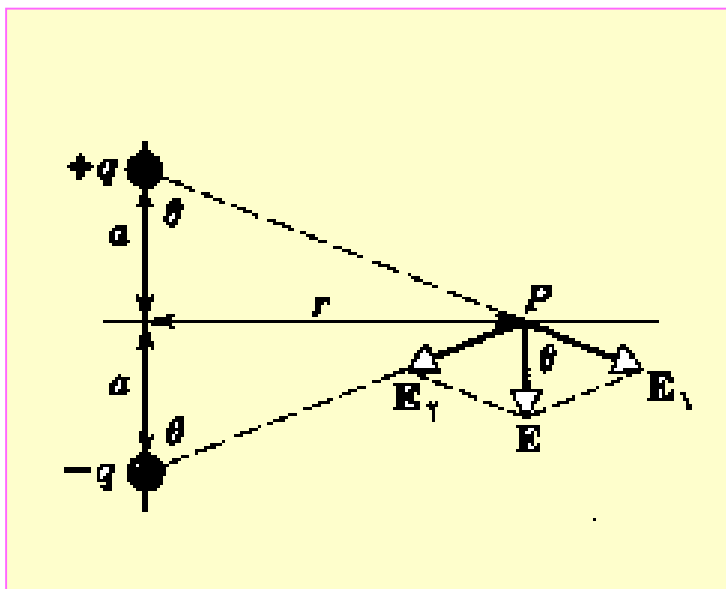
(۶) دوقطبی در میدان الکتریکی

# محاسبه میدان الکتریکی (حل چند مثال)

- ❖ محاسبه میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی در روی عمود منصف محور آن
- ❖ رعد و برق مثالی از دوقطبی الکتریکی
- ❖ میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوسته بار
- ❖ میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه باردار با چگالی ثابت
- ❖ تدبیرهای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار یکنواخت
- ❖ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار
- ❖ میدان الکتریکی ناشی از خط نامتناهی بار

## مثال: محاسبه میدان الکتریکی ناشی از دو قطبی در روی عمود منصف محور آن

- **مثال:** دو قطبی الکتریکی تشکیل شده از دو بار نقطه ای  $+q$  و  $-q$  که در فاصله  $2a$  از یکدیگر قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطه  $p$  محاسبه کنید.



جمع برداری  $E_1$  و  $E_2$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2}$$

جمع برداری  $E_1$  و  $E_2$  در راستای قائم و به طرف پایین است و

$$E = 2E_1 \cos \theta$$

بزرگی آن عبارت است از

با توجه به شکل ملاحظه می شود که

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

جانشانی عبارات مربوط به  $E_1$  و  $\cos \theta$  در معادله مربوط به  $E$

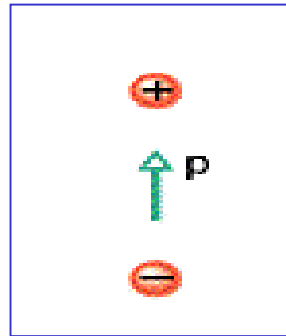
$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + r^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

اگر  $r \gg a$  باشد می توانیم از  $a$  در مخرج صرف نظر کنیم در این صورت

$$E \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2a)(q)}{r^2}$$

## محاسبه $E$ بر حسب گشتاور دو قطبی الکتریکی:

- گشتاور دو قطبی الکتریکی یک بردار است که جهت آن از بار منفی به بار مثبت است.

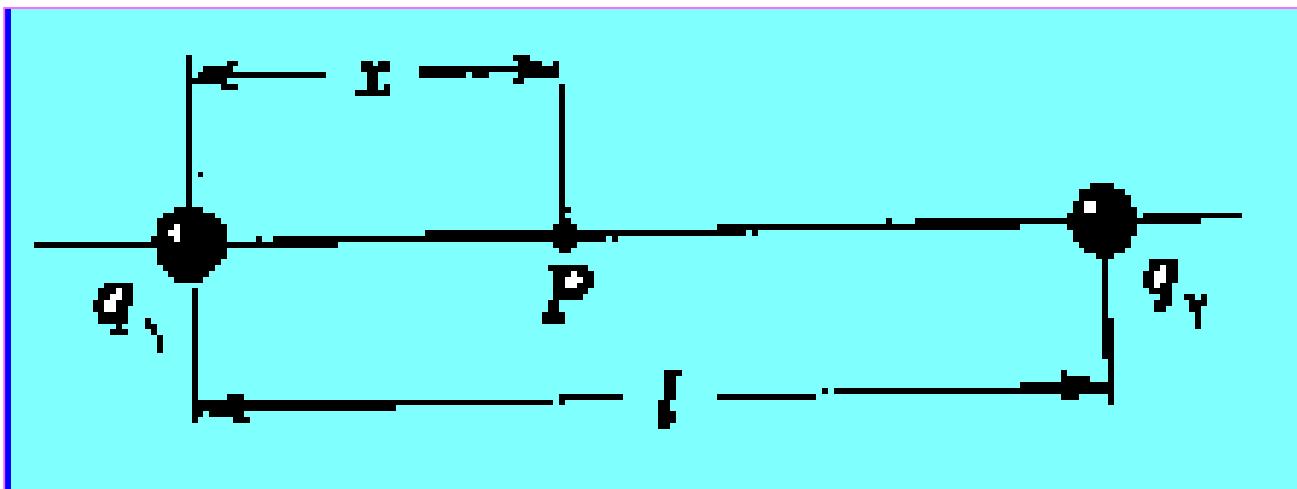


- حاصل ضرب  $2aq$  را گشتاور دو قطبی الکتریکی نامند و با  $p$  نمایش می دهند. پس شدت میدان بر حسب  $p$ ، در نقاط دور روی عمود منصف دو قطبی:

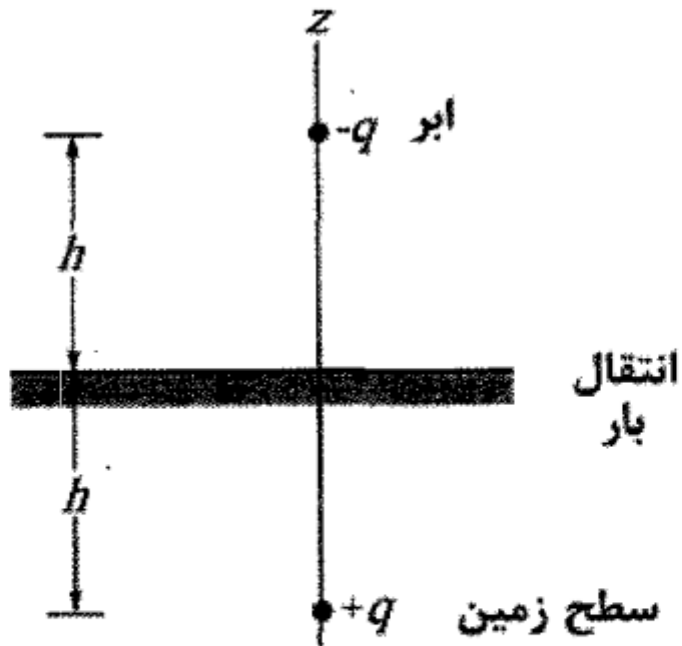
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

## مثال:

در چه نقطه ای روی خط واصل دو بار که دومی دو برابر اولی است و فاصله آن دو **10cm** می باشد، شدت میدان صفر است:



# رعد و برق مثالی از دو قطبی الکتریکی



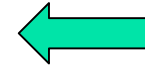
شکل ۹-۱۸ سامانه ابر- زمین به صورت یک دو قطبی الکتریکی قائم مدل سازی شده است.





[aparat.com/wefam.ir](http://aparat.com/wefam.ir)

برخورد رعد و برق با برج میلاد



# رعد و برق مثالی از دو قطبی الکتریکی

## چگونگی تشکیل رعد و برق

در اثر برخورد ذرات آب یک جبهه هوای گرم به ذرات یخ یک جبهه هوای سرد، الکتریسیته ساکن بوجود می‌آید که نسبت به زمین دارای بار الکتریکی منفی بوده و در صورتی که فاصله این منبع بار الکتریکی، کم و بیش نزدیک به سطح زمین باشد، آذرخش بروز می‌کند. این پدیده یک تخلیه الکتریکی شدید و بسیار سریع در هواست و همین تخلیه الکتریکی است که نور و صدا تولید میکند. در هنگام رعد و برق، یک جریان الکتریسیته از یک ابر به ابر دیگر یا از ابر به پایین و به زمین جریان پیدا می‌کند که این بار معمولاً مثبت و روی سطح زمین بار منفی القا میکند.

و به این ترتیب مجموعه ابر، هوا و زمین به یک خازن بسیار بزرگ تبدیل میشود که لحظه به لحظه بار آن بیشتر میشود و بنابراین اختلاف پتانسیل دو قطب آن افزایش پیدا می کند ، بالاخره مقدار این بار الکتریکی آنقدر زیاد میشود که اختلاف پتانسیل بین ابر و زمین به ۱۰ تا ۱۰۰ میلیون ولت میرسد و میدان الکتریکی حاصل از چنین اختلاف پتانسیلی میتواند هوا را با اینکه در حالت عادی نا رساناست در یک سیر خاص یونیزه و آنرا به رسانا تبدیل میکند و به محض اینکه چنین سیری از مولکولهای یونیزه رسانا از ابر تا زمین ایجاد شود بارهای الکتریکی به طرف هم حرکت میکنند و در عرض ۰.۰۰۰۱ ثانیه جریان وحشتناکی در حدود ۳۰ هزار آمپر از هوای یونیزه می گذرد . اما هر جریانی ضمن عبور از ماده با مقاومت اتمهای آن روبرو میشود و این مقاومت بخشی از انرژی الکتریکی را به گرما تبدیل میکند .

با استفاده از اصول اولیه الکترومغناطیس می‌توانید تخمین بزنید این جریان در ولتاژ ۱۰ میلیون ولت ، توان گرمایی در حدود ۱۰۰ میلیارد وات دارد و می‌تواند گرمایی در حدود ۱۰ میلیون ژول ایجاد کند ؛ این گرما باعث میشود دمای هوا در مسیر آذرخش به ۳۰ هزار درجه سانتی گراد برسد ، که این تغییر ناگهانی دما (از حدود ۳۰۰ کلوین به ۳۰ هزار کلوین) حجم هوا را ۱۰۰ برابر میکند و این یعنی یک انفجار واقعی انبساط سریع و شدید هوا ، که یک موج ضربتی (shock wave) در هوای اطراف ایجاد می‌کند و امواجی را با فشار بین ۱۰ تا ۳۰ اتمسفر بوجود می‌آورد ، که با سرعت صوت و به شکل تندر یا رعد به گوش ما میرسد ، اما گرمای ایجاد شده غیر از انبساط، بلاهای دیگری هم سر مولکولهای هوا می‌آورد ، جریان شدیدی که از هوا می‌گذرد ، آن را گرم می‌کند و به تابش و میدارد و تابشی است که یک مسیر نورانی بین ابر و زمین ایجاد میکند .

# اقدامات حین وقوع رعد و برق

- فعالیت‌های بیرون خانه را متوقف کنید.
- در زمان وقوع رعد و برق از منزل خارج نشوید.
- در صورتی که در اتومبیل هستید، در محل مطمئن توقف کنید، موتور را خاموش کنید و آنتن ماشین را پایین بکشید.
- داخل ساختمان یا خودروی سقف‌دار بمانید.
- بدنه فولادی یک خودروی سقف‌دار به شرطی که فلز آن را لمس نکنید از شما به خوبی محافظت می‌کند.
- از درختان، تپه‌ها، سیم برق هوایی، لوله‌های فلزی و آب دور شوید.

➤ هنگام صاعقه می‌توانید ، به داخل ساختمان یا ایستگاه ترن زیرزمینی و مترو بروید.

➤ از رفتن به حمام و دوش گرفتن بپرهیزید چون ممکن است لوازم حمام باعث انتقال جریان الکتریسته شوند.

➤ تنها در مواقع اورژانسی آن هم در صورت امکان از تلفن بی‌سیم استفاده کنید.

➤ دو شاخه تمام وسایل برقی مثل رایانه را از برق خارج کنید، هواکش را خاموش کنید، به خاطر داشته باشید برق ناشی از رعد و برق می‌تواند باعث بروز صدمات جدی شود.

➤ از نزدیک شدن به هر وسیله فلزی مثل تراکتور، تجهیزات کشاورزی، موتورسیکلت و دوچرخه پرهیز کنید.

➤ اگر در محوطه جنگل هستید، سرپناهی در کنار درختان کوتاه و تنومند بیابید و هرگز زیر درختان بلند نروید.

➤ اگر در فضای باز هستید، در صورت امکان به حالت خمیده و در دره‌های تنگ و عمیق پناه بگیرید، مراقب سیل‌های ناگهانی باشید.

➤ به یاد داشته باشید که چنانچه در هنگام رعد و برق موهایتان سیخ شد، نشانه نزدیکی برخورد جریان رعد و برق است.

➤ به صورت چمباتمه روی زمین بنشینید، دست‌ها را روی گوش‌ها و سر را بین زانو‌ها قرار دهید، تماس خود را با زمین به حداقل برسانید ، به هیچ وجه روی زمین دراز

# میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع پیوسته بار

تا اینجا میدان الکتریکی حاصل از یک یا، حداکثر، چند بار نقطه‌ای را بررسی کردیم. حال توزیع باری را در نظر می‌گیریم که شامل تعداد بسیار زیادی بارهای نقطه‌ای نزدیک به هم (شاید میلیاردها) باشد که بر امتداد یک خط، روی یک سطح، یا داخل یک حجم پخش شده‌اند. به چنین توزیع‌هایی، توزیع پیوسته به جای گسسته گفته می‌شود. چون این توزیعها شامل تعداد بینهایت زیادی از بارهای نقطه‌ای هستند، میدانهای الکتریکی حاصل از آنها را به جای در نظر گرفتن تک تک بارهای نقطه‌ای، با استفاده از حسابان به دست می‌آوریم. در این بخش میدان الکتریکی حاصل از یک بار خطی را بررسی می‌کنیم. سطح باردار را در بخش بعد در نظر می‌گیریم. در فصل بعد، میدان داخل یک کره باردار یکنواخت را به دست می‌آوریم.

مفهوم  
توزیع  
پیوسته  
بار؟



وقتی با توزیع بار پیوسته سروکار داریم، مناسبترین کار این است که بار روی یک جسم را به جای آنکه به صورت یک بار کلی در نظر بگیریم، بر حسب چگالی بار بیان کنیم. مثلاً برای یک بار خطی، چگالی خطی بار (یا بار در واحد طول)  $\lambda$  را در نظر می‌گیریم که یکای آن در SI، کولن بر متر است. جدول ۱۸-۲ چگالیهای بار دیگری را نشان می‌دهد که از آنها استفاده خواهیم کرد.

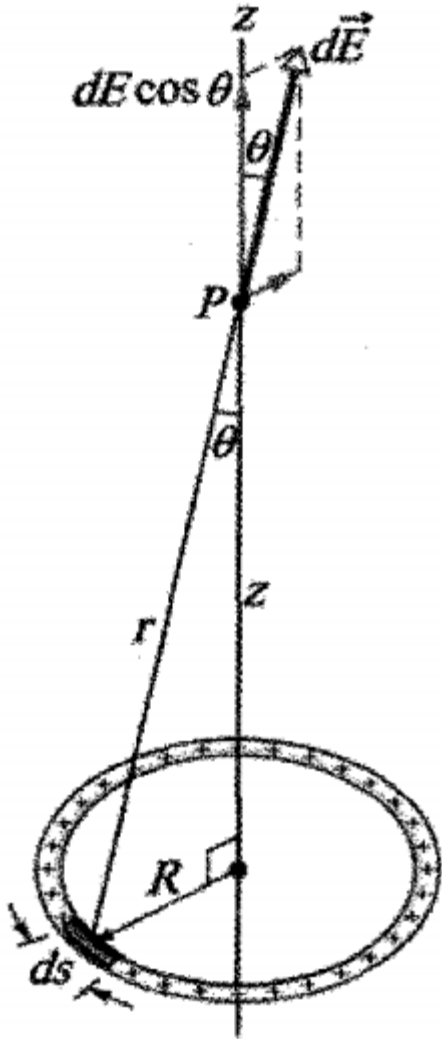
### جدول ۱۸-۲

برخی از یکاهای بار الکتریکی

نام	نماد	یکای SI
بار	$q$	C
چگالی خطی بار	$\lambda$	C/m
چگالی سطحی بار	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>
چگالی حجمی بار	$\rho$	C/m <sup>3</sup>

# میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه باردار با چگالی ثابت

شکل ۱۸-۱۰، حلقه باریکی به شعاع  $R$  را با چگالی خطی بار مثبت یکنواخت  $\lambda$  روی پیرامون آن نشان می‌دهد. می‌توانیم این گونه تصور کنیم که حلقه از پلاستیک یا عایق‌های دیگری ساخته شده است، به گونه‌ای که بارها را می‌توان در جای خود ثابت در نظر گرفت. میدان الکتریکی  $\vec{E}$  در نقطه  $P$ ، به فاصله  $z$  از صفحه حلقه در امتداد محور مرکزی آن، چیست؟



شکل ۱۸-۱۰ حلقه‌ای با بار مثبت یکنواخت.

برای پاسخ دادن به این پرسش، نمی‌توانیم معادله ۱۸-۳ را که میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای را به دست می‌دهد، به طور مستقیم به کار گیریم، زیرا حلقه به روشنی یک بار نقطه‌ای نیست. ولی می‌توانیم به طور ذهنی حلقه را به عنصرهای دیفرانسیلی بار که به حدی کوچک‌اند که به بارهای نقطه‌ای می‌مانند، تقسیم کنیم و سپس معادله ۱۸-۳ را برای هر یک از آنها به کار ببریم. آنگاه می‌توانیم میدانهای الکتریکی ایجاد شده توسط عنصرهای دیفرانسیلی در نقطه  $P$  را با هم جمع کنیم. جمع برداری میدانها، میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطه  $P$  را به دست می‌دهد.

فرض می‌کنیم  $ds$  طول (کمان) هر عنصر دیفرانسیلی حلقه باشد. چون  $\lambda$ ، بار در واحد طول (کمان) است، بزرگی بار این عنصر برابر است با

$$dq = \lambda ds \quad (18-10)$$

این بار دیفرانسیلی، میدان الکتریکی دیفرانسیلی  $d\vec{E}$  را در نقطه  $P$ ، که به فاصله  $r$  از آن عنصر قرار دارد، ایجاد می‌کند. این عنصر را به عنوان یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله ۱۸-۱۰ می‌توان معادله ۱۸-۳ را برای یافتن بزرگی  $d\vec{E}$  به صورت زیر نوشت

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} \quad (11-18)$$

با استفاده از معادله ۱۸-۱۰، می‌توان معادله ۱۱-۲۲ را چنین بازنویسی کرد

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)} \quad (12-18)$$

شکل ۱۸-۱۰ نشان می‌دهد که  $d\vec{E}$  با محور مرکزی (که محور  $z$  در نظر گرفته شده است) زاویه  $\theta$  می‌سازد و دارای مؤلفه‌هایی عمود بر محور و موازی با آن است.

هر عنصر بار در حلقه، میدان دیفرانسیلی  $d\vec{E}$  را در نقطه  $P$  ایجاد می‌کند، که بزرگی آن با معادله  $18-12$  داده می‌شود. تمام بردارهای  $d\vec{E}$  دارای مؤلفه‌هایی موازی با محور مرکزی هستند که هم در بزرگی و هم در جهت یکسان‌اند. بعلاوه، تمام این بردارهای  $d\vec{E}$  دارای مؤلفه‌هایی عمود بر محور مرکزی‌اند؛ این مؤلفه‌های عمودی دارای بزرگی یکسان ولی جهت‌های مخالف‌اند. در واقع، برای هر مؤلفه عمودی که در جهت معینی قرار دارد، مؤلفه دیگری در جهت مخالف آن وجود دارد. مجموع این زوج مؤلفه‌ها، مانند مجموع همه زوج مؤلفه‌های دیگر که جهت مخالف دارند، برابر با صفر است.

بنابراین، مؤلفه‌های عمود بر محور، یکدیگر را خنثی می‌کنند و دیگر لازم نیست که آنها را در نظر بگیریم. به این ترتیب، مؤلفه‌های موازی باقی می‌مانند؛ همه آنها در یک جهت‌اند، پس میدان الکتریکی در نقطه  $P$  برابر با مجموع آنهاست.

مؤلفه موازی  $d\vec{E}$  نشان داده شده در شکل ۱۸-۱۰ دارای بزرگی  $dE \cos \theta$  است، همچنین، این شکل نشان می‌دهد که

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \quad (13-18)$$

بنابراین، از ضرب معادله‌های (۱۸-۱۲) و (۱۸-۱۳)، برای مؤلفه موازی  $d\vec{E}$  خواهیم داشت

$$dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} ds \quad (14-18)$$

برای جمع کردن مؤلفه‌های موازی  $dE \cos \theta$  که توسط همه عناصرها ایجاد شده‌اند، از معادله ۱۸-۱۴ روی پیرامون حلقه، از  $s=0$  تا  $s=2\pi R$ ، انتگرال می‌گیریم. چون تنها کمیتی که در معادله ۱۸-۱۴، حین انتگرالگیری تغییر می‌کند  $s$  است، کمیت‌های دیگر را می‌توان از زیر علامت انتگرال بیرون برد. آنگاه انتگرالگیری چنین به دست می‌دهد

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds$$

$$= \frac{z\lambda (2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (15-18)$$

چون  $\lambda$  بار در واحد طول حلقه است، در نتیجه جمله  $\lambda(2\pi R)$  در معادله ۱۵-۱۸ برابر با مقدار  $q$ ، یعنی بار کل روی حلقه است. آنگاه، می‌توان معادله ۱۵-۱۸ را چنین نوشت

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{حلقه باردار}) \quad (16-18)$$

اگر بار روی حلقه، به جای مثبت، منفی باشد، بزرگی میدان در نقطه  $P$  باز هم با معادله ۱۶-۱۸ داده می‌شود. ولی، در این صورت سوی بردار میدان الکتریکی به جای آنکه از حلقه دور شود، به سمت حلقه خواهد بود.

حال معادله ۱۸-۱۶ را برای نقطه‌ای بسیار دور روی محور مرکزی که در آن  $R \ll z$  است، بررسی می‌کنیم. برای چنین نقطه‌ای، به جای عبارت  $z^2 + R^2$  در معادله ۱۸-۱۶ می‌توان مقدار تقریبی  $z^2$  را قرارداد، و از آنجا معادله ۱۸-۱۶ چنین می‌شود

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (17-18) \text{ (حلقه باردار در فاصله دور)}$$

این نتیجه‌ای معقول است، زیرا در یک فاصله دور، حلقه مانند یک بار نقطه‌ای «به نظر می‌رسد». اگر در معادله ۱۸-۱۷ به جای  $z$  مقدار  $r$  را قرار دهیم، در واقع به معادله ۱۸-۳ می‌رسیم که بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای است.

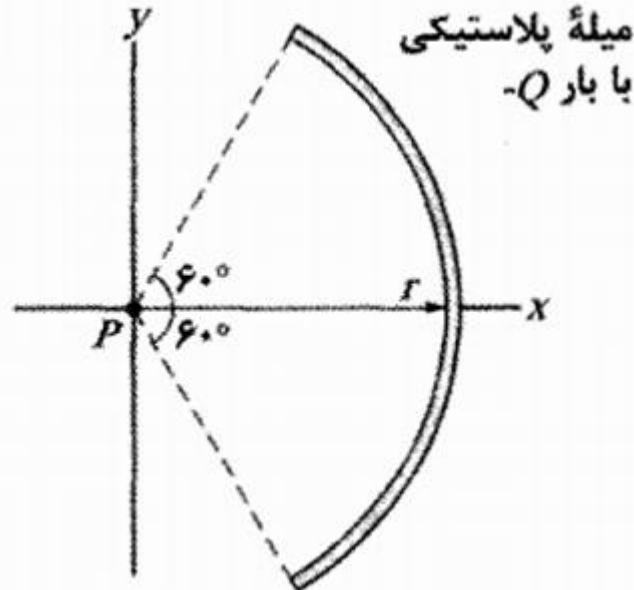
حال معادله ۱۸-۱۶ را برای نقطه‌ای در مرکز حلقه، یعنی برای  $z=0$ ، در نظر می‌گیریم. در این نقطه، معادله ۱۸-۱۶  $E=0$  را به دست می‌دهد. این هم نتیجه‌ای معقول است، چرا؟؟

میدان  
الکتریکی  
حلقه  
باردار در  
نقاط دور

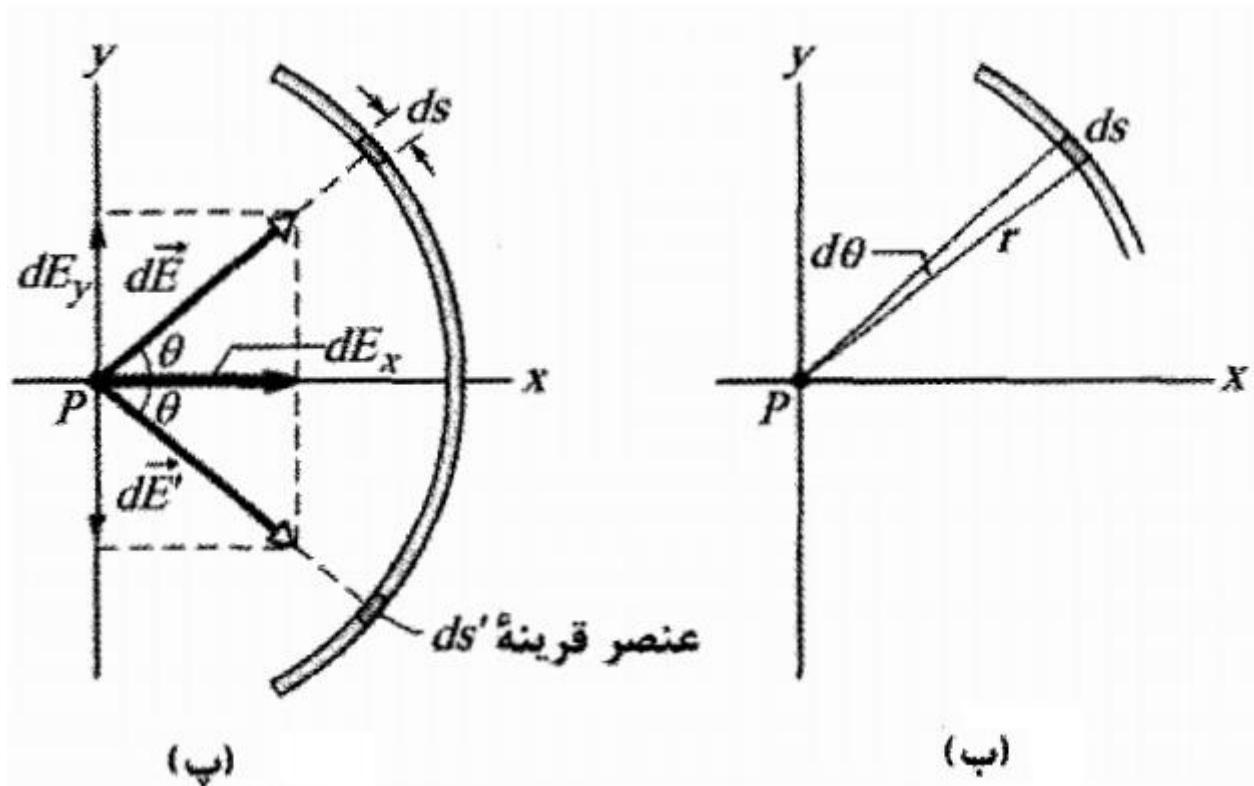


## مساله

شکل زیر، یک میلهٔ پلاستیکی را نشان می‌دهد که بار  $-Q$  به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. این میله به صورت یک کمان دایره‌ای  $120^\circ$  به شعاع  $r$  خم شده است. محورهای مختصات را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که محور تقارن میله در امتداد محور  $x$  و مبدأ مختصات در مرکز خمیدگی  $P$  میله باشد. میدان الکتریکی  $\vec{E}$  ناشی از میله در نقطه  $P$  بر حسب  $Q$  و  $r$  چگونه است؟



# راهنمای حل



# تدبیرهای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار یکنواخت

در اینجا به راهنمای کلی برای یافتن میدان الکتریکی  $\vec{E}$  ناشی از یک خط باردار یکنواخت، چه به صورت دایره‌ای و چه به صورت خط راست، در نقطه  $P$  می‌پردازیم. راهبرد کلی، انتخاب یک عنصر دیفرانسیلی  $dq$  از بار، یافتن  $d\vec{E}$  ناشی از آن عنصر، و انتگرالگیری از  $d\vec{E}$  روی تمام خط باردار است.

راهبرد  
کلی؟

مرحله ۱. اگر خط باردار دایره‌ای باشد،  $ds$  را طول کمان یک عنصر دیفرانسیلی از توزیع بار در نظر می‌گیریم. اگر خط باردار مستقیم باشد، محور  $x$  را روی خط و  $dx$  را طول یک عنصر دیفرانسیلی از آن اختیار می‌کنیم. این عنصر را روی شکل مشخص می‌کنیم.

انتخاب  
عنصر  
دیفرانسیلی  
در حالت  
دایروی و  
خط مستقیم

مرحله ۲. رابطه بار  $dq$  عنصر دیفرانسیلی را با عنصر طول به صورت  $dq = \lambda ds$  یا  $dq = \lambda dx$ ، در نظر می‌گیریم.  $dq$  و  $\lambda$  را مثبت اختیار می‌کنیم. حتی اگر بار الکتریکی در واقع منفی باشد. (علامت بار در مرحله بعد به کار می‌آید).

رابطه  
عنصر  
دیفرانسیلی  
بار با  
عنصر  
دیفرانسیلی  
طول

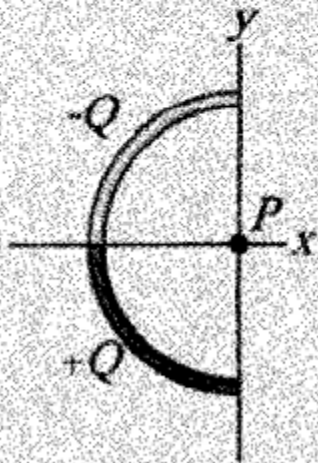
مرحله ۳. میدان  $d\vec{E}$  ایجاد شده در نقطه  $P$  توسط  $dq$  را با معادله ۱۸-۳، که در آن  $q$  با  $\lambda ds$  یا با  $\lambda dx$  جایگزین شده است بیان می‌کنیم. اگر بار روی خط مثبت باشد، آنگاه در نقطه  $P$  بردار  $d\vec{E}$  را در جهت دور شدن از  $dq$ ، و اگر این بار منفی باشد، آن بردار را به سوی  $dq$  رسم می‌کنیم.

بیان عنصر  
دیفرانسیلی  
میدان

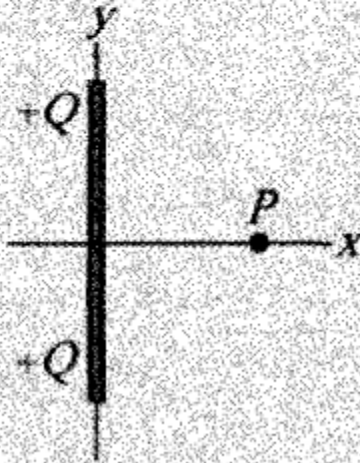
مرحله ۴. همیشه باید در جستجوی هرگونه تقارن در مسئله باشیم. اگر نقطه  $P$  روی محور تقارن توزیع بار باشد، میدان  $d\vec{E}$  ناشی از  $dq$  را به مؤلفه‌هایی عمود و موازی محور تقارن تجزیه می‌کنیم. آنگاه عنصر دیفرانسیلی دیگر  $dq'$  را که نسبت به خط تقارن، قرینه  $dq$  است تجزیه می‌کنیم. در نقطه  $P$  بردار  $d\vec{E}'$  را که این عنصر قرینه ایجاد می‌کند، رسم و آن را به مؤلفه‌ها تجزیه می‌کنیم. یکی از مؤلفه‌های ایجاد شده توسط  $dq$  مؤلفه خنثی شونده است؛ این مؤلفه با مؤلفه متناظری که توسط  $dq'$  ایجاد شده خنثی می‌شود و دیگر نیازی به در نظر گرفتن آن نیست. مؤلفه دیگر ایجاد شده توسط  $dq$  یک مؤلفه جمع شونده است؛ این مؤلفه باید با مؤلفه متناظری که توسط  $dq$  ایجاد شده جمع شود. مؤلفه‌های جمع شونده همه عنصرهای دیفرانسیلی را با انتگرالگیری جمع می‌کنیم.

## مساله

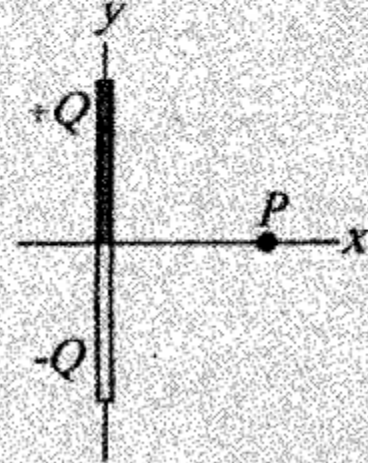
✓ نکته واریسی ۲ شکل زیر، سه میله نارسانا را نشان می دهد، که یکی دایره ای و دو تای دیگر خط راست هستند. هر یک از میله ها دارای بار یکنواخت با بزرگی  $Q$  روی نیمه بالایی و بار دیگری روی نیمه پایین آن است. برای هر میله، جهت میدان الکتریکی خالص در نقطه  $P$  چگونه است؟



(الف)



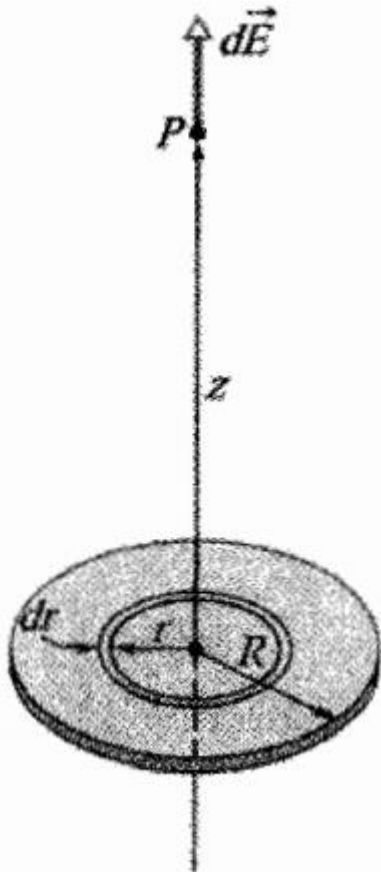
(ب)



(پ)

## مساله: میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

شکل ۱۸-۱۳، یک قرص پلاستیکی دایره‌ای به شعاع  $R$  را نشان می‌دهد که دارای بار سطحی مثبت با چگالی  $\sigma$  روی سطح خارجی آن است (به جدول ۱۸-۲ نگاه کنید). میدان الکتریکی در نقطه  $P$ ، به فاصله  $z$  از قرص، در امتداد محور مرکزی آن چیست؟



شکل ۱۸-۱۳ قرصی به شعاع  $R$  و بار مثبت یکنواخت. شعاع حلقه نشان داده شده  $r$  و پهنای شعاعی آن  $dr$  است. این حلقه، میدان الکتریکی دیفرانسیلی  $d\vec{E}$  را در نقطه  $P$  واقع بر محور مرکزی ایجاد می‌کند.

روش کار این است که قرص را به حلقه‌های هم‌مرکز تخت تقسیم و سپس میدان الکتریکی در نقطه  $P$  را با جمع کردن (یعنی، با انتگرالگیری) سهم تمام حلقه‌ها محاسبه می‌کنیم. شکل ۱۸-۱۳، یکی از این حلقه‌ها را به شعاع  $r$  و پهنای شعاعی  $dr$  نشان می‌دهد. چون  $\sigma$ ، بار الکتریکی در یکای سطح است، بار روی حلقه برابر است با

$$dq = \sigma dA = \sigma (2\pi r dr) \quad (18-22)$$

که در آن  $dA$  مساحت عنصر دیفرانسیلی حلقه است.

مسئله مربوط به میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه باردار را پیشتر حل کرده‌ایم. با قراردادن  $dq$  از معادله ۱۸-۲۲ به جای  $q$  در معادله ۱۸-۱۶، و جایگزینی  $R$  در معادله ۱۸-۱۶ با  $r$ ، میدان الکتریکی  $dE$  در نقطه  $P$  ناشی از حلقه تخت به دست می‌آید

$$dE = \frac{z \sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$



که می‌توان آن را چنین نوشت

$$dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (23-18)$$

حال  $E$  را با انتگرالگیری روی سطح قرص، یعنی با انتگرالگیری نسبت به متغیر  $r$  از  $r=0$  تا  $r=R$ ، به دست می‌آوریم. توجه کنید که  $z$  در این انتگرالگیری ثابت می‌ماند. از آنجا به دست می‌آوریم

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr \quad (24-18)$$

برای حل این انتگرال، آن را با قرارداد  $X = (z^2 + r^2)$ ،  $m = -\frac{3}{2}$ ، و  $dX = (2r) dr$  به شکل  $\int X^m dX$  می‌نویسیم. برای این انتگرال داریم

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

و بنابراین معادله ۱۸-۲۴ چنین می شود

$$E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[ \frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R \quad (18-25)$$

با قرار دادن حدود انتگرال در معادله ۱۸-۲۵ و مرتب کردن آن، به دست می آوریم

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (18-26) \text{ (قرص باردار)}$$

که بزرگی میدان الکتریکی حاصل از یک قرص تخت باردار دایره‌ای، در نقطه‌هایی روی محور مرکزی آن است. (در محاسبه انتگرال، فرض کردیم که  $z \geq 0$ ).

اگر در حالی که  $z$  را متناهی نگه داشته‌ایم،  $R$  را به سمت بینهایت میل دهیم ( $R \rightarrow \infty$ )، جمله دوم درون پرانتز معادله ۱۸-۲۶ به سمت صفر میل می‌کند، و معادله به صورت زیر ساده می‌شود

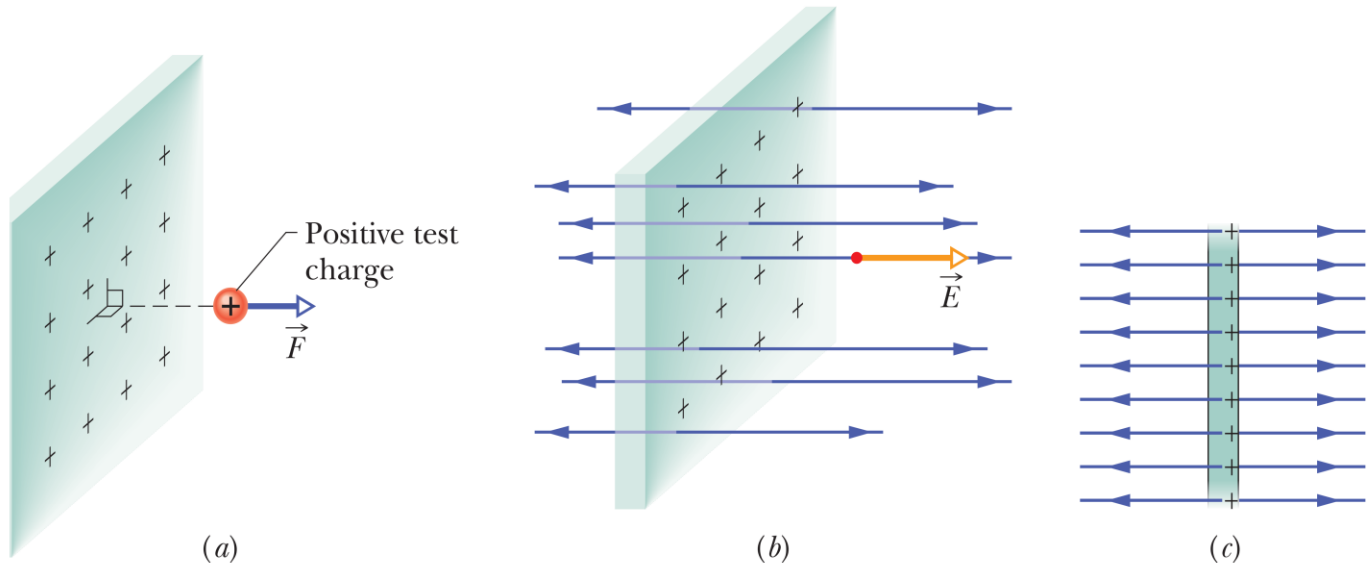
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{ورقه نامتناهی}) \quad (18-27)$$

این، میدان الکتریکی حاصل از یک ورقه باردار یکنواخت نامتناهی است که در یک طرف نارسانایی از قبیل پلاستیک قرار گرفته است. خطهای میدان الکتریکی برای چنین وضعیتی در شکل ۱۸-۳ نشان داده شده است.

همچنین اگر در حالی که  $R$  را متناهی نگهداشته‌ایم در معادله ۱۸-۲۶ مقدار  $z$  را به سمت صفر میل دهیم ( $z \rightarrow 0$ )، به همان معادله ۱۸-۲۷ می‌رسیم. این نشان می‌دهد که در نقطه‌های بسیار نزدیک به قرص، میدان الکتریکی ایجاد شده توسط قرص همان میدان حاصل از قرصی است که به طور نامتناهی گسترش یافته است.

مقایسه  
دو حالت  
سوق  
دادن  
شعاع  
قرص به  
سمت  
بینهایت و  
همچنین  
نقاط  
خیلی  
نزدیک به  
مرکز  
حلقه

## خطوط میدان الکتریکی در مجاورت یک ورقه نارسانای خیلی بزرگ

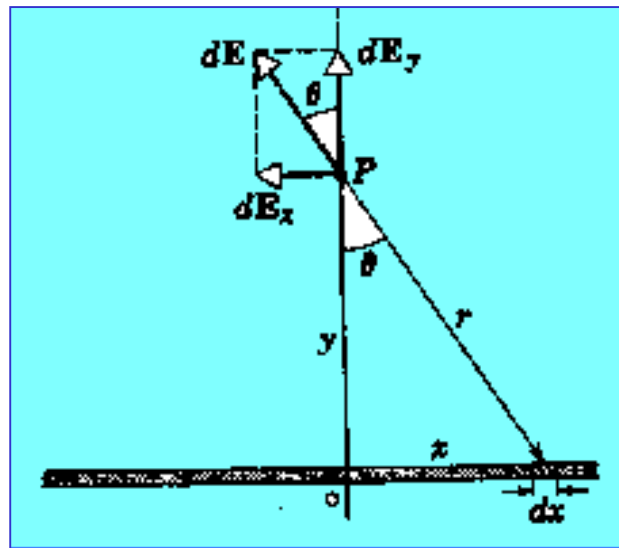


شکل ۱۸-۳ (الف) نیروی الکتروستاتیکی  $\vec{F}$  وارد بر بار آزمون مثبت در نزدیکی یک ورقه نارسانای بسیار بزرگ با توزیع یکنواخت بار مثبت در یک طرف آن. (ب) بردار میدان الکتریکی  $\vec{E}$  در محل بار آزمون، و خطهای میدان الکتریکی در فضای نزدیک ورقه. خطهای میدان از ورقه با بار مثبت دور می‌شوند. (پ) نمای جانبی شکل (ب).

# مثال: میدان الکتریکی ناشی از خط نامتناهی بار

خط نامتناهی بار، شکل زیر بخشی از یک خط نامتناهی بار را که چگالی بار خطی آن (یعنی بار واحد طول که بر حسب کولن بر متر اندازه گیری می شود) مقدار ثابت  $\lambda$  است، نشان می دهد. میدان  $\mathbf{E}$  را در فاصله  $r$  از این خط محاسبه کنید.

■ مثال:



## حل مثال

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{y^2 + x^2}$$
$$dE_x = -dE \sin \theta \quad , \quad dE_y = dE \cos \theta$$

$$E_x = \int dE_x = - \int_{x=-a}^{x=+a} \sin \theta dE \quad ,$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{x=-a}^{x=+a} \cos \theta dE$$