بسم الله الرحمن الرحيم

Chapter five

Curve fitting

برازش منحنی (Curve fitting)

- معرفی منحنی یا تابعی که از بیشتر نقطه‌ها یا داده‌های موجود عبور یا کمترین فاصله را از آن‌ها داشته باشد برازش منحنی نامیده می‌شود.

- اگر این منحنی از همه نقاط موجود عبور کرده باشد، دقت برازش بیشترین مقدار را براساس داده‌های موجود، خواهد داشت. اغلب در چنین حالت‌هایی، محقق قادر است تا براساس نمودار دست به پیش‌بینی بزند و برای نقاطی که در مجموعه داده وجود ندارد، نقطه‌ای را به عنوان برآورد بیابد.

- اگر این نقطه در دامنه نقاط مجموعه داده باشد، عمل پیش‌بینی را «درون‌یابی» (Interpolation) می‌نامند و در حالتی که این نقطه خارج از دامنه نقاط باشد، «برون‌یابی» (Extrapolation) نامیده می‌شود. مسلما هیچ یک از این دو کار بدون خطا صورت نخواهند گرفت.

- گاهی ممکن است بهترین منحنی یا تابعی که بیشترین نزدیکی (کمترین خطا) نسبت به نقاط موجود را دارد، به عنوان بهترین نمودار یا منحنی برازش انتخاب کنیم. در این حالت عمل «هموارسازی» (Smoothing) صورت گرفته است.

- در ادامه به روش‌های درون‌یابی که توسط چند جمله‌ای‌ها قابل اجرا هستند، پرداخته‌ایم.

روش برازش منحنی به کمک توابع چند جمله‌ای

- همانطور که می‌دانید حالت کلی چند جمله‌ای درجه n به صورت زیر است:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n$$

- با توجه به تعداد نقاطی که در برازش منحنی به کار گرفته می‌شوند، می‌توان از چند جمله‌ای با درجه مناسب کمک گرفت. برای مثال به منظور برازش یک منحنی با n نقطه می‌توان از یک چند جمله‌ای با درجه n-1 استفاده کرد.

برازش به کمک خط (چند جمله‌ای درجه ۱)

- تابع $y=ax+b$ معادله یک خط راست است که در آن a شیب خط و b عرض از مبدا نامیده می‌شود. این معادله بهترین برازش را برای دو نقطه دارد زیرا یک خط راست توسط دو نقطه از آن قابل نمایش است و از دو نقطه فقط یک خط راست می‌توان عبور داد. پس معادله خط راست بهترین برازش را برای دو نقطه خواهد داشت. به این ترتیب می‌توان هر دو نقطه مجاور را به کمک یک خط به یکدیگر متصل نمود و یک نمودار با خطوط شکسته برای درون‌یابی تابع مورد نظر ایجاد کرد.

مثال ۱

هفت نقطه در مختصات دکارتی طبق جدول زیر ثبت شده‌اند. می‌خواهیم یک تابع یا منحنی برازش برای آن‌ها به کمک معادله چندین خط ایجاد کنیم.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	۰	۰.۸۴۱۵	۰.۹۰۹۳	۰.۱۴۱۱	−۰.۷۵۶۸	−۰.۹۵۸۹	−۰.۲۷۹۴

به کمک معادله یک خط که از هر دو نقطه مجاور می‌گذرد، منحنی و تابع مربوط به برازش این منحنی را ایجاد می‌کنیم. می‌دانیم که معادله خطی که از بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

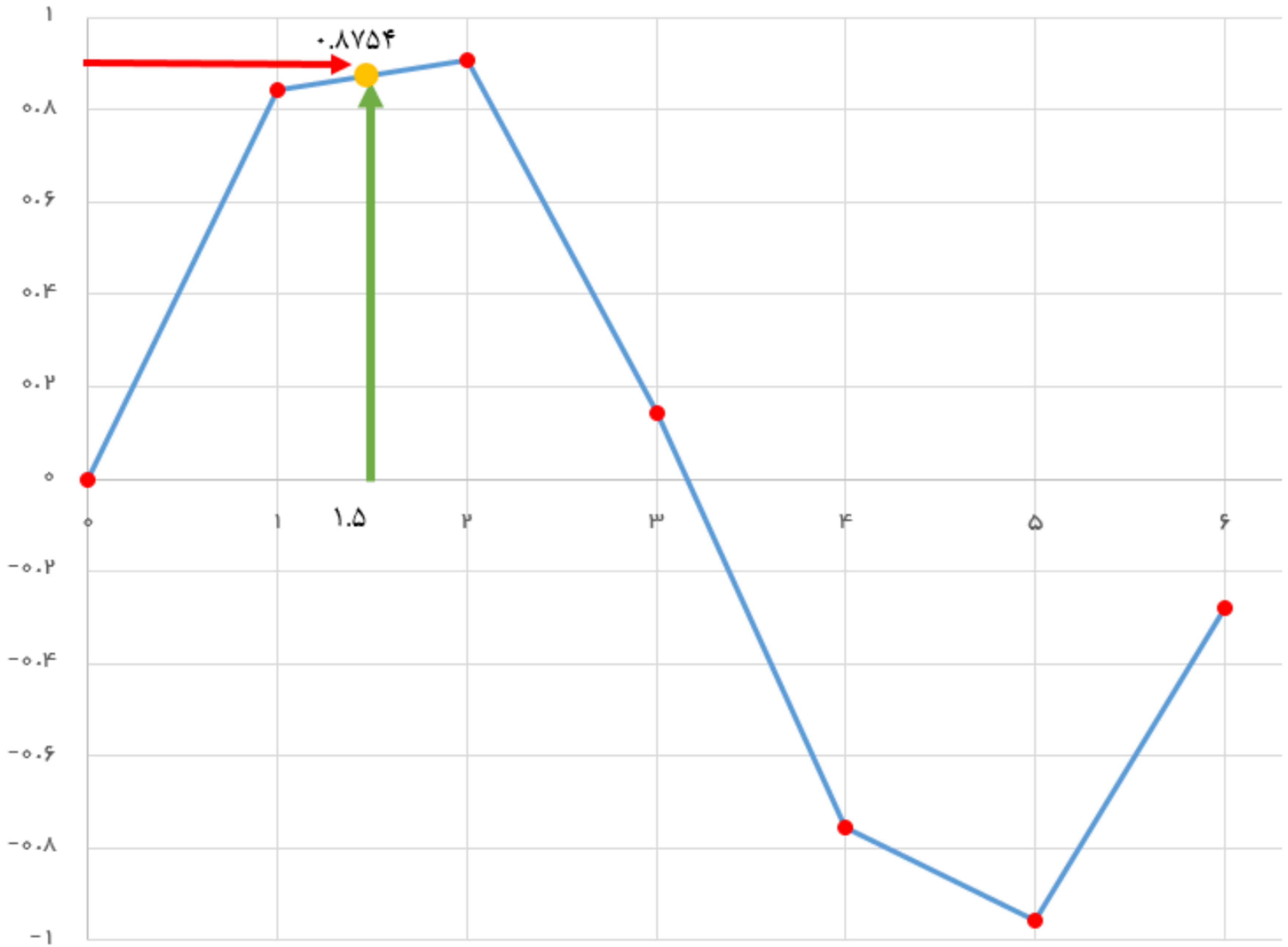
$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

بنابراین می‌توان معادله خطوط را بدست آورد و برای مثلا مقدار $x = 1.5$ برآورد y را محاسبه کرد. معادله خطی که از دو نقطه $A(1, 0.8415)$ و $B(2, 00.9093)$ می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y - 0.8415 = \frac{0.8415 - 0.9093}{1 - 2}(x - 1) = 0.0678(x - 1)$$

با جایگذاری مقدار ۱.۵ در متغیر x برآورد مقدار y محاسبه می‌شود:

$$y - 0.8415 = 0.0678(1.5 - 1) = 0.0339 \rightarrow y = 0.8754$$



نمودار برازش منحنی به کمک معادله خطوط

برازش خطی(Linear fitting)

- برازش با استفاده از توابع موجود در نرم افزار و یا توابعی که خودمان تعریف می کنیم، صورت می گیرد.
- از مسیر زیر یک فایل نمونه را برای اجرا فرا می خوانیم.(بالای کادر سمت راست)

Import single ASCII:: samples:: curve fitting::linear fit

- ستون اول را که مختصات متغیر مستقل است را به همراه هر کدام از ستونهای دلخواه(مثلا B) انتخاب می کنیم

– سپس از پایین scatter را انتخاب می کنیم تا نمودار رسم شود.

– از بالای صفحه مراحل زیر را پی می گیریم

analysis::fitting::linear fit::1<last used>

- معادله ای که داده ها به آن برازش شده اند در کادری مشخص می شود که عرض از مبدا(intercept) و شیب منحنی(slope) در آن مشخص است.

برازش غیرخطی(Nonlinear Fitting)

- دوباره از مسیر زیر یک فایل نمونه را برای اجرا فرا می خوانیم.

Import single ASCII::samples::curve fitting:: Polynomial Fit

- مشابه حالت قبل نمودار را رسم می کنیم یعنی:

analysis::fitting::Polynomial Fit::1<last used>

– حالت فوق منجر به تعداد جملات بیشتری خواهد شد که مطلوب نیست و برای کاهش تعداد جملات بجای Polynomial Fit باید از Nonlinear curve Fit استفاده کرد که مراحل آن بصورت زیر است:

– از بالای صفحه مراحل زیر را پی می گیریم

analysis::fitting::Nonlinear curve Fit::open dialog

نکات

۱- در صفحه باز شده در کادر open dialog در بخش setting/function selection ابتدا category و سپس function را مشخص می کنیم.

۲- دو مورد بالا را با توجه به پراکندگی داده ها و با سعی و خطا اصلاح می کنیم تا بهترین برازش را شاهد باشیم.

۳- بهترین برازش معمولا با مقادیر بالای ۰/۹۵ برای کمیت Adjust.R.Squre بدست می آید.

۴- با توابع متفاوتی می توان نتایج برازش مشابهی را بدست آورد.

بعنوان مثال در مثال اسلاید قبلی در بخش Nonlinear curve Fit با دو حالتpower/power0 و همچنین Polynomial/parabola انجام شد که هرچند شکل توابع متفاوت است ولی کمیت Adjust.R.Squre در هر دو نزدیک به هم هستند ولی باید دقت کرد هر چه بتوان با تعداد جملات کمتری برازش را انجام داد یک مزیت است.