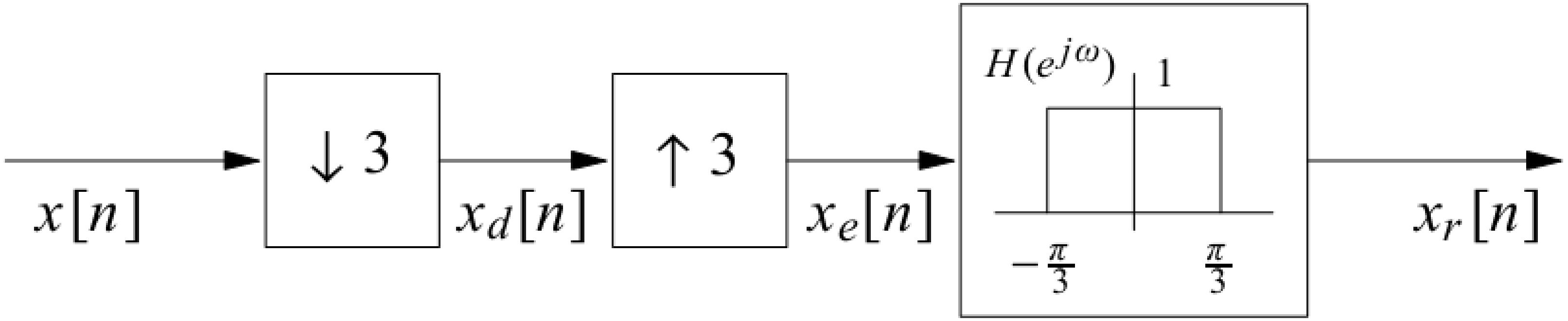
Signals & Systems

By: M. Shahraki



University of
Sistan and Baluchestan

University of Sistan & Baluchestan
Faculty of Electrical and Computer Engineering
Department of Electrical & Electronics Engineering

LTI Systems

اهمیت سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۱- پدیده های فیزیکی بسیاری این خواص را دارند
۲- می توان این سیستمها را به تفصیل تحلیل کرد که هسته اصلی تحلیل سیگنالها و سیستمها می باشد.

ویژگی سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۱- خطی هستند
۲- تغییرناپذیر با زمان هستند
ویژگی جانبی: داری خاصیت برهمنهی (جمع آثار) هستند.

LTI Systems

سیستمهای LTI گسسته در زمان

نمایش سیگنالهای گسسته در زمان بر حسب توابع ضربه

$$x[n].\delta[n]=x[0].\delta[n]$$

$$x[n].\delta[n-n_0]=x[n_0].\delta[n-n_0]$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].\delta[n-k] \qquad u[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u[k].\delta[n-k]$$

$$k<0$$
$$u[k]=0$$
$$\longrightarrow$$

$$u[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]$$

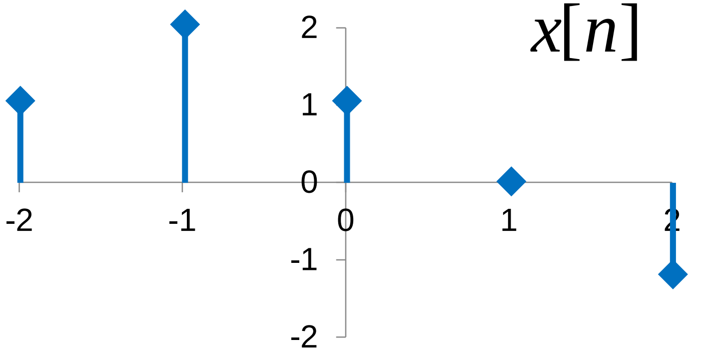
خاصیت غربالی تابع ضربه واحد

LTI Systems

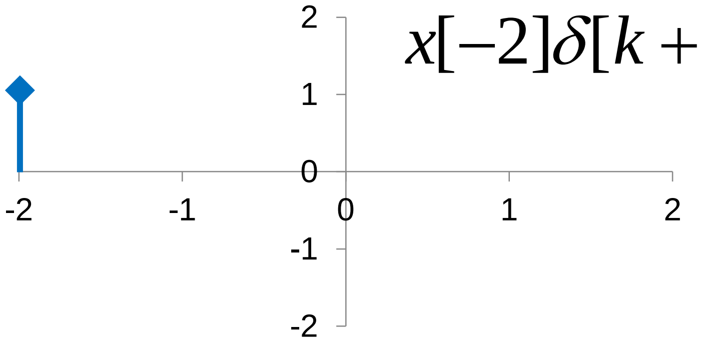
سیستمهای LTI گسسته در زمان

نمایش سیگنالهای گسسته در زمان بر حسب توابع ضربه

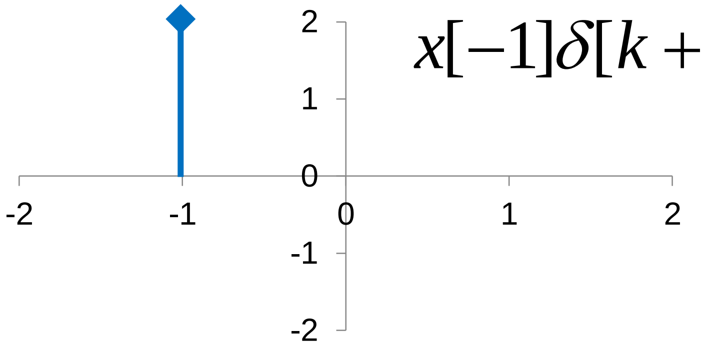
$x[n]$



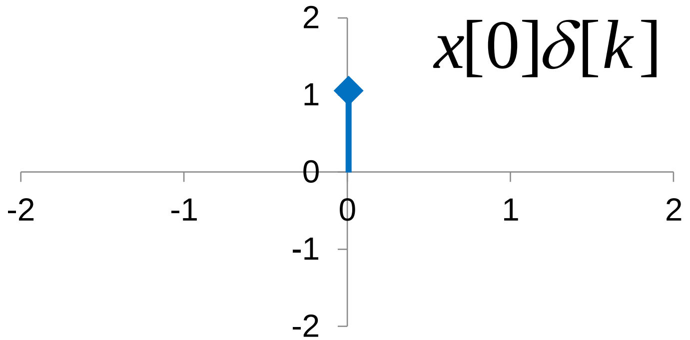
$x[-2]\delta[k+2]$



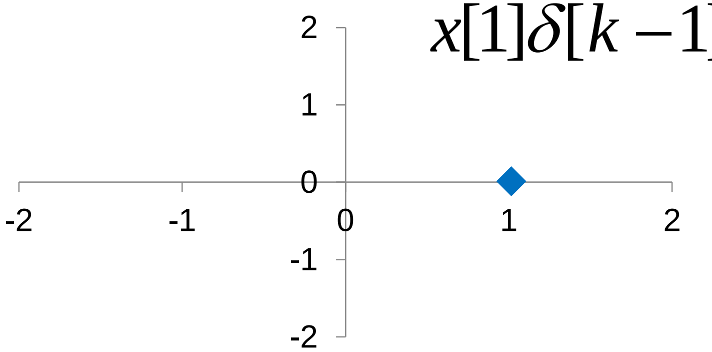
$x[-1]\delta[k+1]$



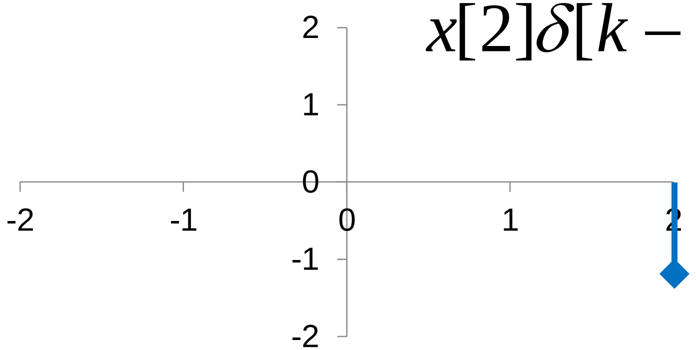
$x[0]\delta[k]$



$x[1]\delta[k-1]$



$x[2]\delta[k-2]$



LTI Systems

نمایش جمع کانولوشن

پاسخ ضربه

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

سیستم تغییرناپذیر با زمان $\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$

$$x[k].\delta[n-k] \longrightarrow x[k].h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

جمع کانولوشن

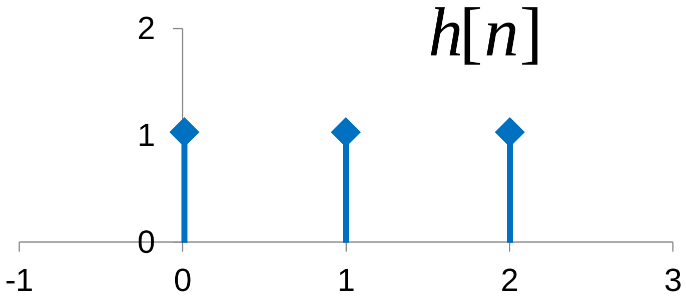
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] = x[n] * h[n]$$

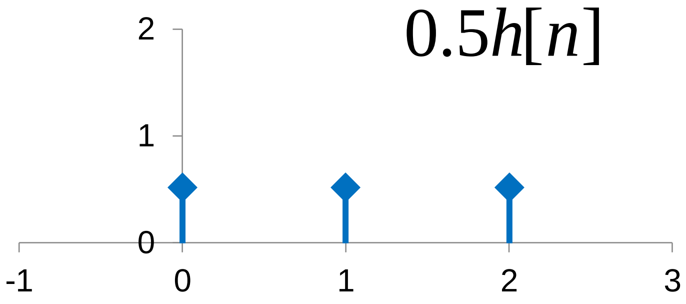
LTI Systems

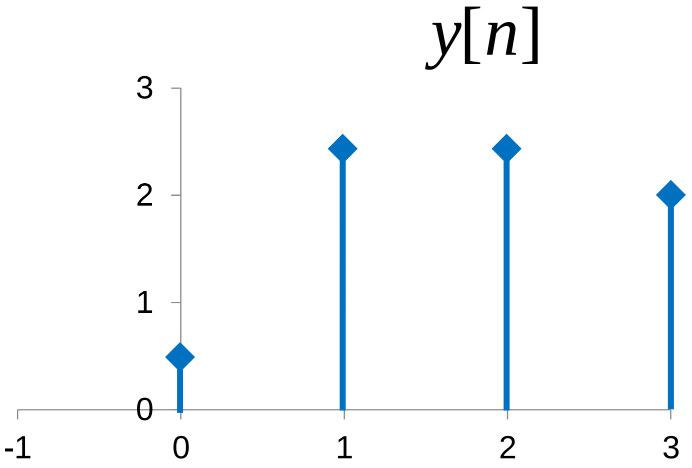
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=x[n]*h[n]=x[0]h[n]+x[1]h[n-1]$$

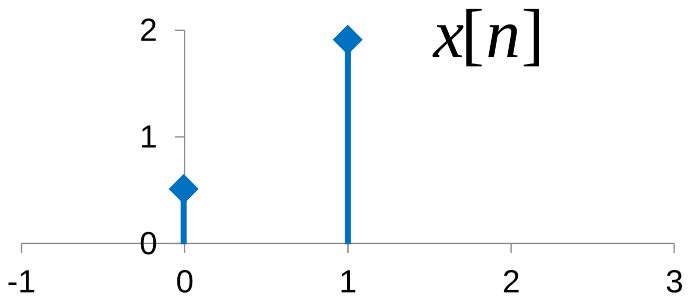
نمایش جمع کانولوشن

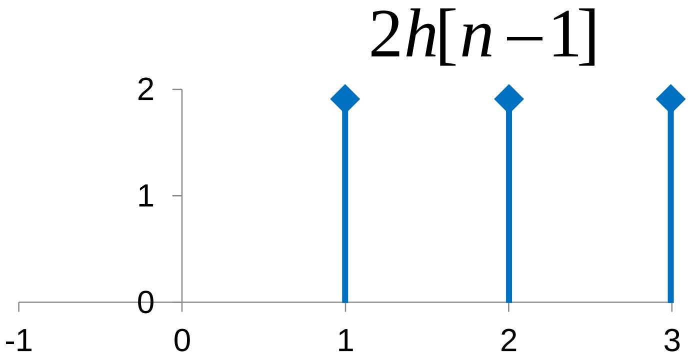
$$=0.5h[n]+2h[n-1]$$











LTI Systems

نمایش جمع کانولوشن

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]$$

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[0-k]$$

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[1-k]$$

$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[-1-k]$$

$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[2-k]$$

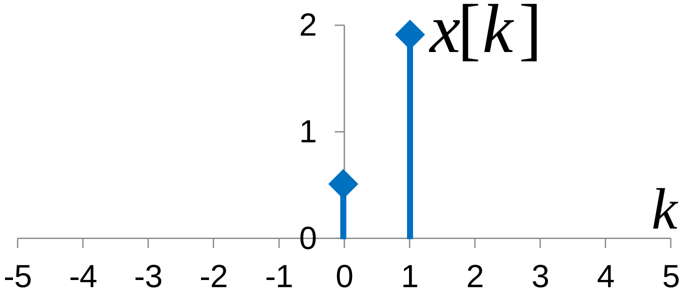
$$y[-2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[-2-k]$$

$$y[3]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[3-k]$$

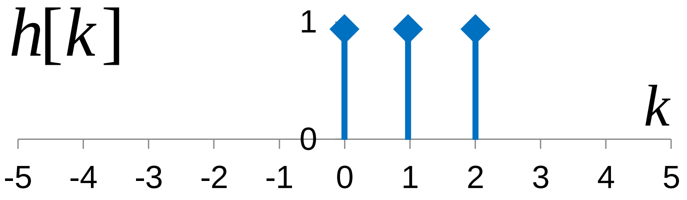
$$y[-3]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[-3-k]$$

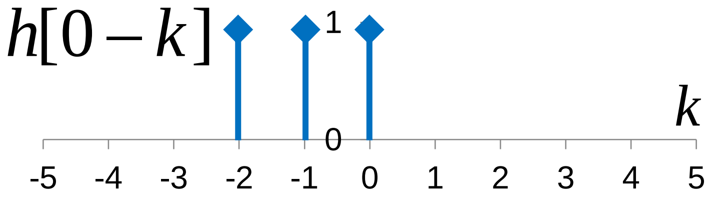
LTI Systems

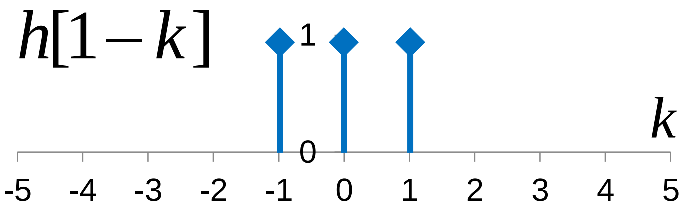
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]$$



نمایش جمع کانولوشن







$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[0-k]$$

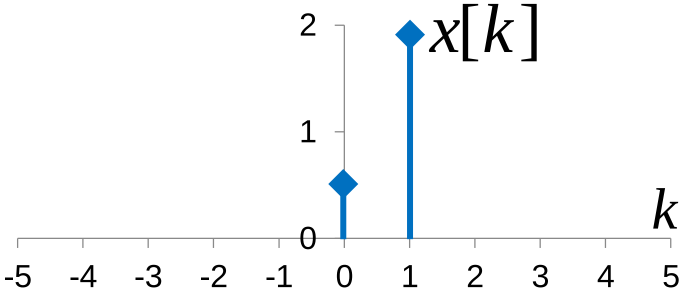
$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[1-k]$$

$$y[0]=0.5$$

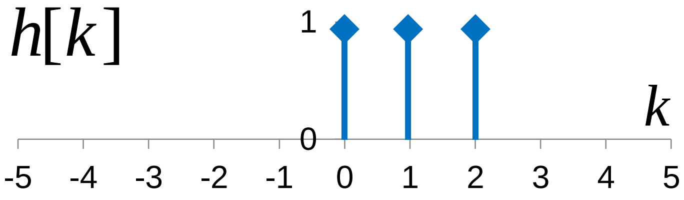
$$y[1]=0.5+2=2.5$$

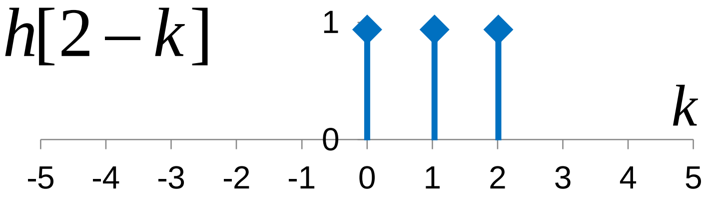
LTI Systems

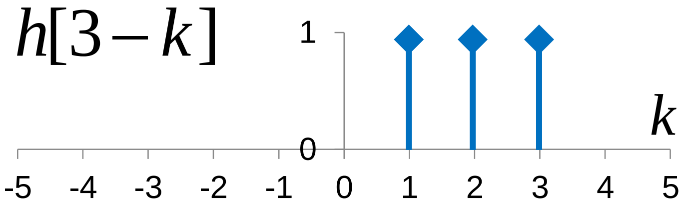
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]$$



نمایش جمع کانولوشن







$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[2-k]$$

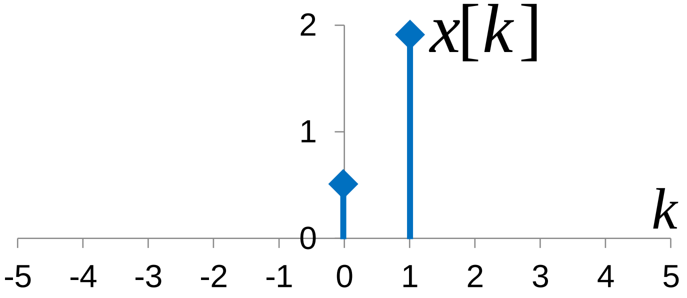
$$y[3]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[3-k]$$

$$y[2]=0.5+2=2.5$$

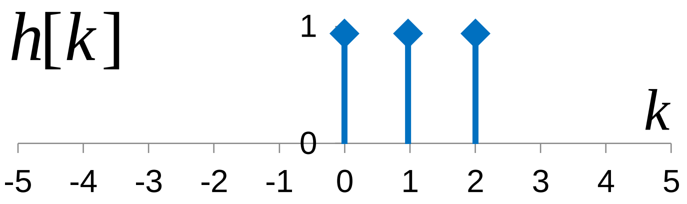
$$y[3]=2$$

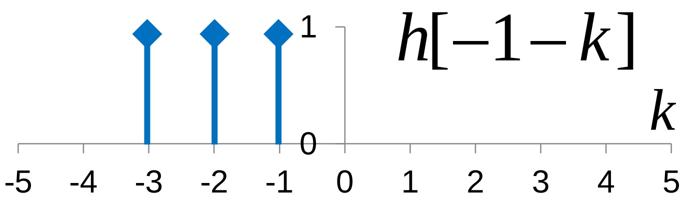
LTI Systems

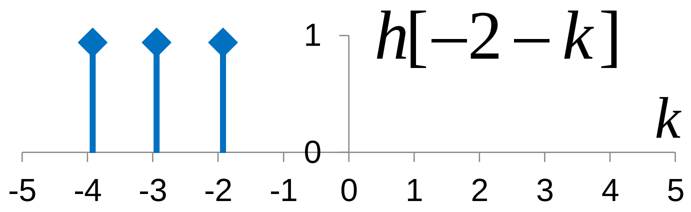
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$



نمایش جمع کانولوشن







$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[-1-k]$$

$$y[-2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[-2-k]$$

$$y[-1]=0$$

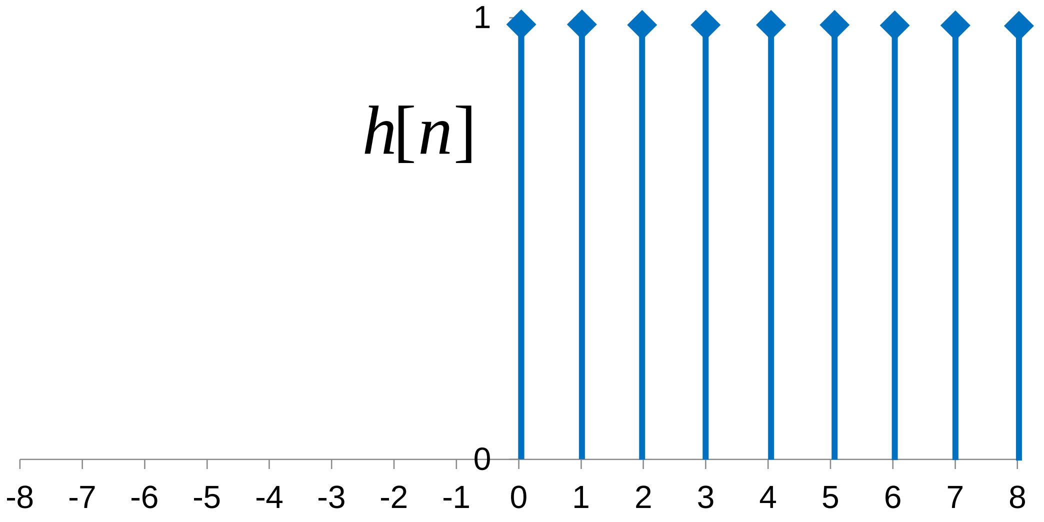
$$y[-2]=0$$

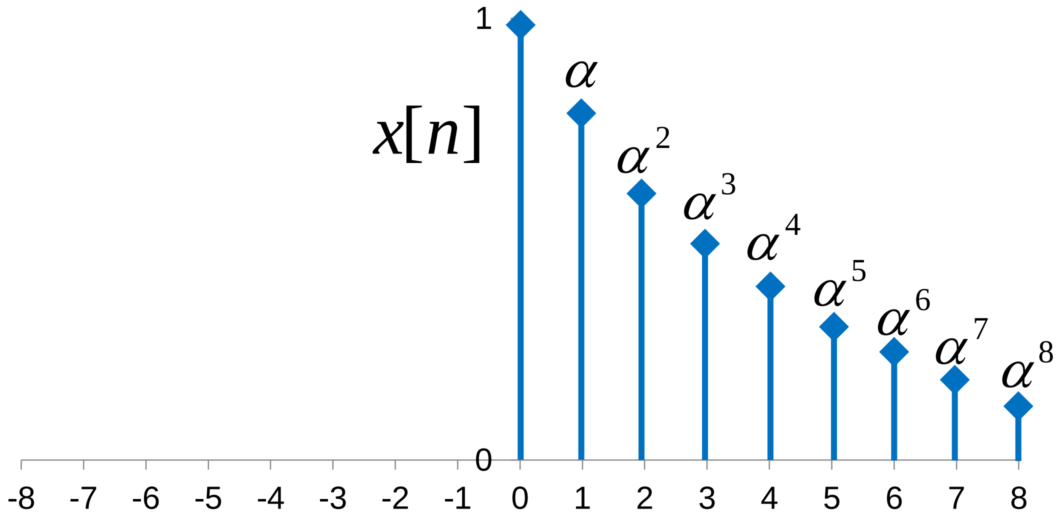
LTI Systems

نمایش جمع کانولوشن

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$
$$h[n] = u[n]$$

$$0 < \alpha < 1$$





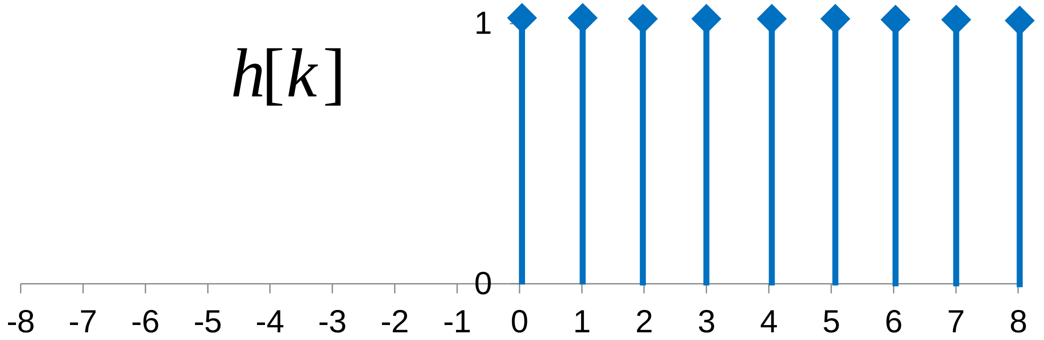
LTI Systems

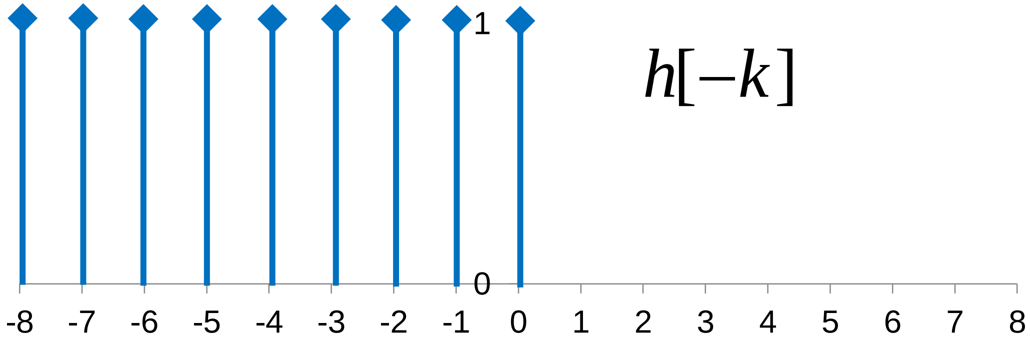
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

نمایش جمع کانولوشن

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[0-k] \;=1$$

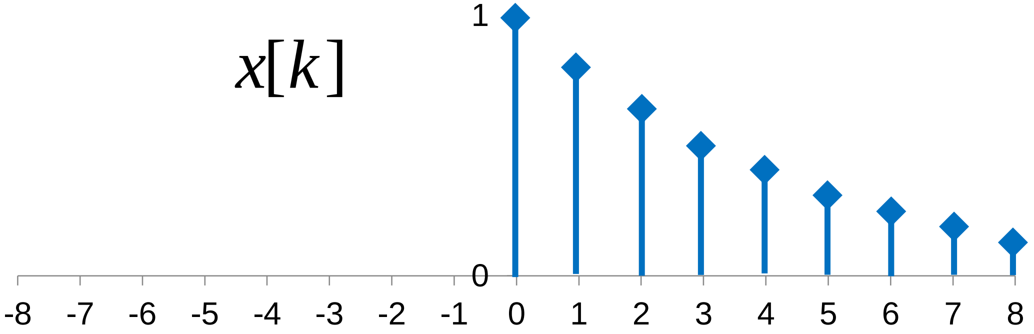
$h[k]$





$h[-k]$

$x[k]$



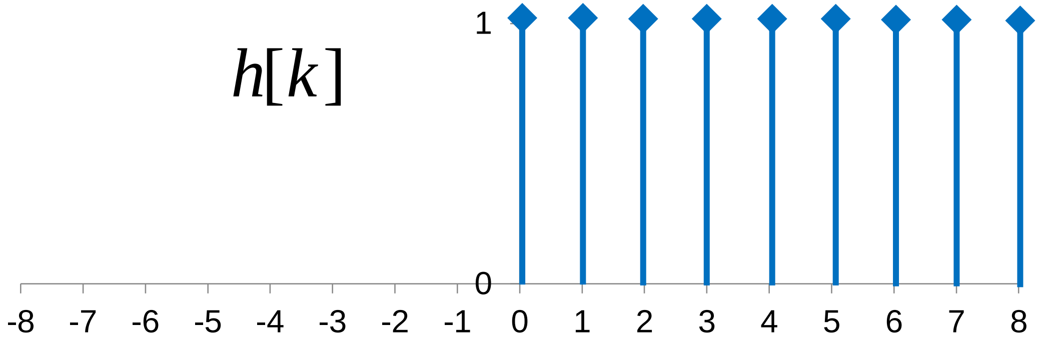
LTI Systems

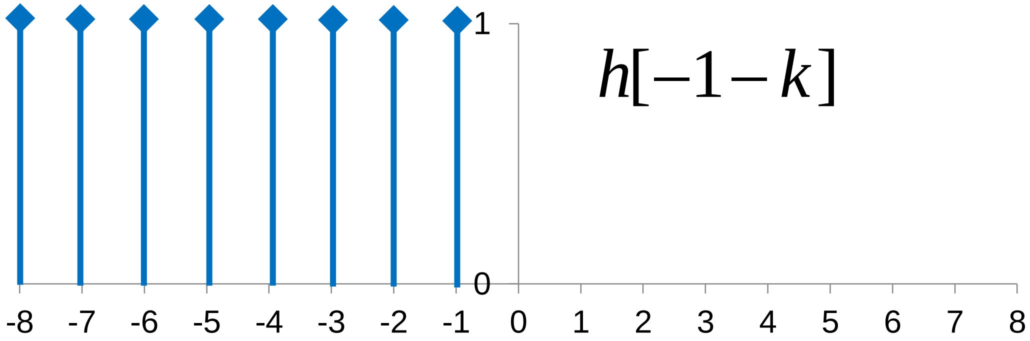
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

نمایش جمع کانولوشن

$$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[-1-k] = 0$$

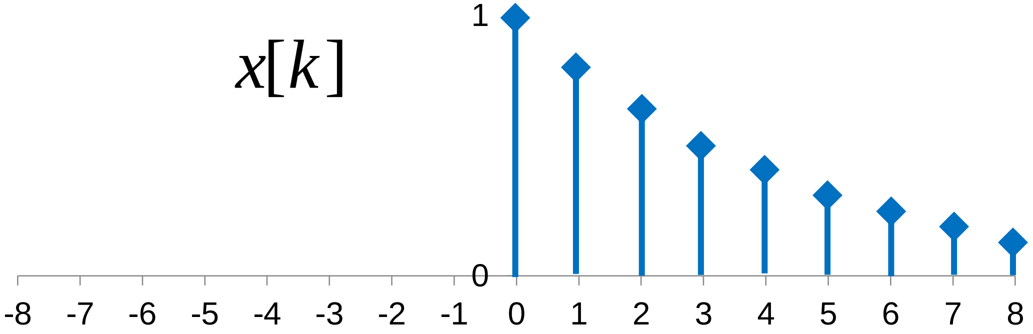
$h[k]$





$h[-1-k]$

$x[k]$



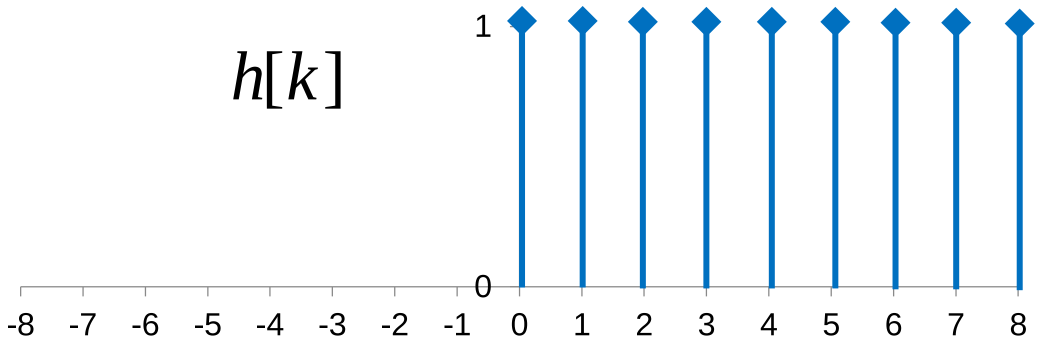
LTI Systems

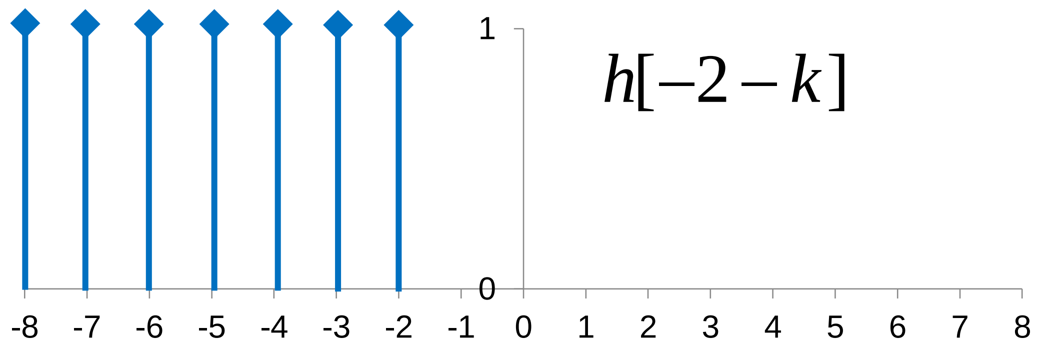
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

نمایش جمع کانولوشن

$$y[-2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[-2-k] = 0$$

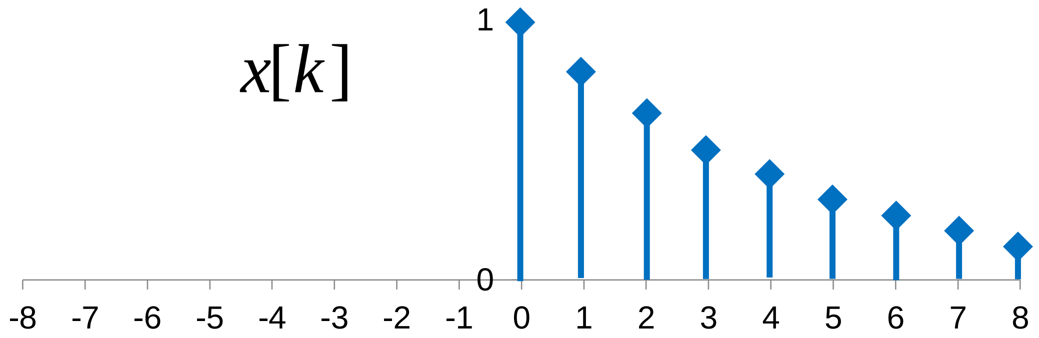
$h[k]$





$h[-2-k]$

$x[k]$



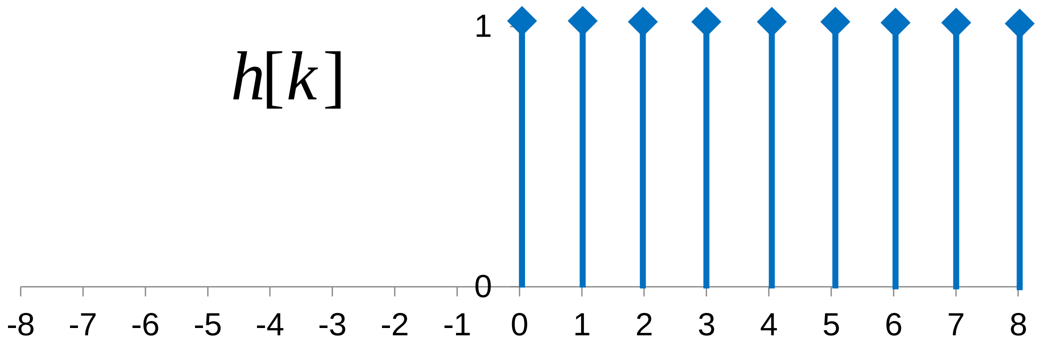
LTI Systems

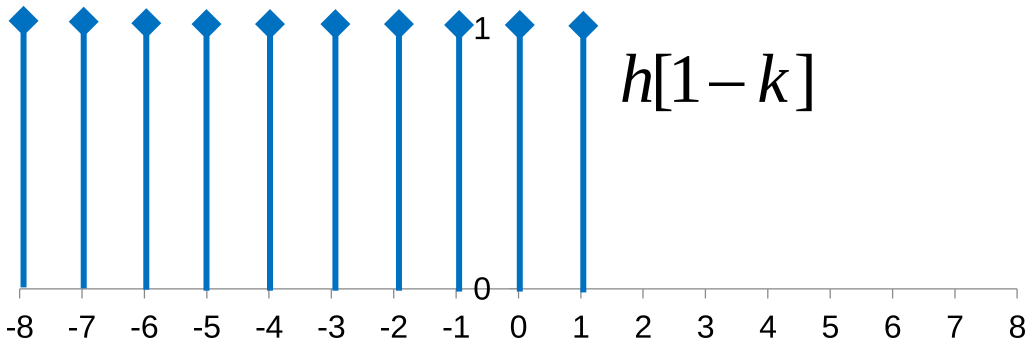
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]$$

نمایش جمع کانولوشن

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[1-k]=1+\alpha$$

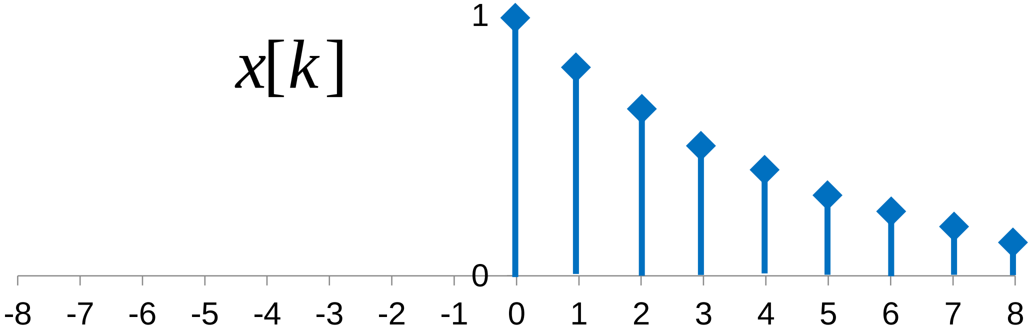
$h[k]$





$h[1-k]$

$x[k]$



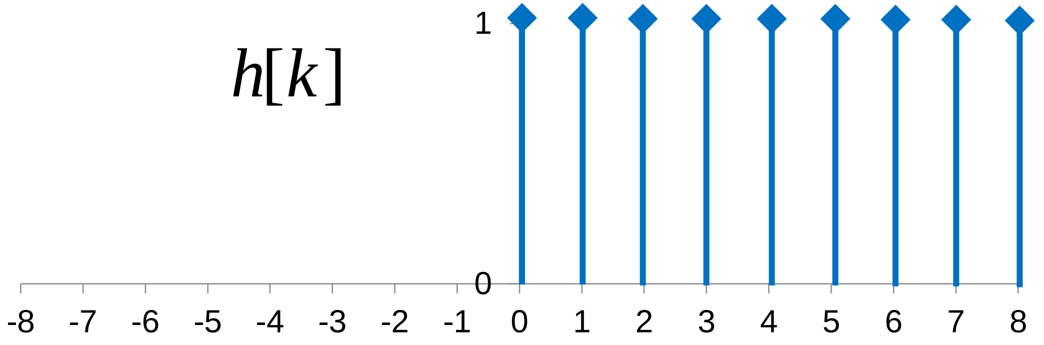
LTI Systems

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]$$

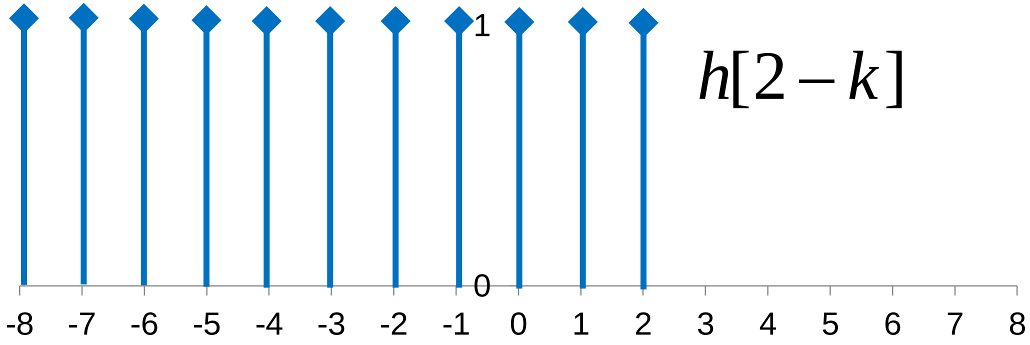
$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[2-k]=1+\alpha+\alpha^2$$

نمایش جمع کانولوشن

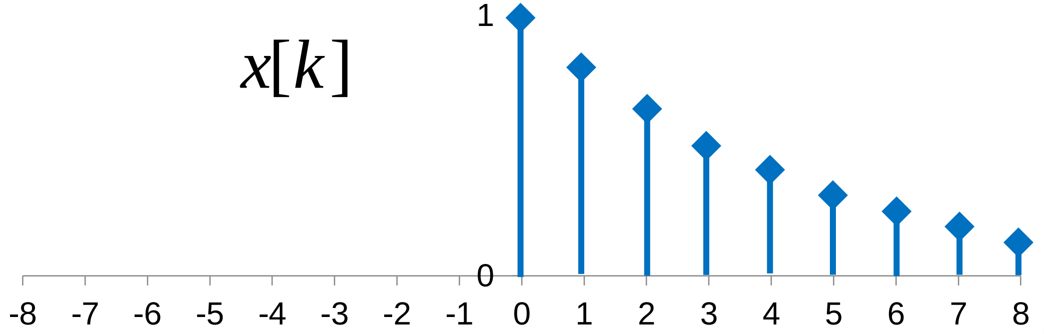
$h[k]$



$h[2-k]$



$x[k]$



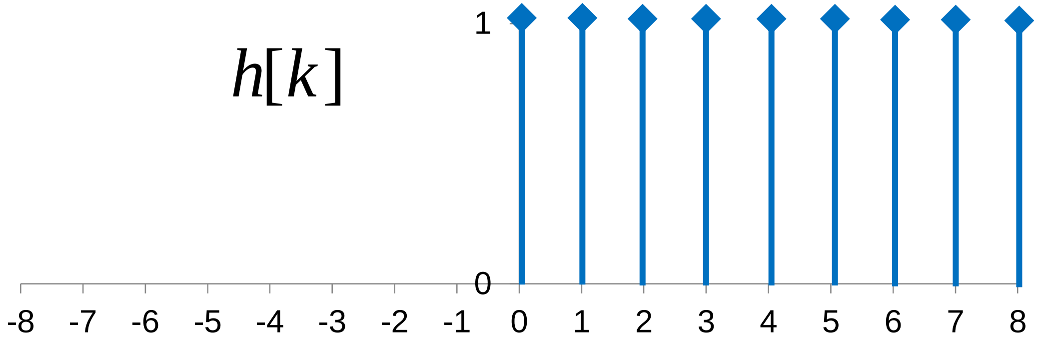
LTI Systems

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]$$

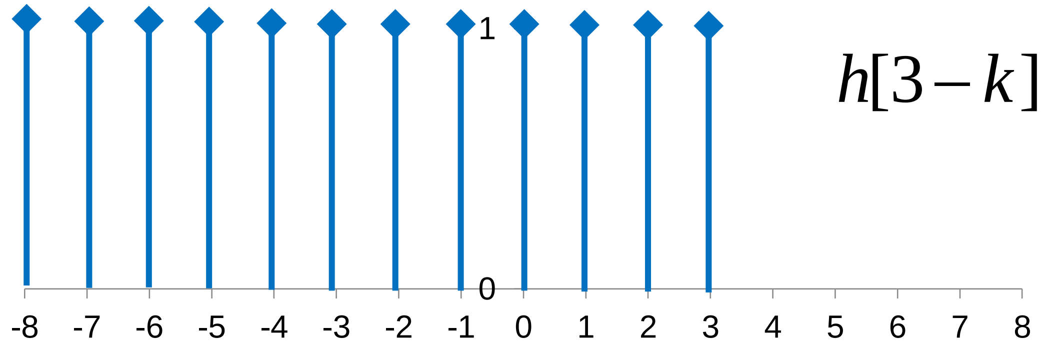
نمایش جمع کانولوشن

$$y[3]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[3-k]=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$$

$h[k]$

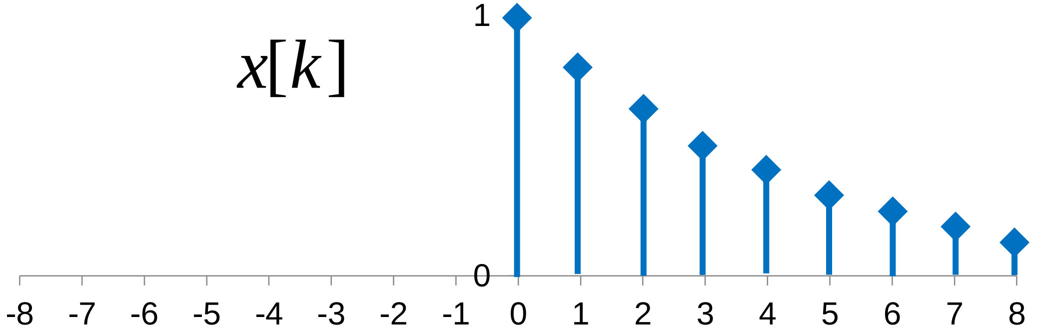


$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k \qquad n\geq 0$$



$h[3-k]$

$x[k]$



LTI Systems

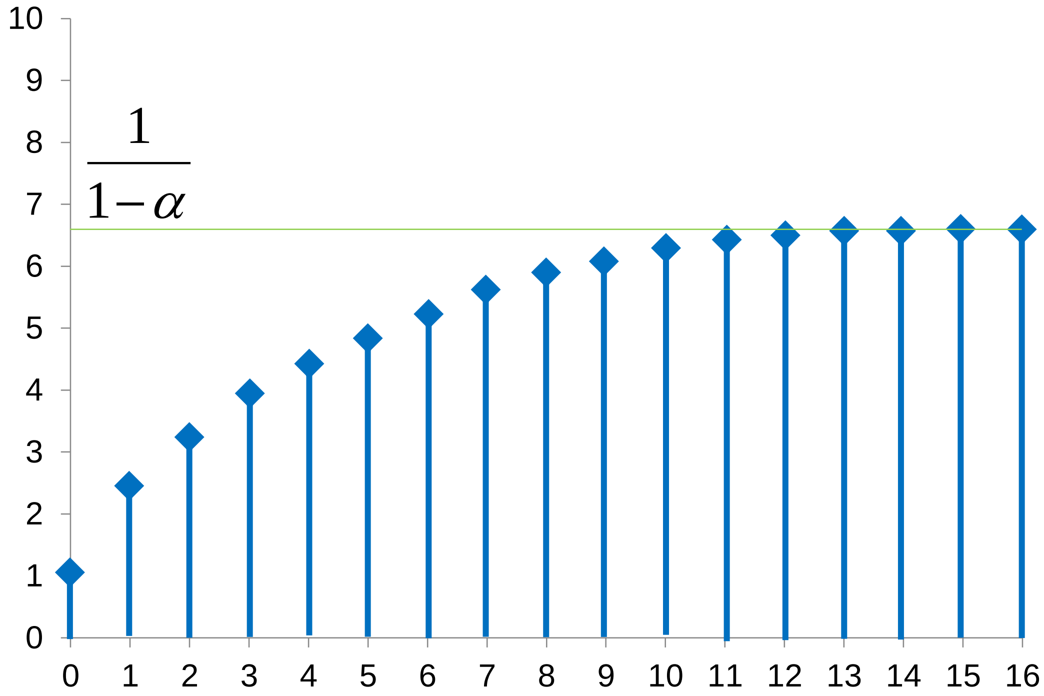
نمایش جمع کانولوشن

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k} \qquad n\geq 0$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad n\geq 0$$

$$y[n]=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u[n]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$



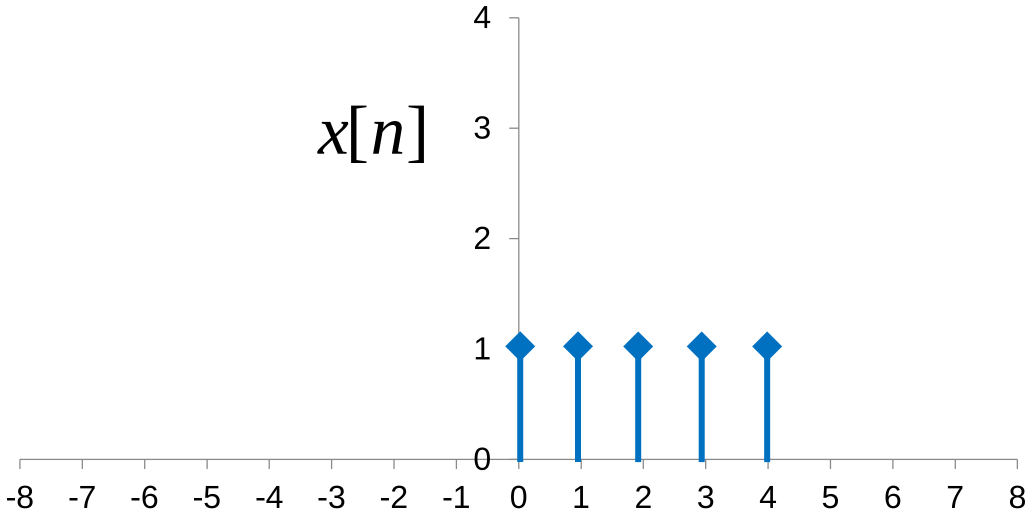
LTI Systems

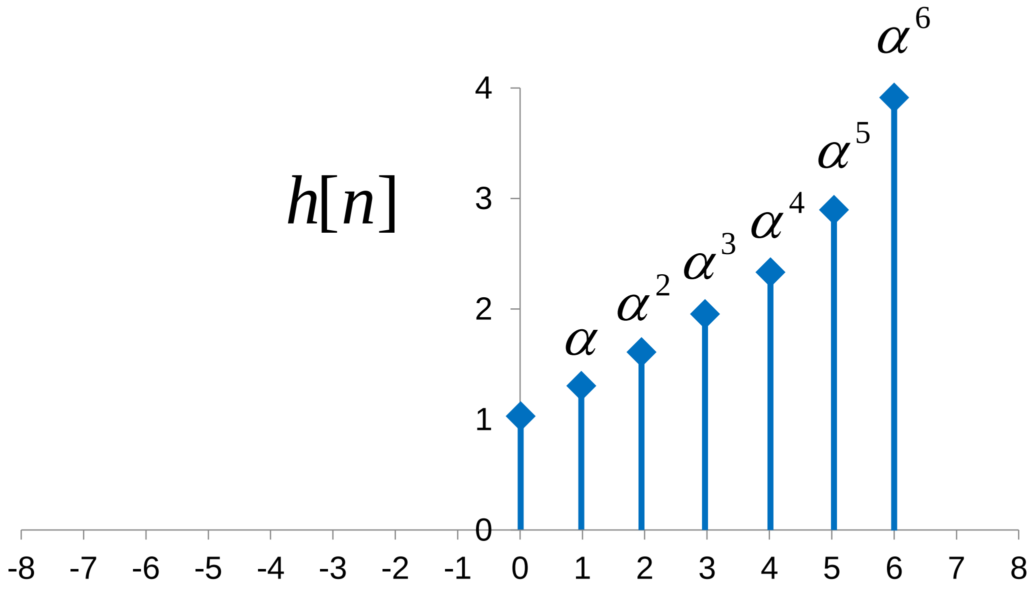
نمایش جمع کانولوشن

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}\alpha^{n} & 0\le n\le 6\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$\alpha>1$$





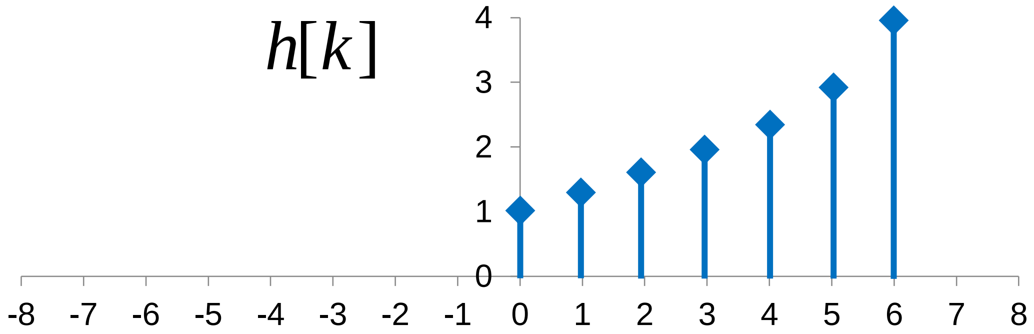
LTI Systems

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] \qquad n<0$$

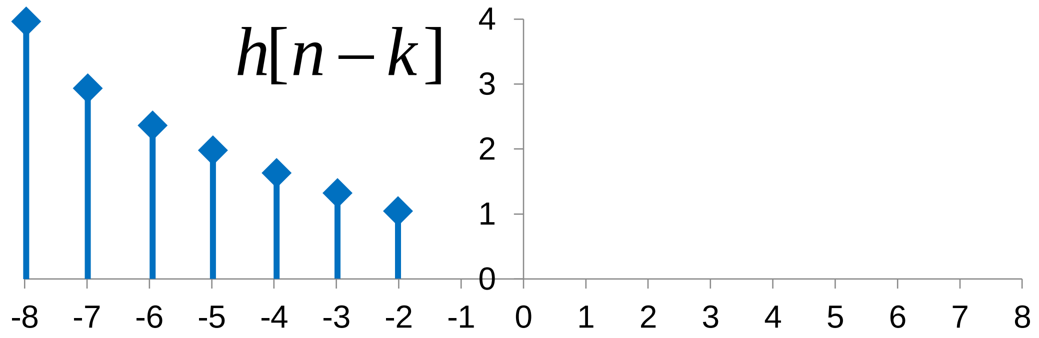
نمایش جمع کانولوشن

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] = 0$$

$h[k]$

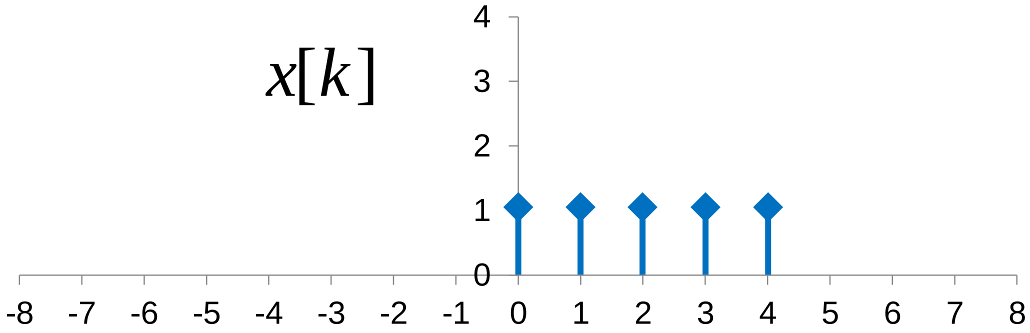


$h[n-k]$



n

$x[k]$



LTI Systems

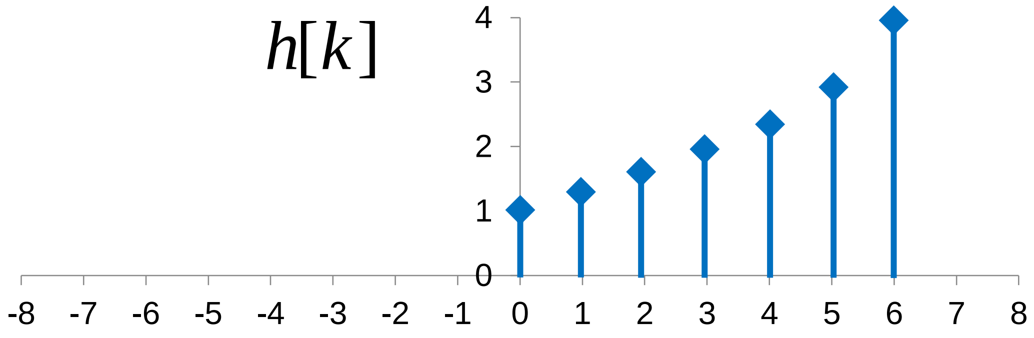
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k] \qquad 0\le n\le 4$$

نمایش جمع کانولوشن

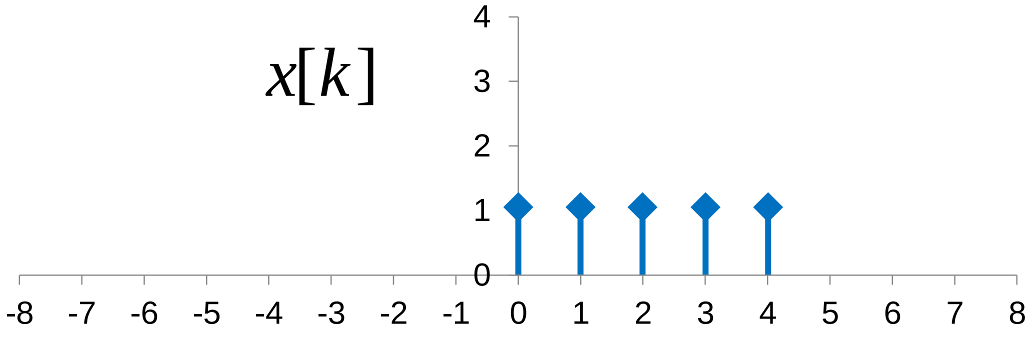
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=0}^{n}h[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{(n-k)}=\sum_{r=n}^{0}\alpha^{r}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

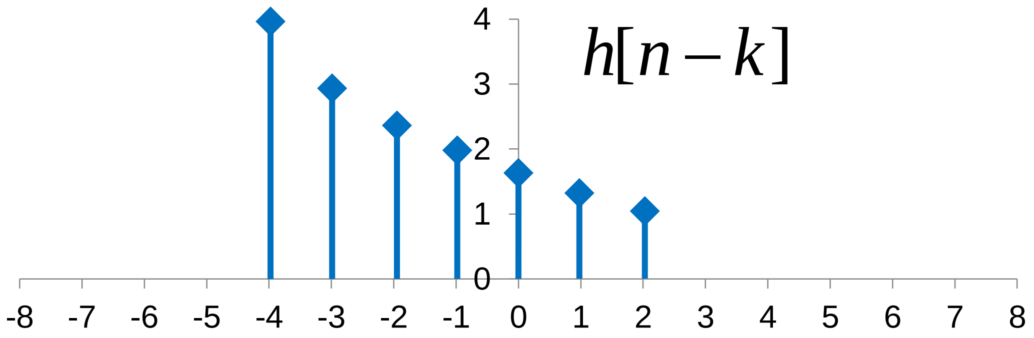
$h[k]$



$x[k]$



$h[n-k]$



n

LTI Systems

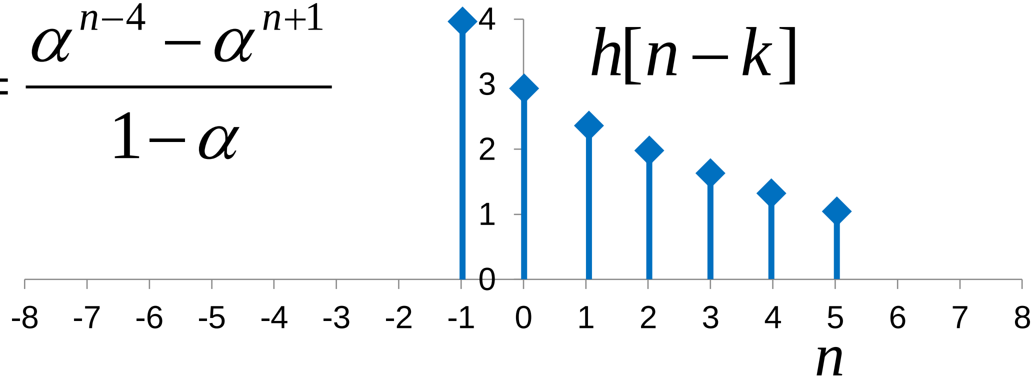
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k] \qquad 4<n\leq 6$$

نمایش جمع کانولوشن

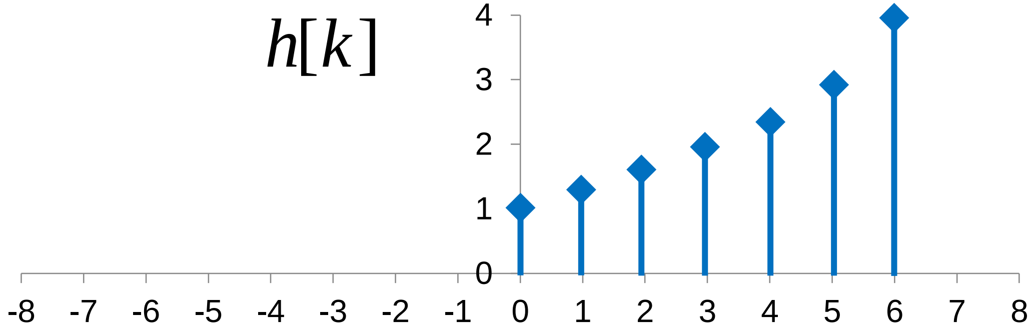
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=0}^{4}h[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{(n-k)}=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{4}(\alpha^{-1})^{k}=\alpha^{n}\frac{1-(\alpha^{-1})^{5}}{1-\alpha^{-1}}$$

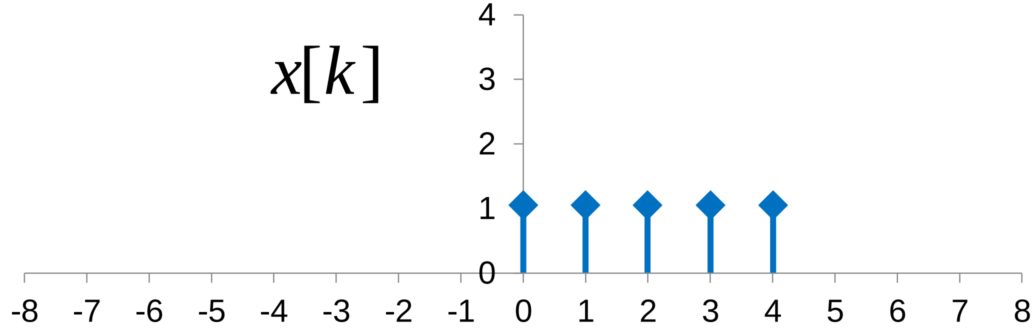
$$=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$



$h[k]$



$x[k]$



LTI Systems

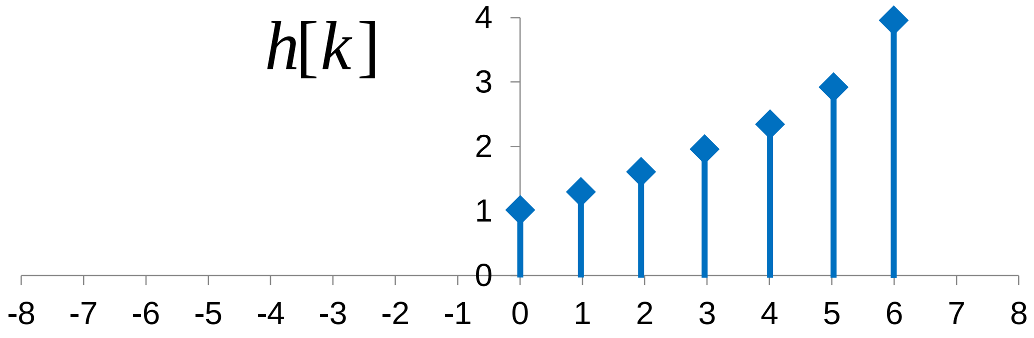
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k] \qquad 6<n\leq 10$$

نمایش جمع کانولوشن

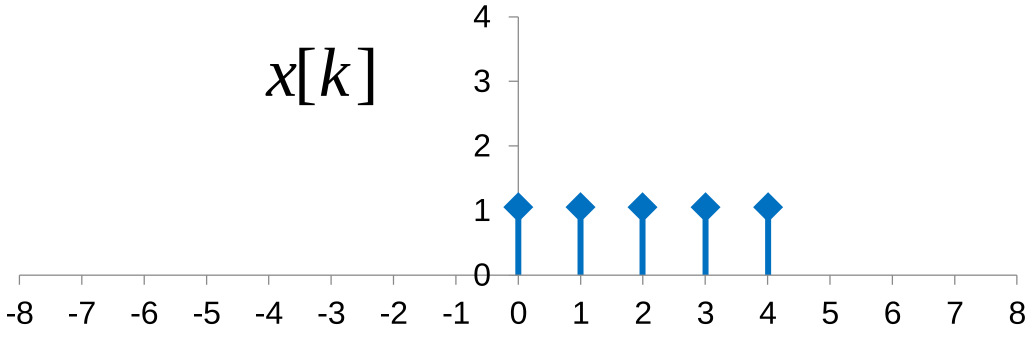
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=n-6}^{4}h[n-k]$$

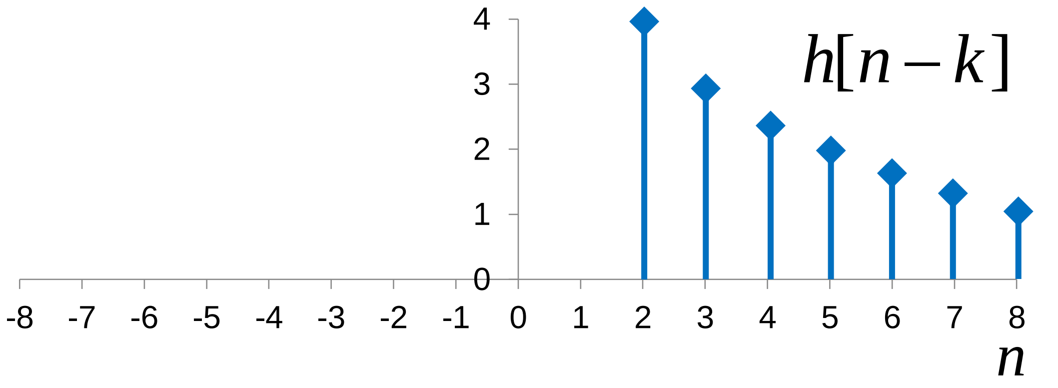
$$=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{(n-k)}=\sum_{r=0}^{10-n}\alpha^{6-r}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

$h[k]$



$x[k]$





LTI Systems

سیستمهای LTI پیوسته در زمان

نمایش سیگنالهای پیوسته در زمان بر حسب توابع ضربه

$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t)$$

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

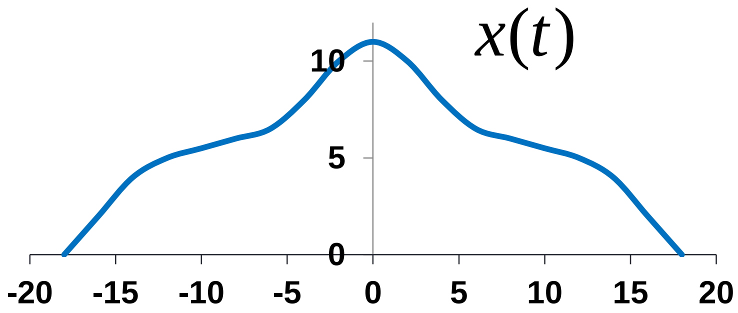
$k < 0$

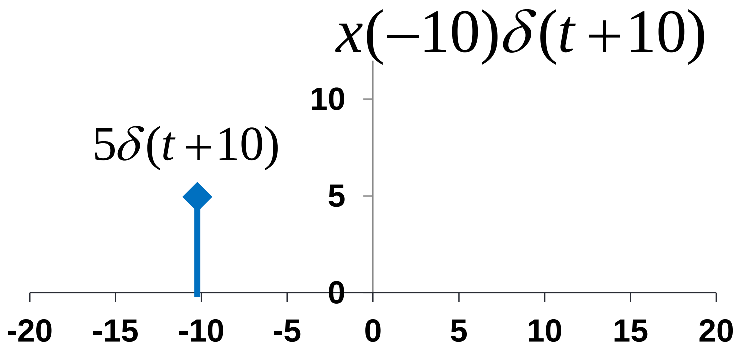
$u(\tau) = 0$ $\longrightarrow$ $u(t) = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau$ خاصیت غربالی تابع ضربه واحد

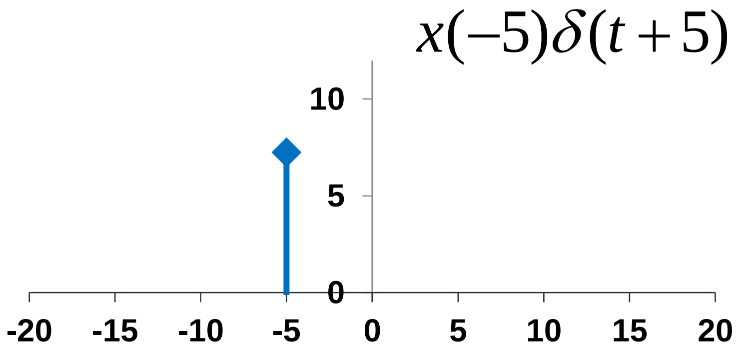
LTI Systems

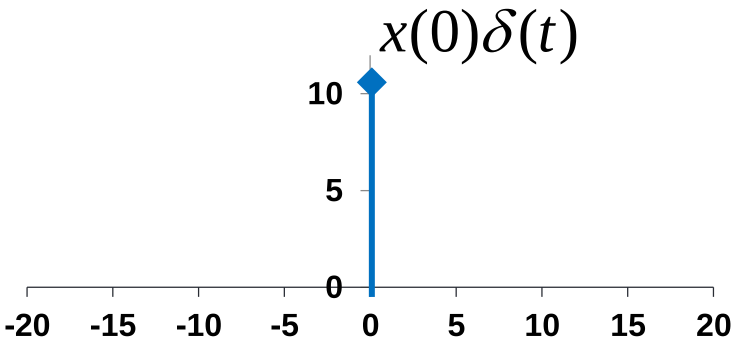
سیستم‌های LTI پیوسته در زمان

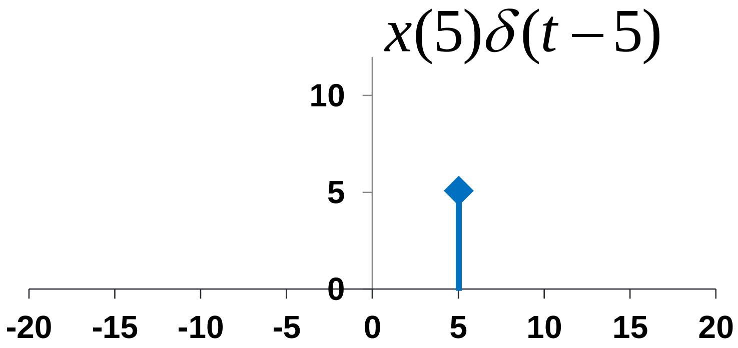
نمایش سیگنال‌های پیوسته در زمان بر حسب توابع ضربه

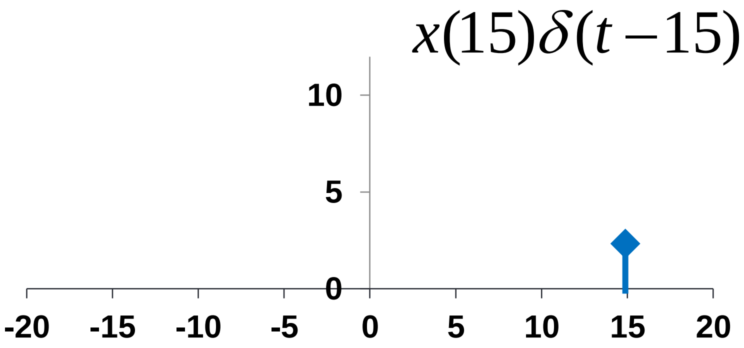












LTI Systems

نمایش انتگرال کانولوشن

$\delta(t) \to h(t)$ سیستم تغییرناپذیر با زمان $\delta(t-\tau) \to h(t-\tau)$

$$x(\tau).\delta(t-\tau) \longrightarrow x(\tau).h(t-\tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

انتگرال کانولوشن

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

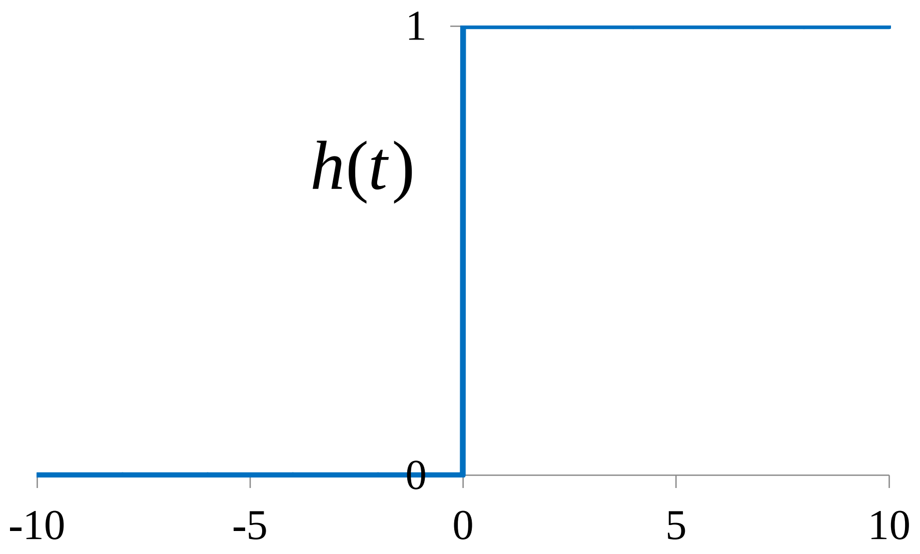
LTI Systems

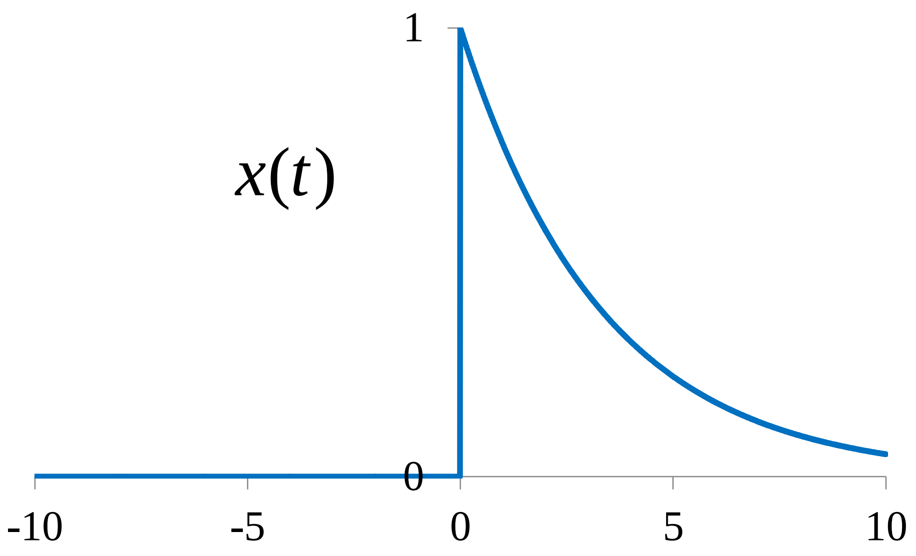
نمایش انتگرال کانولوشن

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$h(t) = u(t)$$

$$\alpha > 0$$





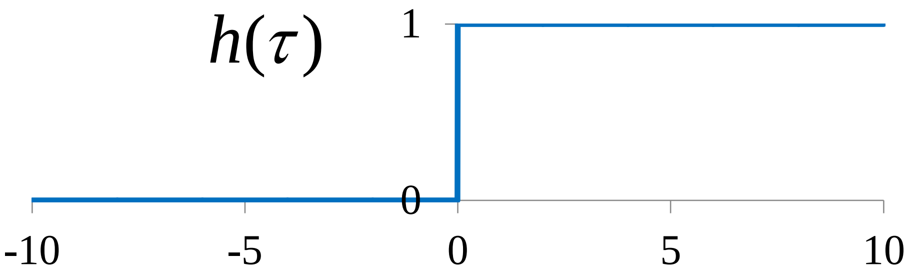
LTI Systems

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad t<0$$

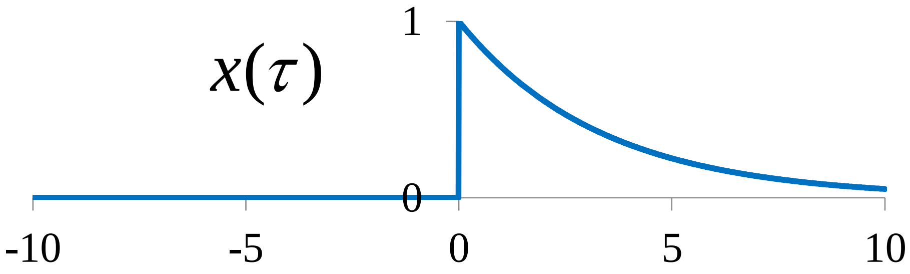
نمایش انتگرال کانولوشن

$$y(t)=0$$

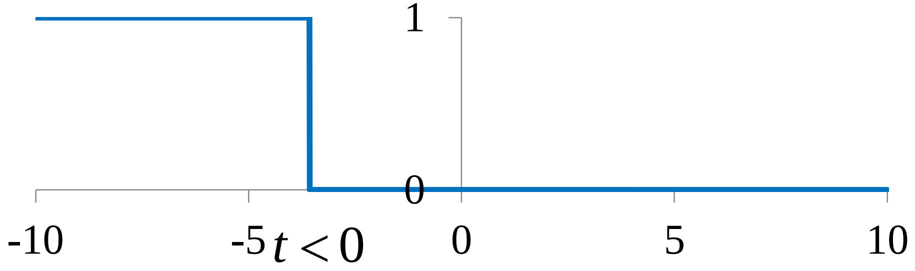
$h(\tau)$



$x(\tau)$



$h(t-\tau)$



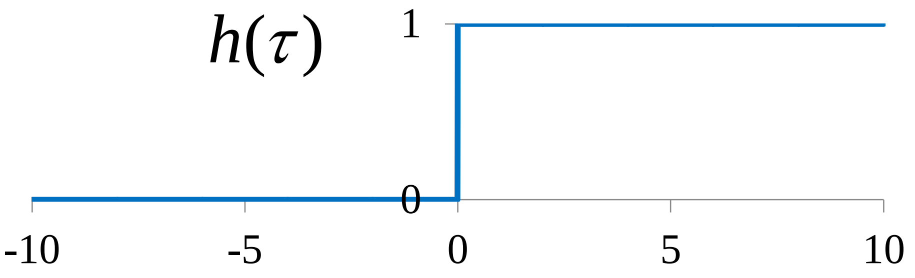
LTI Systems

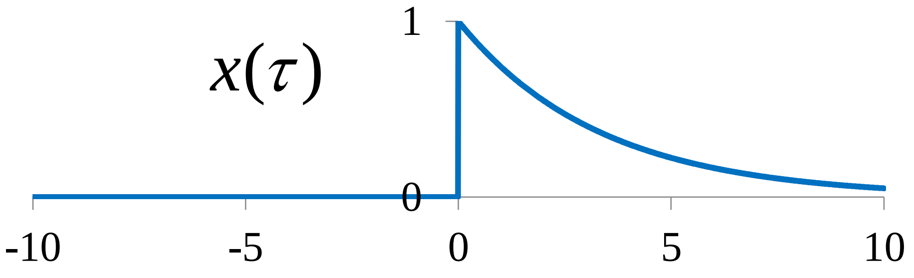
نمایش انتگرال کانولوشن

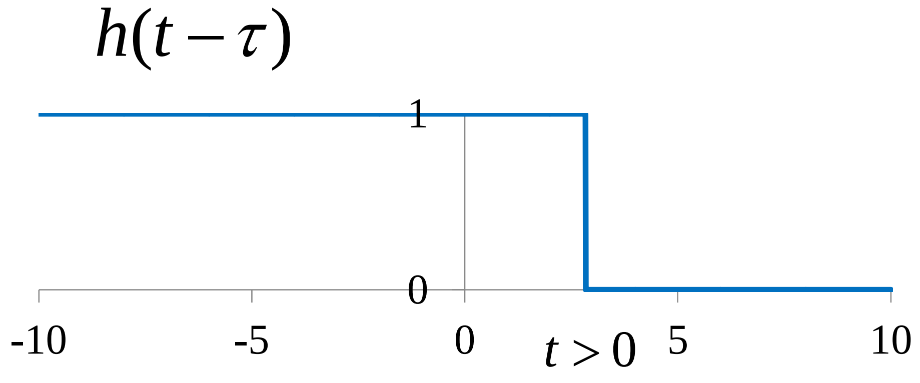
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad t>0$$

$$y(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-\alpha\tau}.1d\tau$$

$$y(t)=\frac{e^{-\alpha t}-1}{-\alpha}=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$







LTI Systems

نمایش انتگرال کانولوشن

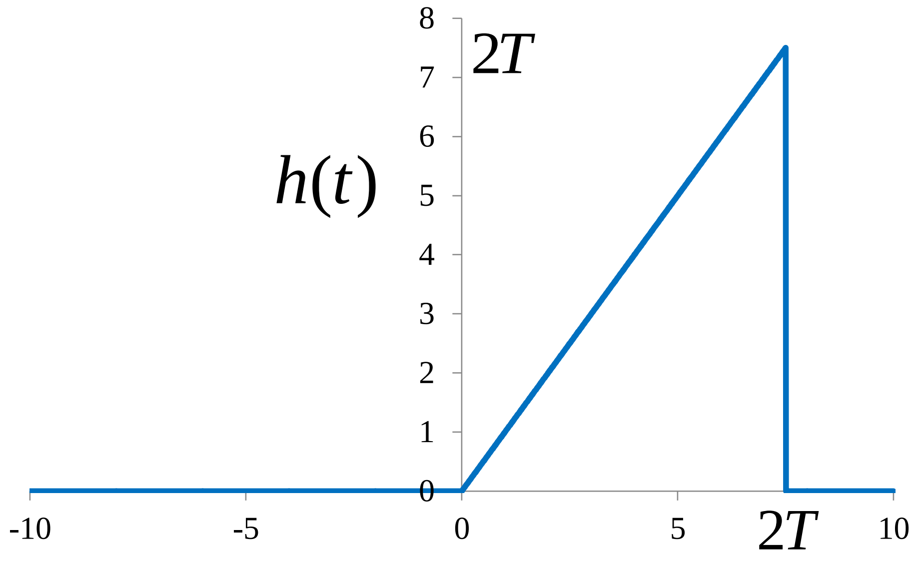
$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

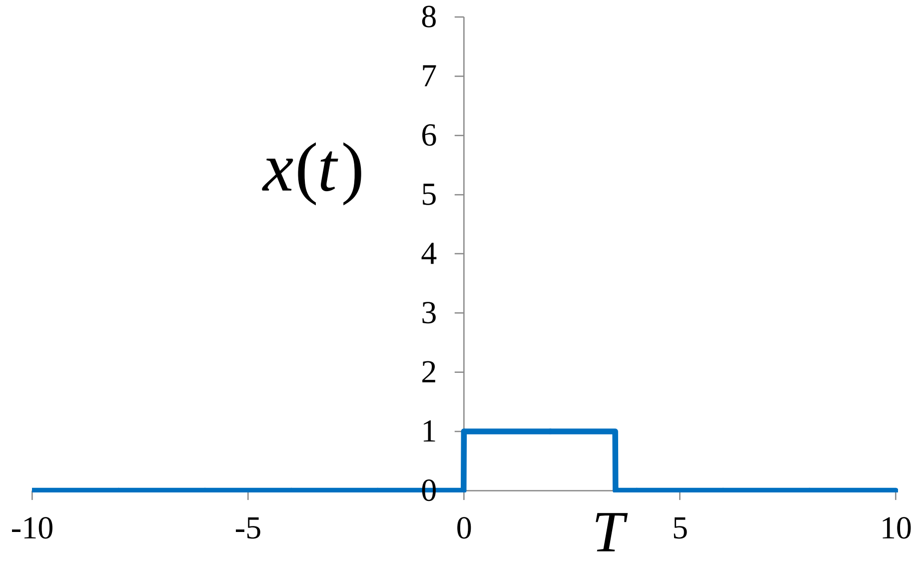
$$y(t)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

LTI Systems

نمایش انتگرال کانولوشن

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & Otherwise \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2T \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$



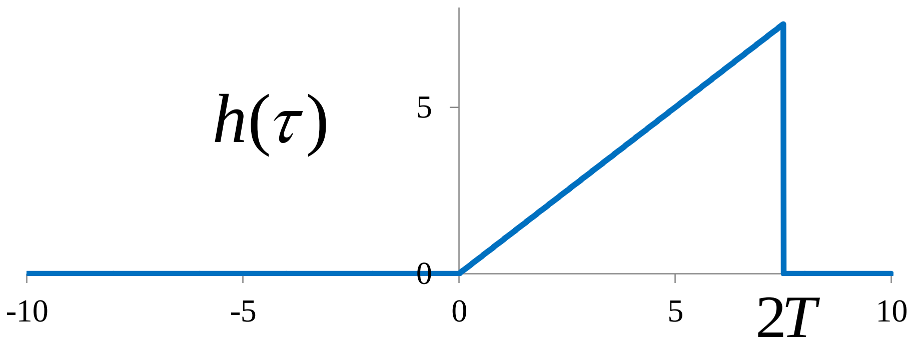


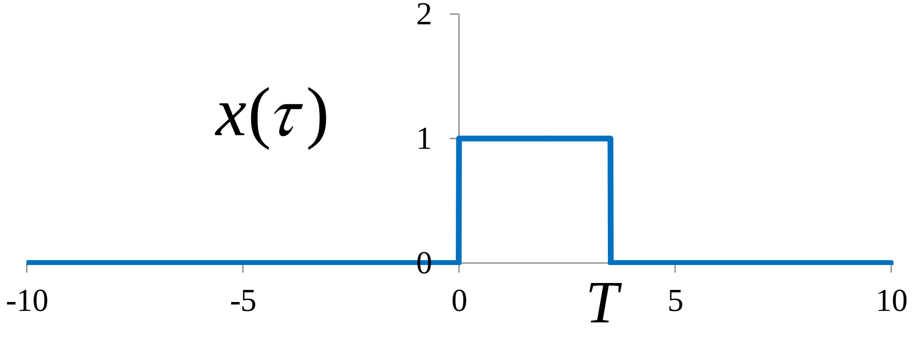
LTI Systems

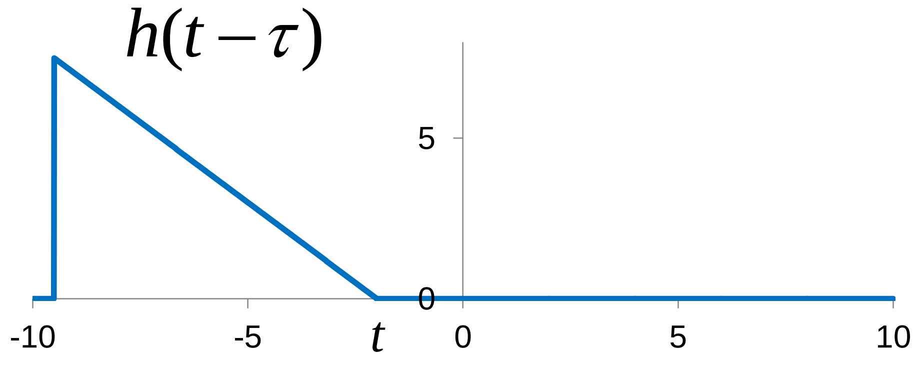
نمایش انتگرال کانولوشن

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad t<0$$

$$y(t)=0$$







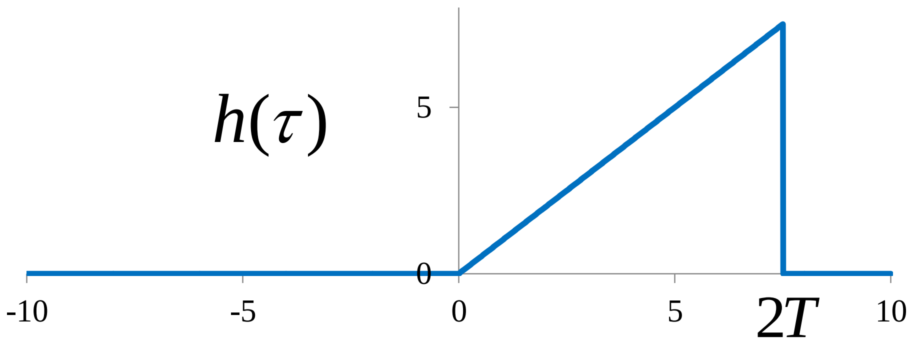
LTI Systems

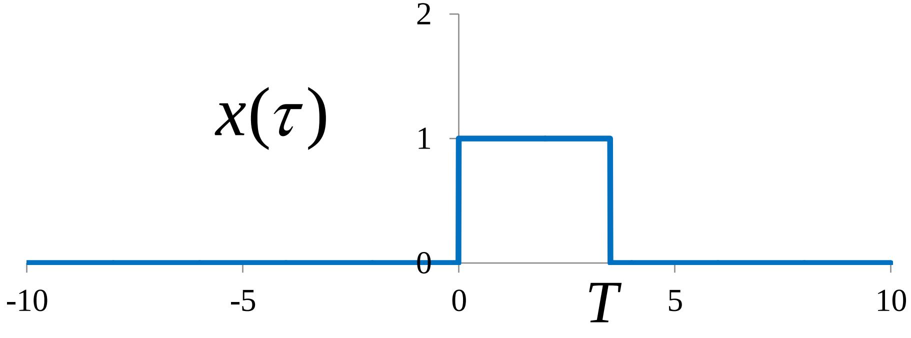
نمایش انتگرال کانولوشن

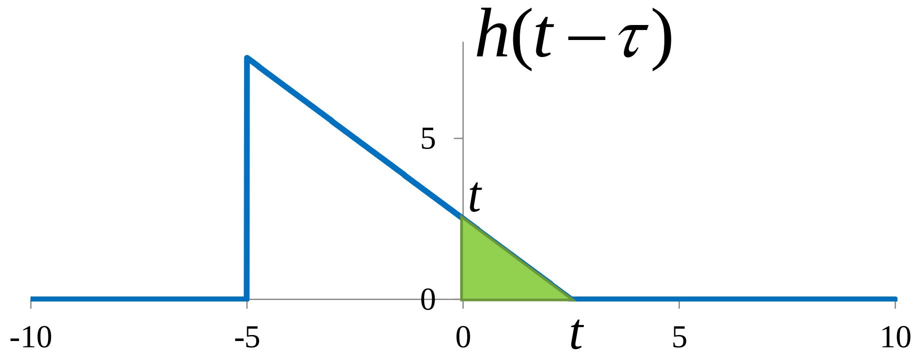
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad 0<t<T$$

$$y(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}1.(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=\frac{t^2}{2}$$







LTI Systems

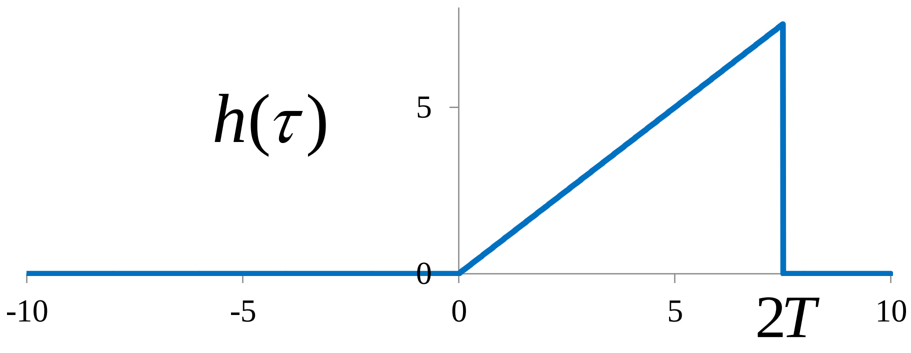
نمایش انتگرال کانولوشن

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad T<t<2T$$

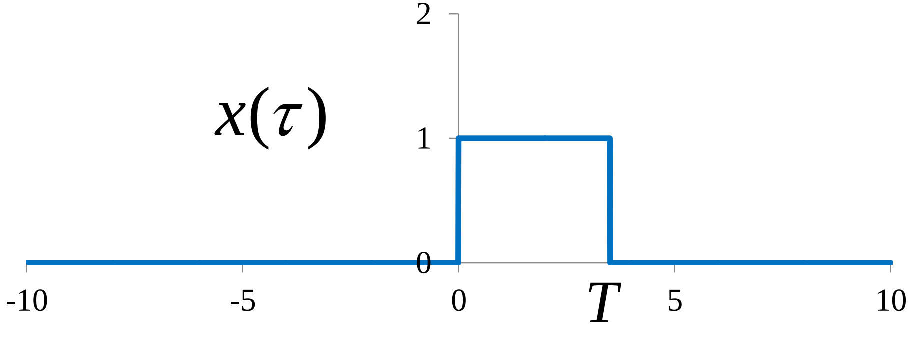
$$y(t)=\int_{0}^{T}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{T}1.(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=Tt-\frac{1}{2}T^{2}$$

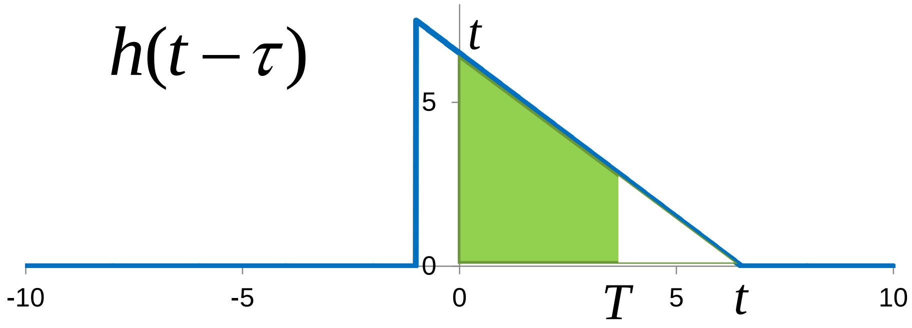
$h(\tau)$



$x(\tau)$



$h(t-\tau)$



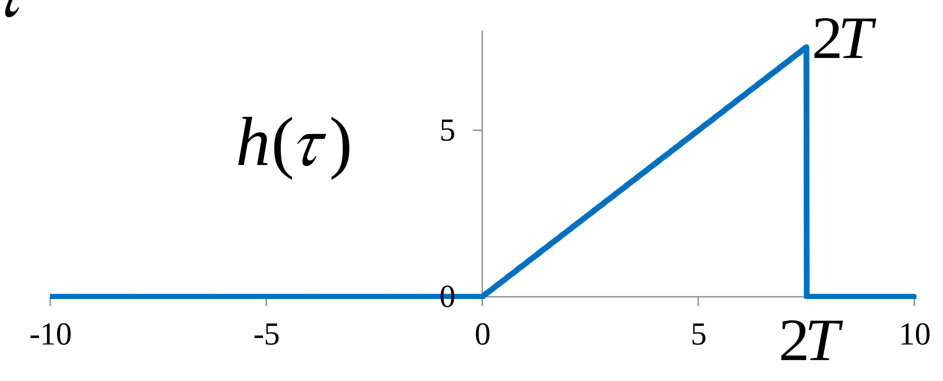
LTI Systems

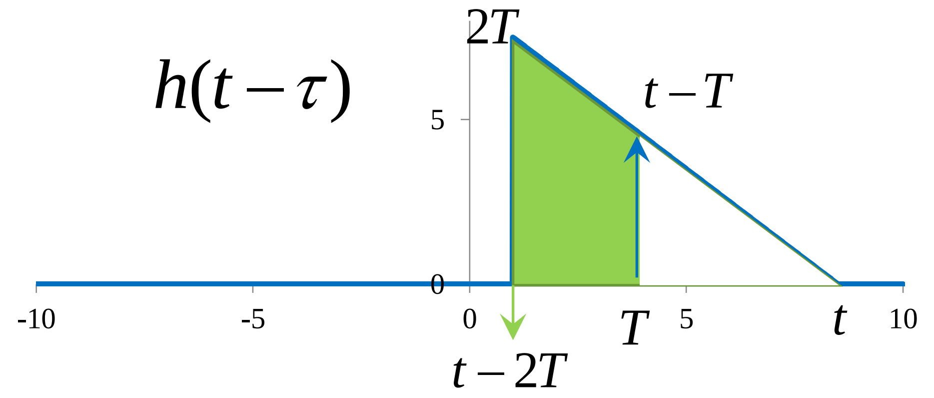
نمایش انتگرال کانولوشن

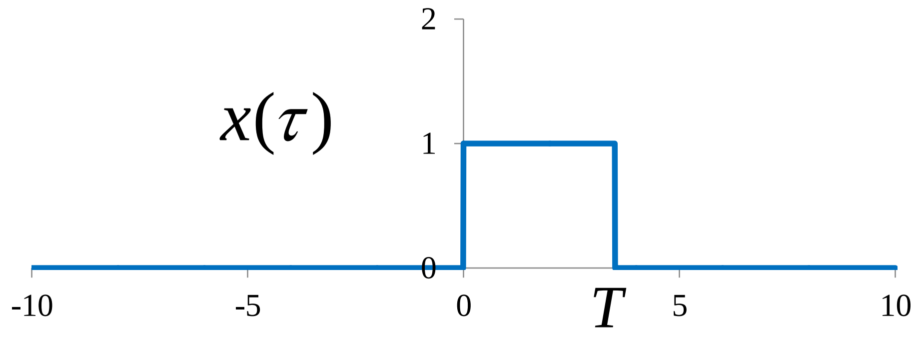
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad 2T<t<3T$$

$$y(t)=\int_{0}^{T}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{t-2T}^{T}1.(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=Tt-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}T^2$$





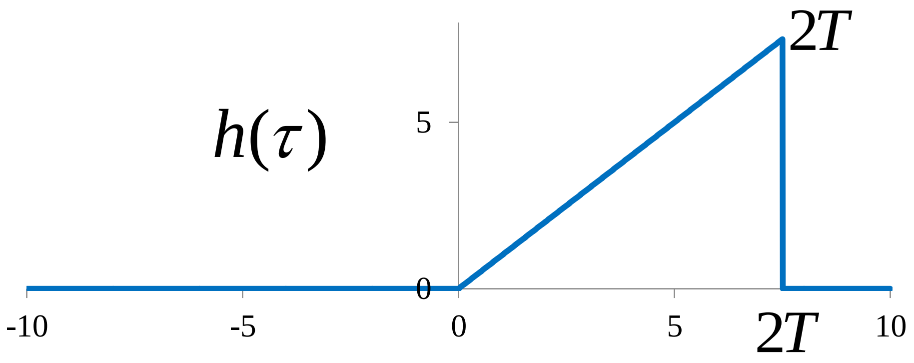


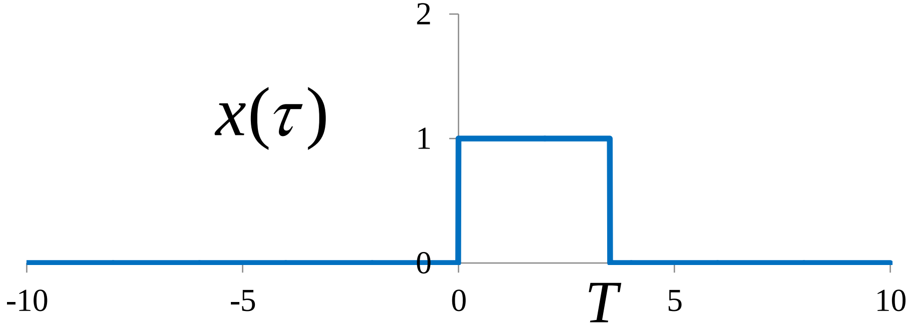
LTI Systems

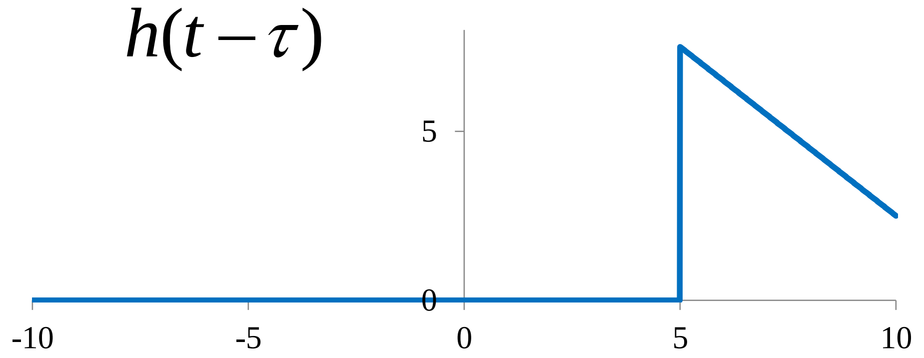
نمایش انتگرال کانولوشن

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad t>3T$$

$$y(t)=\int_{0}^{T} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=0$$







LTI Systems

محاسبه جمع کانولوشن از طریق فرمول

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$
$$h[n] = u[n]$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k u[k].u[n-k]$$

$$n < 0 \quad y[n] = \sum_{k=0}^{0} \alpha^k = 0$$

$$n > 0 \quad y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

LTI Systems

محاسبه جمع کانولوشن از طریق فرمول

$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n & 0\le n\le 6\\ 0 & Otherwise\end{cases},\qquad \alpha>1$$

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$h[n]=\alpha^n\left(u[n]-u[n-7]\right)\qquad\qquad x[n]=u[n]-u[n-5]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(u[k]-u[k-5]\right).\left[\alpha^{n-k}\left(u[n-k]-u[n-k-7]\right)\right]$$

LTI Systems

محاسبه جمع کانولوشن از طریق فرمول

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k].h[k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(u[n]-u[n-5]\right).\left[\alpha^{n-k}\left(u[n-k]-u[n-k-7]\right)\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(u[n-k]-u[n-k-5]\right).\left[\alpha^{k}\left(u[k]-u[k-7]\right)\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k]u[k]-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k-5]u[k]-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k]u[k-7]+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k-5]u[k-7]$$

LTI Systems

محاسبه جمع کانولوشن از طریق فرمول

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k]u[k]-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k-5]u[k]-$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k]u[k-7]+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k u[n-k-5]u[k-7]$$

$$n<0,\quad y[n]=0-0-0+0=0$$

$$0\le n<5,\quad y[n]=y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k-0-0+0=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

,......... ....

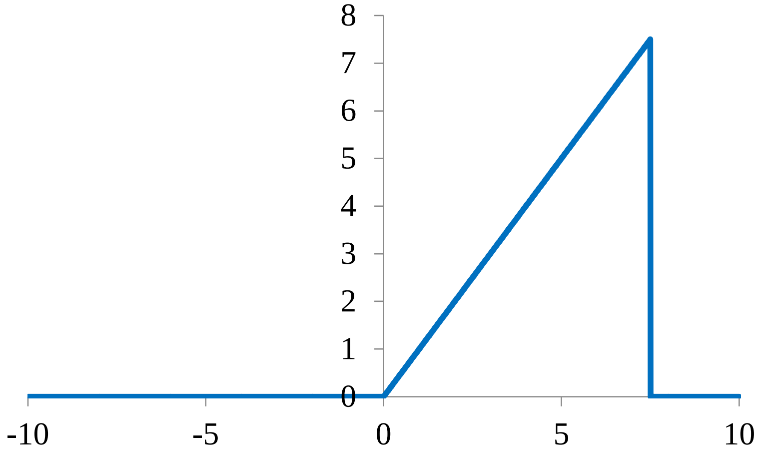
LTI Systems

محاسبه کانولوشن از طریق فرمول

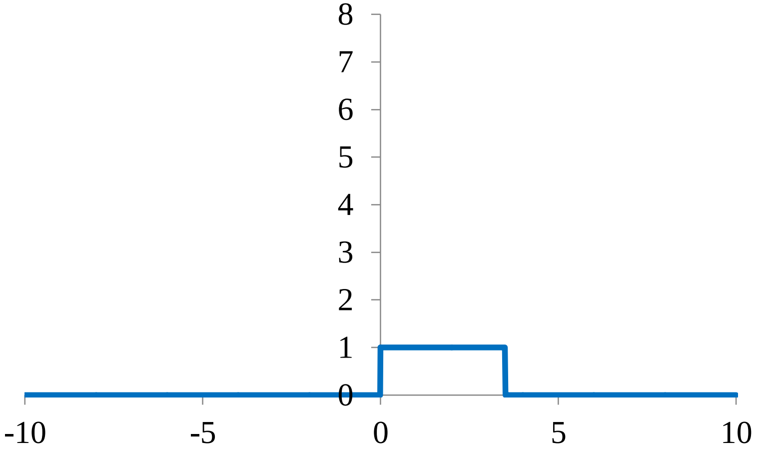
$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

باید هر تابع را بر حسب توابع ویژه نمایش داد.



$$h(t)=r(t)-r(t-2T)$$



$$x(t)=u(t)-u(t-T)$$

LTI Systems

محاسبه کانولوشن از طریق فرمول

$$h(t)=r(t)-r(t-2T)$$

$$x(t)=u(t)-u(t-T)$$

$$y(t)=h(t)*x(t)=\left[r(t)-r(t-2T)\right]*\left[u(t)-u(t-T)\right]$$

$$=r(t)*u(t)-r(t)*u(t-T)-r(t-2T)u(t)+r(t-2T)*u(t-T)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}r(\tau)u(t-\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}r(\tau)u(t-T-\tau)d\tau-$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}r(\tau-2T)u(t-\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}r(\tau-2T)u(t-T-\tau)d\tau$$

LTI Systems

محاسبه کانولوشن از طریق فرمول

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)u(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)u(t-T-\tau)d\tau -$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau-2T)u(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau-2T)u(t-T-\tau)d\tau$$

$t<0$

$y(t)=0$

$0<t<T$

$$y(t) = \int_0^t \tau d\tau - 0 - 0 - 0 = \frac{t^2}{2}$$

$T<t<2T$

$$y(t) = \int_0^t \tau d\tau - \int_0^{t-T} \tau d\tau - 0 - 0 = \frac{t^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{2} + \frac{2tT}{2} = tT - \frac{T^2}{2}$$

,…………………

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت جابجایی

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k].h[k]$$

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

اثبات: تغییر متغیر

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت توزیع پذیری

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t)) = x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

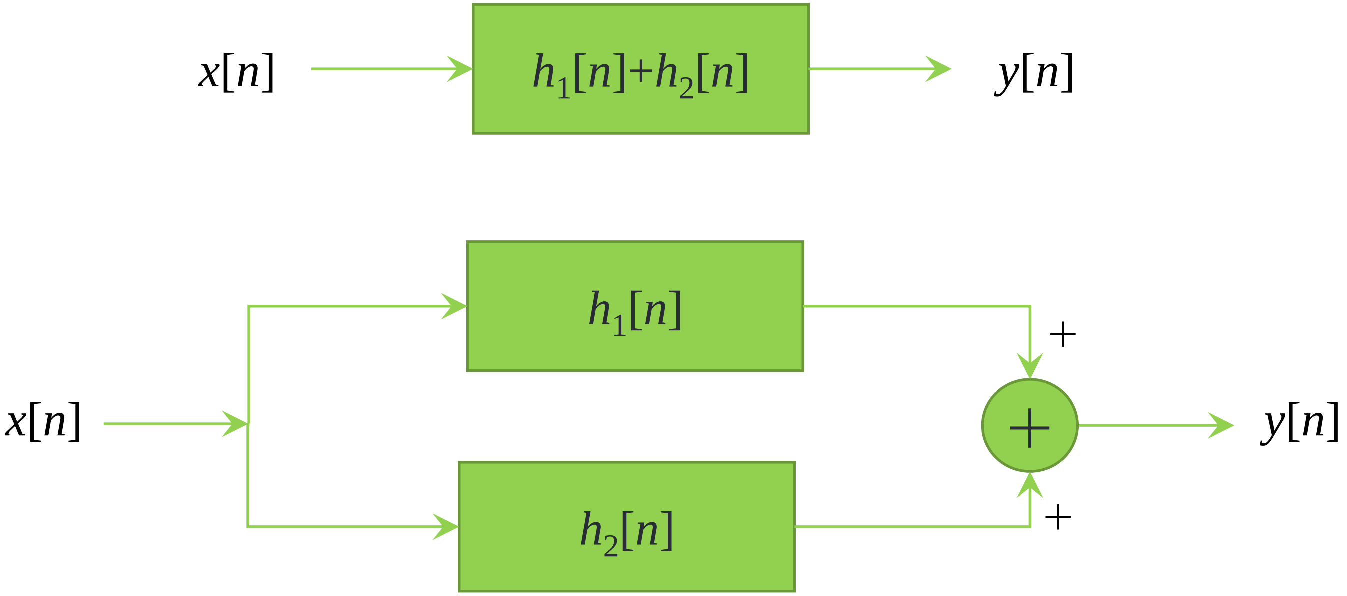
$$(x_1[n]+x_2[n])*h[n] = x_1[n]*h[n]+x_2[n]*h[n]$$

$$(x_1(t)+x_2(t))*h(t) = x_1(t)*h(t)+x_2(t)*h(t)$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت توزیع پذیری

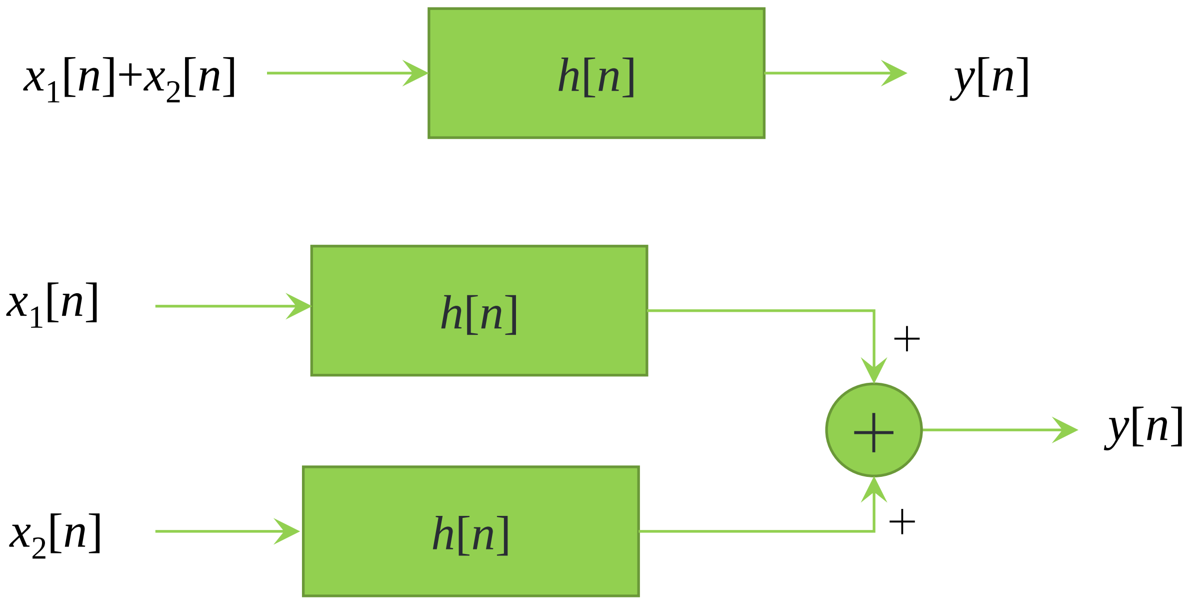


$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت توزیع پذیری



$$(x_1[n]+x_2[n])*h[n]=x_1[n]*h[n]+x_2[n]*h[n]$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت توزیع پذیری

مثال

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}u[n]+2^{n}u[-n]$$

$$h[n]=u[n]$$

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}u[n],\qquad x_2[n]=2^{n}u[-n]$$

$$h[n]=u[n]$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=(x_1[n]+x_2[n])*h[n]=x_1[n]*h[n]+x_2[n]*h[n]$$

$$y[n]=y_1[n]+y_2[n]$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت شرکت پذیری

فقط برای سیستمهای LTI

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

$$y[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]$$

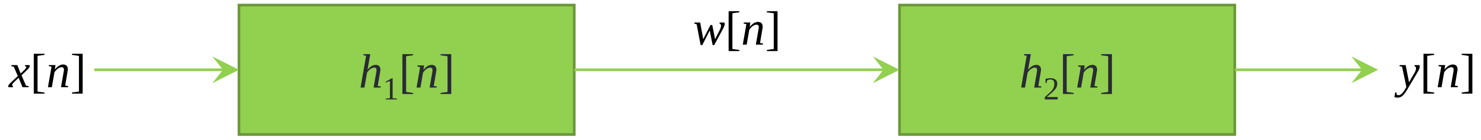
$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$$

$$y(t)=x(t)*h_1(t)*h_2(t)$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

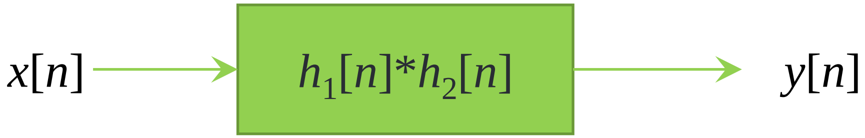
خاصیت شرکت پذیری



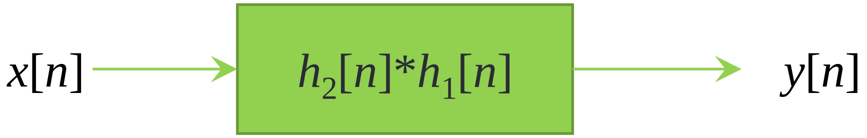
$$w[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$y[n] = w[n] * h_2[n]$$

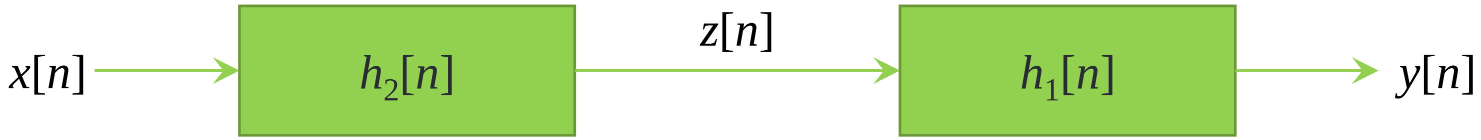
$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$



$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n])$$



$$z[n] = x[n] * h_2[n]$$

$$y[n] = z[n] * h_1[n]$$

$$y[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

LTI Systems

ویژگی های کانولوشن

خاصیت جابجایی زمانی

$$x[n] = x[n] * \delta[n] \qquad x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$x[n-n_0] = x[n-n_0] * \delta[n] \qquad x(t-t_0) = x(t-t_0) * \delta(t)$$

$$x[n-n_0] = x[n] * \delta[n-n_0] \qquad x(t-t_0) = x(t) * \delta(t-t_0)$$

LTI Systems

سیستم LTI بدون حافظه

خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه وابسته است.

$$if \quad x[n]=\delta[n] \rightarrow y[n]=K\delta[n]$$

$$\underline{\underline{h[n]=K\delta[n]}}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].K\delta[n-k]$$

$$y[n]=K\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\delta[n-k]$$

$$\underline{\underline{y[n]=Kx[n]}}$$

LTI Systems

سیستم LTI بدون حافظه

خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه وابسته است.

$$if \quad x(t)=\delta(t) \rightarrow y(t)=K\delta(t)$$

$$\underline{\underline{h(t)=K\delta(t)}}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)K.\delta(t-\tau)$$

$$y(t)=K\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\delta(t-\tau)$$

$$\underline{\underline{y(t)=Kx(t)}}$$

LTI Systems

کانولوشن سیستم همانی

$$h[n]=\delta[n]\rightarrow y[n]=x[n]*\delta[n]$$

$$y[n]=x[n]$$

$$h(t)=\delta(t)\rightarrow y(t)=x(t)*\delta(t)$$

$$y(t)=x(t)$$

LTI Systems

وارون پذیری سیستم های LTI

$$y(t) = F(x(t)) \rightarrow x(t) = F_I(y(t))$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{h_I(t)} \longrightarrow w(t)=x(t)$$

$$w(t) = x(t) = y(t) * h_I(t) = x(t) * h(t) * h_I(t)$$

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) \qquad\qquad h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

LTI Systems

وارون پذیری سیستم های LTI

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$if \quad x(t) = \delta(t) \rightarrow h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$$

$$x(t + t_0) = x(t) * \delta(t + t_0)$$

$$h_I(t) = \delta(t + t_0)$$

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

LTI Systems

وارون پذیری سیستم های LTI

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$x(t) = y(t + t_0)$$

$$if \qquad y(t) = \delta(t) \rightarrow x(t) = \delta(t + t_0)$$

$$h_I(t) = \delta(t + t_0)$$

LTI Systems

وارون پذیری سیستم های LTI

$$h[n]=u[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k].u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

$$y[n]=y[n-1]+x[n] \qquad x[n]=y[n]-y[n-1]$$

$$if \quad y[n]=\delta[n]\rightarrow x[n]=\delta[n]-\delta[n-1] \qquad h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$$

$$h[n]*h_I[n]=u[n]*(\delta[n]-\delta[n-1])=u[n]*\delta[n]-u[n]*\delta[n-1]$$

$$=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

LTI Systems

علی بودن سیستم های LTI

خروجی فقط به ورودی در همان لحظه یا لحظات قبل وابسته است.

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k].h[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} x[n-k].h[k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k].h[k]$$

$$n<0 \rightarrow h[n]=0$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)=\int_{-\infty}^{n} x(\tau).h(t-\tau)=\int_{0}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau)$$

$$t<0 \rightarrow h(t)=0$$

LTI Systems

پایداری سیستم های LTI

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k].h[k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]|.|h[k]|$$

$$|x[n]| < B \qquad |x[n-k| < B$$

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]|.|h[k]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B.|h[k]| \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, h(\tau)\,|\, d\tau < \infty$$

LTI Systems

پایداری سیستم های LTI

$$y[n]=x[n-n_0]\rightarrow h[n]=\delta[n-n_0]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|h[k]\right|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\delta[k-n_0]\right|=1$$

$$y(t)=x(t-t_0)\rightarrow h(t)=\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-t_0)d\tau=1$$

هر دو سیستم پایدار هستند.

LTI Systems

پایداری سیستم های LTI

$$h[n] = u[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| h[k] \right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| u[k] \right| = \infty$$

$$h(t) = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) d\tau = \infty$$

هر دو سیستم ناپایدار هستند.

LTI Systems

پاسخ پله واحد سیستم LTI

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

پاسخ پله واحد

$$s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

پاسخ پله واحد

$$s(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

LTI Systems

پاسخ پله واحد سیستم LTI

پاسخ پله واحد

$$s[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

پاسخ پله واحد

$$s(t)=\int_{0}^{\infty}h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

پاسخ ضربه واحد

$$h[n]=s[n]-s[n-1]$$

پاسخ ضربه واحد

$$h(t)=\frac{d\,s(t)}{dt}=s'(t)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

معادله همگن حل شود.

جواب خصوصی به ازای ورودی خاص تعیین شود.

جواب خصوصی + جواب همگن (پاسخ طبیعی) = جواب نهایی

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$$= (Ae^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t})u(t)$$

سیستم علی $\quad y(0) = 0$

$$y(t) = \frac{K}{5}(-e^{-2t} + e^{3t})u(t)$$

جواب همگن (طبیعی، یا ورودی صفر)

$$\frac{d\,y_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0$$

$$s + 2 = 0 \qquad s = -2$$

$$y_h = Ae^{-2t}$$

سیستم علی $\quad y_h = Ae^{-2t}u(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \\ x(t) = Ke^{3t}u(t) \end{cases}$$

جواب خصوصی

$$y_p = Ye^{3t}u(t)$$

$$3Y + 2Y = K$$

$$5Y = K \qquad y_p = \frac{K}{5}e^{3t}u(t)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad if \quad N=0 \rightarrow y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$N > 0 \rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

جواب همگن (پاسخ طبیعی) + جواب خصوصی

شرایط اولیه سکون ابتدایی $\quad y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \ldots\ldots = \frac{d^{N-1}y(0)}{dt^{N-1}} = 0$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y(t)}{dt} + 2\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \end{cases}$$

جواب خصوصی t>0

$$y_p = Ct + D$$

$$1 \times 0 + 2C + (Ct + D) = t$$

$$C = 1,\ \ D = -2 \qquad y_p = t - 2$$

جواب همگن (طبیعی، یا ورودی صفر)

$$\frac{d^2 y_h(t)}{dt} + 2\frac{dy_h(t)}{dt} + y_h(t) = 0$$

$$s^2 + 2s + 1 = 0 \quad s_1 = s_2 = -1$$

$$y_h = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t} \qquad \text{t>0}$$

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$$= A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t} + t - 2$$

سیستم علی

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$y(t) = \left[(2+t)e^{-t} + t - 2\right]u(t)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\begin{cases} \frac{d\,y(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \\ x(t) = \begin{cases} 0 & t \le -1 \\ 1 & t > -1 \end{cases} \end{cases}$$

جواب خصوصی t>-1

$$y_p = C$$

$$2C = 1$$

$$C = 0.5 \quad y_p = 0.5 \quad t > -1$$

جواب همگن (طبیعی، یا ورودی صفر)

$$\frac{d\,y_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0$$

$$s + 2 = 0 \qquad s = -2$$

$$y_h = Ae^{-2t} \qquad t > -1$$

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

$$= Ae^{-2t} + 0.5 \quad t > -1$$

سیستم علی $y(-1) = 0$

$$0 = Ae^{-2(-1)} + 0.5$$

$$A = -0.5e^{-2}$$

$$y(t) = \left[-0.5e^{-2(t+1)} + 0.5\right]u(t+1)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

محاسبه پاسخ ضربه به کمک پاسخ پله

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt} + \dfrac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \\ x(t) = \delta(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2z(t)}{dt} + \dfrac{dz(t)}{dt} - 2z(t) = x(t) \\ x(t) = u(t) \end{cases}$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$z(t) = z_p(t) + z_h(t)$$

جواب همگن (طبیعی، یا ورودی صفر)

$$\frac{d^2 z_h(t)}{dt} + \frac{dz_h(t)}{dt} - 2z_h(t) = 0$$

$$s^2 + s - 2 = 0 \quad s_1 = -2,\ s_2 = 1$$

$$z_h = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t} \qquad \text{t>0}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 z(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} - 2z(t) = x(t) \\ x(t) = u(t) \end{cases}$$

جواب خصوصی t>0

$$y_p = C$$

$$1\times 0 + C\times 0 - 2(C) = 1$$

$$C = -0.5 \qquad y_p = -0.5$$

$$= A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t} - 0.5$$

سیستم علی

$$z(0) = z'(0) = 0$$

$$z(t) = \left[\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{2}\right]u(t)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$z(t)=\left[\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{2}\right]u(t)$$

پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله است

$$y(t)=\left[\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{2}\right]\delta(t)+\left[\frac{-1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right]u(t)$$

$$y(t)=\left[\frac{-1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\right]u(t)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

محاسبه پاسخ ضربه به طور مستقیم

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt} + \dfrac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \\ x(t) = \delta(t) \end{cases}$$

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

جواب همگن (طبیعی، یا ورودی صفر)

$$\frac{d^2y_h(t)}{dt} + \frac{dy_h(t)}{dt} - 2y_h(t) = 0$$

$$s^2 + s - 2 = 0 \quad s_1 = -2,\ s_2 = 1$$

$$y_h = A_1e^{-2t} + A_2e^{t}, \quad t > 0$$

جواب خصوصی t>0

$$y_p = C$$

$$1\times 0 + C\times 0 - 2(C) = 0$$

$$C = 0 \qquad y_p = 0$$

$$y(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{t}, \quad t > 0$$

$$y(t) = [A_1e^{-2t} + A_2e^{t}]u(t)$$

LTI Systems

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

محاسبه پاسخ ضربه به طور مستقیم

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt} + \dfrac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \\ x(t) = \delta(t) \end{cases}$$

$$y(t) = [A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = [A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]\delta(t) + [-2A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]u(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = [A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]\delta'(t) + [-2A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]\delta(t) + [-2A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]\delta(t) + [4A_1 e^{-2t} + A_2 e^{t}]u(t)$$

$$A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{1}{3}$$

$$y(t) = [\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{t}]u(t) = h(t)$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k]\right)$$

معادله بازگشتی

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

روش مستقیم

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$x[n]=n^2, \quad y[0]=1$$

پاسخ عمومی

$$y_h[n]+2y_h[n-1]=0$$

$$y_h[n]=kr^n$$

$$y_h[n]=k(-2)^n$$

$$y_h[n+1]+2y_h[n]=0$$

$$\lambda+2=0,\ \ \lambda=-2,\ \ y_h[n]=k(-2)^n$$

پاسخ خصوصی

$$y_p[n]+2y_p[n-1]=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

$$y_p[n]=An+B$$

$$An+B+2(A[n-1]+B)=2n-1$$

$$y_p[n]=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت
روش مستقیم

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$x[n]=n^2, \quad y[0]=1$$

$$y[n]=y_p[n]+y_h[n]$$

$$y_h[n]=k(-2)^n$$

$$y_p[n]=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

$$\left.\begin{array}{r} y[n]=k(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9} \\ y[0]=1 \end{array}\right\}$$

$$k=\frac{8}{9}$$

$$y(t)=\frac{8}{9}(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

روش بازگشتی

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

$$x[n]=K\delta[n]$$ شرایط اولیه سکون ابتدایی

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]$$

$n<0\rightarrow x[n]=0$

شرایط اولیه سکون ابتدایی

$$\left.\begin{matrix} n<0\rightarrow x[n]=0 \\ \text{شرایط اولیه سکون ابتدایی} \end{matrix}\right\} \quad n<0\rightarrow y[n]=0 \qquad y[-1]=0$$

$$y[0]=x[0]+\frac{1}{2}y[-1]=K+0=K$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{2}y[0]=0+\frac{K}{2}=\frac{K}{2}$$

$$y[2]=x[2]+\frac{1}{2}y[1]=0+\frac{K/2}{2}=\frac{K}{4}$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=0+\frac{K}{2^n}=\frac{K}{2^n}$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

$$x[n]=K\delta[n] \qquad y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{K}{2^n} & n\geq 0\end{cases}$$

$$x[n]=\delta[n] \qquad y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ \dfrac{1}{2^n} & n\geq 0\end{cases} \qquad h[n]=\frac{1}{2^n}u[n]$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

روش بازگشتی

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

$x[n]=\delta[n]$ شرایط اولیه سکون ابتدایی $h[n]=?$

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

$$\left.\begin{array}{c} n<0\rightarrow x[n]=0 \\ \text{شرایط اولیه سکون ابتدایی} \end{array}\right\} \quad n<0\rightarrow y[n]=0 \qquad y[-1]=0$$

$$y[0]=x[0]+\frac{1}{4}y[-1]\quad =1+0=1$$

$$y[2]=x[2]+\frac{1}{4}y[1]=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

$$y[1]=x[1]+\frac{1}{4}y[0]=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{4}y[n-1]=0+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^n}$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

روش بازگشتی

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

$h[n]=?$ شرایط اولیه سکون ابتدایی $x[n]=\delta[n]$

$$h[n]=\frac{1}{4^n}u[n] \qquad y[n]=\frac{1}{4^n}u[n]$$

LTI Systems

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

روش بازگشتی

$h_I[n]=?$ پاسخ ضربه معکوس

$$h[n]*h_I[n]=\delta[n] \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]h_I[n-k]=\delta[n]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{1}{4})^k u[k]h_I[n-k]=\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{4})^k h_I[n-k]=\delta[n]$$

$$h_I[n]+\frac{1}{4}h_I[n-1]+\frac{1}{16}h_I[n-2]+......=\delta[n]$$

$$h_I[-1]=0 \qquad h_I[0]=1$$

$$h_I[1]=-\frac{1}{4}$$

$$h_I[2]=0$$

$$h_I[3]=0$$

$$h_I[n]=\delta[n]-\frac{1}{4}\delta[n-1]$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

روش بازگشتی

$$y[n] = \frac{1}{4} y[n-1] + x[n]$$

$x[n] = \delta[n-1]$ شرایط اولیه سکون ابتدایی

$x[n] = \delta[n]$ $\quad y[n] = \frac{1}{4^n} u[n]$ $\quad h[n] = \frac{1}{4^n} u[n]$

$x[n] = \delta[n-1]$ LTI System $y[n] = \frac{1}{4^{(n-1)}} u[n-1]$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت
روش استفاده از پاسخ پله

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]$$
$$x[n]=\delta[n]$$

شرایط اولیه سکون ابتدایی $z[n]+2z[n-1]=u[n]$

$$h[n]=y[n]=z[n]-z[n-1]$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت
روش استفاده از پاسخ پله

$$z[n]+2z[n-1]=u[n]$$

پاسخ عمومی

$$y_h[n+1]+2y_h[n]=0$$

$$\lambda+2=0,\ \ \lambda=-2,\ \ y_h[n]=k(-2)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} z[n]+2z[n-1]=0 \\ z_h[n]=kr^n \end{array}\right\} \quad z_h[n]=k(-2)^n$$

پاسخ خصوصی

$$z_p[n]+2z_p[n-1]=1$$

$$z_p[n]=B$$

$$B+2B=1$$

$$z_p[n]=\frac{1}{3}$$

LTI Systems

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت
روش استفاده از پاسخ پله

$$z[n]+2z[n-1]=u[n]$$

شرایط اولیه سکون ابتدایی

$$z_p[n]=\frac{1}{3} \qquad z_h[n]=k(-2)^n \qquad z[n]=z_p[n]+z_h[n]$$

$$z[n]=k(-2)^n+\frac{1}{3}$$

$$z[-1]=0$$

شرایط اولیه سکون ابتدایی

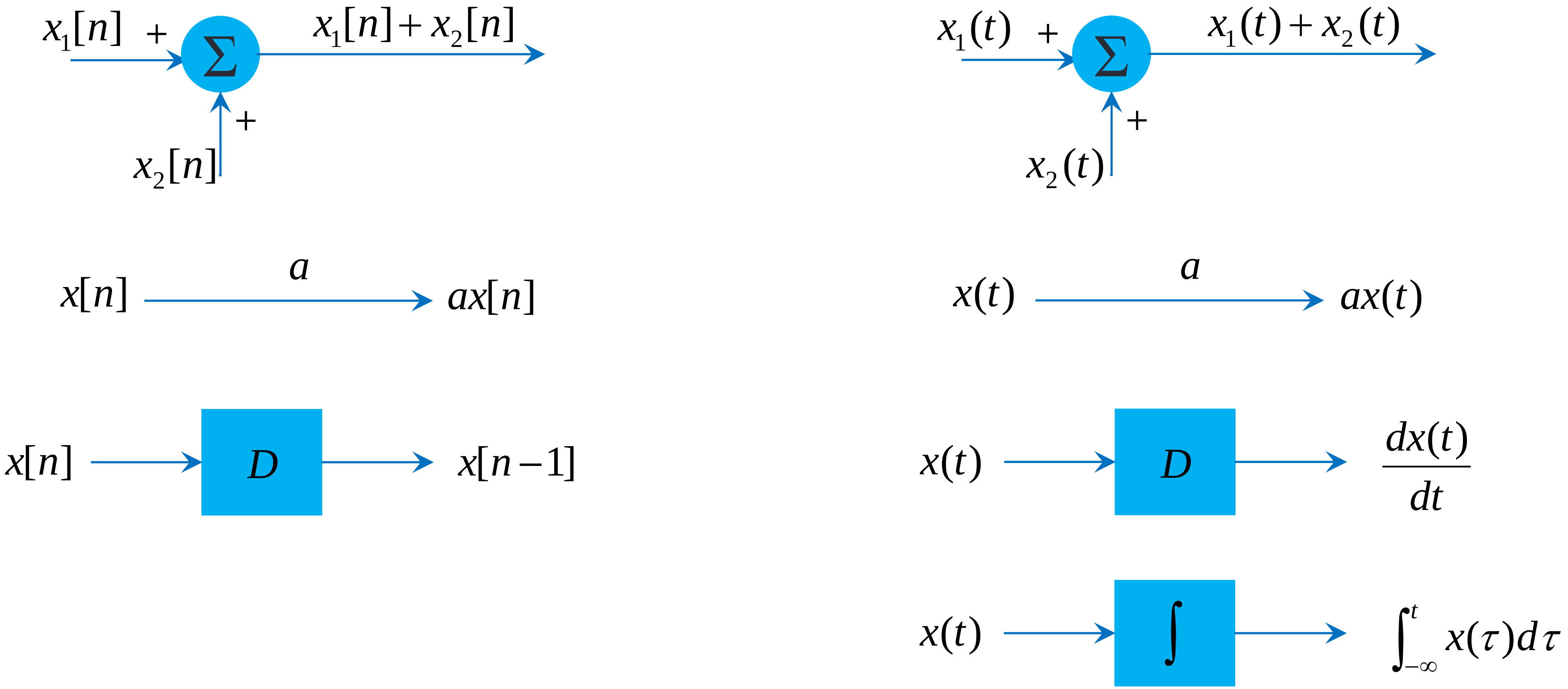
$$k=\frac{2}{3}$$

$$z[n]=\left[\frac{2}{3}(-2)^n+\frac{1}{3}\right]u[n]$$

$$h[n]=y[n]=z[n]-z[n-1]\;=\left[\frac{2}{3}(-2)^n+\frac{1}{3}\right]u[n]-\left[\frac{2}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}\right]u[n-1]=(-2)^n u[n]$$

LTI Systems

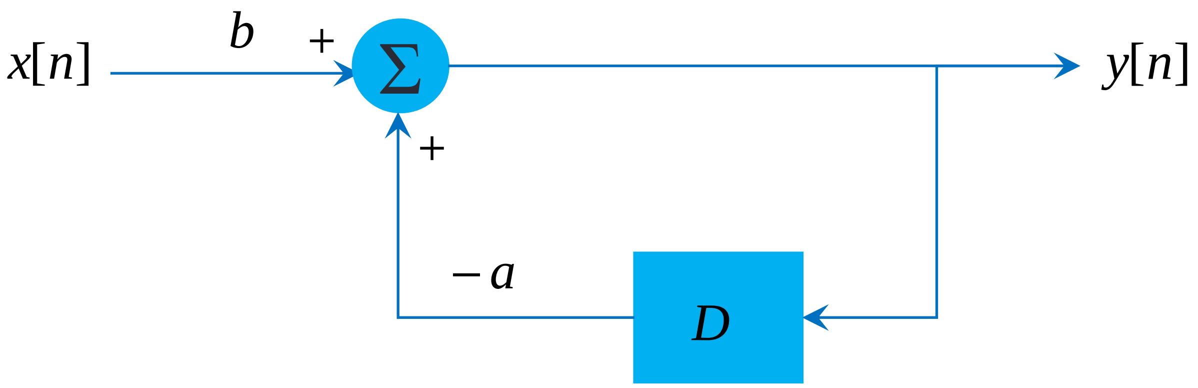
نمایش جعبه ای سیستم های با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت



LTI Systems

نمایش جعبه ای سیستم های با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

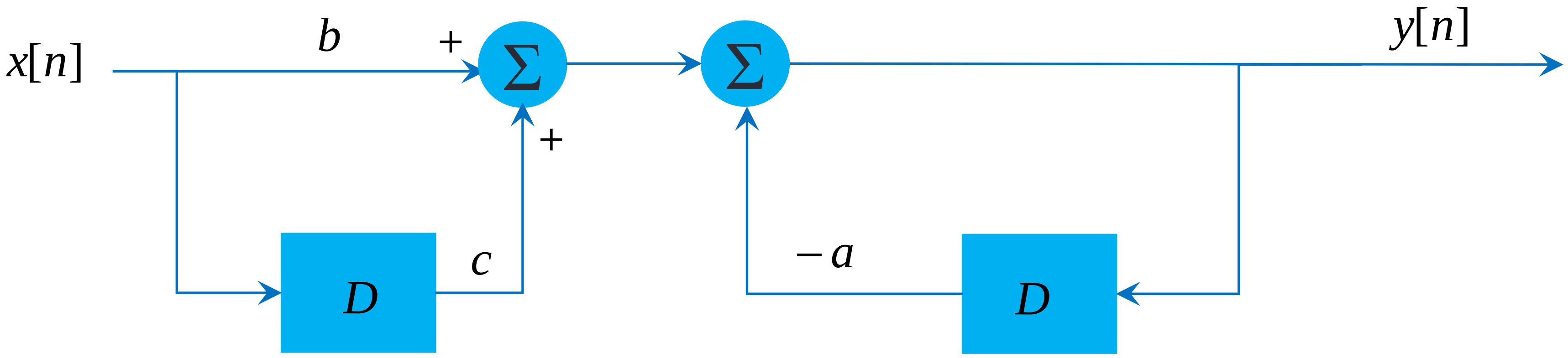
$$y[n]+ay[n-1]=bx[n] \qquad y[n]=bx[n]-ay[n-1]$$



LTI Systems

نمایش جعبه ای سیستم های با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

$$y[n]+ay[n-1]=bx[n]+cx[n-1] \qquad y[n]=bx[n]+cx[n-1]-ay[n-1]$$



LTI Systems

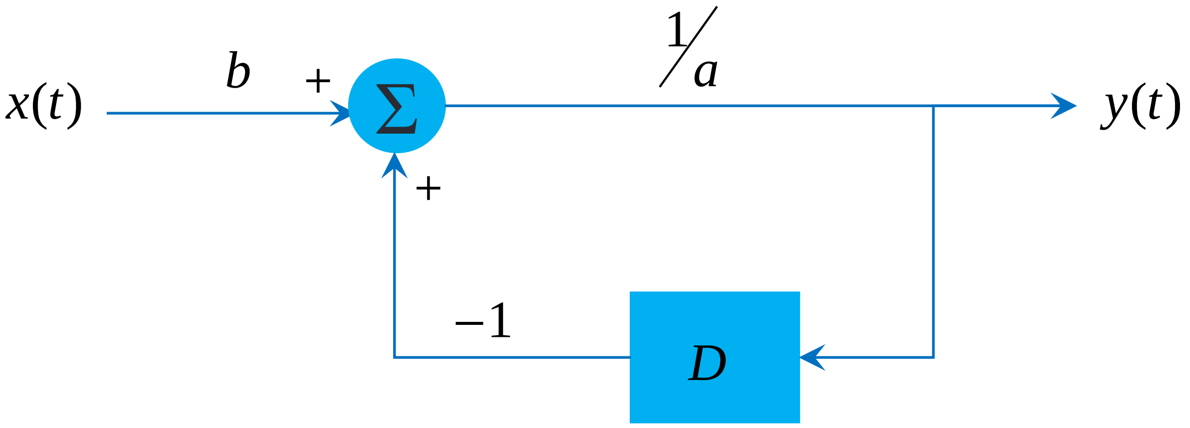
نمایش جعبه ای سیستم های با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

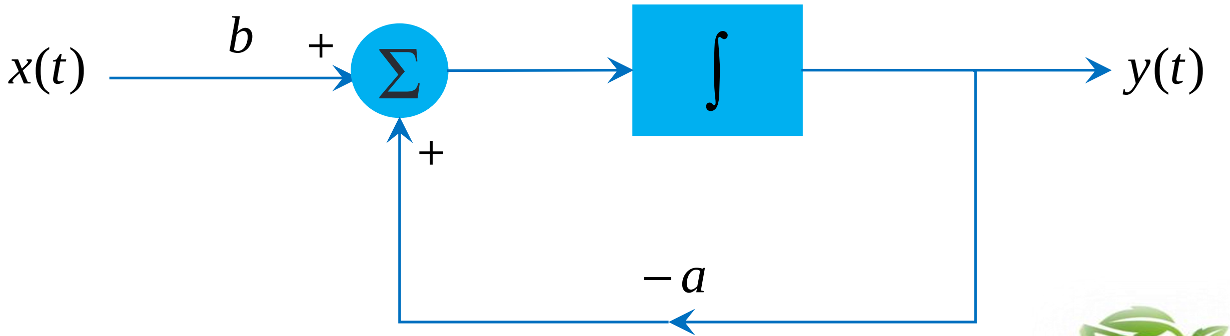
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a}\left(bx(t) - \frac{dy(t)}{dt}\right)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \big(bx(\tau) - ay(\tau)\big) d\tau$$

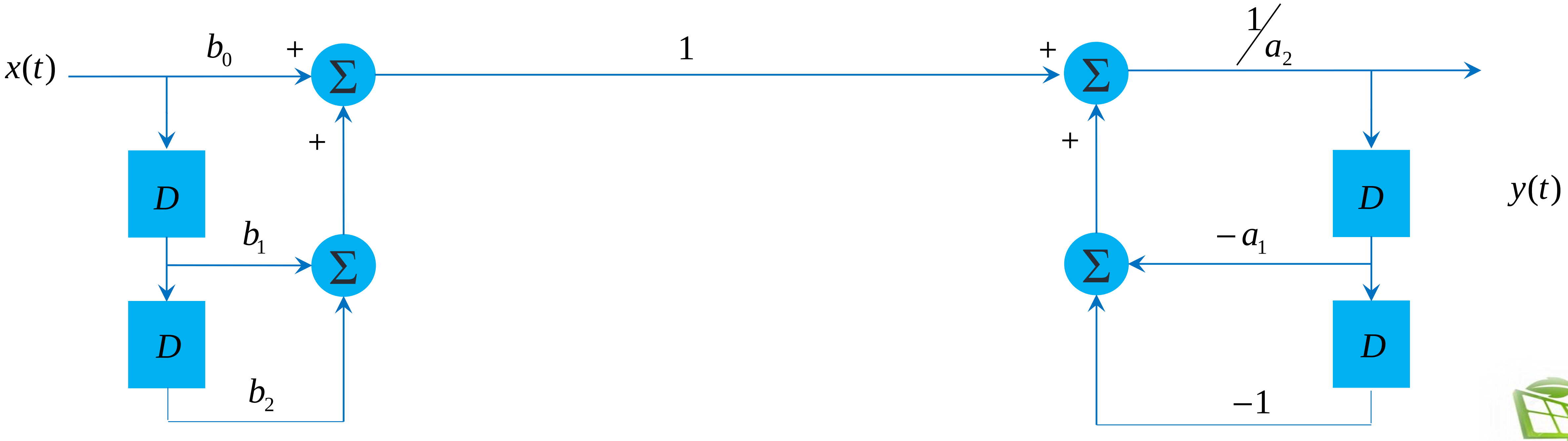




LTI Systems

نمایش جعبه ای سیستم های توسط بلوک مشتق گیر

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=b_0x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Rightarrow y(t)=\frac{1}{a_2}\left(b_0x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}-a_1\frac{dy(t)}{dt}-\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)$$

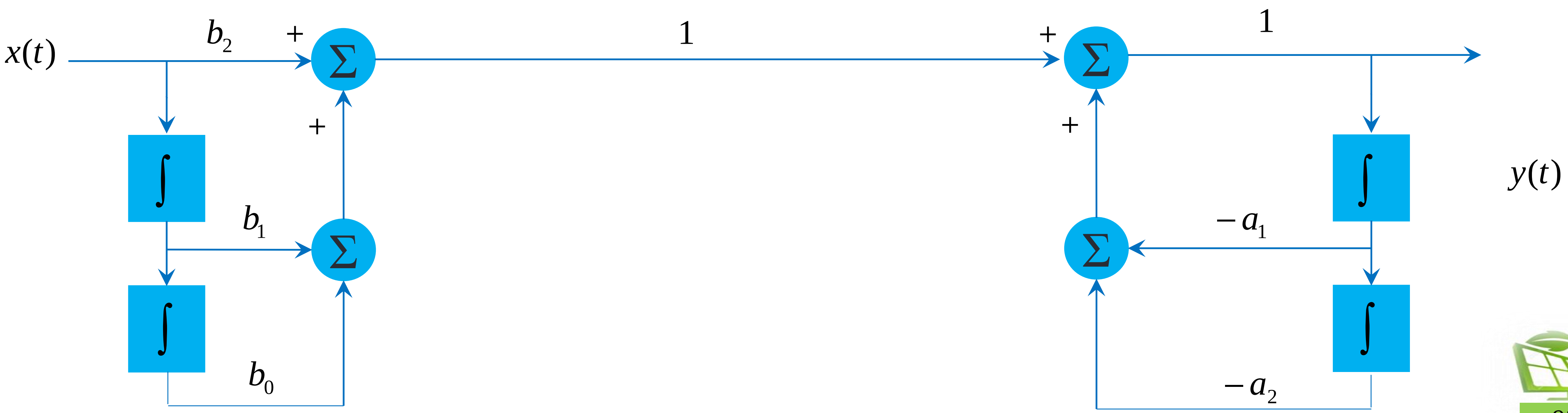


LTI Systems

نمایش جعبه ای سیستم های توسط بلوک انتگرالگیر

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_2y(t)=b_0x(t)+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

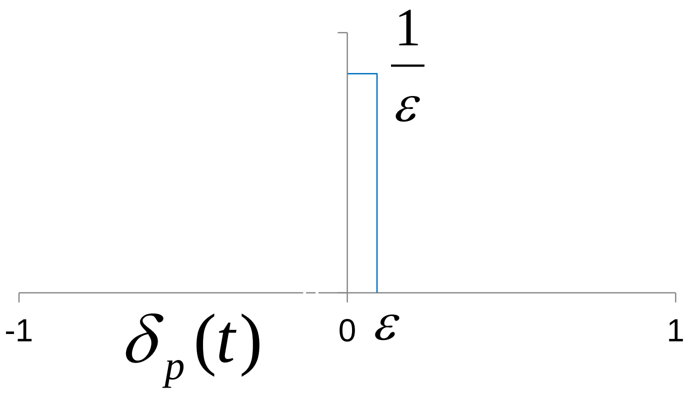
$$y(t)=b_0\int\int x(t)dtdt+b_1\int x(t)dt+b_2x(t)-a_1\int y(t)dt-a_2\int\int y(t)dtdt$$

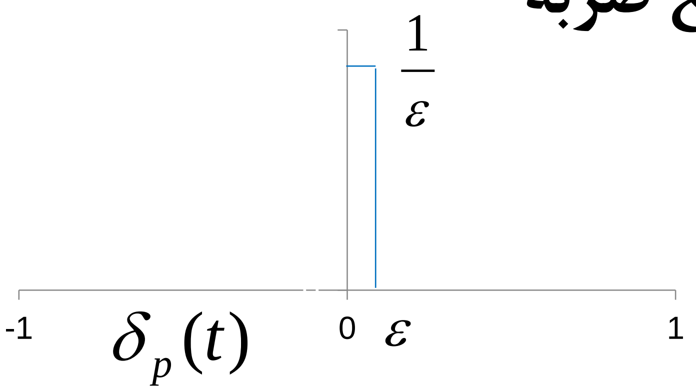


LTI Systems

تابع ضربه

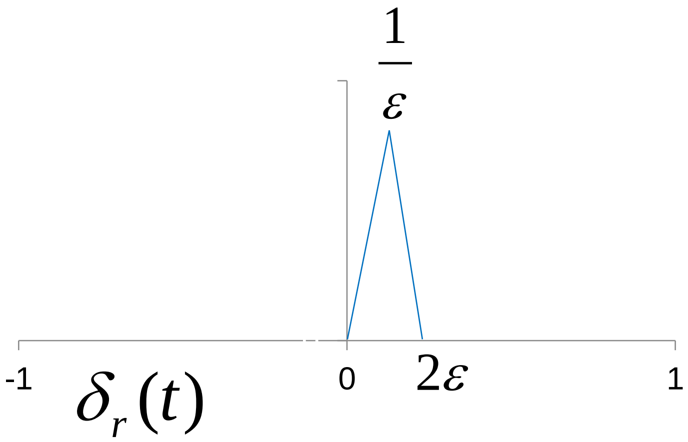
$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$





$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t)$$

$$\delta_r(t) = \delta_p(t) * \delta_p(t)$$



LTI Systems

تعریف ضربه واحد با کانولوشن

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$x(t) = 1 = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$$

$$g(\tau) = x(t-\tau) \qquad g(0) = x(t)$$

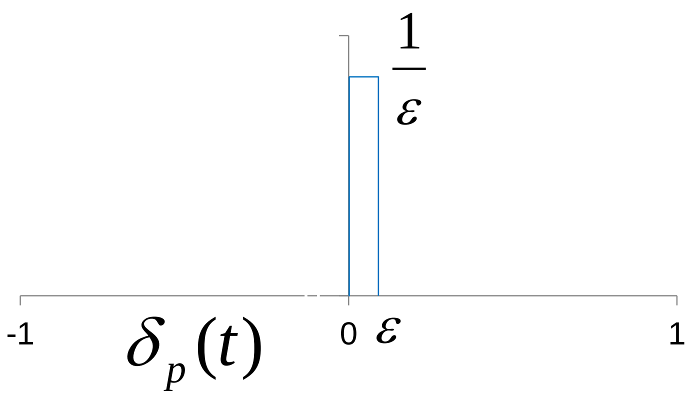
$$g(0) = x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) g(\tau) d\tau$$

$$\delta(\tau) g(\tau) = \delta(\tau) g(0)$$

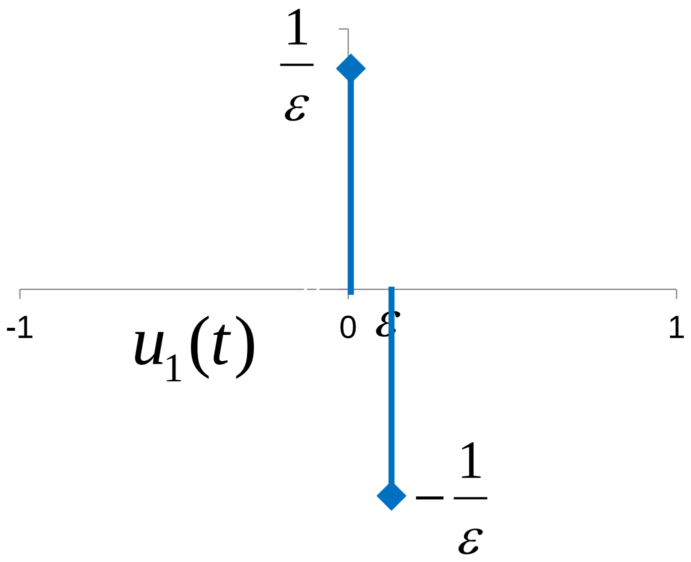
LTI Systems

دوبلت واحد و سیگنالهای تکین

$$u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



$$u_1(t) = \frac{1}{\varepsilon}[\delta(t) - \delta(t-\varepsilon)]$$



$$x(t) * u_1(t) = \frac{1}{\varepsilon}[x(t) - x(t-\varepsilon)] \approx \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

LTI Systems

دوبلت واحد و سیگنالهای تکین

$$u_2(t)=\frac{du_1(t)}{dt}=\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$$

$$x(t)*u_2(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(x(t)*u_1(t)\right)=x(t)*u_1(t)*u_1(t)$$

$$u_k(t)=\frac{d^k\delta(t)}{dt^k}$$

$$x(t)*u_k(t)=\frac{d^k x(t)}{dt}$$

$$u_k(t)=\underbrace{u_1(t)*u_1(t)*\ldots\ldots*u_1(t)}_{k\ \text{بار}}$$

LTI Systems

دوبلت واحد و سیگنالهای تکین

$$if \quad x(t) = k \rightarrow \qquad \frac{dx(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) d\tau = 0$$

$$g(-t) * u_1(t) = \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t) u_1(\tau) d\tau$$

$$-g'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u_1(\tau) d\tau$$

$$g'(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u_1(\tau) d\tau$$

LTI Systems

تابع شیب واحد و انتگرالی

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \qquad x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

تابع شیب واحد

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau = u(t) * u(t) \qquad u_{-2}(t) = tu(t)$$

$$x(t) * u_{-2}(t) = x(t) * u(t) * u(t)$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * u(t) * \ldots\ldots * u(t)}_{k \text{ بار}} \qquad u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$$

LTI Systems

تابع شیب واحد و انتگرالی

$$\delta(t) = u_0(t)$$

$$u(t) = u_{-1}(t)$$

$$u_{-1}(t) * u_1(t) = \delta(t)$$

$$u_{-k}(t) * u_k(t) = \delta(t)$$

$$u_r(t) * u_k(t) = u_{k+r}(t)$$