فصل چهارم

۱ـ

الف) چنانچه جابجایی هر اتم از وضعیت تعادلی خود را با u_s مشخص کنیم، انرژی جنبشی مربوط به هر اتم برابر خواهد بود با: $\frac{1}{2}M\left(\frac{du_s}{dt}\right)^2$.

با فرض حذف جمله های مرتبه ۳ و بالاتر در تغییر شکل های کشسانی نسبتاً کوچک، فقط جمله مرتبه ۲ یعنی $\frac{1}{2}C(u_s-u_{s+1})^2$ باقی می ماند.

محاسبه انرژی کل سیستم متشکل از تمامی اتمها با در نظر گرفتن برهمکنش بین میان نزدیکترین همسایه ها:

$$E=\frac{1}{2}M\sum_s\left(\frac{du_s}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}C\sum_s\left(u_s-u_{s+1}\right)^2$$

ب) با توجه به: $u_s=u\cos(\omega t-sKa)$

انرژی جنبشی به ازای یک اتم:

$$K=\frac{1}{2}M\left(\frac{du_s}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}Mu^2\omega^2\sin^2(\omega t-sKa)$$

با توجه به میانگین زمانی: $\langle \sin^2(\omega t-sKa)\rangle=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \langle K\rangle=\left\langle \frac{1}{2}M\left(\frac{du_s}{dt}\right)^2\right\rangle=\frac{1}{4}Mu^2\omega^2$$

محاسبه میانگین زمانی انرژی پتانسیل یک اتم

$$u_s=u\cos(\omega t-sKa)$$

$$u_{s+1}=u\cos(\omega t-(s+1)Ka)$$

SALEH $U=\frac{1}{2}(u_s-u_{s+1})^2$

$$u_{s+1} = u\cos[(\omega t - ska) - ka]$$

$$= u[\cos(\omega t - ska)\cos \cancel{s}ka + \sin(\omega t - ska)\sin ka]$$

$$u_s - u_{s+1} = u\cos(\omega t - ska) - u\cos(\omega t - ska)\cos \cancel{s}ka + u\sin(\omega t - ska)\times\sin ka$$

$$= u\cos(\omega t - ska)(1 - \cos \cancel{s}ka) + u\sin(\omega t - ska)\sin ka$$

$$(u_s - u_{s+1})^2 = u^2\cos^2(\omega t - ska)(1 - \cos \cancel{s}ka)^2 + u^2\sin^2(\omega t - ska)\sin^2 ka$$
$$+ 2u\cos(\omega t - ska)(1 - \cos ka)\,u\sin(\omega t - ska)\sin ka$$

$$U = \frac{1}{2}c(u_s - u_{s+1})^2 \qquad \langle U\rangle = \frac{1}{2}c\langle(u_s - u_{s+1})^2\rangle$$

طبق متنی که بالاتر نوشتند میانگیری می‌شوند $\langle\cos^2(\dots)\rangle = \langle\sin^2(\dots)\rangle = \frac{1}{2}$ ، $\langle\cos(\dots)\sin(\dots)\rangle = 0$

$$\langle(u_s - u_{s+1})^2\rangle = u^2\left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \cancel{s}ka)^2 + u^2\left(\frac{1}{2}\right)\sin^2 ka$$

$$= \frac{u^2}{2}(1 + \cos^2 ka - 2\cos \cancel{s}ka + \sin^2 ka)$$

$$= \frac{u^2}{2}(2 - 2\cos ka) = u^2(1 - \cos ka)$$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2}cu^2(1 - \cos ka)$$

بنابراین میانگین زمانی انرژی کل به ازای یک اتم:

$$\langle E\rangle = \frac{1}{4}M\omega^2u^2 + \frac{1}{2}cu^2(1 - \cos ka)$$

با توجه به رابطه پاشندگی:

$$\omega^2 = \frac{2c}{M}(1 - \cos ka)$$

$$\langle E\rangle = \frac{1}{4}M\omega^2u^2 + \frac{1}{2}cu^2\frac{M\omega^2}{2c} = \frac{1}{2}M\omega^2u^2$$

SALEH

۲ــ معادله حرکت بصورت:

$$M\frac{d^2u_s}{dt^2}=C(u_{s+1}+u_{s-1}-2u_s) \quad \underline{1}$$

از سری تیلور استفاده می‌کنیم و $u_{s\pm1}$ را بسط می‌دهیم:

$$u_{s\pm1}=u_s\pm a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_s+\cdots \quad \underline{2}$$

دلیل:

بسط تیلور:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

در اینجا برای بسط مثلا u_{s+1} : $x=(s+1)a$ و $x_0=sa$ که

$x-x_0=a$

و برای u_{s-1} : $x=(s-1)a$ و $x_0=sa$ که $x-x_0=-a$

بدلیل وابستگی مکانی تابع موج، مشتق گیری هم نسبت به مکان گرفته شده است.

از آنجایی که a (ثابت شبکه مقداری) کوچک است از جملات مرتبه های بالاتر در رابطه ۲ صرف نظر نموده و با قرار دادن ۲ در ۱:

$$M\frac{d^2u_s}{dt^2}=C\left[u_s+a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_s+u_s-a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_s+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-2u_s\right]$$

$$=Ca^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow M\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}=Ca^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\rightarrow\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}=\frac{Ca^2}{M}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_s \quad \underline{3}$$

به ازای طول موج‌های بلند که در فرض مسئله گفته شده است از رابطه ۱۵ متن درس داریم

$\omega^2 = \frac{C}{m} K^2 a^2$ و از طرفی بنابه تعریف سرعت صوت $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ داریم:

$v_g = \sqrt{\frac{C}{m}}\, a \rightarrow v_g^2 = \frac{C}{m} a^2$

لذا رابطه (۳) بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

۳ـ معادله ۱۸ متن درس:

$$M_1 \frac{d^2 u_s}{dt^2} = C(v_s + v_{s-1} - 2u_s)$$

$$M_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} = C(u_{s+1} + u_s - 2v_s) \qquad (18)$$

پاسخ به شکل موج تخت به روابط بالا (رابطه ۱۹)

$$u_s = u e^{iska} e^{-i\omega t} \qquad (19)$$
$$v_s = v e^{iska} e^{-i\omega t}$$

با جایگذاری u_s و v_s (رابطه ۱۹) در رابطه (۱۸)

$$-\omega^2 M_1 u = Cv(1+e^{-ika}) - 2Cu$$
$$-\omega^2 M_2 v = Cu(1+e^{ika}) - 2Cv \qquad \text{(۲۰ درمتن درس)}$$

به ازای $K = \frac{\pi}{a}$ داریم:

$$-\omega^2 M_1 u = -2Cu$$
$$-\omega^2 M_2 v = -2Cv$$

دو معادله فوق مستقل از یکدیگرند و ریشه‌های معادلات عبارتند از: $\omega^2 = \frac{2C}{M_1}$ و $\omega^2 = \frac{2C}{M_2}$

بنابراین اگر سیستم دارای فرکانس $\omega^2 = \frac{2C}{M_1}$ باشد، در رابطه دوم:

$$-\frac{2C}{M_1} M_2 v = -2Cv \Rightarrow v = 0$$

SALEH

یعنی نتیجه فوق این است که گویی شبکه u درحال نوسان با این فرکانس و شبکه v ساکن
است. همچنین به ازای فرکانس $\omega^2 = \frac{2C}{M_2}$ در رابطه اولی:

$$-\frac{2C}{M_2} M_1 u = -2Cu \longrightarrow u = 0$$

یعنی شبکه v درحال نوسان و شبکه u ساکن است.

۴ — معادله ۱۱۶ الف:

$$\omega^2 = \frac{2}{M} \sum_{p>0} C_p (1 - \cos pKa)$$

طبق گفته مسأله:

$$C_p = A \frac{\sin pK_0 a}{pa}$$

با جایگذاری C_p در ω^2 :
(p: تعداد اتمهای شبکه)

$$\omega^2 = \frac{2A}{M} \sum_{p>0} \frac{\sin pK_0 a}{pa} (1 - \cos pKa)$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial K} = \frac{2A}{M} \sum_{p>0} (\sin pK_0 a)(\sin pKa)$$

داریم:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

لذا:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial K} = \frac{A}{M} \sum_{p>0} \left[\cos p(K_0 - K)a - \cos p(K_0 + K)a\right]$$

با توجه به فرض مسأله به ازای $K = K_0$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial K} = \frac{A}{M} \sum_{p>0} \left[1 - \cos 2pK_0 a\right]$$

با توجه به $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$

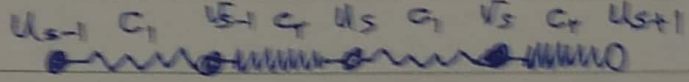
$$\frac{\partial \omega^2}{\partial K} = \frac{A}{M} \sum_{p>0} 2\sin^2 pK_0 a = \frac{2A}{M} \sum_{p>0} \sin^2 pK_0 a$$

لذا از آنجاییکه تعداد بسیار زیادی اتم در بلور وجود دارد ($p \to \infty$) و لذا از آنجاییکه

$\xi^2 pK_0 a$ عددی بین ۰ و ۱ می‌باشد $\sum_{p=1}^{\infty} \xi^2 pK_0 a$ مجموع بی‌نهایت عدد است

شده و در نتیجه ∞ $\sum_{p=1}^{\infty} \xi^2 pK_0 a$ این بدان معناست که منحنی ω^2 بر

حسب K و یا ω بر حسب K دارای یک مماس قائم در $K=K_0$ می‌باشد.



۵ـ

دانیم فاصله بین همسایه‌های اول $\frac{a}{2}$ است یعنی بین دو اتم ثابت شبکه a است که بین اتمهای مشابه است البته در این مساله فرض بر این است که در این بخش در واقع ثابت بر الف)

با فرض اینکه موقعیت اتمها در اولین همسایگی‌ها را با u_s و v_s نشان دهیم و با توجه به فرض که در متن کتاب داشتیم که هر صفحه فقط با همسایه اول خود برهمکنش دارد و با توجه به اینکه ثابت‌های نیرو بین اتمهای همسایه اول به تناوب $C_1=C$ و $C_2=10C$ هستند معادله‌های حرکت عبارتند از:

$$M\frac{d^2u_s}{dt^2} = C_1(v_s-u_s)+C_2(v_{s-1}-u_s)$$

$$M\frac{d^2v_s}{dt^2} = C_1(u_s-v_s)+C_2(u_{s+1}-v_s)$$

این معادلات مشابه معادلات ۱۸ کتاب اند با این فرض که $M_1=M_2=M$ بوده ولی ثابت نیرو بین هر اتم با اتمهای همسایه اول یکسان نیست.

با جایگذاری $u_s = u e^{i(Ksa-\omega t)}$ ، $v_s = v e^{i(Ksa-\omega t)}$ داریم:

$$-M\omega^2 u = C_1(v-u)+C_2(ve^{-iKa}-u)$$
$$-M\omega^2 v = C_1(u-v)+C_2(ue^{iKa}-v)$$

دترمینان ضرایب را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} (C_1+C_2)-M\omega^2 & -(C_1+C_2e^{-ika}) \\ -(C_1+C_2e^{ika}) & (C_1+C_2)-M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

لذا داریم:

$$(M\omega^2)^2-2(C_1+C_2)M\omega^2-C_1C_2(e^{ika}+e^{-ika})+2C_1C_2=0$$

با توجه به:

$$e^{ika}+e^{-ika}=2\cos ka \quad , \quad C_2=10C,\ C_1=C$$

خواهیم داشت: (با حل معادله درجه ۲ نسبت به ω^2)

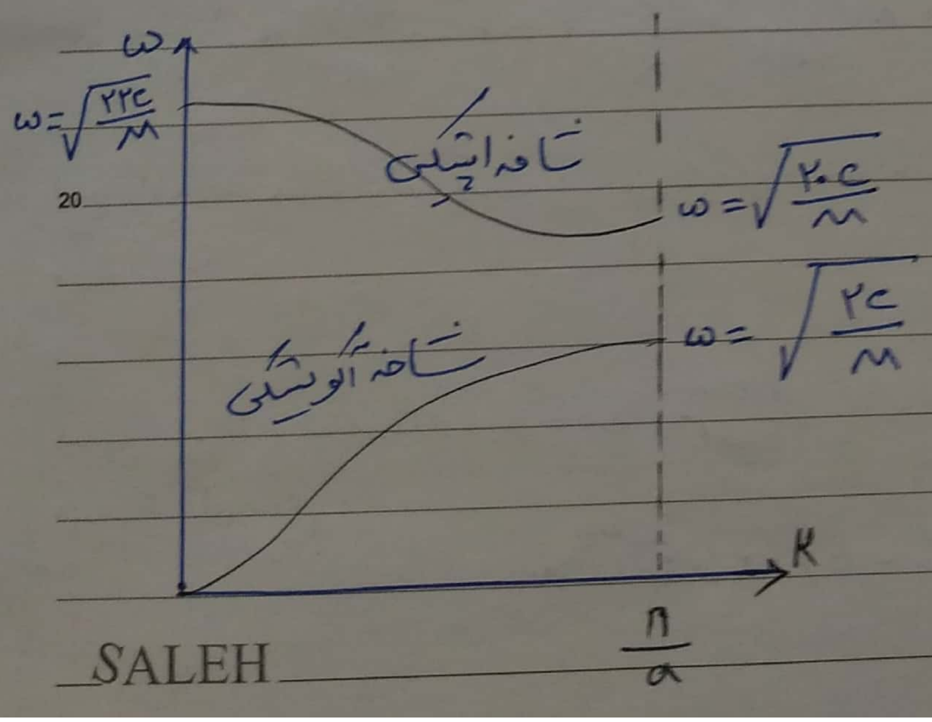
$$\omega^2=\frac{22MC\pm\sqrt{484M^2C^2-80M^2C^2+80M^2C^2\cos ka}}{2M^2} \quad *$$

$$\omega^2=\frac{11C}{M}\pm\frac{\sqrt{101C^2+20C^2\cos ka}}{M}$$

به ازای $K=0$: $\omega=\sqrt{\frac{22C}{M}}$ یا $\omega=0$

به ازای $K=\frac{\pi}{a}$: $\omega=\sqrt{\frac{20C}{M}}$ یا $\omega=\sqrt{\frac{2C}{M}}$

ترسیم تقریبی رابطه پاشندگی *:



۴ـ کره‌ای به شعاع r را در نظر می‌گیریم که r میزان جابجایی پروتون باشد. با فرض اینکه چگالی الکترونی n(r) باشد، بار الکتریکی واقع در کره‌ای به شعاع r عبارت خواهد بود با:

$$q = -eN \qquad N = n(r)\,V \to = n(r)\frac{4}{3}\pi r^3$$

N تعداد الکترونها ، V حجم

$$\Rightarrow q = -e\,n(r)\frac{4}{3}\pi r^3$$

طبق فرض مسئله: $n(r) = \frac{3}{4\pi R^3}$ که R شعاع پروتون می‌باشد لذا:

$$q = -e\left(\frac{3}{4\pi R^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = -e\frac{r^3}{R^3}$$

نیروی کولنی موثر بین پروتون با بار e به فاصله r از مرکز کره و بار واقع در کره‌ای به شعاع r که کل آن بار را می‌توان در مرکز کره تصور کرد برابر خواهد بود با:

$$F = \frac{eq}{r^2} = -\frac{e^2 r^3}{R^3 r^2} = -\frac{e^2 r}{R^3}$$

با توجه به قانون دوم نیوتن:

$$F = -\frac{e^2 r}{R^3} = m\frac{d^2r}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{e^2}{R^3}r = 0 \to \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{e^2}{mR^3}r = 0$$

این رابطه مشابه معادله حرکت یک نوسانگر هماهنگ ساده با بسامد $\omega = \left(\frac{e^2}{mR^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ می‌باشد.

ب ـ با توجه به عدد آووگادرو $N_a = 6.02\times10^{23}\,\frac{atom}{mol}$ و جرم مولی: $M_{mol} = 22.9898\ gr/mol$

جرم یک اتم سدیم:

$$m = \frac{M_{mol}}{N_a} = \frac{22.9898}{6.02\times10^{23}} = 3.82\times10^{-23}\ gr$$

از جدول ۹ فصل ۳ شعاع یون سدیم $R = 1{,}91 \times 10^{-8}\ cm$

لذا:

$$\omega = \frac{(4{,}8 \times 10^{-10}\ gr^{\frac{1}{2}}\ cm^{\frac{3}{2}}\ s^{-1})}{\sqrt{(3{,}82 \times 10^{-23}\ gr)(1{,}91 \times 10^{-8}\ cm)^{3}}} = 3 \times 10^{13}\ s^{-1}$$

$1\,esu = 1\ gr^{\frac{1}{2}}\ cm^{\frac{3}{2}}\ s^{-1}$ ، $1e = 4{,}8 \times 10^{-10}\ esu$