پیشگفتار

همتم بدرقهٔ راه کن ای طایرقدس
که درازست ره مقصدومن نوسفرم

درک مفاهیم درس رشتهٔ ریاضی بدون فراگیری مبانی ریاضیات تقریباً ناممکن است هرچند بسیاری از دانشجویان متوجه اهمیت این موضوع نیستند. برای توضیح بیشتر سوال زیر رامطرح می کنیم . «آیامجموعهٔ اعداد طبیعی ازمجموعهٔ اعدادصحیح کمترعضودارد؟» در وهلهٔ اول به نظرمی رسد که اعداد صحیح دوبرابراعدادطبیعی می باشند درصورتی که این طور نیست ، مجموعهٔ اعداد طبیعی وصحیح به یک اندازه عضودارند. شگفت انگیز ترآن که مجموعهٔ اعدادگویا نیز به اندازهٔ اعدادطبیعی عضو دارد.

بااندکی تأ مل می توان سوالات زیادی نظیر سوال فوق مطرح نمود. این که چرا ۲+۲ می شود ۴ ؟ چراحاصل جمع دوعدد یکتاست ؟ آیا بین هردومجموعهٔ A و B می توان تابع نوشت ؟ آیا هرخاصیتی یک مجموعه رامشخص می کند؟یک دانشجوی ریاضی که درس جبر یا آنالیزرا گذرانده باشد، کاملاً واقف است که برای فهم مطالب این دروس ،درک مسائلی نظیر سوالات فوق کاملاً ضروری است . معمولاً زمانی که بااین دانشجویان راجع به دروس صحبت می شودمی گویند«بایدمطالب مبانی ریاضی رامرور کرده ، بادقت بیشتری مطالعه نماییم ».

هم چنین با نگاهی اجمالی به پیش نیازهای دروس ریاضی متوجه می شویم که درس مبانی ریاضیات به طورمستقیم یا غیرمستقیم پیش نیاز اکثر درس هامی باشد.

باتوجه به توضیحات فوق دانشجویانی که ریاضیات دبیرستانی راگذرانده واکنون قصدادامه تحصیل دررشتهٔ ریاضی را دارندبایدبامطالب ریاضی به صورت دقیق آشنایی حاصل نمایند،این نیازحتی برای دانشجویان سال های بالاترنیزکاملاً محسوس است .باتوجه به این موضوع هدف کتاب حاضر،آماده کردن دانشجویان برای تحصیل ریاضی است .دراین کتاب سعی شده است هرمفهوم اساسی به صورت مثال هایی که دانشجو ازقبل باآن ها آشناست ،توضیح داده شود،سپس تعریف کلی آورده شودتانیازبه تعریف کاملاً مشهودباشد.

هرفصل این کتاب شامل سه یا چهاربخش می باشد.درانتهای هربخش تمریناتی آورده شده است که توصیه می شود دانشجویان در حل تمرین هااهتمام لازم به عمل

آورند،زیراراه حل هایی که دانشجو برای تمرین هاارایه می کنددرفهم قضایایی که دربخش ها یا فصل های بعد می آید بسیارمفیداست.در برخی فصول سوالاتی بدون جواب آمده است که لازم است دانشجوسعی کندطرحی برای جواب ارایه دهد.البته این سوال هامطالب کاملاً اساسی هستندکه درفصل های بعد به طورکامل دربارهٔ آنها بحث می شود.

باعنایت به این که مولفان سال های اول تدریس خودرادرمرکز آموزش عالی ایرانشهربوده اند،سوالات وپی گیری های مداوم دانشجویان آن مرکزدرشکل گیری اولیهٔ این کتاب بسیارموثر بوده ،برخودلازم می دانندکه کمال تشکر وامتنان رااز آن دانشجویان داشته باشندوبه پاس تلاش وزحمتشان کتاب را به آنهاتقدیم کنند.

مراتب سپاس وقدردانی خویش راازحوزهٔ پژوهشی ومرکزنشردانسگاه سیستان و بلوچستان بخاطر حمایت های بی دریغشان درامرچاپ این کتاب اعلام می داریم .

نادرکوهستانی — فرهاد حمیدی

اعضاء هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان

فهرست مندرجات

فصل ۱

منطق

منطق به معنای سخن گفتن و تکلم کردن است. منطق را علم به قوائد و قوانینی‌نامند، که فکر را هدایت می‌کند و از خطا مصون‌می دارد. منطق را مطالعه و علم قوانین استدلالی نیز می‌گویند. منطق هنر فکر کردن است.

در این فصل به مطالعهٔ منطق ریاضی‌می پردازیم، که آن را زبان ریاضی نامند. با فراگیری این زبان ما توانایی خود را در رساندن ایده‌ها به دیگران و گرفتن اطلاعات افزایش می‌دهیم.

۱.۱ گزاره و استنتاج

ما در ریاضیات جملاتی نظیر «e^{π} عدد گنگ است»، «هر زاویهٔ مثلث متساوی الاضلاع ۶۰° است» و «$۶ = ۲ + ۳$» ملاحظه می کنیم . با کمی دقت در این جملات مشاهده می‌شود که برخی ارزش درستی و بعضی ارزش نادرستی دارند؛ هرچندشاید اثبات بعضی از آنها در حال حاضر برای ما امکان پذیر نباشد. چنین جملاتی را گزاره نامند.

تعریف ۱.۱. گزاره[۱] جمله‌ای است خبری که راست یا دروغ باشد، گرچه راست یا دروغ بودن آن برما معلوم نباشد.

با توجه به تعریف فوق جملاتی نظیر «عدد ۲۰ جالب است»، «۱۰۰۰/۰۰۰۰

[۱] Statement

عدد بزرگی است» گزاره نیستند. زیرا جالبی و بزرگی کیفیتهای نسبی هستند. عدد ۲۰ برای یک دانشجو جالب است ولی ممکن است برای یک تاجر جالب نباشد. ۱۰۰۰/۰۰۰ بزرگ است، اما نسبت به ۱۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ کوچک است.

ارزش گزارهٔ درست را با T و نادرست را با F نشان می‌دهیم. همچنین از حروف p، q، r و ... برای نمایش گزاره‌ها استفاده می‌شود.

با معرفی یک شی در ریاضیات، معمولاً یکی از اولین سوالاتی که به ذهن می‌رسد این‌ا ست که شی مذکور با چه چیزهای دیگری یکسان است.

تعریف ۲.۱. دو گزارهٔ p و q را معادل [1] گویند هرگاه ارزش راستی آنها یکی باشد. به عبارت دیگر هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

مثال. دو گزارهٔ «حسن بزرگتر از حسین است» و «حسین کوچکتر از حسن است» با یکدیگر معادلند.

اگر p و q دو گزارهٔ معادل باشند، آن را به صورت $p \equiv q$ می‌نویسند.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم p، q و r سه گزاره باشند، در این صورت

۱ - $p \equiv p$؛

۲ -اگر p با q معادل باشد، q با p نیز معادل است؛

۳ - هرگاه $p \equiv q$ و $q \equiv r$ در این صورت $p \equiv r$.

اثبات . گزارهٔ ۳ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید p درست باشد چون $p \equiv q$ لذا q نیز ارزش درستی دارد. از آنجایی که $q \equiv r$ ،گزارهٔ r نیز درست است. اگر p نادرست باشد، چون $p \equiv q$ بنابر این q نیز ارزش نادرستی دارد و از این که $q \equiv r$ نتیجه می‌شود که r نیز نادرست است.

سوال جالب دیگری که می‌توان مطرح نمود این است که «شی مخالف با این شی چیست ؟» گزارهٔ p :«۲ زوج است» را در نظر بگیرید. از روی این گزاره گزارهٔq : «۲ زوج نیست» را می‌سازیم. همچنانکه مشاهده می‌شود ارزش p درست و ارزش q نادرست است. به عبارت دیگرگزارهٔ q،گزارهٔ p را نقض می‌کند. در این حالت q را نقیض p گویند.

تعریف ۴.۱. نقیض گزارهٔ p گزاره‌ای است که با یکی از دو روش زیر از روی p بدست می آید.

[1] Equivalent

۱ - فعل گزاره را منفی کنیم.
۲ - سه کلمهٔ «چنین نیست که» را بر سر گزاره‌بیاوریم.
نقیض گزاره p را با «$\sim p$» یا «$\neg p$» نشان می‌دهیم.

مثال. نقیض گزارهٔ «$\frac{1}{2}$ زوج است » را بنویسید.

حل. « $\frac{1}{2}$ زوج نیست»یا« چنین نیست که $\frac{1}{2}$ زوج است» .

برای گزارهٔ p می‌توان جدول ارزشی به صورت $\begin{array}{c} p \\ \hline T \\ F \end{array}$ نوشت. جدول ارزش برای p و $\sim p$ را به شکل زیر می‌نویسند:

p	$\sim p$
T	F
F	T

قضیه ۱.۵. فرض کنید p یک گزاره باشد، در این صورت

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

اثبات . با کمک جدول ارزشی ، قضیه را اثبات می‌کنیم.

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
T	F	T
F	T	F

ستون اول و آخر جدول درستی قضیه را نشان می‌دهد.

از ترکیب چند گزاره، گزارهٔ مرکب حاصل می‌شود. معمولاً این عمل با کلماتی نظیر «و»، «یا» ،«اگر ... آنگاه» که به رابطهای گزاره‌ای معروفند انجام می‌شود.

تعریف ۱.۶. ترکیب عطفی[۱]: در این نوع ترکیب دو گزاره را با حرف «و» به یکدیگر مرتبط می‌کنند و گزارهٔ حاصل را ترکیب عطفی دو گزاره می نامند. ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q را معمولاً با $p \wedge q$ نشان می‌دهند. $\wedge$ را رابط عطفی گویند.

ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که p و q هر دو ارزش درستی داشته باشند. جدول ارزش برای $p \wedge q$ را می‌نویسیم.

[۱] Conjunction composition

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال. گزارهٔ p : «۲ مقسوم علیه ۴ است» و q : «۲ > ۱ » را در نظر بگیرید.

۱ - «۲ مقسوم علیه ۴ است و ۲ > ۱» ترکیب عطفی p و q است و دارای ارزش دروغ است.

۲ - «۲ مقسوم علیه ۴ است و ۲ ≯ ۱» ترکیب عطفی p و $\sim q$ است و دارای ارزش راستی می‌باشد.

۳ - «۲ > ۱ و ۲ ≯ ۱ » ترکیب عطفی q و $\sim q$ است و ارزش دروغ دارد.

قضیه ۷.۱. در صورتی که p، q و r سه گزاره باشند

۱ - $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (خاصیت جابجایی $\wedge$).

۲ - $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (شرکت پذیری).

۳ - $p \wedge \sim p$ همواره ارزش دروغ دارد.

۴ - $p \wedge T \equiv p$ (T گزارهٔ همواره درست است).

اثبات . به کمک جدول ارزشی قسمت ۲ را اثبات می‌کنیم،وبقیه رابه عهدهٔ خواننده می گذاریم .

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

تبصره. گاهی به‌جای استفاده از «و» از الفاظی نظیر «ولی» یا «اما» برای ترکیب عطفی استفاده می‌شود.

مثال. ٦ زوج است ولی اول نیست.

تعریف ۸.۱. ترکیب فصلی [۱] : گزارهٔ $p \vee q$ گزاره‌ای است که تنها زمانی نادرست

[۱] disjunction composition

است که p و q هر دو نادرست باشند. گزارهٔ $p \vee q$ را ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q گویند و می‌خوانند «p یا q». $\vee$ را رابط فاصل گویند. جدول ارزش $p \vee q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال. p : « سعدی شاعر است» ، q :« گاوس ریاضیدان است»

۱ - «سعدی شاعر است یا گاوس ریاضیدان نیست» ترکیب فصلی p با $\sim q$ است و ارزش درستی دارد.

۲ - «گاوس ریاضیدان نیست یا گاوس ریاضیدان است» ترکیب فصلی $\sim q$ با q است و ارزش درستی دارد.

قضیه۱.۹. فرض کنید p، q و r سه گزاره باشند، دراین صورت

۱ - $p \vee q \equiv q \vee p$ (خاصیت جابجایی).

۲ - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (خاصیت شرکت پذیری).

۳ - $p \vee T \equiv T$ (T گزارهٔ همواره درست است).

۴ - $p \vee F \equiv p$ (F گزارهٔ همواره نادرست است).

اثبات . اثبات به‌عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه۱.۱۰. فرض کنید p، q و r سه گزاره باشند، در این صورت

۱ - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (خاصیت پخشی $\wedge$ نسبت به $\vee$).

۲ - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (خاصیت پخشی $\vee$ نسبت به $\wedge$).

۳ - $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (قوانین حذف).

۴ - $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (قوانین حذف).

اثبات . به کمک جدول ارزشی قسمت ۴ را اثبات می‌کنیم‌وبقیهٔ مواردرابه عهدهٔ خواننده می گذاریم .

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

ستون اول و آخر جدول درستی ۴ را به اثبات می‌رساند.

در قضیهٔ زیر که به قضیهٔ دمورگان معروف است ارتباط رابطهای $\sim$، $\wedge$ و $\vee$ را خواهیم دید.

قضیه ۱.۱۱. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \qquad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

اثبات . گزارهٔ $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ را اثبات می‌کنیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

دو ستون آخر درستی گزاره را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱۲. ترکیب شرطی [۱] : گزارهٔ «اگر p آنگاه q» را ترکیب شرطی p با q نامند و با $p \Longrightarrow q$ نشان می‌دهند. این گزاره تنها زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. بنابر این جدول ارزش $p \Longrightarrow q$ مطابق زیر است.

p	q	$p \Longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p را مقدم [۲] و q را تالی [۳] می گویند .

مثال. گزارهٔ «اگر ۷ فرد است آنگاه ۲ گنگ است» ترکیب شرطی با ارزش دروغ است.

گزارهٔ «اگر باران به کوهستان نبارد $*$ به سالی دجله گردد خشک رودی» ترکیب شرطی است.

به دلیل استفادهٔ زیاد از ترکیب شرطی، بیانهای دیگری برای آن هست که نمونه‌ای از آنها در زیر آمده است:

---

[۱] conditional composition
[۲] antecedent
[۳] consequent

اگر p، q - هرگاه p آنگاه q - در حالتی که p ، q - q اگر p - q به شرطی که p - pفقط وقتی که q - p شرط کافی برای q - شرط کافی برای q آن‌است که p - شرط لازم برای p آن است که q - p مستلزم q - q از p لازم می‌آید.

مثال. «اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$» بیانهای متفاوت دیگری برای این گزاره بنویسید.

حل. همگرایی $\sum a_n$ شرط کافی برای $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ است .

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ شرط لازم برای همگرایی $\sum a_n$ است.

همگرایی $\sum a_n$ مستلزم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ به شرطی که $\sum a_n$ همگرا باشد.

تبصره. منظور از p مگر آن که q گزارهٔ $p \Longrightarrow \sim q$ است.

قضیه ۱۳.۱. فرض کنید p و q دو گزاره باشند، در این صورت

۱ - $p \Longrightarrow q \equiv \sim q \Longrightarrow \sim p$ (عکس نقیض)[1]

۲ - $p \Longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$؛

۳ - $\sim (p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$.

اثبات . گزاره‌های ۱ و ۲ با جداول ارزشی به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود. اما برای اثبات گزارهٔ ۳ با توجه به ۲ و قوانین دمورگان ،داریم

$$\sim (p \Longrightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

قضیه ۱۴.۱. در صورتی که p ، q و r سه گزاره باشند،

$$p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Longrightarrow r$$

اثبات .

$$\begin{aligned} p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \Longrightarrow r) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r \equiv (p \wedge q) \Longrightarrow r \end{aligned}$$

نتیجه ۱۵.۱. اگر p ، q و r سه گزاره باشند آن گاه

$$p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \equiv q \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$$

[1] contrapositive

اثبات . به خواننده‌واگذار می شود.

قضیه ۱۶.۱.

$$p \Longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \sim q) \Longrightarrow r$$

اثبات .

$$p \Longrightarrow (q \vee r) \equiv p \Longrightarrow (\sim q \Longrightarrow r) \equiv (p \wedge \sim q) \Longrightarrow r$$

تعریف ۱۷.۱. ترکیب عطفی دو گزارهٔ $p \Longrightarrow q$ و $q \Longrightarrow p$ ترکیب‌دوشرطی [۱] گزاره‌های p و q نامیده می شود،که به صورت $p \Longleftrightarrow q$ نوشته‌می شود.

با توجه به تعریف جدول ارزشی این گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

بیانهای دیگری از ترکیب دو شرطی عبارتنداز:

p اگر و فقط اگر q - p فقط و فقط وقتی که q - فقط و فقط وقتی p که q - شرط لازم و کافی برای p آن است که q - اگر p آن گاه q و بعکس.

مثال. «$|x| \leq ۱ \Longleftrightarrow -۱ \leq x \leq ۱$» بیانهای متفاوت دیگری برای این گزاره را بنویسید.

حل. شرط لازم و کافی برای آن که $|x| \leq ۱$ آن است که $-۱ \leq x \leq ۱$

اگر $|x| \leq ۱$ آنگاه $-۱ \leq x \leq ۱$ و بعکس.

$|x| \leq ۱$ فقط و فقط وقتی که $-۱ \leq x \leq ۱$.

فقط و فقط وقتی $|x| \leq ۱$ که $-۱ \leq x \leq ۱$.

تبصره. معمولاً در تعاریف ریاضی به جای استفاده از ترکیب دو شرطی از ترکیب شرطی استفاده می‌شود. مثلاً «تابع f کراندار است هرگاه به ازای یک $M > ۰$، $|f| \leq M$» در واقع به صورت «تابع f کراندار است اگر و فقط اگر به ازای یک $M > ۰$، $|f| \leq M$».

[۱] biconditional composition

حال سعی می‌کنیم با استفاده از قضایای قبل مثال زیر را حل کنیم.

مثال. کارآگاهی اطلاعاتی را از واقعهٔ سرقت در یک بانک کسب کرده که همگی درست هستند. این اطلاعات عبارتند از :

۱ - اگر بیژن سارق نیست، بهمن سارق است.

۲ - بهمن سارق نیست یا سارق مسلح بوده است.

۳ - اگر سارق مسلح بوده، سرقت در بانک رخ نداده است.

۴ - سرقت در بانک واقع شده است.

او می‌خواهد سارق را بیابد. شما می‌توانید به او کمک کنید ؟

حل. برای راحتی کار فرض می‌کنیم که

بیژن سارق نیست : p	بهمن سارق است : q
سارق مسلخ بوده است : r	سرقت در بانک رخ داده است : s

با توجه به انتخاب p، q، r و s فرضیات به شکل زیر نوشته می‌شود:

۱) $p \Longrightarrow q$

۲) $\sim q \vee r$

۳) $r \Longrightarrow \sim s$

۴) s

می‌دانیم که $s \Longrightarrow \sim r \equiv r \Longrightarrow \sim s$. بنابر این، $s \Longrightarrow \sim r$ ارزش درستی دارد. از آنجایی که s ارزش درستی دارد پس $\sim r$ نیز درست است و در نتیجه r نادرست. با توجه به فرض ۲ چون $\sim q \vee r$ درست و r نادرست است پس $\sim q$ ارزش درستی دارد. چون $p \Longrightarrow q \equiv \sim q \Longrightarrow \sim p$ پس $\sim q \Longrightarrow \sim p$ ارزش درستی دارد و چون $\sim q$ درست است بنابر این $\sim p$ نیز درست است و این یعنی این که بیژن سارق است.

در مثال بالا باکنار هم گذاشتن فرضیات درست نتیجه‌ای درست به دست آمد. این کار را استنتاج گویند.

تعریف ۱۸.۱. استنتاج [۱] عبارت است از به دست آوردن نتیجه‌ای درست از یک یا چند گزارهٔ درست که آنها را مقدمات گویند.

برای نمایش یک استنتاج معمولاً مقدمات را در سطرهای زیر هم می‌نویسند و نتیجه را در سطری دیگر با رسم خط افقی مشخص می‌کنند. به عنوان نمونه مثال قبل به صورت زیرنوشته می شود

---

[۱] deduction

$$\begin{array}{c} p \Longrightarrow q \\ \sim q \vee r \\ r \Longrightarrow \sim s \\ \text{s} \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

بعضی از قضیه‌های مهم استنتاج را در ذیل می‌آوریم و اثبات را به کمک جدول ارزش و قضایای قبل به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۱) $\dfrac{\sim\sim p}{\therefore p} \quad \dfrac{p}{\therefore \sim\sim p}$

۲) $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$ حذف عاطف

۳) $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$ رفع مولفه

۴) $\begin{array}{c} p \Longrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$ انتزاع

۵) $\dfrac{p \Longrightarrow q}{\therefore \sim q \Longrightarrow \sim p}$ عکس نقیض

۶) $\dfrac{\sim (p \wedge q)}{\therefore \sim p \vee \sim q} \quad \dfrac{\sim (p \vee q)}{\therefore \sim p \wedge \sim q}$

۷) $\begin{array}{c} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \\ \hline \therefore p \Longrightarrow r \end{array}$ قیاس (استلزام منطقی)

۸) $\dfrac{p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)}{\therefore (p \wedge q) \Longrightarrow r} \quad \dfrac{(p \wedge q) \Longrightarrow r}{\therefore p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)}$

مثال. اعتبار استنتاج زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{c} p \Longrightarrow q \\ r \Longrightarrow s \\ (q \vee s) \Longrightarrow \sim t \\ \text{t} \\ \hline \therefore \sim p \wedge \sim r \end{array}$$

حل. بنابه قانون عکس نقیض از $(q \vee s) \Longrightarrow \sim t$ نتیجه می‌شود که $t \Longrightarrow \sim (q \vee s)$ ارزش درستی دارد. اکنون با استفاده از قانون انتزاع :

$$\begin{array}{c} t \Longrightarrow \sim (q \vee s) \\ t \\ \hline \therefore \sim (q \vee s) \end{array}$$

با استفاده از قانون دمورگان و نتیجهٔ اخیر $\sim q \wedge \sim s$ ارزش درستی دارد. بنابر این $\sim q$ و $\sim s$ هر دو درست هستند. با استفاده از عکس نقیض

$$\frac{p \Longrightarrow q}{\therefore \sim q \Longrightarrow \sim p} \quad , \quad \frac{r \Longrightarrow s}{\therefore \sim s \Longrightarrow \sim r}$$

بنابر این

$$\begin{array}{c} \sim q \Longrightarrow \sim p \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim s \Longrightarrow \sim r \\ \sim s \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$$

لذا $\sim p \wedge \sim r$ ارزش درستی دارد. پس استنتاج معتبر است.

تمرین ۱.۱

۱ - کدامیک از جملات زیر گزاره هستند ؟

کوه تفتان بلند است. ۲ مقسوم علیه ۴ است. آسمان آبی زیباست.

۲ - گزاره‌های زیر را به زبان منطق بنویسید.

آ - اگر x یک عدد حقیقی و $x^۲ > ۱$ آنگاه $x > ۱$ یا $x < -۱$.

ب - شرط لازم و کافی برای آن که $|a| < ۱$ آن است که $-۱ < a < ۱$.

ج - اگر a و b و c اعدادصحیح باشندو $a|bc$ و b, a نسبت به هم اول باشند، آن گاه $a|c$.

د - اگر عددی اول حاصلضرب تعدادی عدد صحیح را عاد کند، این عدد یکی از این اعداد را عاد خواهد کرد.

هـ- اگر $a^۲ > ۱$ آنگاه $a > ۱$ به شرط آن که $a > ۰$ باشد.

۳ - نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

آ - هرکه گریزد ز خراجات شهر * بارکش غول بیابان شود

ب - گرم تو ز هر دهی چون عسل‌بیاشامم * بشرط آن‌که‌به‌دست‌رقیب‌نسپاری

ج - شرط لازم و کافی برای آنکه او پزشکی بخواند آن است که درآمد خوبی در انتظارش باشد.

د - $(p \Longrightarrow q) \wedge (\sim p \Longrightarrow q)$.

هـ- $p \wedge (\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q))$.

۴ - کدامیک از گزاره‌های زیر با p هم ارزش است؟

آ) $\sim (p \Longrightarrow q) \vee p$

ب) $(p \Longrightarrow \sim q) \vee p$

ج) $(p \Longrightarrow q) \vee q$

د) $(p \Longrightarrow q) \vee \sim p$

۵ - ثابت کنیدکه

$$p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \equiv q \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$$

۶ - هم ارز گزاره‌های زیر را بنویسید.

$$(p \Longrightarrow q) \wedge (\sim p \Longrightarrow q) \qquad q \Longrightarrow \sim ((p \Longrightarrow q) \wedge \sim p)$$

۷ - $p \vee q$ چگونه شرطی برای $\sim p \Longrightarrow q$ است؟

۸ - چه زمانی $(p \Longrightarrow (q \wedge r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$ درست است؟

۹ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\sim ((p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)) \qquad ((p \Longrightarrow q) \wedge \sim q) \Longrightarrow \sim p$$

۱۰ - کدامیک از گزاره‌های زیر همواره نادرست است؟

آ) $p \vee (p \wedge \sim q)$
ب) $\sim p \Longrightarrow p \vee q$
ج) $(p \wedge q) \Longrightarrow p$
د) $p \wedge \sim (\sim p \Longrightarrow q)$

۱۱ - آیا استنتاجهای زیر معتبرند ؟

آ)

$$\begin{array}{l} B \vee (C \Longrightarrow E) \\ B \Longrightarrow D \\ \sim B \Longrightarrow (E \Longrightarrow A) \\ \sim D \\ \hline \therefore C \Longrightarrow A \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{l} A \vee (B \wedge C) \\ B \Longrightarrow D \\ C \Longrightarrow E \\ (D \wedge E) \Longrightarrow F \\ \sim A \\ \hline \therefore F \end{array}$$

ج) شرط لازم و کافی برای آن که او پزشکی بخواند آن است که درآمد خوبی در انتظارش باشد. در حالتی که به تحصیل هنر بپردازد، زندگانی خوبی در انتظارش است. شرط لازم و کافی برای آن که شهریه‌ای که به دانشکده می‌پردازد به هدر نرفته باشد آن است که در آمد خوبی در انتظارش باشد یا زندگانی خوبی داشته باشد. شهریه دانشکده او به هدر رفته است؛ بنابر این او نه پزشکی می‌خواند، نه هنر تحصیل می‌کند.

۲.۱ گزاره‌های کلی و جزیی

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

۱ - مربع هر عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی صفر است.

۲ - هر که گریزد ز خراجات شهر * بارکش غول بیابان شود.
۳ - عدد اولی هست که زوج است.
۴ - معادلهٔ $x^۴ - ۱ = ۰$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

دو گزارهٔ اول را گزاره کلی و گزاره‌های ۳ و ۴ را گزاره‌های جزیی گویند. در این بخش به تعریف و خواص این گزاره‌ها می‌پردازیم. برای این کار به مقدماتی نیاز است که در زیر آورده می‌شود.

یک مجموعه[۱] گردایه‌ای از اشیاء متمایز و مشخص است. به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد گویا، مجموعهٔ درختان دانشگاه سیستان و بلوچستان و مجموعهٔ دانشجویان ایران همه مجموعه می‌باشند ولی گردایه انسانهای زیبا یا گردایهٔ اعداد بزرگ مجموعه نیستند زیرا اشیاء آنها مشخص نمی‌باشد.

هر شی از یک مجموعه را عضو آن مجموعه‌می گویند. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A، B، C و ... نمایش می‌دهند و اگر a عضوی از مجموعهٔ A باشد آن را با $a \in A$ می‌نویسند و می‌خوانند «a عضوی از A است» یا «a متعلق به A است».

اگر xای عضو A نباشد آن را به صورت $x \notin A$ می‌نویسند.

در هر بحث مجموعه‌ای مفروض است که تمام اشیاء مورد بحث متعلق به آن مجموعه می‌باشند. چنین مجموعه‌ای را عالم سخن[۲] یا مجموعهٔ مرجع[۳] گویند.

نمونه‌هایی از عالم سخن در ریاضیات مجموعهٔ اعداد، مجموعهٔ توابع می‌باشند.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال. اگربه دو برابر عددی، چهار واحد اضافه نماییم، حاصل را به ۲ تقسیم کرده، عدد به دست آمده را از عدد اول کم کنیم حاصل چه خواهد شد؟

حل. عدد نامعین را x می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{۲x+۴}{۲} - x = \frac{۲x+۴-۲x}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

همچنان که از مثال مشاهده می‌شود برای نامیدن عدد نامعین از حرف x استفاده کرده‌ایم. این حرف را متغیر[۴] گویند. بنابر این

---

[۱] set
[۲] universal of discourse
[۳] universal set
[۴] variable

متغیر : حرفی است که برای نامیدن یک شی نامعین از یک عالم سخن به کار می‌رود. متغیرها را معمولاً با حروف x، y، z و ... نشان می‌دهند.

هر شی معین از یک عالم سخن را اسم خاص گویند. به عنوان مثال ۲، سعدی شیرازی اسامی خاص هستند.

فرض کنید عالم سخن مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. دو عبارت $x + ۱$ و $x + ۱ > ۲$ را در نظر بگیرید. اگر به جای x در هر عبارت مقدار ۱ را بگذاریم ملاحظه می شود که عبارت اول به اسم خاص ۲ و عبارت دوم به گزارهٔ $۲ > ۲$ تبدیل می‌شود. عبارت اول را اسم نما و عبارت دوم را گزاره‌نما گویند.

تعریف ۱.۲. اسم نما : عبارتی است شامل یک یا چند متغیر که با تبدیل جمیع متغیرها به اسم یا اسامی خاص به یک اسم خاص تبدیل شود.

تعریف ۲.۲. گزاره نما : عبارتی است مشتمل بر یک یا چند متغیر که با تبدیل جمیع متغیرها به اسم یا اسامی خاص به یک گزاره تبدیل شود.

بنابر این عبارت «$x + y > ۲$» یا «x شاعر است» گزاره نما و عبارتی نظیر «$\sin xy$» یا «$e^x + ye^z$» اسم نما هستند.

یکی از کاربردهای گزاره نما در نوشتن مجموعه‌ها است. می‌دانیم که ساده ترین روش برای نوشتن یک مجموعه فهرست کردن اعضای آن است. مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ را به صورت $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ می‌نویسند.

در صورتی که تعداد اعضا خیلی زیاد باشد این روش مناسب نیست برای این منظور از گزاره نما استفاده می‌کنند. مثلاً مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را به صورت $\{x \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ ۰ \le x \le ۱\}$ می‌نویسند.

از گزاره نمای $x^۲ - ۱ = ۰$ دو عبارت زیر را می‌سازیم.

۱ - به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $x^۲ - ۱ = ۰$.

۲ - وجود دارد $x \in \mathbb{R}$ که $x^۲ - ۱ = ۰$.

با کمی دقت مشاهده می‌شود که هر دو عبارت گزاره هستند. ارزش اولی نادرست و ارزش دومی درست است. همچنان که دیده می‌شود می‌توان با استفاده از عبارات «به ازای هر x» و «وجود دارد x ای که» گزاره نما را به گزاره تبدیل کرد. «به ازای هر x» را سور عمومی [۱] گفته و با نماد «$\forall x$» و «وجود دارد x ای که » را سوروجودی [۲] گفته

[۱] universal quantifier
[۲] existential quantifier

با نماد «$\exists x$» می‌نویسند.

با استفاده از نمادهای اخیر دو گزارهٔ فوق را می‌توان به صورت

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^{۲} - ۱ = ۰$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \qquad x^{۲} - ۱ = ۰$$

یا به صورت

$$\forall x (x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^{۲} - ۱ = ۰)$$
$$\exists x (x \in \mathbb{R} \wedge x^{۲} - ۱ = ۰)$$

نوشت.

مثال. گزاره نمای «x، y را عادمی کند» وقتی عالم سخن، مجموعهٔ اعدادصحیح باشد را با کمک سورها به گزاره تبدیل کنیدو آنها رابه صورت منطقی بنویسید.

حل. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعدادصحیح و $p(x,y)$ گزاره‌نمای «x، y را عادمی کند» باشد.

۱ - هر عددصحیح ، عددصحیحی را عادمی کند

$$\forall x\ \exists y (x, y \in \mathbb{Z} \wedge p(x,y))$$

۲ - عددصحیحی هست که همهٔ اعدادصحیح را عادمی کند

$$\exists x\ \forall y (x, y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow p(x,y))$$

۳ - یک عددصحیح هست که عددصحیحی را عادمی کند

$$\exists x\ \exists y (x, y \in \mathbb{Z} \wedge p(x,y))$$

۴ - هر عددصحیح عددصحیحی را عادمی کند

$$\forall x\ \forall y (x, y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow p(x,y))$$

مثال. گزاره‌های زیر را به زبان منطق بنویسید.

۱ - بین هر دو عدد حقیقی عدد گویایی هست.

$$\forall x, y\ \exists z ((x, y \in \mathbb{R}\ ,\ z \in \mathbb{Q}) \wedge x < z < y)$$

۲ - هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی است.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exists m \in \mathbb{Z} \qquad m \leq x < m + ۱$$

۳ - معادلهٔ $x^۲ - ۱ = ۰$ حداکثر دو جواب حقیقی دارد.

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x^۲ - ۱ = y^۲ - ۱ = z^۲ - ۱ = ۰) \Longrightarrow (x = y \vee x = z \vee z = y))$$

اکنون نقیض گزاره‌های کلی و جزیی راموردبررسی قرار می دهیم .

گزارهٔ «خداوند همهٔ انسانها را دوست دارد» یعنی این که «خداوند محمد را دوست دارد» و «خداوند علی را دوست دارد» و «خداوند حسن را دوست دارد» و ... نقیض گزارهٔ اخیر گزارهٔ «خداوند محمد را دوست ندارد» یا «خداوند علی را دوست ندارد» یا «خداوند حسن را دوست ندارد» یا ... می‌باشد. به بیان ساده‌تر «انسانی هست که خداوند او را دوست ندارد» پس

~«خداوندهمهٔ‌انسانهارادوست‌دارد»≡«انسانی‌هست‌که‌خداونداورادوست‌ندارد»

بنابر این

$$\begin{aligned} \sim (\forall x\ \ p(x)) \quad &\equiv \quad \exists x\ \ \sim p(x) \\ \sim (\exists x\ \ p(x)) \quad &\equiv \quad \forall x\ \ \sim p(x) \end{aligned}$$

مثال. نقیض گزاره‌های مثال قبل را بنویسید.

حل.

۱) $\exists x, y \quad \forall z \quad ((x, y \in \mathbb{R}\ ,\ z \in \mathbb{Q}) \Longrightarrow z \not> x \vee z \not< y)$

۲) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad m \not\leq x \vee x \not< m + ۱$

۳) $\exists x, y, z \in \mathbb{R} \quad x^۲ - ۱ = y^۲ - ۱ = z^۲ - ۱ = ۰ \wedge x \neq y \neq z$

تمرین ۲.۱

۱ - کدام گزارهٔ زیر غلط است؟

آ - $\exists x, y (x, y \in \mathbb{N}\ ,\ x + y = ۲)$؛

ب - $\forall x \exists y (x \in \mathbb{R}\ ,\ y \in \mathbb{R}\ ,\ x < y)$؛

ج - $\forall x \forall y ((x \in \mathbb{R}\ ,\ y \in \mathbb{R}) \Longrightarrow x < y)$؛

د - $\forall x (x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^۲ \geq ۰)$.

۲ - کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

آ - $\forall x \exists y (x \in \mathbb{N}\ ,\ y \in \mathbb{N} \wedge xy = ٦)$؛

ب - $\forall x \in \mathbb{N} \;\; \exists y \in \mathbb{N} \quad x+y=6$؛

ج - $\forall x \in \mathbb{N} \;\; \exists y \in \mathbb{N} \quad x-y=6$؛

د - $\forall x \quad \exists y \;\; (x,y \in \mathbb{N} \wedge x-y=0)$.

۳ - معنی گزاره‌های زیر را بنویسید.

$\forall x \;\; \forall y \;\; \exists z \;\; ((x,y \in \mathbb{Q} \;,\; z \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \;,\; x<y) \Longrightarrow x<z<y)$

$\forall x \in \mathbb{Z} \sim \exists y \in \mathbb{Z} \;\; x<y<x+1$

$\sim (\forall a,b,c((a,b,c \in \mathbb{Z} \,,\; a|bc) \Longrightarrow a|c))$

$\sim \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \;\; x+y=6$

$\forall x,y \in \mathbb{R} \;\; x<y$ یا $x=y$ یا $y<x$

۴ - گزاره‌های زیر را به زبان منطق بنویسید.

آ - هیچ انسانی کامل نیست.

ب - مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های تک عضوی عضو آن باشد، وجود ندارد.

ج - به ازای هر عدد طبیعی یک عدد طبیعی هست که حاصل ضرب آنها ۶ شود.

د - بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا هست.

ه- هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی است.

و - برای هر عدد حقیقی یک عدد طبیعی بزرگتر از آن وجود دارد.

۵ - نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

آ) $\forall a,b \in \mathbb{R} \;\; (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

ب) $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x^2 < 0$.

ج) $\forall a,b((a,b \in \mathbb{Z} \,,\; a>b) \Longrightarrow a^2 > b^2)$.

د) $\forall x \exists y (x,y \in \mathbb{N} \;,\; x+y=10)$.

ه) $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| < M$.

۶ - برای گزاره‌نماهای زیر سور یا سورهایی را بکار برید که تبدیل به یک گزارهٔ درست شود

آ) $x<y$

ب) $x^2+5x+2=0$

ج) $|x-y| \geq |x|-|y|$

د) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=1 \end{cases}$

۳.۱ طرح اثبات

بیشتر قضایا در ریاضیات به صورت ترکیب شرطی $(p \Longrightarrow q)$ یا دو شرطی $(p \Longleftrightarrow q)$ هستند. در قضایای به شکل $p \Longleftrightarrow q$ باید درستی $p \Longrightarrow q$ و $q \Longrightarrow p$ بررسی شود.

برای اثبات قضایایی که به شکل $p \Longrightarrow q$ معمولاً به یکی از سه روش زیر عمل می‌شود.

۱ - با استفاده از درستی p، درستی q نتیجه می‌شود. این اثبات را اثبات مستقیم می‌گویند.

۲ - با درست فرض کردن $\sim q$ به درستی $\sim p$ می‌رسیم. این اثبات را اثبات عکس نقیض می‌گویند.

۳ - نادرست فرض کردن q به تناقض منجر شود. این نوع اثبات را برهان خلف گویند.

مثال. نشان دهید اگر $x^۲ + ۳x + ۲ < ۰$ آنگاه $x < ۰$.

حل ۱ - می‌دانیم $x^۲ + ۳x + ۲ = (x + ۱)(x + ۲)$ پس $(x + ۱)(x + ۲) < ۰$ بنابر این یا $x + ۱ < ۰$ یا $x + ۲ < ۰$ در نتیجه یا $x < -۱$ یا $x < -۲$ که در هر حال $x < ۰$.

حل ۲ - اگر $x \geq ۰$ آنگاه $x + ۱ \geq ۰ \ , \ x + ۲ \geq ۰$. بنابر این

$$x^۲ + ۳x + ۲ = (x + ۱)(x + ۲) \geq ۰$$

حل ۳ - اگر $x \geq ۰$ آن گاه از این که $x^۲ + ۳x + ۲ < ۰$ نتیجه می‌شود که

$$x^۲ < -۳x - ۲ < ۰$$

پس $x^۲ < ۰$ که این تناقض است.

در قضایای شرطی ممکن است مقدم و تالی هر کدام گزاره‌های مرکب باشند. ضرورت ایجاب می‌کند که راجع به اثبات این قضیه‌ها توضیحاتی داده شود.

۱ - اگر قضیه به شکل $(p \wedge q) \Longrightarrow r$ باشد،معمولاً با استفاده از دو گزارۀ p و q و یکی از سه روش فوق r را نتیجه می‌گیریم.

مثال. برای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر $x^۲ > ۱$ و $x > ۰$ آنگاه $x > ۱$.

حل. گیریم $x \in \mathbb{R}$ دلخواه و $x^۲ > ۱$ آن گاه $x > ۱$ یا $x < -۱$ با توجه به این که $x > ۰$ است گزارهٔ $x < -۱$ نادرست می‌باشد بنابر این $x > ۱$ درست است.

۲ - اگر قضیه به شکل $(p \vee q) \Longrightarrow r$ باشد باید درستی گزاره‌های $p \Longrightarrow r$ و $q \Longrightarrow r$ بررسی شود.

مثال. $x^۲ > ۱ \Longleftarrow (x < -۱$ یا $x > ۱)$

حل. اگر $x > ۱$با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی $x^۲ > ۱$. اگر $x < -۱$ آن گاه $-x > ۱$ با توجه به قسمت قبل $(-x)^۲ > ۱$ بنابر این $x^۲ > ۱$.

۳ - اگر قضیه به شکل $p \Longrightarrow (q \wedge r)$ باشد بایددرستی قضیه‌های $p \Longrightarrow q$ و $p \Longrightarrow r$ هر دو ثابت شوند.

مثال. اگر $|x| < ۱$ آن گاه $x < ۱$ و $x > -۱$

حل. اگر $x \geq ۰$ آن گاه $|x| = x$ پس $-۱ < ۰ \leq x < ۱$. اگر $x < ۰$ آن گاه $|x| = -x$ لذا $-x < ۱$ در نتیجه $-۱ < x < ۰ < ۱$.

۴ - اگر قضیه به شکل $p \Longrightarrow (q \vee r)$ باشد، باید از درستی p درستی q یا درستی r نتیجه شود. معمولاً با نادرست فرض کردن یکی درستی دیگری را نتیجه می‌گیریم.

مثال.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xy = ۰ \Longrightarrow x = ۰ \text{ یا } y = ۰$$

حل. گیریم $x \neq ۰$ پس x دارای وارون است. طرفین $xy = ۰$ را در $\frac{۱}{x}$ ضرب می‌کنیم و نتیجه این که $y = ۰$.

۵ - اگر قضیه به شکل $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$ باشد از معادل بودن $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$ با $(p \wedge q) \Longrightarrow r$ استفاده می‌کنیم.

مثال.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > ۱ \Longrightarrow (x > ۰ \Longrightarrow x > ۱)$$

حل. کافی است درستی

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (|x| > ۱ \wedge x > ۰) \Longrightarrow x > ۱$$

را نتیجه بگیریم. چون $x > ۰$ پس $|x| = x$ بنابر این $x > ۱$.

این بخش را با توضیحاتی راجع به اثبات یا ردّ گزاره‌های کلی و جزیی تمام می‌کنیم. موضوع را با کمک مثالهای زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ - ثابت کنید :

$$\forall a,b\in \mathbb{R} \quad (a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$$

حل. فرض کنید $a,b\in \mathbb{R}$ دلخواه باشد. در این صورت

$$(a-b)(a+b)=a^{۲}+\cancel{a}b-\cancel{b}a-b^{۲}=a^{۲}-b^{۲}$$

۲ - نشان دهید:

$$\exists M\in \mathbb{R} \ \forall x\in \mathbb{R} \quad \sin^{۲} x\leq M$$

حل. با توجه به تعریف‌تابع $\sin x$ می‌داینم $-۱\leq \sin x\leq ۱$. کافی است $M=۱$ در نظر گرفته شود.

۳ - ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی یک عدد حقیقی هست.

حل. فرض کنید $x,y\in \mathbb{R}$ و $x<y$. اگر $z=\frac{x+y}{۲}$ آن گاه $x<z<y$

۴ - درستی گزارهٔ $\forall x\in \mathbb{R}$، $x^{۲}<۱$ را بررسی کنید.

حل. این گزاره درست نیست. زیرا به ازای $x=۲$ ، $x^{۲}=۴>۱$

در این مثال $x=۲$ را مثال نقض گویند.به طور کلی برای رد قضایایی به شکل $\forall x\ p(x)$، باید x را طوری بیابیم که $\sim p(x)$ برقرار باشد.

۵ - آیا گزارهٔ $\exists x\in \mathbb{R}\ x^{۲}+۱=۰$ درست است ؟

حل. خیر، زیرا برای هر $x\in \mathbb{R}$، $x^{۲}+۱\gneq ۰$.

٦ - فرض کنید $a\geq ۰$ به گونه‌ای باشد که برای هر $x>۰$ ، $a\leq x$. در این صورت $a=۰$.

حل. فرض کنید $a\neq ۰$ پس $a>۰$ بنابر این $a>\frac{a}{۲}>۰$ و این متناقض با فرض مسأله است.

۷ - فرض کنید $k\in\mathbb{Z}$ وبرای هر $a\in\mathbb{Z}$ ، $(k,k+a)=۱$ ب.م.م . نشان دهید $k=\pm۱$.

حل. چون رابطه به‌ازای هر a برقرار است. پس برای $a=k$ نیز درست می‌باشد. بنابر این $(k,۲k)=۱$ب.م.م از آنجایی که $k|k$ و $k|۲k$ پس $k|(k,۲k)$ب.م.م. در نتیجه $k|۱$ پس $k=\pm۱$.

تمرین ۳.۱

۱ - ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

آ) به ازای هر $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ اگر $c\overset{۳}{\equiv} d$ و $a\overset{۳}{\equiv} b$ آن گاه $a\pm c\overset{۳}{\equiv} b\pm d$.

ب) اگر $a,b \in \mathbb{Z}$ و $\circ \neq c \in \mathbb{Z}$ و $a \overset{\text{۵}}{\equiv} b$ آن گاه $\frac{a}{c} \overset{\text{۵}}{\equiv} \frac{b}{c}$.

ج) وجود دارد $x,y \in \mathbb{R}$ که

$$\begin{cases} x+y=\text{۱} \\ \text{۲}x-y=\circ \end{cases}$$

د) وجود دارد $z \in \mathbb{R}$ای که به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y+z=\text{۱} \\ x-y=\text{۱} \end{cases}$$

ه) وجود دارد $x,y \in \mathbb{R}$ که به ازای هر $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y+z=\text{۱} \\ x-y=\text{۱} \end{cases}$$

و) به ازای هر $z \in \mathbb{R}$ یک $x,y \in \mathbb{R}$ هست که

$$\begin{cases} x+y+z=\text{۱} \\ x-y=\text{۱} \end{cases}$$

۲ - آ) باکمک جدول ارزشی نشان دهیدبه ازای هرسه گزارهٔ r,q,p گزاره های زیر درست هستند

i) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$

ii) $((p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow ((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r))$

iii) $((\sim p) \Longrightarrow (\sim q)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

ب) تنهاباستفاده ازگزاره های i) و ii) و iii) فوق وقانون قیاس ، برهانی برای گزاره‌های زیرارائه دهید.

i) $p \Longrightarrow p$

ii) $\sim q \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$

iii) $(\sim p \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$

iv) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow ((\sim p \Longrightarrow \sim q) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p))$

v) $((p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow ((p \Longrightarrow (q \vee)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r))$

vi) $(p \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

$p \Longrightarrow (q \Longrightarrow (p \Longrightarrow q))$ (vii

$p \Longrightarrow (\sim (\sim p))$ (viii

ج) تنهابااستفاده ازگزاره های i) و ii) و iii) قسمت آ) وقانون قیاس ، اعتباراستنتاجهای زیررابررسی کنید.

(i
$$\frac{\sim p}{\therefore p \Longrightarrow q}$$

(ii
$$\frac{\sim (\sim p)}{\therefore p}$$

(iii
$$\frac{\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ \sim (q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (\sim p) \end{array}}{\therefore p \Longrightarrow r}$$

(iv
$$\frac{p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)}{\therefore q \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)}$$

د) مانندقسمت های ب) و ج) برهانی برای گزاره های زیربنویسید.

$(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\sim p \Longrightarrow \sim q)$ (i

$((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$ (ii

$\sim (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$ (iii

فصل ۲

مجموعه‌ها

۱.۲ مفاهیم اولیه

بااندکی تأ مل مشاهده می شودکه در هر مبحثی ازریاضیات ،صحبت ازمجموعه ای است از اشیاءوروابط بین آنهاواعمالی که براعضاءآن می توان انجام داد.درفصلهای آتی خواهیم دیدکه چطورمفاهیم ریاضی به کمک مجموعه هاتعریف می شوند.بنابراین نظریهٔ مجموعه هایکی از اساسی ترین مباحث درریاضیات است .البته این نظریه بحث مفصّلی است که ازحوصلهٔ این کتاب خارج است .کسانی که توضیحات بیشتری درباب نظریهٔ مجموعه هامی خواهند می توانندبه کتابهایی که در این باره نوشته شده مراجعه نمایند .دراین فصل سعی شده است حداقل اطلاعات لازم برای فهم مطالب بعدی آورده شود.

تعریف ۱.۱. دو مجموعه S و T را برابر گویند هرگاه هر عضو S در T و هر عضو T در S باشد. مجموعه‌ای‌را که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه تهی[۱] گویند و با نمادϕ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱. S را زیرمجموعه[۲] T گویندهرگاه هر عضو S در T باشد و می‌نویسند $S \subseteq T$. اگر$S \subseteq T$ باشد گاهی اوقات از بیانهای « T شامل S » یا « S مشمول T » نیز استفاده می‌شود.

[۱] empty set
[۲] subset

مثال . اگر $A=\{۱,۲,*,\square\}$ آن گاه مجموعه‌های $\{۱\}$ ، $\{۱,*\}$ ، $\{۲,*,\square\}$ زیر مجموعه‌های A هستند.

قضیه ۳.۱. اگر S یک مجموعه باشد آن گاه

i) $\phi\subseteq S$

ii) $S\subseteq S$

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

مثال. تمام زیر مجموعه‌های $\{\sqrt{۲},-۱,\circ,e\}$ را بنویسید

حل.

$$\phi,\{\sqrt{۲}\}\ ,\ \{-۱\}\ ,\ \{\circ\}\ ,\ \{e\},\{\sqrt{۲},-۱\}\ ,\ \{\sqrt{۲},\circ\}\ ,\ \{\sqrt{۲},e\}\ ,\ \{-۱,\circ\}$$
$$,\ \{-۱,e\}\ ,\ \{\circ,e\},\{\sqrt{۲},-۱,\circ\},\{\sqrt{۲},-۱,e\},\{-۱,\circ,e\},\{\sqrt{۲},\circ,e\}$$
$$,\{\sqrt{۲},-۱,\circ,e\}$$

قضیه ۴.۱. اگر S یک مجموعه با n عضو باشد، آن گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^n است.

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه ۵.۱. فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند. در این صورت

۱ - $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ اگر و فقط اگر $A=B$.

۲ - اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ آن گاه $A\subseteq C$.

اثبات. اثبات ۱ با توجه به تعریف مشخص است.

۲ - اگر $x\in A$ چون $A\subseteq B$ پس $x\in B$. از آنجایی که $B\subseteq C$ است نتیجه می‌شود که $x\in C$.

A را زیر مجموعهٔ سرهٔ [۳] B گویند هرگاه $A\subseteq B$ و B دارای عضوی باشد که در A نیست.

مثال. مجموعهٔ اعداد طبیعی زیر مجموعهٔ سرهٔ اعداد صحیح است.

می‌دانیم که اگر x و y دو عدد حقیقی باشند آن گاه یکی و تنها یکی از روابط زیر برای x و y برقرار است.

$$x<y \quad \text{یا} \quad x=y \quad \text{یا} \quad x>y$$

[۳] proper subset

آیا برای هر دو مجموعهٔ S و T می‌توان گفت

$$T \subseteq S \quad \text{یا} \quad S = T \quad \text{یا} \quad S \subseteq T$$

جواب منفی است، زیرا اگر $S = \{۱\}$ و $T = \{۲\}$ آن گاه هیچ یک از روابط فوق برقرار نیست.

مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های S را با $P(S)$ نشان می‌دهندوآن را مجموعهٔ توانی [1] S گویند.

قضیه ۱.٦. اگر S و T دو مجموعه باشند، آن گاه

۱ - $S \subseteq T \Longleftrightarrow P(S) \subseteq P(T)$؛

۲ - $S = T \Longleftrightarrow P(S) = P(T)$.

اثبات ۱. اگر $S \subseteq T$ و $X \in P(S)$ آن گاه $X \subseteq S$ پس $X \subseteq T$ و بنابر این $X \in P(T)$.

بعکس، اگر $P(S) \subseteq P(T)$ و $x \in S$ آن گاه $\{x\} \in P(S)$ پس $\{x\} \in P(T)$ و این نتیجه می‌دهد که $x \in T$.

اثبات ۲. به عهدهٔ خواننده گذاشته می شود.

تمرین ۱.۲

۱ - اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی آن را بیابید.

۲ - مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ + y = ۱$ را در $\mathbb{R}$ بنویسید.

۳ - زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, \{۱\}, \{\{۱\}\}\}$ را بنویسید.

۴ - مجموعه ای دارای پنج عضوبنویسیدکه ازهردوعضوآن ،یکی عضودیگری باشد.

۵ - فرض کنید $K(\mathbb{Z}) = \{S \subseteq \mathbb{Z} : \forall x, y \in S \quad x - y \in S\}$. تمام اعضای $K(\mathbb{Z})$ رابیابید.

٦ - تمام زیرمجموعه های S از $\mathbb{Z}$ را بنویسید بطوری که برای هر $x, y \in S$ وهر $m \in \mathbb{Z}$ ، $x - y \in S$ و $mx \in S$.این مسئله را برای $\mathbb{Q}$ تکرار کنید.

۷ - S زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbb{R}$ راچنان پیداکنیدکه $S \neq \mathbb{Z}$ وبرای هر $x, y \in S$ وهر $m \in \mathbb{Z}$ ، $x - y \in S$ و $mx \in S$.حداقل سه مجموعه ارائه دهید.

---

[1] power set

۲.۲ اعمال بر مجموعه‌ها

تعریف ۱.۲. فرض کنید T, S دومجموعه باشند

i) $A \cup B$ یعنی $\{x | x \in A$ یا $x \in B\}$. $A \cup B$ را اجتماع[۱] دومجموعهٔ B, A گویند.

ii) $A \cap B$ یعنی $\{x | x \in A$ و $x \in B\}$. $A \cap B$ را اشتراک[۲] دومجموعهٔ B, A گویند.

iii) $A - B$ یعنی $\{x | x \in A$ و $x \notin B\}$. $A - B$ را تفاضل[۳] دومجموعهٔ B, A گویند.

مثال. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۱, ۳, ۸, ۹\}$ آن گاه

$$\begin{aligned}
&A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹\}\\
&A \cap B = \{۱, ۳\}\\
&A - B = \{۲, ۴, ۵\}\\
&B - A = \{۸, ۹\}
\end{aligned}$$

همچنان که دیده می‌شود $A - B \neq B - A$.

قضیه ۲.۲. اگر A، B و C سه مجموعه باشند و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن گاه

i) $A \cup B = B \cup A$ — i′) $A \cap B = B \cap A$

ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — ii′) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

iii) $A \cup \phi = A$ — iii′) $A \cap \phi = \phi$

iv) $A \cup U = U$ — iv′) $A \cap U = A$

v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — v′) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

اثبات . اثبات (v) را آورده، مابقی به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x : x \in A \text{ یا } x \in B \cap C\}\\
&= \{x : x \in A \text{ یا } (x \in B \wedge x \in C)\}\\
&= \{x : (x \in A \text{ یا } x \in B) \wedge (x \in A \text{ یا } x \in C)\}\\
&= \{x : x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

قضیه ۳.۲. اگر A، B و C سه مجموعه باشند آن گاه

i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

iii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

iv) $A \cup (B - C) \supseteq (A \cup B) - (A \cup C)$

---

[۱] union
[۲] intersection
[۳] difference

اثبات . اثبات (i) راآورده ومابقی به عنوان تمرین به خواننده واگذارمی شود.

$$\begin{aligned} A-(B\cup C) &= \{x \ : \ x\in A, x\notin B\cup C\} \\ &= \{x \ : \ x\in A, (x\notin B, x\notin C)\} \\ &= \{x \ : \ (x\in A, x\notin B), (x\in A, x\notin C)\} \\ &= \{x \ : \ x\in A-B, x\in A-C\} \\ &= (A-B)\cap(A-C) \end{aligned}$$

در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که برای هر دو مجموعهٔ S و T، $S\cap T$ بزرگترین مجموعهٔ مشمول در S و T و $S\cup T$ کوچکترین مجموعهٔ شامل S و T است.

قضیه ۴.۲. گیریم S و T و X و Y چهار مجموعه باشند، آن گاه

۱ - اگر $X\subseteq S$ و $X\subseteq T$ آنگاه $X\subseteq S\cap T$.

۲ - اگر $S\subseteq Y$ و $T\subseteq Y$ آنگاه $S\cup T\subseteq Y$.

اثبات.۱- اثبات را به عهده خواننده‌می گذاریم .

۲ - اگر $x\in S\cup T$ آنگاه $x\in S$ یا $x\in T$. با توجه به فرض $x\in Y$.

قضیه ۵.۲. اگر S و T دو مجموعه باشند، آن گاه:

۱ - $P(S\cup T)\supseteq P(S)\cup P(T)$.

۲ - $P(S\cap T)=P(S)\cap P(T)$.

۳ - $P(S-T)\subseteq P(S)-P(T)$.

اثبات. ۱-اگر $X\in P(S)\cup P(T)$ آن گاه $X\subseteq S$ یا $X\subseteq T$، پس $X\subseteq S\cup T$ بنابر این $X\in P(S\cup T)$.

۲ -

$$\begin{aligned} P(S\cap T) &= \{X \ : \ X\subseteq S\cap T\}=\{X \ : \ X\subseteq S\wedge X\subseteq T\} \\ &= \{X \ : \ X\subseteq S\} \ \cap \ \{X \ : \ X\subseteq T\}=P(S)\cap P(T) \end{aligned}$$

۳ - اثبات به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

اگر U یک مجموعهٔ مرجع و $A\subseteq U$ باشد آن گاه $U-A$ را با A^c نشان داده و متمم A نسبت به U می‌گویند.

قضیه ۶.۲. اگر S و T دو زیر مجموعهٔ مجموعهٔ مرجع U باشند، آن گاه

$$\begin{aligned} (S\cup T)^c &= S^c\cap T^c \\ (S\cap T)^c &= S^c\cup T^c \end{aligned}$$

اثبات.

$$\begin{aligned} (S\cup T)^c=U-(S\cup T)=(U-S)\cap(U-T)=S^c\cap T^c \\ (S\cap T)^c=U-(S\cap T)=(U-S)\cup(U-T)=S^c\cup T^c \end{aligned}$$

قضیهٔ فوق را قضیهٔ دمورگان نیز می‌گویند.

تمرین ۲.۲

۱ - قضیهٔ ۲.۲ و ۳.۲ رااثبات کنیدوبرای قسمت (iv) قضیهٔ ۳.۲ مثالی ارائه دهیدکه‌نشان دهد همواره تساوی برقرارنیست .

۲ - فرض کنید

$$B_n = [n, n+۱] \qquad A_n = \{x \ : \ \text{است } n \text{ مضرب } x\}$$

مجموعه‌های زیر را بیابید.

آ) $A_۳ \cap A_۵$ ب) $\bigcup_{i\in P} A_i$ (P : مجموعهٔ اعداد اول)

ج) $B_۳ \cap B_۴$ د) $\bigcup_{i\in \mathbb{Z}} B_i$

ه) $\bigcup_{i\geq ۷} B_i \cap A_۵$

۳ - ثابت کنید

آ) $B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$؛

ب) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$.

۴ - $\bigcap_{n=۱}^{\infty}(a-\frac{۱}{n}, b+\frac{۱}{n})$ را بیابید.

۵ - اگر $A_n = \{x \in \mathbb{R} \ : \ [\frac{x}{n}] = ۱\}$ آن گاه $\bigcup_{n=۱}^{m} A_n$ را بیابید.

٦ - ثابت کنید $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ C:

$$(B\cap C)\cup A = B\cap (C\cup A)$$

۷ - فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند و

$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

نشان دهید

آ) $A\Delta B = B\Delta A$؛

ب) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

ج) تنها زمانی $A = B$ که $A\Delta B = \phi$.

۳.۲ اصل جایگذاری و اصل موضوع اجتماع

در این بخش توضیح مختصری راجع به چند اصل نظریهٔ مجموعه‌ها می‌دهیم.

در فصل اول دیدیم که در صورت زیاد بودن تعداد اعضای یک مجموعه می‌توان از خاصیت‌ها برای نوشتن مجموعه استفاده کرد. سوالی که مطرح است این است که «آیا هر خاصیت، یک مجموعه را مشخص می‌کند ؟» مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال. در شهری یک آرایشگر وجود دارد که هر فردی که خودش را اصلاح نکند اصلاح می‌کند. چه کسی آرایشگر را اصلاح می‌کند ؟

تمام جوابهای ممکن به تناقض می‌رسد و نتیجه می‌شود که چنین آرایشگری وجود ندارد.

صورت کلی مثال فوق به این شرح است که فرض کنید Y مجموعه‌ای شامل تمام مجموعه‌های X است که به خودشان متعلق نیستند. یعنی

$$Y = \{X \ : \ X \notin X\}$$

حال سوال این است که $Y \in Y$ یا $Y \notin Y$. که در هر دو حالت تناقض به دست می‌آید. بنابر این هر خاصیتی یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

اصل جایگذاری. فرض کنید U یک مجموعه و $P(x)$ یک گزاره نما باشد. در این صورت گردایهٔ $\{x \ : \ x \in U \ , \ P(x)\}$ یک مجموعه است.

اصل اجتماع. اگر X یک مجموعه باشد آن گاه اجتماع واشتراک زیر مجموعه‌های X نیز یک مجموعه است.

با کمک این اصل می‌توان تعریف اجتماع و اشتراک را به طریق زیر گسترش داد.

فرض کنید U یک عالم سخن و W گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های U باشد. اجتماع و اشتراک اعضای W را به ترتیب با $\bigcup\limits_{s\in W} S$ و $\bigcap\limits_{s\in W} S$ نشان می‌دهند. سپس

$$\bigcup_{s\in W} S = \{x \ : \ \exists S \in W \ x \in S\}$$
$$\bigcap_{s\in W} S = \{x \ : \ \forall S \in W \ x \in S\}$$

فرض کنیم S یک مجموعه باشد. می‌دانیم که $P(S)$ مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های S است.

سوال : آیا مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها وجود دارد ؟

در فصلهای بعد نشان خواهیم داد که چنین مجموعه‌ای وجود ندارد.
اصل توان. فرض کنید S یک مجموعه‌باشد. در این صورت $P(S)$ وجود دارد.
یکی دیگر از اصول مهم نظریهٔ مجموعه‌ها اصل موضوع انتخاب است که توضیحات بیشتر راجع به این اصل را به فصلهای بعد موکول می‌کنیم.

تمرین ۳.۲

۱ - زیرمجموعه های S از $\mathbb{R}$ راچنان بیابید

i) $1 \in S$

ii) $x \in S \Longrightarrow x + 1 \in S$

وسپس اشتراک این مجموعه ها راحساب کنید.

۲ - بامراجعه به تمرین ۵.۱.۲ نشان دهیداشتراک هرتعدادازاعضای $K(\mathbb{Z})$ عضوی از$K(\mathbb{Z})$ است ولی اجتماع آنها ممکن است عضو $K(\mathbb{Z})$ نباشد.

۳ - فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$ وبزرگتر ازصفرباشد. آیاگزاره نمای

$$p(n) : \quad (1 + a)^n \geq \quad 1 + na$$

وقتی مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$ باشدیک مجموعه را مشخص می کند.درصورتی که جواب مثبت است اعضای مجموعه رامشخص کنید.

۴ - فرض کنیم $X = \{a, b, c\}$ باشد.تمام $T \subseteq p(X)$ هایی رابیابیدکه

۱) $\phi, X \in T$

۲) اشتراک واجتماع اعضای T عضو T باشند.

فرض کنید T_1 و T_2 دوزیر مجموعهٔ X باشندکه درخاصیت های ۱و۲ صدق می‌کنند.نشان دهید $T_1 \cap T_2$ دردوخاصیت فوق صدق می کند ولی $T_1 \cup T_2$ ممکن است صدق نکند.

فصل ۳

رابطه‌ها

دراین فصل به تعریف رابطه و خواص آن می‌پردازیم. همچنین توضیحاتی درباب دو رابطهٔ مهم وکارآی هم‌ارزی و ترتیب آورده می‌شود.ارتباط بین افراز یک مجموعه و رابطه هم‌ارزی مورد بررسی قرارخواهدگرفت .

۱.۳ زوج مرتب

می‌خواهیم مجموعهٔ جواب معادلهٔ $x = y^2$ را در $\mathbb{Z}$ بنویسیم. برخی از جوابها عبارتند از :
اگر $x = 1$ آن گاه $y = \pm 1$. اگر $x = 4$ آن گاه $y = \pm 2$. اگر $x = 9$ آن گاه $y = \pm 3$

اگر از نماد (x_0, y_0) برای نمایش جوابها استفاده کنیم آن گاه (x_0, y_0) جواب معادلهٔ $x = y^2$ است. هرگاه $x_0 = y_0^2$ باشد. با توجه به نماد اخیر مجموعه جواب معادلهٔ $x = y^2$ شامل $(1, 1)$، $(1, -1)$، $(4, 2)$، $(4, -2)$، $(9, 3)$، $(9, -3)$ و $\ldots$ می‌باشد.

نکتهٔ قابل توجه این است که $(4, -2)$ جواب $x = y^2$ ولی $(-2, 4)$ جواب این معادله نیست. بنابر این دیده می‌شود که (x_0, y_0) با (y_0, x_0) فرق دارد. (x, y) را زوج مرتب یا دوتایی مرتب گویند. x را مولفهٔ اول و y را مولفهٔ دوم گویند. در زیر تعریف دقیق آن را می آوریم.

تعریف۱.۱. زوج مرتب[۱] دو شی x و y را به صورت

$$(x,y)=\{\{x\}\ ,\ \{x,y\}\}$$

تعریف می‌کنند.

قضیه۲.۱. $(a,b)=(c,d)\Longleftrightarrow a=c\ ,\ b=d$.

اثبات . به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

تمرین ۳.۱

۱ - x و y را چنان بیابید تا

$$(۲x-y\ ,x-۲y)=(۱,-۱)$$

۲ - مجموعه جواب معادله $y=x+۱$ وقتی $x\in\ \mathbb{R}$ را بنویسید.

۳ - نشان دهیداگرزوج مرتب x و y رابا $(x,y)=\{\{x,y\},\{y\}\}$ تعریف کنیم ،قضیهٔ ۲.۱ برقرار نیست .

۲.۳ رابطه

تعریف ۱.۲. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. $A\times B$ را حاصلضرب دکارتی[۲] A و B خوانند و آن را به صورت

$$A\times B=\{(a,b)\ :\ a\in A\ ,\ b\in B\}$$

تعریف می‌کنند.

مثال. اگر $A=\{۱,*\}$ و $B=\{۲,*,\Delta\}$ آن گاه

$$\begin{array}{l} A\times B=\{(۱,۲),(۱,*),(۱,\Delta),(*,۲),(*,*),(*,\Delta)\}\\ B\times A=\{(۲,۱),(۲,*),(*,۱),(*,*),(\Delta,۱),(\Delta,*)\}\end{array}$$

مثال فوق نشان می‌دهد که $A\times B\neq B\times A$.

قضیه۲.۲. اگر A، B و C سه مجموعه باشند آن گاه

[۱] ordered pair
[۲] product cartesian

۱) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

۲) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

۳) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

اثبات. (۱) را ثابت می‌کنیم و اثبات ۲ و ۳ به خواننده واگذار می‌شود.

$$\begin{aligned} A\times(B\cup C) &= \{(x,y)\ :\ x\in A\wedge y\in B\cup C\}\\ &= \{(x,y)\ :\ x\in A\ ,(\ y\in B\vee y\in C)\}\\ &= \{(x,y)\ :\ (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\}\\ &= \{(x,y)\ :\ x\in A\ ,\ y\in B\}\cup\{(x,y)\ :\ x\in A\ ,\ y\in C\}\\ &= (A\times B)\cup(A\times C) \end{aligned}$$

قضیه مشابه برای $(B\cup C)\times A$، $(B\cap C)\times A$ و $(B-C)\times A$ نیز برقرار است که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

تعریف ۳.۲. هر زیر مجموعه از $A\times B$ را یک رابطه[1] از A در B گویند.

مثال. $R=\{(a,b)\ :\ a\in\mathbb{N}\ ,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a|b\}$ یک رابطه از $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{N}$ است.

$R=\{(x,x+۱)\ :\ x\in\mathbb{R}\}$ یک رابطه از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ است.

اگر R یک رابطه از A در B باشد و $(a,b)\in R$ می‌گویند بین a و b رابطهٔ R برقرار است و می‌نویسند aRb. گاهی اوقات برای aRb گفته می شودکه a تحت رابطهٔ R به b نسبت داده می‌شود. همچنین b تصویر a تحت R نیز گفته می‌شود.

مثال. تعریف می‌کنیم

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\quad aRb\Longleftrightarrow b=[a]$$ [ ] نماد جزء صحیح

R یک رابطه در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ است و برخی اعضای آن عبارتند از

$$۱/۵R۱\qquad ۱/۶R۱\qquad -۰/۵R-۱\qquad -۳R-۳\qquad ۲R۲$$

مثال. فرض کنیم R یک رابطه در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ باشد که به صورت

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\quad aRb\Longleftrightarrow [b]=[a]$$ [ ] نماد جزٔ صحیح

تعریف شده است.

۱ - عدد ۱/۵ تحت رابطه R به چه عددی نسبت داده می‌شود ؟

حل. $۱/۵Ry\Longleftrightarrow[y]=[۱/۵]=۱\Longleftrightarrow۱\le y<۲$.

۲ - ۱/۵− تصویر چه اعدادی تحت R است.

[1] relation

حل. $-۱ \le x \le -۲ \Longleftrightarrow -۲ = [-۱/۵] = [x] \Longleftrightarrow xR - ۱/۵$.

تعریف ۴.۲. R را یک رابطه در A گویند هرگاه $R \subseteq A \times A$.

مثال. فرض کنید $A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد.

۱ - رابطهٔ R را در A چنان بنویسید که به ازای هر $x \in A$، xRx.

۲ - رابطهٔ R در A را چنان بنویسید که به ازای هر $x, y \in A$،

$$(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$$

۳ - رابطهٔ R در A را چنان بنویسید که به ازای هر $x, y, z \in A$،

$$(xRy \ , \ yRz) \Longrightarrow xRz$$

حل ۱ -

$$R = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۵, ۵), (۶, ۶), (۷, ۷), (۸, ۸), (۹, ۹), (۱۰, ۱۰)\}$$

۲ -

$$R_۱ = \{(۱, ۲), (۳, ۴), (۲, ۱), (۴, ۳)\}$$
$$R_۲ = \{(۱, ۱), (۲, ۲)\}$$
$$R_۳ = \{(۴, ۵), (۶, ۷), (۷, ۸), (۸, ۹), (۹, ۱۰), (۵, ۴), (۷, ۶), (۸, ۷), (۹, ۸), (۱۰, ۹)\}$$

۳ -

$$R_۱ = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۱, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳), (۲, ۲)\}$$
$$R_۲ = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$$
$$R_۳ = \{(۱, ۲), (۳, ۴), (۵, ۶)\}$$

مثال. یک رابطه در $\mathbb{R}$ بنویسید که هر سه خاصیت مثال فوق را همزمان دارا باشد.

حل. تعریف می‌کنیم

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad aRb \Longleftrightarrow |a| = |b|$$

حال اگر $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد، چون $|a| = |a|$ پس aRa. برای خاصیت دوم فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و aRb پس $|a| = |b|$ لذا $|b| = |a|$ نتیجه اینکه bRa. اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ و aRb و bRc آنگاه $|a| = |b|$ و $|b| = |c|$ پس $|a| = |c|$ و در نتیجه aRc.لذا خاصیت سوم نیز برقرار است.

تعریف ۵.۲. رابطهٔ R را در A

۱ - انعکاسی[۱] گویند هرگاه برای هر $a \in A$ ، aRa.

۲ - متقارن[۲] گویند هرگاه برای هر $a, b \in A$ اگر aRb آن گاه bRa .

۳ - متعدی[۳] گویند هرگاه برای هر $a, b, c \in A$ اگرaRb و bRc آن گاه aRc .

تمرین ۲.۳

۱ - رابطهٔ R در $\mathbb{N}$ چنین تعریف می‌شود

$$mRn \Longleftrightarrow ۷ | m^۲ - n^۲$$

آ) نشان دهید که این رابطه خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد.

ب) ۰ تصویر چه اعدادی تحت R است؟

ج) ۱ تحت رابطهٔ R به چه اعدادی نسبت داده می‌شود.

۲ - فرض کنیم R و R' دو رابطهٔ انعکاسی در مجموعهٔ A باشند. نشان دهید $R \cup R'$ و $R \cap R'$ دارای خاصیت انعکاسی می‌باشد. $R - R'$ چه طور ؟

۳ - مسألهٔ ۲ را برای خواص تقارنی و تعدی بررسی کنید.

۴ - فرض کنید R یک رابطه در A باشد. قرار می‌دهیم

$$R^{-۱} = \{(b, a) \ : \ (a, b) \in R\}$$

نشان دهید که اگر R' یک رابطهٔ دیگردر A باشد آن گاه

$$(R \cup R')^{-۱} = R^{-۱} \cup R'^{-۱} \qquad\qquad (R \cap R')^{-۱} = R^{-۱} \cap R'^{-۱}$$

۵ - اگر R دارای خاصیت تعدی باشد، آیا $R^{-۱}$ تعدی است ؟

٦ - تمرین قبل را برای خواص انعکاسی و تقارنی مورد بررسی قرار دهید.

۷ - فرض کنید

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow \frac{ab}{a^۲ + b^۲} = \frac{cd}{c^۲ + d^۲}$$

یک رابطهٔ تعریف شده در $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ باشد. نشان دهید این رابطه خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد. اعدای که با $(۱, ۱)$ رابطه دارند را بیابید.

---

[۱] reflexive
[۲] symmetric
[۳] transitive

۳.۳ رابطهٔ هم‌ارزی و افراز

تعریف ۱.۳. رابطهٔ R در A را هم‌ارزی[۱] گویند هرگاه انعکاسی، تقارنی و متعدی باشد.

رابطهٔ تشابه در مثلثها و رابطهٔ توازی در مجموعهٔ خطوط یک صفحه مثالهایی از رابطهٔ هم‌ارزی هستند. رابطهٔ $\subseteq$ در مجموعه‌ها هم‌ارزی نیست، زیرا دارای خاصیت تقارنی نمی‌باشد. آخرین مثال بخش قبل نیز هم‌ارزی است.

رابطهٔ هم‌ارزی را معمولاً با نماد (تیلدا) $(\sim)$ یا همنهشتی $(\equiv)$ نشان می‌دهند.

تعریف۲.۳. فرض کنیم $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در A باشد و $a \in A$. مجموعهٔ $[a]=\{x \;:\; x\in A \;,\; x\sim a\}$ را دستهٔ هم‌ارزی a[۲] گویندو a را مولد[۳] نامند.

از آنجایی که $a\sim a$ پس $a\in[a]$ لذا $[a]\neq\phi$. همچنین دیده می‌شود که $[a]\subseteq A$.

مثال. دسته‌های هم‌ارزی را در رابطهٔ هم‌ارزی زیر بیابید.

$$\forall a,b\in \mathbb{R} \quad aRb \Longleftrightarrow [a]=[b]$$ [ ]نماد جزء صحیح

حل. فرض کنید $a\in \mathbb{R}$ دلخواه باشد.

$$[a]=\{x \;: x\in I\!R \;,\; [x]=[a]\}=\{x \;:\; [a]\leq x<[a]+۱\}=([a]\;,[a]+۱)$$

مثال. دسته‌های هم ارزی را در رابطهٔ هم‌ارزی زیر بیابید.

$\forall a,b\in\mathbb{Z} \quad aRb \Longleftrightarrow$ b,a در تقسیم بر ۳ دارای یک باقیمانده باشند

حل. می‌دانید که باقیماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۳یکی ازاعداد ۰، ۱، یا ۲ است. همچنین اگر a و b در تقسیم بر ۳ دارای یک باقیمانده باشند آن گاه $a\overset{۳}{\equiv}b$ پس

$$\forall a,b\in\mathbb{Z} \quad aRb \Longleftrightarrow a\overset{۳}{\equiv}b$$

با توجه به توضیحات فوق کافی است [۰]، [۱] و [۲] را بیابیم.

$$[۰]=\{x \;:\; x\overset{۳}{\equiv}۰\}=\{۳k \;:\; k\in\mathbb{Z}\}$$
$$[۱]=\{x \;:\; x\overset{۳}{\equiv}۱\}=\{۳k+۱ \;:\; k\in\mathbb{Z}\}$$
$$[۲]=\{x \;:\; x\overset{۳}{\equiv}۲\}=\{۳k+۲ \;:\; k\in\mathbb{Z}\}$$

---
[۱] equivalence relation
[۲] equivalence class
[۳] generator

قضیه۳.۳. اگر $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در A و $a, b \in A$ باشند، آن گاه
۱ - $[a] \neq \phi$ و $[a] \subseteq A$
۲ - تنها یکی از گزاره‌های $[a] = [b]$ و $[a] \cap [b] = \phi$ برقرار است.
اثبات . ۱- قبلاً اثبات شده است.
۲ - فرض کنید $x \in [a] \cap [b]$ پس $x \in [a]$ و $x \in [b]$. اکنون اگر $y \in [a]$ آن گاه $y \sim a$ و چون $x \sim a$ پس $y \sim x$ و از آنجایی که $x \sim b$ نتیجه می‌شود که $y \sim b$ پس $y \in [b]$ در نتیجه $[a] \subseteq [b]$. به طریق مشابه $[b] \subseteq [a]$.
اگر $[a] = [b]$ واضح است که $[a] \cap [b] \neq \phi$.
نتیجه۴.۳. گزارهٔ ۲ قضیهٔ فوق به شکل زیر نیز نوشته می‌شود

$$[a] = [b] \Longleftrightarrow [a] \cap [b] \neq \phi$$

اگر $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، آن گاه مجموعهٔ دسته‌های هم‌ارزی A را با $A/_\sim$ نشان می‌دهند.
قضیه۵.۳. فرض کنیم $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، در این صورت
۱ - هر عضو $A/_\sim$ مخالف تهی و زیر مجموعهٔ A است؛
۲ - اشتراک هر دو عضو متمایز $A/_\sim$ تهی است؛
۳ - اجتماع اعضای $A/_\sim$ برابر مجموعهٔ A است.
اثبات . اثبات ۱ و ۲ در قضیهٔ قبل آمده است و اثبات سه به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.
قضیهٔ فوق گاهی‌اوقات با بیان «اعضای $A/_\sim$ مجموعهٔ A را افراز می‌کند» نیز می آید.بنابراین
تعریف۶.۳. فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های غیر تهی A باشد به قسمی که اجتماع کلیهٔ اعضای $\mathcal{A}$ دقیقاً A شود و اشتراک هر دو عضو $\mathcal{A}$ تهی باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ را یک افراز[۱] مجموعهٔ A گویند.
مثال. مجموعهٔ $A = \{۱, *, ۲, ۵\}$ را افراز کنید.
حل.

$\mathcal{A}_۱ = \{\{۱\}, \{*\}, \{۲\}, \{۵\}\}$
$\mathcal{A}_۲ = \{\{۱, *\}, \{۲, ۵\}\}$

---
[۱] partition

$\mathcal{A}_۳ = \{\{۱, *, ۵\}, \{۲\}\}$
$\mathcal{A}_۴ = \{\{۱, ۵\}, \{۲\}, \{*\}\}$

همچنان که در مثال دیده می‌شود برای یک مجموعه افرازهای مختلف می‌توان نوشت.

در توضیحات قبل از تعریف افراز دیده شد که می‌توان با کمک یک رابطهٔ هم‌ارزی یک افراز برای مجموعه ساخت. عکس این مطلب نیزدرست است یعنی می‌توان با کمک افراز یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف کرد به طوری که دسته‌های هم‌ارزی اعضای افراز دلخواه باشند. این مطلب با کمک دو قضیهٔ زیر به دست می آید.

قضیه۷.۳. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک افراز A باشد. توسط $\mathcal{A}$ می‌توان یک رابطهٔ هم‌ارزی در A تعریف کرد.

اثبات . تعریف می‌کنیم

$$\forall x, y \in A \qquad x \sim y \Longleftrightarrow \text{باشند } \mathcal{A} \text{ متعلق به یکی از اعضای } y, x$$

فرض کنید $x \in A$ دلخواه باشد. چون $\mathcal{A}$ افراز است پس x متعلق به یکی از اعضای $\mathcal{A}$ است. لذا $x \sim x$ بنابر این رابطهٔ $\sim$ انعکاسی است. برای اثبات تقارنی بودن گیریم $x, y \in A$ و $x \sim y$ بنابر این x, y متعلق به یکی از اعضای $\mathcal{A}$ هستند. نتیجه این که y و x نیز متعلق به همان عضو می‌باشند، پس $y \sim x$.

اگر $x, y, z \in A$ باشند و $x \sim y$ و $y \sim z$ آن گاه به ازای یک $B, C \in \mathcal{A}$، عناصر $x, y \in B$ و $y, z \in C$. پس $y \in B \cap C$. افراز بودن A نتیجه می‌دهد که $B = C$. لذا $x, z \in B = C$. بنابر این $x \sim z$. پس رابطهٔ فوق هم‌ارزی است.

قضیه۸.۳. اگر A، $\mathcal{A}$ و $\sim$ همانهایی باشند که در قضیهٔ قبل آمده‌اند آن گاه $A/_{\sim} = \mathcal{A}$.

اثبات . گیریم $[a] \in A/_{\sim}$ پس $a \in A$. وجود دارد $B \in \mathcal{A}$ که $a \in B$.

$$x \in [a] \Longleftrightarrow x \sim a \Longleftrightarrow x, a \in B \Longleftrightarrow x \in B$$

پس $B = [a]$ لذا $[a] \in \mathcal{A}$.

اگر $B \in \mathcal{A}$ دلخواه باشد.آن گاه B عضوی مانند b دارد . گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که $B = [b]$.

$$x \in B \Longleftrightarrow x, b \in B \Longleftrightarrow x \sim b \Longleftrightarrow x \in [b]$$

تمرین ۳.۳

۱ - فرض کنید

$$a \sim b \Longleftrightarrow a-b \in \mathbb{Z} \qquad \text{for all} \quad a,b \in \mathbb{Q}$$

نشان دهید که این یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Q}$ است. دستهٔ هم‌ارزی $[\frac{m}{n}]$ را بیابید.

۲ - نشان دهید که $\Longleftrightarrow$ یک رابطهٔ هم‌ارزی بر تمام گزاره‌ها است.

۳ - فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۲۰\}$ تعریف می‌کنیم :

$$a \sim b \Longleftrightarrow a \overset{۳}{\equiv} b \quad \text{for all} \quad a,b \in A$$

نشان دهید $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است. A را با کمک این‌رابطهٔ هم‌ارزی افراز کنید.

۴ - نشان دهید رابطهٔ زیر روی $\mathbb{R}-\{0\}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

$$a \sim b \Longleftrightarrow ab^{-۱} \in Q$$

$[۰]$، $[\frac{۱}{۲}]$ و $[\sqrt{۲}]$ را بیابید.

۵ - رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ را چنان تعریف کنید که دسته‌های هم‌ارزی آن خطوط موازی با $۳x+۴y=۵$ باشند.

٦ - فرض کنیم R یک رابطه متعدی و متقارن بر A باشد و $a,b \in A$ دلخواه. در این صورت اگر aRb آنگاه bRa و بنابه تعدی aRa. پس خاصیت انعکاسی ازدو خاصیت تقارنی و تعدی نتیجه می‌شود. اشکال استدلال فوق را بیابید.

۴.۳ رابطهٔ ترتیب

رابطهٔ $\subseteq$ در مجموعه‌ها را در نظر بگیرید. اگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ آنگاه $A=B$. این خاصیت در مجموعهٔ اعداد حقیقی به همراه رابطهٔ $\leq$ معمولی نیز برقرار است.

سوال. اگر R یک رابطه در A باشد و $a,b\in A$ به طوری که bRa و aRb آیا $a=b$.

جواب. جواب منفی است. رابطهٔ R را روی مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به صورت

$$aRb \Longleftrightarrow a|b$$

تعریف می کنیم .می‌دانیم که $۲|-۲$ و $-۲|۲$ پس $۲R-۲$ و $-۲R۲$ ولی $۲ \neq -۲$.

تعریف۱.۴. فرض کنیم R یک رابطه در A باشد. R را پاد متقارن (قناس)[۱] گویند هرگاه

$$\forall a, b \in A \quad (aRb\ ,\ bRa) \Longrightarrow a = b$$

رابطهٔ $\leq$ در اعداد حقیقی و $\subseteq$ در مجموعه‌ها پاد متقارن هستند.

تعریف ۲.۴. رابطهٔ R در A را ترتیب جزیی[۲] گویند هرگاه انعکاسی، متعدی و قناس باشد.

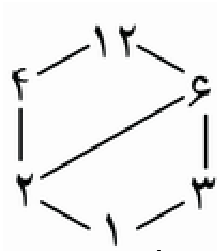
اگر R یک ترتیب جزیی در A باشد، بیانهای «(A, R) مرتب جزیی» یا «(A, R) جزءاً مرتب» مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معمولاً برای رابطهٔ ترتیب جزیی روی یک مجموعه، از نماد $\leq$ استفاده می‌شود.مثال زیرنشان می‌دهد که چراکلمهٔ ترتیب جزیی بکارگرفته می شود.

مثال. رابطهٔ $\leq$ که بصورت زیر روی مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ٦, ۱۲\}$ تعریف شده ،مرتب جزیی است :

$$a \leq b \iff a|b$$

ازنموداردرختی زیربرای نمایش رابطهٔ بین عناصر A استفاده می کنیم



این نمودارنشان می دهد که مجموعهٔ فوق به شکلهای زیرمرتب می شود

[۱] antisymmetric
[۲] partial order

$$\begin{array}{c} ۱ \leq ۲ \leq ۴ \leq ۱۲ \\ ۱ \leq ۲ \leq ٦ \leq ۱۲ \\ ۱ \leq ۳ \leq ٦ \leq ۱۲ \end{array}$$

می دانیم رابطهٔ $\leq$ دراعدادحقیقی ورابطهٔ $\subseteq$ درمجموعه هاهردومرتب جزیی هستند.اگر $x, y \in \mathbb{R}$ آن گاه $x < y$ یا $y < x$ یا $x = y$ درصورتی که دومجموعهٔ S و T می توان یافت که $S \not\subset T$ و $T \not\subset S$ و $S \neq T$. پس این دورابطهٔترتیب جزیی متفاوتند.به عبارت دیگر هردوعددحقیقی را تحت $\leq$ می توان مقایسه کردولی هردومجموعه را تحت $\subseteq$ نمی توان مقایسه کرد.

تعریف۳.۴. رابطهٔ R روی A را مرتبط (همبند)[۱] گویند هرگاه‌برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، aRb یا bRa .

مثال. رابطهٔ $\leq$ در اعداد حقیقی مرتبط است.

تعریف ۴.۴. (A, R) را ترتیب کلی یا کلاً مرتب گویند هرگاه

۱ - (A, R) مرتب جزیی باشد.

۲ - رابطهٔ R روی A مرتبط باشد.

تعریف ۴.۴. فرض می کنیم (A, R) مرتب جزیی و $B \subseteq A$ چنان باشد که (B, R) مرتب کلی باشد ، در این صورت B را یک زنجیر در A می گویند.

در مثال قبل $\{۱, ۲, ۴, ۱۲\}$ و $\{۱, ۳, ٦, ۱۲\}$ و $\{۱, ۲, ٦, ۱۲\}$ زنجیر هستند.

توضیحات بیشتر راجع به ترتیبهای جزیی و کلی را به فصلهای بعد موکول می‌کنیم.

تمرین ۴.۳

۱ - نشان دهید که اگر R ترتیب جزیی باشد، $R^{-۱}$ نیز ترتیب جزیی است.

۲ - نشان دهید رابطهٔ عاد کردن در $\mathbb{N}$ ترتیب جزیی است. دو زنجیریکی متناهی ودیگری نا متناهی از $\mathbb{N}$ معرفی کنید. باکمک نموداردرختی مجموعهٔ $\{۲, ۳, ۴, ٦, ۸, ۹, ۱۰, ۱۸, ۳٦, ۴۳\}$ رامرتب کرده وتمام زنجیرهای آن رابنویسید.

۳ - رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{R}^2$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$(a_۱, a_۲) \leq (b_۱, b_۲) \Longleftrightarrow a_۱ \leq b_۱ \ , \ a_۲ \leq b_۲$$

نشان دهید $\leq$ یک ترتیب جزیی روی $\mathbb{R}^2$ است که مرتبط نمی‌باشد. هم چنین نشان دهید که مجموعهٔ $\{(x, mx) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ یک زنجیر در $\mathbb{R}^2$ است.

[۱] connected

۴ - فرض کنیم $A=\{a,b,c,d\}$ باشد، می‌دانیم که $(P(A),\subseteq)$ مرتب جزیی است. ۴ زنجیر در $P(A)$ بنویسید.

۵.۳ n تایی مرتب

دراین بخش قصدتعریف n تایی مرتب را نداریم .درفصل ۸ تعریف آن راخواهیم آورد.دراینجافقط می گوییم n تایی مرتب را با $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ نشان می‌دهند واگر A_1، …، A_n، n مجموعه باشند،آن گاه

$$A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\ :\ a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n\}$$

تعریف می شود .معمولاً $A_1\times\ldots\times A_n$ را با نماد $\prod_{i=1}^{n}A_i$ نشان می‌دهند.

سوال. آیا می‌توان حاصلضرب را برای هر تعداد دلخواه مجموعهٔ نیز تعریف کرد. در صورت امکان اعضای آن چه خواهد شد ؟

جواب این سوال مثبت است. ولی با امکانات حاضر قادر به انجام این کار نیستیم. در فصلهای بعد با کمک اصل انتخاب حاصلضرب هر تعداد دلخواه مجموعه را نیز تعریف می‌کنیم.

فصل ۴

تابع

در این فصل نوع خاصی از رابطه یا تابع معرفی می‌گردد. سپس خواص مهمی از تابع مانند ۱-۱ و برو و معکوس‌پذیری مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱.۴ تعریف تابع

معادله‌های $y = x + ۱$، $y^۲ = x^۲ + ۱$ را وقتی $x \geq ۰$ در نظر بگیرید. همچنان که دیده می‌شود در معادله اول به ازای هر x یک و تنها یک y بدست می‌آید در صورتی که معادله دوم چنین نیست. در معادله اول y راتابعی از x گویند و در معادله دوم y تابعی از x نیست.اگر بخواهیم همانند فصل قبل جواب این معادله‌ها را با زوج مرتب نشان دهیم آن گاه :

مجموعه جواب معادله $y = x+۱$ مجموعهٔ $S = \{(x, x+۱) : x \in \mathbb{R}, x \geq ۰\}$ و مجموعه جواب معادله $y^۲ = x+۱$ مجموعهٔ $T = \{(x, \pm\sqrt{x+۱}) : x \in \mathbb{R}, x \geq ۰\}$ می‌باشد. همچنان که در S دیده می‌شود S هیچ‌دو زوج مرتبی با مولفه اول برابر ندارد ، در صورتی که T دارای اعضایی به شکل $(۱, \sqrt{۲})(۱, -\sqrt{۲})$ است که‌مولفه های اول برابردارند .

تعریف ۱.۱ . $F \subseteq A \times B$ یک تابع[۱] از A به B است ، هرگاه به ازای هر $x \in A$

---

[۱] function

اگر $y,z \in B$ و $(x,y) \in F$ و $(x,z) \in F$ ، آن گاه $y = z$.

مثال . مجموعه $F = \{(۰,۱)(۱,-۱)(۲,-۲)(۳,-۳)\}$ یک تابع از $\{۰,۱,۲,۳\}$ به $\{۱,-۱,-۲,-۳\}$ می‌باشد.مجموعه $h = \{(۱,۱)(۱,-۱)(۲,۱)(۳,۱)\}$ تابع نیست.

به دلیل استفاده زیاداز تابع معمولاً بجای نماد $f = A \times B$ از نماد $f : A \longrightarrow B$ وبه جای $(x,y) \in f$ از علائم $x \longrightarrow y$ یا $y = f(x)$ استفاده می‌شود. در این حالت $f : A \longrightarrow B$ یک تابع است هرگاه‌برای هر $x \in A$ یک وتنها یک $y \in B$ باشد که $y = f(x)$ و یابه عبارت دیگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع است هر گاه برای هر $x, x' \in A$:

$$x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$$

اگر f از A به B یک تابع باشد ،A رادامنهٔ f و B را هم دامنه گویند دامنهٔ f رابا D_f نشان می دهند . هم چنین علائم $x \longrightarrow f(x)$ و $y = f(x)$ را ضابطهٔ f می گویند .

قضیه ۲.۱ . دو تابع $f : A \longrightarrow B$ و $g : C \longrightarrow D$ برابر هستند هرگاه

۱ - $A = C$

۲ - $f(x) = g(x) \quad \forall\ x \in A = C$.

مثال . $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ باضابطهٔ $f(x) = x^۲$ یک تابع نیست زیرا $f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} \notin \mathbb{Z}$

مثال . $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ باضابطهٔ $f(x) = |x|$ یک تابع است.

تمرین ۱.۴

۱− اگر $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{*,۰\}$ تمام توابع از A به B را بنویسید.

۲− فرض کنیم X شامل همه توابع $f : [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. نشان دهید رابطه زیر یک رابطه هم ارزی روی X است. چند عضو از دسته هم ارزی تابع $h : t \longrightarrow t^۲$ را بنویسید.

$$\forall f,g \in X \quad fRg \equiv f(\frac{۱}{۲}) = g(\frac{۱}{۲})$$

۳− کدام یک ازروابط زیرتابع است ؟

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad x \longmapsto \begin{cases} x & x > ۰ \\ |x| + ۱ & x \leq ۰ \end{cases}$$

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad x \longmapsto \begin{cases} x & x > ۰ \\ -x + ۱ & x \leq ۰ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h \;:\; & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto |x| \end{aligned}$$

۴– فرض کنید $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد که $f(x+y)=f(x)+f(y)$ نشان دهید

آ) $f(\circ)=\circ$

ب) $f(-x)=-f(x)$

ج) $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n)=nf(۱)$

د) $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1)$

۵– فرض کنید d از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ یک تابع با ضابطهٔ $d(x,y)=\frac{|x-y|}{۱+|x+y|}$ باشد.نشان دهید

آ) $d(x,y) \geq \circ$

ب) $d(x,y)=\circ$ اگروفقط اگر $x=y$

ج) $d(x,y)=d(y,x)$

د) $d(x,y) < d(x,z)+d(z,y)$

۲.۴ نقش وپیش نقش

تعریف ۱.۲ . فرض کنیم $f: A \longrightarrow B$ یک تابع باشد و $S \subseteq A$ مجموعهٔ $f(S)=\{f(x): x \in S\}$ را نقش[۱] S تحت تابع f گویند. $f(A)$ را برد تابع f خوانند و با نماد Imf یا R_f نشان می‌دهند.

نکته . درتعریف فوق ،نکات زیر مهم هستند

۱– اگر $x \in S$ آن گاه $f(x) \in f(S)$

۲– ممکن است $f(x) \in f(S)$ ولی $x \notin S$

۳– $y \in f(S)$ اگروفقط اگریک $x \in S$ ای باشد که $y=f(x)$.

مثال . تابع $\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto |x|+۱ \end{aligned}$ را در نظر بگیریددراین صورت

---
[۱] image

$$f(\{۱,-۱\}) = \{۲\} \qquad f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$$

مثال . تابع

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto \begin{cases} ۱ & \text{زوج } x \\ ۲ & \text{فرد } x \end{cases} \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید

$$f(\{۲,۳\}) = \{۱,۲\} \qquad f(\{۱,۳,۵,۷,۹,\ldots\}) = \{۲\}$$

$$f(\mathbb{N}) = \{۱,۲\} \qquad f(\{۲,۴,۶,۸,\ldots\}) = \{۱\}$$

همچنان که در مثال فوق دیده می‌شود $Imf \neq \mathbb{N}$ پس همواره برد تابع با هم دامنه برابر نیست.

تعریف ۲.۲ .اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع و $T \subseteq B$ آن گاه‌مجموعهٔ $f^{-۱}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$ را پیش نقش[۱] T تحت f گویند.

مثال . تابع $\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{۰\} \\ & x \longmapsto x^۲ \end{aligned}$ را در نظر بگیرید:

$$f^{-۱}(\{۱\}) = \{۱,-۱\} \qquad f^{-۱}(\{۲,۵\}) = \{\}$$

$$f^{-۱}(\{۴,۹\}) = \{۲,-۲,۳,-۳\} \qquad f^{-۱}(\{۲,۴\}) = \{۲,-۲\}$$

نکات ذیل را برای بهتر استفاده کردن از نماد $f^{-۱}$ می‌آوریم:

۱ - $x \in f^{-۱}(T) \Leftrightarrow f(x) \in T$.

۲ - اگر T مجموعه تک عضو مانند $T = \{a\}$ باشد آن گاه به جای نماد $f^{-۱}(T)$ از نماد $f^{-۱}(a)$ استفاده می‌کنند در این صورت $f^{-۱}(a) = \{x \in X : f(x) = a\}$ وهم‌چنین :

$$x \in f^{-۱}(a) \Leftrightarrow f(x) = a$$

۳ - همچنان که در مثال مشاهده می‌شود $f^{-۱}$ همواره یک تابع نیست.

قضیه ۳.۲ . گیریم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A, B \subseteq X$، $C, D \subseteq Y$ آن گاه

۱ - اگر $A \subseteq B$ آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$

[۱] pre-image

۲ - اگر $C \subseteq D$ آنگاه $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$

اثبات . ۱ - فرض کنید $y \in f(A)$ باشد در این صورت $y = f(x)$ برای یک $x \in A$. چون $A \subseteq B$ پس $x \in B$ و لذا $f(x) \in f(B)$ پس $y \in f(B)$.

۲ - اگر $x \in f^{-1}(C)$ باشد آن گاه $f(x) \in C$ پس $f(x) \in D$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(D)$

قضیه ۴.۲ . اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A, B \subseteq X$ ،

۱) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

۲) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

اثبات .۱ - گیریم $y \in f(A \cup B)$ پس $y = f(x)$ برای یک $x \in A \cup B$. حال اگر $x \in A$ آن گاه $f(x) \in f(A)$ و در نتیجه $y \in f(A) \cup f(B)$ و اگر $x \in B$ آن گاه $f(x) \in f(B)$ و در نتیجه $y \in f(A) \cup f(B)$.

بعکس فرض کنید $y \in f(A) \cup f(B)$ در این صورت :

اگر $y \in f(A)$ آن گاه وجود دارد $x \in A \subset A \cup B$ ای که $y = f(x)$ پس $y \in f(A \cup B)$

اگر $y \in f(B)$ آن گاه وجود دارد $x \in B \subseteq A \cup B$ ای که $y = f(x)$ پس $y \in f(A \cup B)$

۲ - به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه ۵.۲ .اگر $f : X \longrightarrow Y$، تابع‌و $C, D \subseteq Y$ ،

۱) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

۲) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

۳) $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$

اثبات . ۱ - فرض کنیم $x \in f^{-1}(C \cup D)$ آن گاه $f(x) \in C \cup D$. اگر $f(x) \in C$ آن گاه $x \in f^{-1}(C)$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ واگر $f(x) \in D$ آن گاه $x \in f^{-1}(D)$ و در نتیجه $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

بعکس. فرض کنیم $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ در این صورت اگر $x \in f^{-1}(C)$ آن گاه $f(x) \in C \subseteq C \cup D$ پس $x \in f^{-1}(c \cup D)$ واگر $x \in f^{-1}(D)$ آن گاه $f(x) \in D \subseteq C \cup D$ پس $x \in f^{-1}(c \cup D)$.

اثبات ۲ و ۳ به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

دو قضیه قبل را برای هر تعداد دلخواه نیز می‌توان تعمیم داد.

تمرین ۲.۴

۱ - اگر $f(x) = x - \frac{۱}{k}[kx]$ $(k > ۰)$، مطلوب است Imf.

۲ - فرض کنید f و g دو تابع از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(x) = x^۳ + ۱$ و $g(x) = x + ۲$باشند. $f^{-۱}(g^{-۱}([-۵, ۳]))$ را بیابید.

۳ - اگر $f(x) = |x|$ آن گاه $f^{-۱}(\{-۱, ۱\})$ را بیابید.

۴ - آیا رابطهٔ $*$ در زیر یک تابع است.دامنه وبرد آن رامشخص کنید.هم چنین $*^{-۱}(۳)$ را بیابید.

$*$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۰
۱	۱	۲	۳	۰
۲	۲	۳	۱	۰
۳	۳	۰	۱	۲

۵ - فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید مجموعهٔ زیر،افرازی برای X است.

$$\{f^{-۱}(y) \ : \ f^{-۱}(y) \neq \phi \ , \ y \in Y\}$$

٦ - فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید مجموعهٔ زیریک رابطهٔ هم ارزی روی X است.

$$\{(a, b) \in X \times X \ : \ f(a) = f(b)\}$$

۷ - اگر$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ باضابطهٔ $f(n) = (-۱)^n[\frac{n}{۲}]$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ باشد،$f^{-۱}(\mathbb{Z})$ و$f^{-۱}(\mathbb{N})$ را بیابید . آیادراین حالت $f^{-۱}$ تابع است؟

۸ - گیریم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. نشان دهید

(آ) $f(f^{-۱}(B)) \ = \ f(X) \cap B$ (ب) $f(A \cap f^{-۱}(B)) \ = \ f(A) \cap B$

۹ - فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابع و $B, C \subseteq Y$. اگر $f^{-۱}(B) = f^{-۱}(C)$ آن گاه تحت کدام شرط، $B = C$.

(i) $f(X) \subsetneqq Y$، (ii) $X = Y$، (iii) $f(X) = Y$، (iv) $X \subsetneqq Y$.

۱۰ - اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ آن گاه:

(آ) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ (ب) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

با یک مثال نشان دهید که تساوی در (آ) و (ب) همواره برقرار نیست.

۱۱ - با یک مثال نشان دهید که اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A, B \subseteq X$ آن گاه :

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

۱۲ - اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع و $S \subseteq A$ باشد.بایک مثال نشان دهیدممکن است $f(x) \in f(S)$ ولی $x \notin S$.

۳.۴ توابع ۱-۱ و برو

تعریف ۱.۳ . فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد

۱) تابع f را یک به یک[1] گویند هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$.

۲)تابع f را برو[2] می‌گویند هرگاه $f(A) = B$.

۳) تابع f را دوسو[3] یا تناظر یک به یک[4] خوانند در صورتی که یک به یک و برو باشد.

مثال . تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(n) = n^2 + 1$ یک به یک است ولی برو نیست .

مثال . تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ باضابطهٔ $f(x, y) = (sinx, cosy)$ یک به یک نیست زیرا$f(0, 0) = f(\pi, 0)$ ولی $(\pi, 0) \neq (0, 0)$ هم چنین از آنجایی که وجودندارد $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $f(x, y) = (2, 2)$ پس f برو نیست.

قضیه۲.۳ . تابع $f : A \longrightarrow B$ برو است اگر و فقط اگربرای هر $b \in B$ یک $a \in A$ باشد که $f(a) = b$.

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

---

[1] injection
[2] surjection
[3] bijection
[4] correspondence

تعریف۳.۳. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$، $g : B \longrightarrow C$ دو تابع باشند. ترکیب fو g راکه با علامت gof نشان می دهند ، تابعی است که برای هر $x \in A$ ،
$gof(x) = g(f(x))$

gof یک تابع است زیرا اولاً $D_{gof} = A$

ثانیاً اگر $x, x' \in A$ و $x = x'$ ، چون f تابع است آن گاه $f(x) = f(x')$. تابع بودن g نتیجه می‌دهد که $g(f(x)) = g(f(x'))$ بنابراین $gof(x) = gof(x')$

قضیه۴.۳. اگر $f : A \longrightarrow B$، $g : B \longrightarrow C$، $h : C \longrightarrow D$ سه تابع باشند آن‌گاه $ho(gof) = (hog)of$

اثبات. ملاحظه می‌شود که gof از A به C ، hog از B به D تابع می‌باشند و بنابراین $ho(gof), (hog)of$ توابعی از A به D هستند. حال برای هر $x \in A$

$$(hog)of(x) = (hog)(f(x)) = h(g(f(x))) = h(gof(x)) = ho(gof)(x)$$

تعریف۵.۳. تابع همانی [۱] بر مجموعهٔ مفروض A با I_A نشان داده می‌شود و عبارت است از تابع $I_A : A \longrightarrow A$ باضابطهٔ $I_A(x) = x$.

تعریف۶.۳. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد

۱) تابع $g : B \longrightarrow A$ را معکوس چپ [۲] تابع f گویند هرگاه $gof = I_A$

۲) تابع $h : B \longrightarrow A$ را معکوس راست [۳] تابع f گویند هرگاه $foh = I_B$

مثال تابع $\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & & x \longmapsto x + ۱ \end{array}$ در نظر بگیرید واضح است که این تابع ۱-۱ است. به راحتی دیده می‌شود که توابع زیر معکوس چپ f هستند :

$$\begin{array}{rl} g_i \;:\; & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} x - ۱ & x \geq ۲ \\ i & x < ۲ \end{array} \right. \end{array} \qquad i = ۱, ۲, ۳, ...$$

همچنان که مشاهده می‌شد این تابع بی‌نهایت معکوس چپ دارد. این تابع معکوس راست ندارد زیرا اگر $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ بخواهد معکوس راست f باشد آنگاه $foh = I_{\mathbb{Z}}$ لذا

[۱] identity
[۲] left-inverse
[۳] right-inverse

برای هر $x \in \mathbb{Z}$

$$x = foh(x) = f(h(x)) = h(x) + ۱$$

پس $h : \mathbb{Z} \longrightarrow I\!N$ ،باضابطهٔ $h(x) = x - ۱$ می باشد .امّا واضح است که h تابع نیست زیرا $\ldots, h(-۲), h(-۱), h(۰), h(۱)$ قابل تعریف نیستند.

مثال. تابع

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I\!N \cup \{۰\} \longrightarrow I\!N \cup \{۰\} \\ & m \longmapsto \begin{cases} \dfrac{m}{۲} & m \text{ زوج} \\ \dfrac{m-۱}{۲} & m \text{ فرد} \end{cases} \end{aligned}$$

بروست و توابع‌زیر معکوسهای راست تابع f هستند :

$$g_i : I\!N \cup \{۰\} \longrightarrow I\!N \cup \{۰\}$$

$$g_i(m) = \begin{cases} ۲m + ۱ & m \neq i \\ ۲m & m = i \end{cases} \qquad\qquad i = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

مانند مثال قبل دیده می‌شود که این تابع بی‌نهایت معکوس راست دارد. امّا این تابع معکوس چپ ندارد اثبات آن را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

قضیه۷.۳. تابع $f : A \longrightarrow B$ یک به یک است اگر و فقط اگر f معکوس چپ داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک به یک باشد و $a \in A$. برای هر $b \in B$ اگر $b \in Imf$ آن‌گاه یک $x_b \in A$ یکتایی هست که $b = f(x_b)$. $g(b)$ رابرابر x_b تعریف کنید واگر $b \notin Imf$ آن گاه $g(b) = a$ قراردهید . تابع $g : B \longrightarrow A$ معکوس چپ f است.

بعکس اگر $g : B \longrightarrow A$ معکوس چپ f باشد و $f(x) = f(x')$ آن گاه $g(f(x)) = g(f(x'))$ و لذا $x = x'$ پس f ۱-۱ است.

قضیه۸.۳. تابع $f : A \longrightarrow B$ بروست اگرو فقط اگر معکوس راست داشته باشد.

اثبات فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ برو باشد. برای تعریف تابع $g : B \longrightarrow A$ ، فرض کنید $b \in B$ باشددراین صورت یک $a_b \in A$ هست که $f(x_b) = b$. $g(b)$ را مساوی a_b قرار می دهیم. جایی که a_b یکی از a_bهایی است که درتساوی فوق صدق می‌کند.تابع g معکوس راست f است .

بعکس اگر $g:B\longrightarrow A$ معکوس راست f باشد و $b\in B$ دلخواه آن گاه $g(b)\in A$ و $f(g(b))=b$ پس f بروست.

تمرین ۳.۴

۱ - فرض کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۷,۸,۹\}$. تابع برویی از A به B نوشته و معکوسهای راست و چپ آن را بنویسید.

۲ - درتمرین قبل تابع یک به یکی از B به A نوشته و معکوسهای راست و چپ آن را بنویسید.

۳ - فرض کنیم $f:A\longrightarrow B$ یک تابع باشدبطوری که برای هر $S\subseteq B$ ، $f(f^{-۱}(T))=T$ نشان دهید f بروست .

۴ - فرض کنیم $f:A\longrightarrow B$ یک تابع باشدبطوری که برای هر $S\subseteq A$ ، $f^{-۱}(f(S))=S$ نشان دهید f یک به یک است .

۵ - برای تابع $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\ \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=e^x$ معکوس راست و چپ بنویسید.

٦ - تمرین قبل را برای تابع $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow(0,+\infty)$ با ضابطهٔ $f(x)=e^x$ تکرارکنید.سپس هر دو تمرین را مقایسه کنید.چه نتیجه ای از این مقایسه به دست می آورید؟

۷ - نشان دهیداگر $f:A\longrightarrow B$ و $g:B\longrightarrow C$ توابعی دوسوباشند آن گاه $gof:B\longrightarrow C$ تابعی دوسو است .

۴.۴ تابع معکوس پذیر

تعریف۱.۴. تابع $f:A\longrightarrow B$ را معکوس پذیر گویند هرگاه دارای معکوس راست و چپ باشد.

قضیه۲.۴. تابع $f:A\longrightarrow B$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر دوسو باشد.

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه۳.۴. فرض کنیم $f:A\longrightarrow B$ یک تابع و $g:B\longrightarrow A$ ،$h:B\longrightarrow A$ به ترتیب معکوسهای راست و چپ f باشند دراین صورت $g=h$.

اثبات. برای هر $x\in B$

$$h(x)=h(fog(x))=(hof)og(x)=I_A(g(x))=g(x)$$

تعریف ۴.۴. تابع $g : B \longrightarrow A$ را معکوس[۱] تابع $f : A \longrightarrow B$ گویندهرگاه g معکوس‌راست‌وچپ f باشد.

نتیجه ۵.۴. اگر $f : X \longrightarrow Y$ معکوس پذیر باشد،آن گاه معکوس آن منحصر به فرداست .

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

قضیه۶.۴ فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ دوسو باشد آن گاه $f^{-۱} : Y \longrightarrow X$ یک تابع دوسو است و $fof^{-۱} = I_Y$ ،$f^{-۱}of = I_X$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $f^{-۱} : Y \longrightarrow X$ یک تابع است. برای این منظورابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر $y \in Y$، $f^{-۱}(y) \neq \phi$. فرض کنیم $y \in Y$. باتوجه به بروبودن f ،عضوی مانند x در X هست به طوری که $y = f(x)$ پس $x \in f^{-۱}(y)$ وبنابراین $\phi \neq f^{-۱}(y) \subseteq X$. از طرفی اگر $x_۱, x_۲ \in f^{-۱}(y)$ آن گاه $f(x_۱) = y = f(x_۲)$ و چون f یک به یک است پس $x_۱ = x_۲$ بنابراین $f^{-۱}(y)$ یک مجموعه تک عضوی است.

اکنون نشان می‌دهیم که $fof^{-۱} = I_Y, f^{-۱}of = I_X$. اگر $y \in Y$ آن گاه x ای در X هست به طوری که $y = f(x)$.پس $f^{-۱}(y) = x$ و

$$fof^{-۱}(y) = f(f^{-۱}(y)) = f(x) = y = I_Y(y)$$

بنابراین $fof^{-۱} = I_Y$.

حال برای هر $x \in X$ اگر $y = f(x)$ آن گاه $f^{-۱}(y) = x$ و

$$f^{-۱}of(x) = f^{-۱}(f(x)) = f^{-۱}(y) = x = I_X(x)$$

بنابراین $f^{-۱}of = I_X$.

نتیجه۷.۴. اگر $f : X \longrightarrow Y$ معکوسپذیر باشد آنگاه $f^{-۱} : Y \longrightarrow X$ معکوس f است.

تمرین ۴.۴

۱ - کدامیک از توابع زیر تناظری یک به یک بین $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$ برقرار می‌کند.

آ) $f(m,n) = ۲^{m-۱}(۲n - ۱)$ ب) $f(m,n) = ۲^m(۲n + ۱)$

ج) $f(m,n) = ۲^{m-۱}۳^{mn-۱}$ د) $f(m,n) = ۲^{m-۱}۳^n$

---

[۱] inverse function

۲ - اگرتابع $f : A \longrightarrow B$ یک به یک باشد و $T \subseteq B$ آن گاه $f(f^{-1}(T)) = T$ اگر و فقط اگر f برو باشد.

۳ - فرض کنید X یک مجموعهٔ m عنصری و Y یک مجموعهٔ n عنصری باشد. تعداد توابع یک به یک از X به Y چه قدر است ؟

۴ - فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $A, B \subseteq X$. با یک مثال نشان دهید که $f(A-B) \neq f(A) - f(B)$. سپس نشان دهید که $f(A-B) = f(A) - f(B)$ هرگاه f یک به یک باشد.

۵ - اگر$f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. نشان دهید احکام زیر معادلند.

آ) f ۱ - ۱ است.

ب) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \qquad \forall X_1 \ , \ X_2 \subseteq A$.

ج) $f(X_1 - X_2) = f(X_1) - f(X_2) \qquad \forall X_1 \ , \ X_2 \subseteq A$.

د) $f(A - X) = f(X_1) \subseteq B - f(X) \qquad \forall X \subseteq A$.

ه) $f^{-1}(f(X)) = X \qquad \forall X \subseteq A$.

۶ - فرض کنید $a \in \mathbb{N}$، $\lambda_a \ : \ \begin{matrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+a \end{matrix}$ یک تابع باشد. نشان دهید که

$$\lambda_{a+b} = \lambda_a o \lambda_b$$

۷ - اگر $f : A \longrightarrow B$ تابع باشد. احکام زیر معادلند.

آ) f برو است.

ب) $B - f(X) \subseteq f(A-X) \subseteq B - f(X) \qquad \forall X \subseteq A$.

ج) $f(f^{-1}(Y)) = Y \qquad \forall Y \subseteq B$.

۵.۴ تحدید و توسیع

تعریف ۱.۵. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد و $X \subseteq A$ و $A \subseteq Y$. تابع $g : X \longrightarrow B$ باضابطهٔ $g(x) = f(x)$ را تحدید f به X گویند و به صورت $g = f|_X$ می‌نویسند.

تابع$h : Y \longrightarrow B$ که‌برای هر$x \in A$ ، $h(x) = f(x)$ راتوسیع f گویند.

مثال. تابع $\begin{array}{rl} f : & Q \longrightarrow Q \\ & x \longmapsto [x] \end{array}$ را در نظر بگیرید. تحدید f به $\mathbb{Z}$ تابع $f|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ با ضابطهٔ $f|_{\mathbb{Z}}(x) = [x]$ می باشد.

توابع زیر توسیع f هستند:

$$g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow Q \qquad x \longmapsto \begin{cases} [x] & x \in Q \\ x & x \notin Q \end{cases}$$

$$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow Q \qquad x \longmapsto \begin{cases} [x] & x \in Q \\ 2 & x \notin Q \end{cases}$$

$$g_3 : \mathbb{R} \longrightarrow Q \qquad x \longmapsto \begin{cases} [x] & x \in Q \\ 3 & x \notin Q \end{cases}$$

$$\cdots$$

واضح است که توسیعهای زیادی برای f می‌توان نوشت.

سؤالی که ممکن است تا کنون به ذهن شما رسیده باشد این است که آیا برای‌هر دو مجموعهٔ غیر تهی A و B یک تابع از A به B وجود دارد. سعی کنید برای این سؤال و سؤالی که در زیر مطرح می‌شود پاسخی بیابید. ما در فصل ۸ با کمک لم تسورن که معادل اصل انتخاب است، به این دو سؤال پاسخ می‌دهیم.

سوال. اگر A و Bدو مجموعهٔ غیر تهی باشند آیامی توان تابع ۱ - ۱ از A به B یا ازB به A نوشت ؟

تمرین ۵.۴

۱ - اگر $f : A \longrightarrow B$ یک تابع‌یک به یک باشدو $X \subseteq A$ آن گاه $f|_X$ یک به یک است .

۲ - با یک مثال نشان دهید که تمرین قبل برای برو بودن برقرار نیست .

۳ - فرض کنیدتابع $f : A \longrightarrow B$ برو باشدو$A \subseteq C$ در این صورت اگر $g : C \longrightarrow B$ توسیع f باشد آن گاه g بروست .

۴ - با یک مثال نشان دهید که تمرین قبل برای یک به یک بودن برقرار نیست .

۵ - یک تابع یک‌به‌یک از N به $\mathbb{Z}$ ویک تابع یک‌به‌یک از $\mathbb{Z}$ به N بنویسید. آیامی‌توانیدتوابع یک به یک از N به $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}$ به N بنویسید؟

٦ - فرض کنید$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشدکه

i) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) \geq 0$

ii) برای هر $x, y \in X$ ، $d(x,y) = \circ$ اگروفقط اگر $y = x$

iii) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$

iv)برای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

نشان دهید که برای هر $x, y, x', y' \in X$

$$|d(x,x') - d(y,y')| \leq d(x,y) + d(x',y')$$

۷ - فرض کنید $S \neq \phi$ یک مجموعه و$h : p(S) \longrightarrow p(S)$ یک تابع باشدکه

i) $h(\phi) = \phi$ ii) $A \subseteq h(A)$

iii) $h(h(A)) = h(A)$ iv) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$

دراین صورت $T = \{G : h(S - G) = S - G\}$ دارای خواص زیر است

I) $\phi, S \in T$

II) اجتماع هرتعداداز اعضای T عضوT است.

III) اشتراک هر تعدادمتناهی از اعضای T عضو T است.

۸ - فرض کنید$\theta \in \mathbb{R}$و$S = \{L_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$و $L_\theta = \{(x,y) : y = \theta x \;\; x, y \in \mathbb{R}\}$

i) نشان دهید $f : \mathbb{R} \longrightarrow S$ باضابطهٔ $f(\theta) = L_\theta$ تابعی دوسو است .

ii) اگر $(L_a, L_b) = \{L_\theta : a < \theta < b\}$ آن گاه (L_{-1}, L_1) و $f^{-1}(L_{-1}, L_1)$ را روی $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ مشخص کنید.

۹ - فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $T \subseteq p(Y)$ باشد که

i) $\phi, Y \in T$

ii) اجتماع هرتعداداز اعضای T عضو T باشد

iii) اشتراک هرتعداداز اعضای T عضو T باشد

نشان دهید مجموعهٔ $\{f^{-1}(G) : G \in T\}$ دارای خواص i) و ii) و iii) می باشد.

فصل ۵

اعداد حقیقی (۱)

در این فصل و فصلهای بعدی مطالب نسبتاً زیادی از دستگاه اعداد حقیقی را ارائه می‌دهیم. دو روش جهت مطالعه دستگاه اعداد حقیقی وجود دارند،که عبارت‌اند از روش اصل موضوعی و روش ساختنی. در این کتاب روش اصل موضوعی رامورد‌مطالعه و بررسی قرارمی دهیم و علاقمندان می توانندبه منظوراطلاع ازروش ساختنی به کتابهای مبانی ریاضیات یا آنالیزریاضی مراجعه کنند.

نخست سعی می‌کنیم آنچه‌راکه از قبل درباره دستگاه اعداد حقیقی می‌دانیم نادیده بگیریم ، دراین حالت جمله معروف « دو دو تا ۴ تا» یابه عبارت دیگر« $۲ \times ۲ = ۴$»،ممکن است برقرار نباشد.

۱.۵ عمل‌دوتایی

تعریف ۱.۵. فرض کنید G مجموعهٔ ناتهی باشد. $*$ را یک عمل[1] دوتایی روی G نامند هرگاه $* : G \times G \longrightarrow G$ یک تابع باشد

مثال. مجموعه $G = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ را در نظر بگیرید. $*$ با ضابطه زیر یک عمل‌دوتایی روی G است

[1] operation

$*$	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۰
۲	۲	۳	۰	۱
۳	۳	۰	۱	۲

مثال. تابع $* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ با ضابطهٔ $*(a,b) = a^b$ یک عمل دوتایی روی $\mathbb{Q}$ نیست ،زیرا

$$*(-۲, \frac{۱}{۲}) = -۲^{\frac{۱}{۲}} \notin \mathbb{Q}$$

مثال. جمع ماتریسهای $m \times n$ یک عمل‌دوتایی است.هم چنین ضرب ماتریس ها روی مجموعه‌ماتریس های $n \times n$ یک عمل است .

فرض کنید G مجوعه‌ای ناتهی و $*$ یک عمل‌دوتایی روی آن باشد، در این صورت

۱) $*$ روی G شرکت‌پذیر است هرگاه‌به ازای هر $a, b, c \in G$ ،

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

۲) $e \in G$ عضو همانی(خنثی) $*$ است هرگاه‌برای هر $a \in G$ ، $a * e = e * a = a$

۳) فرض کنیم $e \in G$ عضوهمانی عمل $*$ باشد، $a' \in G$ وارون(قرینه) $a \in G$ است هرگاه

$$a * a' = a' * a = e$$

۴) عمل دوتایی $*$ روی G جابجایی است هرگاه‌برای هر $a, b \in G$، $a * b = b * a$

با کمی دقت در مثال اول مشاهده می‌شود که $*$ روی مجموعه $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ شرکت پذیر و ۰ عضو (خنثی) ، و ۳ و ۱ قرینه هم و قرینه ۲ خود ۲ است. همچنین $*$ خاصیت جابجایی نیز دارد.

مثال. فرض کنید A مجموعه ای ناتهی و$S(A)$ مجموعهٔ تمام توابع معکوس پذیراز A به A باشد.دراین صورت ترکیب توابع یک عمل روی $S(A)$ است ،که دارای خاصیت شرکت پذیری نیزمی باشد.ملاحظه می شود که تابع همانی $I_A : A \longrightarrow A$ نقش عنصر همانی $S(A)$ راایفامی کند.ازطرف دیگر،بنابرفرض چون هرتابع $f \in S(A)$ معکوس پذیرفرض شده است درنتیجه $f^{-۱} : A \longrightarrow A$ معکوس f است ،یعنی $fof^{-۱} = f^{-۱}of = I_A$.امّاعمل ترکیب توابع خاصیت تعویض پذیری ندارد.

تمرین ۱.۵

۱ - فرض کنید

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ : \ ad-bc\neq \circ\right\}$$

نشان دهید که ضرب ماتریسهاتشکیل یک عمل‌دوتایی روی G می دهد. عضو همانی این عمل و ووارون هر عضو را بیابید.

۲ - تمرین قبل را برای

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ : \ ad-bc= ۱\right\}$$

تکرار کنید.

۳ - جدول زیر را چنان کامل کنید که $*$ یک عمل‌دوتایی تعویض پذیر روی‌مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ تشکیل دهد.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	$\square$
b	b	d	$\square$	c
c	c	a	d	b
d	d	$\square$	$\square$	a

۴ - فرض کنید $G=\{x,y\}$.تحقیق کنید

آ) چند عمل‌دوتایی روی G می‌توان تعریف کرد؟

ب) چند عمل‌دوتایی روی G می‌توان تعریف کرد که‌دارای خواص شرکت‌پذیری، عضو همانی و عضو وارون باشند.

۵ - تمرین قبل را برای مجموعه ۳، ۴ و ۵ عضوی تکرار کنید.

۶ - عمل $*$ روی مجموعهٔ $\{e,x,y,z\}$ طبق جدول زیر تعریف شده است. عضو همانی و وارون هر عضو را بیابید.

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	y	z
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

۷ - به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$m * n = m + n + mn \qquad m \, o \, n = m^{۲} + n^{۲} \qquad m \,\square\, n = m + ۲n$$

تحقیق کنید که هر یک از $\square$، o و $*$ روی $\mathbb{N}$ تشکیل یک عمل‌دوتایی می دهند. تعیین کنید کدامیک‌دارای خاصیت شرکت‌پذیری یا تعویض پذیری است .

۸ - عمل دوتایی $*$ روی مجموعهٔ $S = \{a, b, c, d, e\}$ با جدول زیر تعریف شده است

	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

با استفاده از جدول فوق حاصل مقادیرزیررامحاسبه کنید

$$[(a * c) * e] * a \quad , \quad b * d \quad , \quad a * (b * c) \quad , \quad (a * b) * c$$

تحقیق کنیدکه آیا عمل‌دوتایی $*$ شرکت‌پذیر یا تعویض پذیرمی باشد؟

۹ - جدول زیر را طوری کامل کنید که$*$ یک عمل‌دوتایی شرکت پذیر روی مجموعهٔ $\{a, b, c, d\}$ تعریف نماید.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

۲.۵ معرفی اعداد حقیقی

تعریف۱.۲. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را که شامل حداقل دو عضو ۰ و ۱ باشد به همراه دو عمل $+$ و $\cdot$ که در شرایط زیر صدق کند میدان اعداد حقیقی‌می نامند.

اصول موضوعه حساب

اصل موضوعه ۱

۱ - عمل + روی $\mathbb{R}$ شرکت‌پذیر است.
۲ - ۰ عضوخنثی عمل + است.
۳ - برای هر $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ یک $x \neq a \in \mathbb{R}-\{0\}$ هست که $a+x=۰$
۴ - عمل + روی $\mathbb{R}$ جابجایی است.

اصل موضوعه ۲

′۱ - عمل ضرب · روی $\mathbb{R}$ شرکت‌پذیر است.
′۲ - ۱ عضو همانی عمل ضرب · است.
′۳ - برای هر $a \in \mathbb{R}-\{0\}$ یک $y \in \mathbb{R}-\{0\}$ هست که $ay=۱$
′۴ - عمل ضرب · روی $\mathbb{R}$ جابجایی است.

اصل موضوعه ۳

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \qquad a.(b+c)=ab+ac$$

قضیه ۲.۲. ۰ تنها عضو خنثی عمل جمع و ۱ تنها عضو همانی عمل ضرب است.

اثبات. فرض کنید ′۰ عضو خنثی دیگری نسبت به عمل جمع باشد. در این صورت

$$۰ \text{ عضو خنثی } \quad ۰'=۰'+۰ \qquad\qquad ۰' \text{ عضو خنثی } \quad ۰=۰'+۰$$

نتیجه این که $۰'=۰$.

قضیه ۳.۲. در اصل موضوعه ۳ و ′۳ x و y یکتا هستند.

اثبات. فرض کنید y و y' دو عضو $\mathbb{R}-\{0\}$ باشند که $ay=۱$ و $ay'=۱$. دراین صورت

$$y'=y'۱=y'(ay)=(y'a)y=۱y=y$$

در اصل موضوعه ۳، xرا قرینهٔ a می گویند وآن را با $-a$ و در اصل موضوعه ′۳، y را وارون a می گویند وآن را با $a^{-۱}$ نشان‌می‌دهند.

قضیه ۴.۲. برای هر $a \in \mathbb{R}-\{0\}$،

$$-(-a)=a \qquad , \qquad (a^{-۱})^{-۱}=a$$

اثبات. به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه ۵.۲. (قوانین حذف) فرض کنید $a,b,c \in \mathbb{R}$ باشند. در این صورت

۱ - $a+b=a+c \Longrightarrow b=c$.

۲ - اگر $a \neq ۰$ آن گاه $ab=ac \Longrightarrow b=c$.

اثبات. ۱ - داریم:

$$\begin{aligned} a+b=a+c &\Longrightarrow (-a)+(a+b)=(-a)+(a+c) \\ &\Longrightarrow (-a+a)+b=(-a+a)+c \Longrightarrow b=c \end{aligned}$$

قضیه ۶.۲. برای هر $a\in\mathbb{R}$، $a0=0$.

اثبات. چون $a0+0=a0=a(0+0)=a0+a0$ پس $a0=0$.

نتیجه ۷.۲. 0 در $\mathbb{R}$ وارون ندارد.

قرارداد. برای هر $a,b\in\mathbb{R}$

$$b-a=b+(-a) \qquad\qquad \frac{b}{a}=ba^{-1} \quad (a\neq 0)$$

قضیه ۸.۲. برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $a(-b)=(-a)b=-ab$.

اثبات.

$$ab+a(-b)=a(b+(-b))=a0=0$$

پس $a(-b)$ قرینهٔ ab است. لذا $a(-b)=-ab$.اثبات تساوی دوم به عهدهٔ خواننده می باشد.

نتیجه ۹.۲. برای هر $a,b\in\mathbb{R}$، $(-a)(-b)=ab$

قضیه ۱۰.۲. اگر $ab=0$ آن گاه $a=0$ یا $b=0$.

اثبات. فرض کنیم $a\neq 0$ باشد، آن گاه $ab=0=a0$ لذا بنابه قوانین حذف $b=0$.

قضیه ۱۱.۲. برای‌هر $a,b\in\mathbb{R}$ $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ و $-(a+b)=-(a)+(-b)$.

اثبات. به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

از اسم خاص ۲ برای ۱ + ۱ واز اسم خاص ۳ برای ۱ + ۲ استفاده می کنند و الی آخر.

بنابر این دنبالهٔ اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ... را در $\mathbb{R}$ داریم. استفاده از این اسامی خاص عبارتهای ما را خلاصه می‌کند. به عنوان مثال

$$x+x+x=(x+x)+x=x(1+1)+x=2x+x=(2+1)x=3x$$

تمرین ۲.۵

۱ — عبارات زیر را خلاصه کنید:

$$(x+y+2z)-2(x-y)-2(z-x)$$

۲ — نشان دهیدبرای هر $a\in \mathbb{R}$ ، $a+1\neq a$.

۳ — نشان دهیدبرای هر $a,b\in \mathbb{R}$ معادلهٔ $a+x=b$ در $\mathbb{R}$ جواب یکتا دارد.

۴ — نشان دهیدبرای هر $a,b\in \mathbb{R}$ اگر $a\neq 0$ آن گاه معادلهٔ $ax=b$ جواب یکتادارد.

۳.۵ اصول موضوعه ترتیب

مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را به سه مجموعهٔ $\mathbb{R}^+$ و $\{0\}$ و $\mathbb{R}^-$ که مجزایند و در شرایط زیر صدق می‌کند تقسیم می‌کنیم:

آ) $x\in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow -x\in \mathbb{R}^- \qquad \forall\ x\in \mathbb{R}-\{0\}$.

ب) $a+b\in \mathbb{R}^+\ ,\ ab\in \mathbb{R}^+ \qquad \forall\ a,b\in \mathbb{R}^+$.

قسمت (آ) را می‌توان به شکل زیر نیز بیان نمود.

آ) برای هر $x\in \mathbb{R}-\{0\}$ یکی و تنها یکی از گزاره‌های $x\in \mathbb{R}^+$ و یا $x\in \mathbb{R}^-$ درست می‌باشد.

قضیه۱.۳. $1\in \mathbb{R}^+$

اثبات. فرض کنیم $1\notin \mathbb{R}^+$ چون $1\neq 0$ پس $1\in \mathbb{R}^-$. بنابه (آ) باید $-1\in \mathbb{R}^+$ و بنابه (ب) $1=(-1)(-1)\in \mathbb{R}^+$ پس $1\in \mathbb{R}^+\cap \mathbb{R}^-$ که تناقض است.

نتیجه۲.۳. $-1\in \mathbb{R}^-$

اگر $x\in \mathbb{R}^+$ گویند «x مثبت است» و اگر $x\in \mathbb{R}^-$ باشد گویند« x منفی است».

اکنون رابطهٔ زیر را در $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم

$$\forall\ a,b\in \mathbb{R} \qquad a>b \Longleftrightarrow a-b\in \mathbb{R}^+ \qquad (1)$$

و

$$\forall \ a,b \in \mathbb{R} \qquad a \geq b \Longleftrightarrow a > b \text{ یا } a = b$$

با کمک گزارهٔ (۱) می‌توان اصل موضوعه ترتیب را به شکل زیر نوشت

(آ) برای هر $x \in \mathbb{R}$ یکی و تنها یکی از گزاره‌های $x > 0$، $x = 0$ و $-x > 0$ درست است.

(ب) برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، اگر $x > 0$ و $y > 0$ آن گاه $x + y > 0$ و $xy > 0$.

قضیه۳.۳. رابطهٔ $\leq$ بر $\mathbb{R}$ ترتیب کلی است.

اثبات. از آنجایی که برای هر $a \in \mathbb{R}$، $a = a$ پس $a \leq a$. بنابر این $\leq$ رابطهٔ انعکاسی است. برای اثبات قناس بودن فرض کنیم $a \leq b$ و $b \leq a$ و $a \neq b$. در این صورت $a < b$ و $b < a$. در نتیجه $b - a > 0$ و $a - b > 0$. پس $b - a > 0$ و $-(b - a) > 0$ و این تناقض است.

فرض کنیم $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \leq b$ و $b \leq c$. اگر $a = b$ یا $b = c$ که $a \leq c$ و حکم برقرار است. اگر $a < b$ و $b < c$ آن گاه $b - a > 0$ و $c - b > 0$ بنابه اصل موضوعه (ب) $(b - a) + (c - b) > 0$ پس $c - a > 0$ وبنابراین $a < c$ واین نشان می دهد که رابطهٔ $\leq$ متعدی است .

برای اثبات مرتبط بودن گیریم $a, b \in \mathbb{R}$ آن گاه برای $a - b$ یکی و تنها یکی از گزاره‌های $a - b > 0$ یا $a - b = 0$ یا $-(a - b) > 0$ برقرار است که در هر حال $a > b$ یا $a = b$ یا $a < b$.

قضیه۴.۳. برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$

۱ - اگر $a \geq b$ آنگاه $a \pm c \geq b \pm c$.

۲ - اگر $a \geq b$ و $c > 0$ آنگاه $ac \geq bc$.

۳ - اگر $a \geq b$ و $c < 0$ آنگاه $ac \leq bc$.

۴ - اگر $a, b > 0$ و $a > b$ آن گاه $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

اثبات. به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

نتیجه ۵.۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $a < a + 1$.

تعریف۶.۳. فرض کنیم $a, b \in \mathbb{R}$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}
\end{aligned}$$

تمرین ۳.۵

۱ - نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$(i) \quad ۲x + ۱ > ۳x - ۲ \qquad\qquad (ii) \quad \begin{cases} ۳x - ۲ < x + ۱ \\ x < -۲x - ۱ \end{cases}$$

۲ - ثابت کنید (آ) $۳ > ۰$ (ب) $۲ > ۱$ (ج) $-۳ < -۲$.

۳ - اثبات آخرین قضیه را بنویسید.

۴ - نشان دهیداگر $a > ۰$ آن گاه $a^{-۱} > ۰$.

۵ - نشان دهیداگر $۰ < a < b$ آن گاه $a^{-۱} > b^{-۱} > ۰$.

٦ - نشان دهید $a < \frac{a+b}{۲} < b$.

۷ - نشان دهید به ازای هردوعدد b, a که هردومثبت یامنفی باشند $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$

۸ - ثابت کنیدنامساویهای ذیل همیشه برقرارندوشرط لازم وکافی برای برقراری تساوی رادرهریک معین کنید

آ) $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx$

ب) $x^۲y^۲ + y^۲z^۲ + z^۲x^۲ \geq xyz(x+y+z)$

۹ - ثابت کنیدکه همواره

$$(a_۱{}^۲ + a_۲{}^۲ + a_۳{}^۲)(b_۱{}^۲ + b_۲{}^۲ + b_۳{}^۲) \geq (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳)$$

شرط لازم وکافی برای برقراری تساوی راتعیین کنید.

۱۰ - اگر $a > ۱$ ،نشان دهید بین ۱و a عددی هست که مربعش از a کوچکتراست .

۴.۵ اعداد طبیعی، صحیح، گویا

فرض کنید W مجموعهٔ تمام مجموعه‌های $S \subseteq \mathbb{R}^+$ باشد که دارای خواص :

۱ - $۱ \in S \quad \forall \ S \in W$.

۲ - $x \in S \Longrightarrow x + ۱ \in S \quad \forall \ S \in W$.

باشد. $W \neq \phi$ زیرا مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots\} \in W$.

تعریف ۱.۴. مجموعهٔ اعداد طبیعی[۱] را با $\mathbb{N}$ نشان داده و به صورت $\mathbb{N} = \bigcap_{S \in W} S$ تعریف می‌کنند. هرعضو $\mathbb{N}$ رایک عددطبیعی نامند.

[۱] natural number

قضیه۲.۴. $\mathbb{N} \ni ۱$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n+۱ \in \mathbb{N}$.

اثبات. برای هر $S \in W$، $۱ \in S$ پس $۱ \in \bigcap_{S\in W} S$ یعنی $۱ \in \mathbb{N}$.

اگر $n \in \mathbb{N}$ آن گاه برای هر $S \in W$، $n \in S$ و بنابه شرط ۲، $n+۱ \in S$ پس $n+۱ \in \bigcap_{S\in W} S$ لذا $n+۱ \in \mathbb{N}$

قضیه۳.۴. $\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$

اثبات. با توجه به قضیهٔ قبل $\mathbb{N} \subseteq \{۱, ۲, \ldots\}$. از طرفی چون $\{۱, ۲, \ldots\} \in W$ پس $\mathbb{N} \subseteq \{۱, ۲, \ldots\}$.

n و $n+۱$ را دو عدد طبیعی متوالی گویند. نتیجه قابل توجه قضیهٔ قبل این است که بین هر دو عدد طبیعی متوالی، عدد طبیعی دیگری قرار ندارد.

یکی از بازیهای دوران کودکی این بود که نوارهای کاست را به صورت ایستاده در کنار هم قرار می‌دادیم، به طوری که اگر به یکی ضربه می‌زدیم نوار بعدی می‌افتاد. حتماً به یاد دارید که با ضربه زدن به اولین نوار، تمام نوارها می‌افتادند. این امر نتیجه‌ای از اصل استقرای ریاضی است.

قضیه۴.۴. (اصل استقرا ریاضی[۱]) فرض کنید $T \subseteq \mathbb{N}$ باشد به طوری که اولاً $۱ \in T$ ثانیاً برای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر $n \in T$ آن گاه $n+۱ \in T$. دراین صورت $T = \mathbb{N}$.

اثبات. با توجه به تعریف W، $T \in W$. پس $N \subseteq T$. بنابه فرض $T \subseteq \mathbb{N}$ لذا $T = \mathbb{N}$.

نتیجه۵.۴. (نتیجهٔ اصل استقرا ریاضی) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ گزاره نما باشد. اگر

۱ - $P(۱)$ درست باشد.

۲ - برای هر $n \in \mathbb{N}$، گزارهٔ $P(n) \Longrightarrow P(n+۱)$ وقتی $p(n)$ درست است، نیز درست باشد.

آن گاه $P(n)$ نیز به ازای هر n درست است.

اثبات. کافی است در قضیهٔ قبل، $T = \{n \ : \ P(n)$ درست است $\}$ در نظر بگیریم.

قضیه۶.۴. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ آنگاه $m+n \in \mathbb{N}$ و $mn \in \mathbb{N}$.

اثبات. فرض کنید $P(n)$ گزاره‌نمای $m+n \in \mathbb{N}$ باشد. چون $m \in \mathbb{N}$ پس $m+۱ \in \mathbb{N}$ لذا $P(۱)$ درست است. گیریم $P(n)$ درست باشد. پس $m+n \in \mathbb{N}$ لذا

[۱] axiom of induction

$(m+n)+1 \in \mathbb{N}$ بنابر این $m+(n+1) \in \mathbb{N}$ در نتیجه $P(n+1)$ نیز درست است.

اثبات $mn \in \mathbb{N}$ رابه عهدهٔ خوانندهمی گذاریم .

با توجه به تعریف $\mathbb{N}$ مشاهده می‌شود که $0, -1, -2, -3, \ldots \notin \mathbb{N}$. مجموعهٔ

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

مجموعهٔ اعداد صحیح نامند. به راحتی دیده می‌شود که جمع و ضرب دو عدد صحیح یک عدد صحیح است و این که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$(تمرین ۱).

تعریف ۷.۴. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ ،توان nام عدد x به استقراچنین تعریف می شود

$$x^0 = 1$$
$$x^1 = x$$
$$x^{n+1} = x^n . x$$

ودرصورتی که $x \neq 0$ ، $x^{-n} = (x^{-1})^n$

تعاریف مشابه تعاریف فوق را تعاریف استقرایی گویند .

اکنون $m \neq 1 \in \mathbb{N}$ دلخواه در نظر می‌گیریم. آن گاه $m > 1 > 0$. اگر طرفین را در معکوس m ضرب کنیم $0 < \frac{1}{m} < 1$.

اگر $\frac{1}{m} = 0$ آن گاه $1 = m \cdot \frac{1}{m} = m \times 0 = 0$ که تناقض است.

اگر $\frac{1}{m} = 1$ آن گاه $1 = m \cdot \frac{1}{m} = m \times 1 = m$ که تناقض است.

با توجه به این که $\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$ نتیجه می‌شود که به ازای هر $1 \neq m \in \mathbb{N}$، $\frac{1}{m} \notin \mathbb{Z}$. پس‌در اعداد حقیقی اعدادی به جز $\mathbb{Z}$ نیز وجود دارند.

تعریف ۸.۴. مجموعهٔ $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ را مجموعهٔ اعداد گویا نامند.

قضیه ۹.۴. اگر $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ آن گاه $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow m\, q = p\, n$.

اثبات. اگر $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ آن گاه $mn^{-1} = pq^{-1}$ ولذا $mn^{-1}nq = pq^{-1}nq$ بنابراین $mq = pn$.

بالعکس ،اگر $mq = pn$ آن گاه $mqq^{-1}n^{-1} = pnq^{-1}n^{-1}$ وبنابراین $mn^{-1} = pq^{-1}$ پس $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

قضیه۱۰.۴. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه۱۱.۴. اگر $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ آن گاه

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$
$$\frac{m}{n}.\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

اثبات.

$$\frac{mq + pn}{nq} = (mq+pn)(n^{-1}q^{-1}) = mqn^{-1}q^{-1}+pnn^{1}q^{-1} = mn^{-1}+pq^{-1} = \frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

$$\frac{mq}{nq} = (mp)n^{-1}q^{-1} = (mn^{-1})(pq^{-1}) = \frac{m}{n}\frac{p}{q}$$

قضیه۱۲.۴. $\mathbb{Q}$به همراه جمع و ضرب اعداد حقیقی در اصول موضوعهٔ حساب ۱، ۲ و ۳ صدق می‌کند.

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

سوال. آیا اعداد حقیقی که گویا نباشند وجود دارد؟ برای پاسخ به فصلهای بعد مراجعه شود.

تمرین ۴.۵

۱ - نشان دهید حاصل جمع وحاصل ضرب دوعددصحیح یک عدد صحیح است.

۲ - ثابت کنیدبرای $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ وهر $m, n \in \mathbb{Z}$

$$x^m x^n = x^{m+n}$$
$$(x^m)^n = x^{mn}$$
$$x^m y^m = (xy)^m$$
$$1^n = 1$$

۳ - (نامساوی برنویی)نشان دهیدبرای هر $x \in \mathbb{R}$اگر $(1 + x) \geq 0$آن گاه‌برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. شرط لازم وکافی برای برقراری تساوی را بیان کنید.

۴ - اگر $n \geq m$ ، $\sum_{i=m}^{n} a_i$ به استقراچنین تعریف می شود

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m \quad , \quad \sum_{i=m}^{n+1} a_i = (\sum_{i=m}^{n} a_i) + a_{n+1}$$

$\sum_{i=m}^{n} a_i$ به صورت $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ نیزنوشته می شود.

آ) نشان دهید که $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

ب) نشان دهید که $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ج) نشان دهید که $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

د) نشان دهید که $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$

ه) $a_1, a_2, \ldots, a_p$ راچنان بیابیدکه

$$i^p = a_1 i + a_2 i(i+1) + a_3 i(i+1)(i+2) + \ldots + a_p i(i+1)(i+2)\ldots(i+p-1)$$

و) باکمک قسمت (ه) $\sum_{i=1}^{n} i^p$ رامحاسبه کنید.

۵ - مجموع های زیررابیابید

$$\sum_{k=1}^{n} Ln(1+\frac{1}{k}) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2+3k-2} \qquad \sum_{k=1}^{n} tg^{-1}\frac{1}{n^2+n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}$$

۶ - نشان دهیدهمواره

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^{i-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

۷ - نشان دهیدبرای n های فرد

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a^{n-i}b^{i-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

۸ - اگر $a \geq 2$ آن گاه همواره $a^n > n$.

۹ - به استقراثابت کنیدکه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $64 | 9(9^n - 1) - 8n$.

۱۰ - (نامساوی‌کشی —شوارتز)نشان دهید

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

فصل ۶

اعداد حقیقی (۲)

این فصل‌را به‌معرفی مفاهیم ماکزیمم، مینیمم، سوپریمم و اینفیمم‌یک مجموعه‌اختصاص می دهیم . همچنین خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی و نتایج آن‌راموردبحث وبررسی قرارمی دهیم.

۱.۶ ماکزیمم، مینیمم، سوپریمم و اینفیمم

تعریف ۱.۱. فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزیی باشدو $B \subseteq A$.

۱ - B را در A از بالا کراندار گویند هرگاه‌یک $a \in A$ باشد به طوری که‌برای هر $b \in B$ ، $b \leq a$.دراین صورت a را کران‌بالای[۱] B نامند.

۲ - B را در A از پایین کراندار گویند هرگاه‌یک $c \in A$ باشد که‌برای هر$b \in B$ ، $b \geq c$. دراین صورت c را کران‌پایین[۲] B نامند.

۳ - مجموعهٔ B کرانداراست ، هرگاه از بالا و پایین کراندار باشد.

مثال. اگر $X = \{a, b, c, d\}$ و $(P(X), \subseteq)$ مجموعهٔ مرتب جزیی باشد، آن گاه کرانهای بالا و پایین مجموعهٔ $S = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$ را در $P(X)$ مشخص کنید.

حل. کرانهای بالای S ، مجموعه های $\{a, b, c, d\}$ و $\{a, b, c\}$ و کران پایین آن‌مجموعهٔ $\{\ \}$ می‌باشد.

---
[۱] upper bound
[۲] lower bound

مثال. فرض کنید $I\!N$ مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد.

$$a \leq b \Longleftrightarrow b|a$$

به راحتی دیده می‌شود که $(I\!N, \leq)$ مرتب جزیی است. کرانهای بالا و پایین مجموعهٔ $A = \{۴, ٦, ۸\}$ را بیابید.

حل. اگر M کران بالای مجموعهٔ A باشد آن گاه $M \leq ۴$، $M \leq ٦$ و $M \leq ۸$. درنتیجه $M|۴$، $M|٦$ و $M|۸$ بنابر این $M = ۱, ۲$.

حال فرض کنیم m کران پایین A باشد. در این صورت $m \geq ۴$، $m \geq ٦$ و $m \geq ۸$. ازاین رو $۴|m$، $٦|m$ و $۸|m$ در نتیجه m می‌تواند ۲۴ و مضارب آن باشد. پس $\{۱, ۲\}$ مجموعهٔ کرانهای بالای A و $\{۲۴k \ : \ k \in I\!N\}$ مجموعهٔ کرانهای پایین A است.

سعی کنید به سوالات زیر دقیق پاسخ دهید.

سوال ۱ - آیا $(\circ, +\infty)$ از بالا کراندار است ؟

سوال ۲ - آیا $(-\infty, \circ)$ از پایین کراندار است ؟

بازه‌های $(\circ, ۱]$ و $(\circ, ۱)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانیم ۱ در هر دو مجوعه کران بالاست. تفاوتی که بین این دو می‌باشد آن است که $۱ \in (\circ, ۱]$ و لی $۱ \notin (\circ, ۱)$. ۱ را برای $(\circ, ۱]$ ماکزیمم و برای $(\circ, ۱)$ سوپریمم نامند.

همچنین اگر $[\circ, ۱)$ و $(\circ, ۱)$ را در نظر بگیریم ملاحظه می شودکه صفر برای هر دو کران پایین است، به طوری که $\circ \in [\circ, ۱)$ ولی $\circ \notin (\circ, ۱)$.درنتیجه ۰ برای $[\circ, ۱)$ مینیمم و برای $(\circ, ۱)$ اینفیمم نامیده می شود.

در زیر تعاریف ماکزیمم و مینیمم را ارائه ومفاهیم سوپریمم و اینفیمم را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $(A, \leq)$ مرتب جزیی باشدو $B \subseteq A$.

۱ - $b \in B$ را ماکزیمم B گویند، هرگاه‌برای هر $x \in B$ ، $x \leq b$ و به صورت $b = \max B$ می نویسند.

۲ - $b \in B$ را مینیمم B خوانند، هرگاه‌به ازای هر $x \in B$ ، $x \geq b$ و به صورت $b = \min B$ نوشته می شود.

مثال. $(\circ, ۱)$ مینیمم و ماکزیمم ندارد.

حل . زیرا اگر $x \in (\circ, ۱)$ دلخواه باشد آن گاه $\frac{x}{۲} \in (\circ, ۱)$ و $\frac{x}{۲} < x$ هم چنین

$\frac{x+۱}{۲} \in (۰,۱)$ و $x < \frac{x+۱}{۲}$.

مثال. $\min I\!N = ۱$ و $I\!N$ ماکزیمم ندارد. زیرا اگر $x \in I\!N$ آن گاه $x+۱ \in I\!N$ و $x < x+۱$.

مثال. نشان دهید $B = \{x \ : \ ۰ < x \in Q \ , \ x^2 > 2\}$ مینیمم ندارد.

حل. کافی است ثابت کنیم برای هر عضو B عضو کوچکتری در B وجوددارد. برای این منظور فرض کنید $x \in B$. دراین صورت $x^۲ > ۲$ و بنابراین $x > \frac{۲}{x}$. حال $s = \frac{x + \frac{۲}{x}}{۲}$ انتخاب می‌کنیم. واضح است که $s > ۰$ و $s \in Q$. و $s^۲ > ۲$. پس $s \in B$ و باتوجه به انتخاب s ، $s < x$.

مثال. فرض کنید X یک مجموعه و $(P(X), \subseteq)$ مرتب جزیی باشد.

$$\max P(X) = X \qquad\qquad \min P(X) = \{\ \}$$

مثال. فرض کنید $I\!N$ مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد و

$$a \le b \Longleftrightarrow b|a$$

$(I\!N, \le)$ مرتب جزیی است. ماکزیمم و مینیمم مجموعهٔ $\{۴,۸,۱۶\}$ و $\{۲,۳,۶\}$ را بیابید.

حل. از آنجایی که $۴|۴$ و $۴|۸$ و $۴|۱۶$ پس $\max\{۴,۸,۱۶\} = ۴$ و چون $۴|۱۶$ و $۸|۱۶$ و $۱۶|۱۶$ لذا $\min\{۴,۸,۱۶\} = ۱۶$.

همچنین $\max\{۲,۳,۶\}$ وجود ندارد و $\min\{۲,۳,۶\} = ۶$.

می‌دانیم که $\min[۰,۱) = ۰$. آیا هر زیرمجموعهٔ $[۰,۱)$ نیز مینیمم دارد ؟ جواب منفی است. زیرا $(\frac{۱}{۲}, ۱) \subseteq [۰,۱)$ ولی مینیمم ندارد. برای ماکزیمم نیز مشابه است. نتیجه این که اگر مجموعه‌ای مینیمم و ماکزیمم داشته باشد، معلوم نیست که هر زیر مجموعه آن دارای مینیمم یا ماکزیمم باشد.

قضیه ۱.۳. هر زیر مجموعهٔ غیر تهی $I\!N$ دارای مینیمم است.

اثبات. فرض کنید $\phi \neq A \subseteq I\!N$ و B مجموعهٔ کرانهای پایین A در $I\!N$ باشد. $۱ \in B$ و لذا $B \neq \phi$. اگر $a \in A$ آن گاه $a < a+۱$ پس $a+۱ \notin B$. بنابراین $B \neq I\!N$. بنابه اصل استقرا ریاضی وجود دارد b ای در B که $b+۱ \notin B$. نشان می‌دهیم که $b = \min A$.

با توجه به انتخاب B برای هر $x \in A$، $b \leq x$. اگر $b \notin A$ آن گاه برای هر $x \in A$ $b < x$ لذا $b + ۱ \leq x$. پس $b + ۱ \in B$ و این تناقض است.

تعریف. اگر $(A, \leq)$ مرتب کلی باشد و هر زیر مجموعهٔ غیر تهی A دارای min باشد آن گاه $(A, \leq)$ را خوش ترتیب نامند و رابطهٔ $\leq$ را رابطهٔ خوش ترتیبی گویند .

با توجه به قضیهٔ فوق $(\mathbb{N}, \leq)$ خوش ترتیب است ولی به آسانی مشاهده می شود که هرزیر مجموعهٔ $\mathbb{R}$ مینیمم ندارد و لذا $(\mathbb{R}, \leq)$ خوش ترتیب نیست .

در زیر یکی از اصول مهم ریاضی که به اصل خوش ترتیبی معروف است می‌آوریم.

اصل خوش ترتیبی. هر مجموعهٔ غیر تهی خوش ترتیب شدنی است. به عبارت دیگر روی هر مجموعهٔ غیر تهی می‌توان رابطهٔ ترتیب کلی $\leq$ را طوری تعریف کرد که خوش ترتیب شود.

یکی از مسایلی که تا کنون به آن پاسخ داده نشده است تعریف رابطهٔ $\leq$ روی $\mathbb{R}$ است به طوری که $\mathbb{R}$ خوش ترتیب شود.

تمرین ۱.۶

۱ - به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ نشان دهید که

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{۲} + \frac{|a-b|}{۲} \qquad \min\{a, b\} = \frac{a+b}{۲} - \frac{|a-b|}{۲}$$

۲ - فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و دارای ماکزیمم و مینیمم باشد و $b \in \mathbb{R}$ و $bA = \{bx \ : \ x \in A\}$ نشان دهید که

(آ) اگر $b > ۰$، $\min bA = b \min A$؛

(ب) اگر $b < ۰$، $\min bA = b \max A$.

۳ - فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزیی باشد که هر زیر مجموعهٔ ناتهی آن دارای min باشد. نشان دهید $(A, \leq)$ مرتب کلی است.

۴ - فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ دو سو و $(A, \leq)$ مرتب جزیی باشد که هر زیر مجموعهٔ غیرتهی آن دارای مینیمم باشد. رابطهٔ مرتب جزیی $\leq$ راروی B چنان تعریف کنید که

(آ) هر زیر مجموعهٔ B دارای مینیمم باشد

(ب) هر زیر مجموعهٔ B داری ماکزیمم باشد.

۵ - رابطهٔ $<$ روی $\mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$x < y \Longleftrightarrow [x] = [y]$$
$$x \leq y \Longleftrightarrow x = y \text{ یا } x < y$$

(آ) نشان دهید رابطه فوق مرتب جزیی نیست.
(ب) نشان دهید که برای هر $x \in [0, 1)$

$$x = \min[0, 1) \qquad\qquad x = \max[0, 1)$$

۶ - اگر $(A, \leq)$ مرتب جزیی باشد و $B \subseteq A$. آنگاه ماکزیمم و مینیمم B در صورت وجود یکتاست.

۷ - نشان دهید که $A = \{x \ : \ 0 < x \in \mathbb{Q} \ , \ x^2 < 2\}$ ماکزیمم ندارد.

۸ - نشان دهید $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ ماکزیمم ومینیمم ندارند.

۹ - روی پاره خط $AB = a$ ، نقطهٔ M راچنان پیداکنیدکه حاصل ضرب $AM \times MB$ حداکثرباشد.

۱۰ - به ازای چه مقادیری از x و y عبارت $ax^2 + ay^2 - 12xy - 6x + 14$ مینیمم است .

۱۱ - روی خط $x'x$ ، n نقطهٔ $A_1, \ldots, A_n$ را به فاصلهٔ متوالی a ازیکدیگر جدا می‌کنیم .نقطهٔ M روی $x'x$ راطوری پیداکنیدکه حاصلجمع زیرمینیمم باشد

$$y = \overline{MA_1}^2 + 2\overline{MA_2}^2 + \ldots + n\overline{MA_n}^2$$

۲.۶ سوپریمم و اینفیمم

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(A, \leq)$ مرتب جزیی باشد و $B \subseteq A$:

۱ - کوچکترین کران بالای B در A را سوپریمم B گویند و با $\sup B$ نشان می‌دهند.

۲ - بزرگترین کران پایین B در A را اینفیمم B گویند و با $\inf B$ نشان می‌دهند.

مفاهیم بالا را به شکل زیر می‌توان بیان کرد.

$1'$ - $\alpha \in A$ سوپریمم B است، هرگاه :

اولاً α کران بالای B باشد. ثانیاً اگر $\beta \in A$ کران بالای دیگر B باشد $\alpha \leq \beta$.

۲' - $\gamma \in A$ اینفیمم B است، هرگاه :
اولاً γ کران پایین B باشد. ثانیاً اگر $\beta \in A$ کران پایین‌دیگر B باشد آن گاه $\beta \le \gamma$.

مثال. $\sup(۰,۱) = ۱$ و $\inf(۰,۱) = ۰$

مثال. فرض کنیم $X = \{a,b,c,d\}$ و $(P(X), \subseteq)$ مرتب جزیی باشد. در این صورت

$$\inf\{\{a\},\{b\}\} = \phi \qquad \inf\{\{a\},\{a,b\}\} = \{a\}$$
$$\sup\{\{a\},\{b\}\} = \{a,b\} \qquad \sup\{\{a\},\{a,b\}\} = \{a,b\}$$

مثال. فرض کنیم $X = \{a,b,c,d\}$ و $K = P(X) - \{X, \phi\}$. در این صورت $(K, \subseteq)$ مرتب جزیی است. دراین صورت $\inf\{\{a\},\{b\}\}$ و $\sup\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ در K وجود ندارد.

مثال. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعدادطبیعی و

$$a \le b \Longleftrightarrow b|a$$

مطلوب است تعیین :

(آ) $\inf\{۳,۴,۵\}$ $\qquad$ $\sup\{۳,۴,۵\}$

(ب) $\inf\{۲,۴,۸\}$ $\qquad$ $\sup\{۲,۴,۸\}$

حل. (آ) اگر M کران بالای $\{۳,۴,۵\}$ باشد، آن گاه $M|۵$، $M|۴$ و $M|۳$. پس $M = ۱$. لذا $\{۱\}$ مجموعهٔ کرانهای بالای $\{۳,۴,۵\}$ و بنابر این $\sup\{۳,۴,۵\} = ۱$.
اگر m کران پایین $\{۳,۴,۵\}$ باشد، آن گاه $۵|m$، $۴|m$ و $۳|m$. پس m مضارب ٦۰ می‌باشد. پس مجموعهٔ $\{٦۰, ۱۲۰, \ldots\}$ مجموعهٔ کرانهای بالای $\{۳,۴,۵\}$ می‌باشد.با توجه به تعریف $\le$ در فوق

$$٦۰ \ge ۱۲۰ \ge ۲۴۰ \ge \ldots$$

پس $\inf\{۳,۴,۵\} = ٦۰$.

(ب) اگر M کران بالای $\{۲,۴,۸\}$ باشد، آن گاه $M|۸$، $M|۴$ و $M|۲$. پس M می‌تواند ۱ یا ۲ باشد. لذا $\{۱,۲\}$ مجموعهٔ کرانهای بالای $\{۲,۴,۸\}$ است. با توجه به این که $۲ \ge ۱$ پس $\sup\{۲,۴,۸\} = ۲$. اگر m کران پایین $\{۲,۴,۸\}$ باشد، آن‌گاه

$m|۸$، $m|۴$ و $m|۲$. پس m مضارب ۸ می‌باشد. لذا $\{۸, ۱۶, ۲۴, \ldots\}$ مجموعهٔ کرانهای پایین $\{۲, ۴, ۸\}$ می‌باشد. بنابر این $\inf\{۲, ۴, ۸\} = ۸$.

تمرین ۲.۶

۱ - فرض کنید $(A, \leq)$ مرتب جزیی و $B \subseteq A$. $\sup B$ و $\inf B$ در صورت وجود یکتا هستند.

۲ - رابطهٔ زیر را روی N تعریف می‌کنیم.

$$a \leq b \Longleftrightarrow a|b$$

مطلوب است محاسبهٔ

(آ) $\sup\{۶, ۸, ۱۵\}$ ؛ $\inf\{۶, ۸, ۱۵\}$

(ب) $\sup\{۲, ۳, ۴\}$ ؛ $\inf\{۲, ۳, ۴\}$.

۳ - مطلوب است محاسبهٔ

$$\sup\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$$
$$\inf\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$$

نسبت به رابطه $\leq$ معمولی در $\mathbb{R}$.

۳.۶ خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

در این بخش تمام مجموعه‌ها زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی هستند و رابطهٔ ترتیب جزیی رابطهٔ $\leq$ معمولی در $\mathbb{R}$ است.

قضیه۱.۳. اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و $\sup A$ و $\inf A$ موجود باشند، آن گاه

$$\inf A \leq \sup A$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = \inf A$ و $x \in A$ دلخواه باشد. در این صورت

$$\inf A = \alpha \leq x \leq \sup A$$

قضیه۲.۳. اگر $A,B \subseteq \mathbb{R}$، سوپریمم و اینفیمم هر دو موجود باشد و $A \subseteq B$ آن گاه:

$$\sup A \leq \sup B \qquad , \qquad \inf A \geq \inf B$$

اثبات. فرض کنید $\alpha = \sup B$ و $a \in A$ دلخواه باشد. چون $a \in B$ پس $a \leq \alpha$ لذا α کران بالای A است. بنابر این $\sup A \leq \alpha = \sup B$. اثبات $\inf A \geq \inf B$ به خواننده واگذارمی شود.

دو قضیهٔ زیر برای تعیین سوپریمم و اینفیمم بسیار مفید می‌باشند.

قضیه۳.۳. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ آن گاه $\alpha = \sup A$ اگر و فقط اگر

۱ - α کران بالای A باشد.

۲ - برای هر $\varepsilon > 0$ یک $x \in A$ باشد که $\alpha - \varepsilon < x$.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \sup A$. بنابه تعریف سوپرمم α کران بالای A می‌باشد. حال گیریم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. چون $\alpha - \varepsilon < \alpha$ پس $\alpha - \varepsilon$ کران بالای A نیست. لذا $x \in A$ ای وجود دارد که $\alpha - \varepsilon < x$.

بعکس، فرض کنید شرایط ۱ و ۲ برقرار باشند. برای این که $\alpha = \sup A$، کافی است نشان دهیم برای هر کران بالای دیگر A مانند β، $\beta \leq \alpha$. اگر β کران بالای دیگر A باشد و $\beta < \alpha$، $\varepsilon = \alpha - \beta$ قرار می‌دهیم. بنابر این وجود دارد x ای در A به طوری که $\alpha - \varepsilon < x$ وبنابراین $\alpha - (\alpha - \beta) < x$ پس $\beta < x$ واین متناقض باانتخاب β است.

قضیه۴.۳. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ آنگاه $\alpha = \inf A$ اگر و فقط اگر :

۱ - α کران پایین A باشد.

۲ - برای هر $\varepsilon > 0$ یک $x \in A$ باشد که $\alpha + \varepsilon > x$.

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

همچنان که در مثالهای بخش قبل دیدیم سوپریمم و اینفیمم همواره وجود ندارد. در فصل بعد نشان خواهیم دادکه مجموعه‌های $A = \{x \;:\; 0 < x \in \mathbb{Q} \;,\; x^2 < 2\}$ و $B = \{x \;:\; 0 < x \in \mathbb{Q} \;,\; x^2 > 2\}$ در $\mathbb{Q}$ سوپریمم و اینفیمم ندارند.

اصل زیر که به اصل کمال معروف است نشان می‌دهد که در اعداد حقیقی چنین مجموعه‌هایی وجودندارد.

اصل کمال. هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد دارای سوپریمم است.

خواننده‌ای که می‌خواهد بحث را دقیق تر دنبال کند می‌تواند به فصل چهارم کتاب مبانی ریاضیات که توسط دکتر امیر هوشنگ یمینی گرد آوری شده است مراجعه نماید.

قضیه۵.۳. هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد دارای اینفیمم است.

اثبات. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و دارای کران پایین باشد. B را مجموعهٔ تمام کرانهای پایین A در نظر بگیرید. $B \neq \phi$ و از بالا کراندار است. لذا بنابه اصل کمال $\alpha = \sup B$ موجود است. اگر $x \in A$ دلخواه باشد آن گاه x کران بالای B است. پس $\alpha \leq x$. لذا α کران پایین A می‌باشد. اگرβ کران پایین دیگری برای A باشد، آن گاه $\beta \in B$ پس $\beta \leq \alpha$ بنابراین $\alpha = \inf B$.

قضیه۶.۳. اگر$A \subseteq \mathbb{R}$ و از بالا کراندار باشد و $-A = \{-x \ : \ x \in A\}$ آن گاه:

$$\inf(-A) = -\sup A$$

اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه۷.۳. (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی) به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ عدد طبیعی n هست که $b < an$.

اثبات. اگر $b \leq 0$ آن گاه کافی است $n = 1$ انتخاب شود.

اگر $b > 0$ فرض کنیدبرای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $b \geq an$. مجموعهٔ $B = \{an \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ازبالاکرانداراست. بنابه اصل کمال $\alpha = \sup B$ موجود است. حال $\varepsilon = a$ را در نظر بگیرید. در این صورت به ازای یک $an \in B$ ، $\alpha - a < an$ پس $\alpha < a(n+1)$ واین تناقض است.

نتیجه۸.۳. (۱) برای هر $b \in \mathbb{R}$ یک $n \in \mathbb{N}$ای هست که $b < n$.

(۲) برای هر $\varepsilon > 0$ یک $n \in \mathbb{N}$ای هست که $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

مثال. نشان دهید که

$$\inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,\} = 0$$

حل. واضح است که 0 کران پایین $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,\}$ است. حال اگر ε را دلخواه بگیریم، بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی یک $n \in \mathbb{N}$ هست که $\frac{1}{n} < \varepsilon$. پس $\frac{1}{n} < \varepsilon + 0$ و این نشان می‌دهد که $0 = \inf\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,\}$.

لم۳.۹. هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح قرار دارد.
اثبات. فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد. آن گاه‌به ازای یک $m, n \in \mathbb{N}$ ،

$$a < n \qquad , \qquad -a < m$$

پس $-m < a < n$.
قضیه۳.۱۰. هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.
اثبات. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$. با کمک لم قبل یک $m \in \mathbb{Z}$ هست که $m < a$. پس $a - m + ۱ > ۱$. اگر $A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ a - m + ۱ < n\}$ باتوجه به خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $A \neq \phi$. فرض کنیم $n_۰ = \min A$ پس $n_۰ - ۱ \notin A$. چون $n_۰ - ۱ \in \mathbb{N}$ پس $n_۰ - ۱ \leq a - m + ۱ < n_۰$ واین نتیجه می‌دهدکه $m + n_۰ - ۲ < a < m + n_۰ - ۱$.
نتیجه۳.۱۱. به ازای هرعددحقیقی ، یک وتنهایک عددصحیح n هست که $n \leq a < n + ۱$.
اثبات. به عهده خواننده‌گذاشته می شود.
تعریف ۳.۱۲. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ دراین صورت بنابه نتیجهٔ قبل یک عددصحیح یکتای n هست به طوری که $n \leq a < n + ۱$. n راجزٔ صحیح a گویندوبانماد $n = [a]$ نشان می دهند.
قضیهٔ زیر خاصیت چگال بودن اعداد گویا در $\mathbb{R}$ را نشان می‌دهد.
قضیه۳.۱۳. بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا هست.
اثبات. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$. یک عددطبیعی n هست به طوری که $n(b - a) > ۱$. بنابر این $nb > ۱ + na$. بنابه قضیهٔ قبل عدد صحیح m چنان هست که $m - ۱ < na < m$. بنابر این

$$na < m < na + ۱ < nb$$

نتیجه این که $na < m < nb$ پس $a < \frac{m}{n} < b$.
قضیه۳.۱۴. هر زیر مجموعهٔ غیر تهی اعداد طبیعی که از بالا کراندار باشد دارای ماکزیمم است.
اثبات. فرض کنیم $\phi \neq A \subseteq \mathbb{N}$ و از بالا کراندار باشد. $B \subseteq \mathbb{N}$ را مجموعهٔ کرانهای بالای A در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $n = \min B$. $n \in A$ زیرا اگر $n \notin A$

آن گاه برای هر $x \in A$، $x < n$ و لذا $x \leq n - ۱$ پس $n - ۱ \in B$ و این متناقض با انتخاب n است. پس $n = \max A$.

حال شما به عنوان تمرین می‌توانید نشان دهید که هر زیر مجموعه از اعداد صحیح که داری کران بالا باشد ماکزیمم دارد و هر زیر مجموعه از اعداد صحیح که دارای کران پایین باشد، مینیمم دارد.

تمرین ۳.٦

۱ - فرض کنید $b > ۰$ و $S \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار ثابت کنید

$$\sup_{x \in S}(a + bx) = a + b \sup_{x \in S} x$$

و اگر $b < ۰$

$$\sup_{x \in S}(a + bx) = a + b \inf_{x \in S} x$$

۲ - گیریم $\phi \neq S, T \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار باشند. ثابت کنید

$$\sup_{\substack{x \in S \\ y \in T}}(x + y) = \sup_{x \in S} x + \sup_{y \in T} y$$

۳ - اگر $\phi \neq S, T \subseteq \mathbb{R}$ و از بالا کراندار باشند. نشان دهید

$$\sup(S \cup T) = \max\{\sup S\ ,\ \sup T\}$$

دربارهٔ $\inf(S \cup T)$ و $\sup(S \cap T)$ و $\inf(S \cap T)$ چه می‌توان گفت ؟

۴ - اگر $S \subseteq \mathbb{R}^+$ و از بالا کراندار باشد و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه:

$$\sup_{x \in S} x^n = (\sup_{x \in S} x)^n$$

۵ - ثابت کنید $\{۲^n \ :\ n \in \mathbb{N}\}$ از بالا کراندار نیست.

٦ - فرض کنید $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۲ \leq a_۳ \leq \ldots$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد که از بالا کراندار است. نشان دهید :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

۷ - فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد که از پایین کراندار است. نشان دهید $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in N} a_n$.

۸ - باکمک تمرین های ٦ و۷ inf و sup مجموعه های زیررابیابید:

$$\inf\{\sin 1, \sin(\sin 1), \sin(\sin(\sin 1)), \ldots\}$$
$$\sup\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\}$$
$$\sup\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \ldots\}$$
$$\inf\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\}$$
$$\inf\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\}$$

۹ - inf و sup مجموعه های زیررامحاسبه کنید:

$$\inf\{\frac{1}{x} \ : \ x > 0\}$$
$$\inf\{x \ : \ x^2 > 1\}$$
$$\sup\{x \ : \ x^2 < 1\}$$

۱۰ - نشان دهید برای $x \in \mathbb{R}$:

آ) $[x] \leq x < [x] + 1$

ب) $x - 1 < [x] \leq x$

۱۱ - مطلوب است محاسبهٔ $[x] + [-x]$ برای هر $x \in \mathbb{R}$.

۱۲ - همواره $[a] + [b] \leq [a+b]$.

۱۳ - نشان دهیدهرزیرمجموعه ازاعدادصحیح که دارای کران پایین باشد،مینیمم دارد.

۱۴ - نشان دهیداگر $a > 0$ و n عددطبیعی باشد آن گاه یک وتنهایک عددصحیح m هست که $m \geq 0$ و $m^n \leq a < (m+1)^n$.

(راهنمایی: $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0, x^n \leq a\}$)

۱۵ - اگر a و b دوعددحقیقی و $a > 0$ و $b > 1$ آن گاه نشان دهیدعددصحیح یکتای n هست به طوری که $b^{n-1} \leq a < b^n$. به علاوه اگر $a \geq 1$ آن گاه $n > 0$ واگر $0 < a < 1$ آن گاه $n \leq 0$.

(راهنمایی :حالت اول اگر $a \geq 1$ ، $A = \{k \notin \mathbb{Z} : k \geq 0, a < b^k\}$. حالت دوم اگر $0 < a < 1$ آن گاه $a^{-1} > 1$)

فصل ۷

اعداد حقیقی (۳)

در بخشهای اول و دوم این فصل راجع به خواص اعداد صحیح صحبت می‌شود و در بخش آخر نشان می‌دهیم که اعداد گویا در اصل کمال صدق نمی‌کند و برخی خواص دیگر اعداد حقیقی نیز به اثبات می‌رسد.

۱.۷ بخش‌پذیری

در این بخش همهٔ اعداد صحیح هستند.

فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ ، گویند a ، b را عاد می‌کند و می‌نویسند $a|b$ ، هرگاه عددصحیح مانند q باشد که $b = aq$.

مثال. ۲|۴ ، ۳|۶ و ۵ ∤ ۲ .

قضیه ۱.۱.

۱ - اگر $a|b$ و $a|c$ ، آن گاه $a|bx + cy$.

۲ - اگر $a|b$، آن گاه $a|bc$.

۳ - اگر $a|b$ و $b|c$ ، آن گاه $a|c$.

۴ - اگر $a|b$ و $b|a$ ، آن گاه $a = \pm b$.

اثبات. به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه ۲.۱ (الگوریتم تقسیم). فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a > 0$ در این صورت

وجود دارد r و q منحصر به فردی در$\mathbb{Z}$به طوری که

$$b = qa + r \qquad 0 \leq r < a$$

اثبات. فرض کنید $S = \{b - ax \ : \ b - ax \geq 0 \ , \ x \in \mathbb{Z}\}$ با توجه به خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی یک عددطبیعی مانند n هست که $-b < an$، بنابراین $b > a(-n)$ ولذا $b - a(-n) > 0$ در نتیجه $b - a(-n) \in S$، چون S از پایین کراندار است لذا دارای مینیمم است .

فرض کنید $\min S = b - aq$ هم چنین $r = b - aq$. $r < a$ ، زیرا اگر $r \geq a$ ، آن گاه $b - aq \geq a$ پس $b - a(q+1) \geq 0$ ، در نتیجه $b - a(q+1) \in S$ امّا $b - a(q+1) < b - aq$ واین تناقض است . ازطرفی $b - aq \in S$ ایجاب می کند که $r \geq 0$ پس

$$b = aq + r \quad , \quad 0 \leq r < a$$

حال برای اثبات یکتایی فرض کنید r وq و r' و q' چنان باشد که:

$$b = aq + r = aq' + r' \qquad 0 \leq r < a \ , \ 0 \leq r' < a$$

نتیجه این که $a(q - q') = r' - r$ پس $a | r' - r$ و این تناقض است مگر این که $r' - r = 0$ لذا $r' = r$. و به آسانی دیده می‌شود که $q = q'$.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد . d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b گویند هرگاه

۱ - $d > 0$.

۲ - $d | b$ و $d | a$.

۳ - اگر $c | a$ و $c | b$ ، آنگاه $c | d$ وبزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b راچنین می‌نویسند (a, b) ب.م.م $= d$.

مثال. ۱۲ $= (۲۴, ۳۶)$ ب.م.م و ۲ $= (-۴, ۶)$ ب.م.م

قضیه ۴.۱. فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ و حداقل یکی مخالف صفر باشد در این صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b موجود و منحصر به فرد است.

اثبات. فرض کنید $S = \{ax + by \ : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$ واضح است که $\pm a, \pm b \in S$. پس S شامل یک عدد طبیعی خواهدبود.اگر d کوچکترین عدد طبیعی در S باشد .

پس به ازای اعدادصحیحی مانند $x_\circ$ و $y_\circ$ میتوان نوشت $d = ax_\circ + by_\circ$. نشان داده می شود که این d ب .م .م a و b است . شرط اول برقرار است . با کمک الگوریتم تقسیم‌اعدادصحیح q و r موجودندبه طوری که $a = dq + r$ و $\circ \leq r < d$. بنابراین

$$r = a - dq = a - (ax_\circ + by_\circ)q = a(۱ - qx_\circ) + bqy_\circ$$

در نتیجه اگر $r \neq \circ$ ، آن گاه $r \in S$ که متناقض با انتخاب r و d است .لذا $r = \circ$ ، پس $d|a$. با استدلالی مشابه $d|b$.اگر $c|a$ و $c|b$ ، آن گاه $c|ax_\circ + by_\circ$ پس $c|d$.

اثبات یکتایی به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

نتیجه ۵.۱. اگر (a,b) ب.م.م $= d$ ، آن گاه به ازای یک $x, y \in \mathbb{Z}$ ، $d = ax + by$.

تذکر. عکس نتیجه قبل همواره برقرار نیست.

قضیه ۶.۱. فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$، دراین صورت $(a,b) = ۱$ ب.م.م اگر و فقط اگر یک $x, y \in \mathbb{Z}$ ، که $ax + by = ۱$.

اثبات. اگر $(a,b) = ۱$ ب .م .م که بنابه نتیجهٔ قبل قضیه برقرار است . بعکس فرض کنیم به ازای یک $x, y \in \mathbb{Z}$ ، $ax + by = ۱$ و (a,b) ب.م.م $= d$. چون $d|a$ و $d|b$ پس $d|ax + by$ لذا $d = ۱$.

نتیجه ۷.۱. اگر (a,b) ب.م.م $= d$ ، آن گاه $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = ۱$ ب .م .م .

قضیه ۸.۱. اگر $(a,b) = ۱$ ب.م.م و $a|bc$ ، آن گاه $a|c$.

اثبات. وجود دارد $x, y \in \mathbb{Z}$ بطوری که $ax + by = ۱$. دراین صورت $acx + bcy = c$. چون $a|a$ و $a|bc$ پس $a|acx + bcy$ لذا $a|c$.

تمرین ۱.۷

۱– فرض کنیم $\phi \neq S \subseteq \mathbb{Z} - \{\circ\}$. اگر مجموع و تفاضل هر دو عضو S ، عضوی از S باشد ، ثابت کنید $\min S$ وجود دارد . اگر $d = \min S$ ، آن گاه $S = \{md \ : \ m \in \mathbb{Z}\}$

۲– d را کوچکترین مضرب مشترک a و b گویند ، هرگاه(۱) $d > \circ$ (۲) $a|d \ , \ b|d$ (۳)اگر $a|c \ , \ b|c$، آن گاه $d|c$.کوچکترین مضرب مشترک a و b رابا $d = [a,b]$ نشان می دهند.

آ) کوچکترین مضرب مشترک ۱۶ و ۱۲رابیابید.

ب) ثابت کنید $[a,b]$ وجود دارد و چنانچه $a > \circ$ و $b > \circ$

$$[a,b] = \frac{ab}{\text{ب.م.م}\,(a,b)}$$

۲.۷ تجزیه به عوامل اول و همنهشتی

تعریف ۱.۲ . عدد صحیح $p > ۱$ را اول گویند هرگاه اگر $a|p$ آن گاه $a = \pm ۱$ یا $a = \pm p$.

مثال . $۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷$ اول هستند.

قضیه ۲.۲. هر عدد صحیح بزرگتر از یک را می توان به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرد.

اثبات . فرض کنید n کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از یک باشد که به عوامل اول تجزیه نشود . پس n اول نیست لذا وجود دارد یک $a \in \mathbb{Z}$ که $a|n$ و $a \neq \pm ۱$ و $a \neq \pm n$. می‌توان a را مثبت در نظر گرفت در این صورت وجود دارد bای که $n = ab$ و $۱ < a, b < n$.با توجه به انتخاب n ، a و b به عوامل اول تجزیه می‌شوند، مثلاً $a = p_۱p_۲ \ldots p_r$ و $b = q_۱q_۲ \ldots q_r$.دراینجا $p_۱, \ldots, p_r$ و $q_۱, \ldots, q_s$ معرف اعداداول‌اند. پس $n = p_۱p_۲ \ldots p_r q_۱q_۲ \ldots q_r$ که تناقض است .

نتیجه ۳.۲ . اگر p یک عدد اول باشد و $p|ab$ ، آنگاه $p|a$ یا $p|b$.

اثبات . فرض کنید $p \nmid a$ ، در این صورت $(p,a) = ۱$ ب.م.م پس $p|b$.

قضیه ۴.۲. در قضیه قبل تجزیه به عوامل اول یکتاست.

اثبات. گیریم $n = p_۱p_۲ \ldots p_r = q_۱q_۲ \ldots q_s$ کوچکترین عدد طبیعی باشد که تجزیه آن به عوامل اول منحصر به فرد نیست . چون $p_۱|p_۱p_۲ \ldots p_r$ پس $p_۱|q_۱q_۲ \ldots q_s$ بنابه نتیجهٔ قبل وجود دارد iای که $p_۱|q_i$ با تغییر اندیسها می توان فرض کرد که $p_۱|q_۱$. لذا $m = p_۲ \ldots p_r = q_۲ \ldots q_s$ و این نشان می‌دهد که تجزیه m به عوامل اول یکتانیست واین متناقض با انتخاب n است.

قضیه ۵.۲. هر عدد صحیح کوچکتر از -۱ نیز به صورت یکتا به عوامل اول تجزیه می‌شود.

اثبات. اگر $n < -۱$ آن گاه $-n$ درقضیهٔ ۲ صدق می کند.

قضیه ۶.۲. بی‌نهایت عدد اول وجود دارد .

اثبات. فرض کنیم $p_1, p_2 \dots, p_k$ تمام اعداد اول باشند ، قرار می‌دهیم :

$$n = p_1 p_2 \dots p_k + 1$$

بنابه قضیه قبل به ازای یک iای $p_i|n$. لذا $p_i|n - p_1 \dots p_k$ پس $p_i|1$ و این تناقض است.

تعریف ۷.۲. فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، a را همنهشت[1] با b به هنگ n گویند هر گاه $n|a-b$ و می‌نویسند $a \overset{n}{\equiv} b$.

مثال. $-2 \overset{3}{\equiv} 1$ و $2 \overset{3}{\equiv} -1$ و $2 \overset{3}{\equiv} 5$.

قضیه. رابطه همنهشتی یک رابطه هم ارزی در $\mathbb{Z}$ است.

اثبات. به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم $a \overset{n}{\equiv} b$ و $c \overset{n}{\equiv} d$ آن گاه

۱) $a \pm c \overset{n}{\equiv} b \pm d$.

۲) $ac \overset{n}{\equiv} bd$.

اثبات. ۱) به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می‌شود.

۲) چون $a \overset{n}{\equiv} b$ پس $n|a-b$ ، لذا $n|ac-bc$ و با استدلالی مشابه $n|bc-bd$ ، لذا $n|ac-bc+bc-bd$ ، نتیجه این که $n|ac-bd$.

قضیه ۹.۲. هر عدد صحیح x بایک و تنها یکی ازاعداد $0, 1, 2, \dots, n-1$ همنهشت به هنگ n است.

اثبات. با کمک قضیهٔ الگوریتم تقسیم r و q یکتایی در $\mathbb{Z}$ هست که:

$$x = nq + r \quad , \quad 0 \leq r < n$$

پس $x \overset{n}{\equiv} r$.

حال اگر $x \overset{n}{\equiv} r'$ جایی که $r' \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}$ آن گاه $r \overset{n}{\equiv} r'$ پس $n|r-r'$ واین تناقض است مگر این که $r - r' = 0$ ، یعنی $r = r'$.

قضیه ۱۰.۲. هر گاه $(a, n) = 1$ ب.م.م و $ax \overset{n}{\equiv} ay$ آن گاه $x \overset{n}{\equiv} y$.

اثبات. چون $(a, n) = 1$ ب.م.م لذا وجود دارد x_0, y_0ای که $ax_0 + ny_0 = 1$ سپس $ax_0 \overset{n}{\equiv} 1$. لذا $x_0 ax \overset{n}{\equiv} x_0 ay$ و بنابراین $x \overset{n}{\equiv} y$.

[1] congruent

قضیه ۱۱.۲. اگر $(a,n)=d$ ب.م.م و $ax \overset{n}{\equiv} ay$ آن گاه $x \overset{\frac{n}{d}}{\equiv} y$.

اثبات. از این که $n|ax-ay$ نتیجه می‌شود که $\frac{n}{d}|\frac{a}{d}x-\frac{a}{d}y$ پس $\frac{n}{d}|\frac{a}{d}(x-y)$ از طرفی $(\frac{a}{d},\frac{n}{d})=1$ ب.م.م لذا $\frac{n}{d}|x-y$ پس $x \overset{\frac{n}{d}}{\equiv} y$.

فرض کنید $\phi(n)$ معرف تعداد اعداد صحیح مابین $0, 1-n$ باشد که با n اولند. $\phi(n)$ را تابع فی اویلر گویند .

مثال. $\phi(15)=8$ و $\phi(8)=4$ و $\phi(5)=4$.

قضیه ۱۲.۲ (اویلر). اگر $(a,n)=1$ ب.م.م، آن گاه $a^{\phi(n)} \overset{n}{\equiv} 1$.

اثبات. به کتابهای نظریه اعداد مراجعه شود.

قضیه ۱۳.۲ (فرما). اگر p عدد اولی باشد که $p \nmid a$ آن گاه $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.

تمرین ۲.۷

۱ــ نشان دهید بین اعداد اول شکافهای به‌دلخواه بزرگ وجود دارد .

۲ــ عدد n اول است هر گاه n بر هیچ عدد اولی چون p که $p \leq \sqrt{n}$ بخش پذیر نباشد .

۳ــ $n>1$ وقتی و فقط وقتی اول است که به ازای هر a یا $(a,n)=1$ ب.م.م یا $n|a$.

۴ــ فرض کنیم m,n دو عدد صحیح باشند. نشان دهید

$(m,n)=$ حاصل ضرب عوامل اول مشترک با کمترین توان ب.ب.م

$[m,n]=$ حاصل ضرب عوامل اول مشترک با بیشترین توان $\times$ حاصل ضرب عوامل اول غیر مشترک

۵ــ با کمک رابطه همنهشتی به هنگ n، $\mathbb{Z}$ را افراز کنید .

۶ــ معادلات همنهشتی زیررا حل کنید

$$3x \overset{5}{\equiv} 1 \qquad x^2+1 \overset{4}{\equiv} 0 \qquad x^3+2x+1 \overset{7}{\equiv} 0$$

۳.۷ ناتمامیت اعداد گویا

قضیه۱.۳. معادله $x^{۲} = ۲$ در Q جواب ندارد .

اثبات. فرض کنید $\frac{m}{n} \in Q$ و $(m,n) = ۱$ ب.م.م و $(\frac{m}{n})^{۲} = ۲$. در این صورت $m^{۲} = ۲n^{۲}$ پس m زوج است . لذا به ازای یک kای ، $m = ۲k$ پس $۴k^{۲} = ۲n^{۲}$ و نتیجه این که $۲k^{۲} = n^{۲}$ و بنابراین n زوج است . زوج بودن m و n متناقض با $(m,n) = ۱$ ب.م.م می‌باشد.

قضیه ۲.۳. Q در اصل کمال صدق نمی‌کند .

اثبات. فرض کنید

$$B = \{x \ : \ ۰ < x \in Q \ , \ x^{۲} > ۲\} \qquad , \qquad A = \{x \ : \ ۰ < x \in Q, x^{۲} < ۲\}$$

A و B دو زیر مجموعه Q هستند که از بالا و پایین به ترتیب کراندارند. درمثال بعدازتعریف ۲.۱.٦ ، نشان داده‌شد که A ماکزیمم و B مینیمم ندارد.

فرض کنید $\alpha = \sup A \in Q$. چون A ماکزیمم ندارد پس $\alpha \notin A$ ، لذا $\alpha^{۲} \geq ۲$. اگر $\alpha^{۲} > ۲$ آن گاه $\alpha \in B$. چون عناصر B جزء کرانهای بالا A هستند پس α کران بالای A است ولذا $\alpha = \min B$ و این تناقض است .پس $\alpha^{۲} = ۲$ و این نیز متناقض با قضیه قبل است.

قضیه۳.۳. به ازای هر عدد حقیقی $a > ۰$ و هر عدد طبیعی n یک و فقط یک $x \in \mathbb{R}$ هست که $x^{n} = a$.

اثبات. قرار می‌دهیم

$$E = \{x \ : \ ۰ < x \ , \ x^{n} < a\}$$

$\frac{a}{۱+a} \in E$ و لذا $E \neq \phi$. $a + ۱$ کران بالای E است ، لذا بنابه اصل کمال یک $x \in \mathbb{R}$ هست که $x = \sup E$. نشان می‌دهیم $x^{n} = a$.

اگر $x^{n} < a$ ، آن گاه $\frac{a - x^{n}}{n(a+۱)^{n-۱}} > ۰$. بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی یک mای هست که $\frac{۱}{m} < \frac{a - x^{n}}{n(a+۱)^{n-۱}}$.

$$\begin{aligned}(x + \frac{۱}{m})^{n} - x^{n} &= (x + \frac{۱}{m} - x)((x + \frac{۱}{m})^{n-۱} + (x + \frac{۱}{m})^{n-۲}x + \ldots + x^{n-۱}) \\ &\leq \frac{۱}{m} n (x + \frac{۱}{m})^{n-۱} < \frac{n}{m}(x+۱)^{n-۱} < a - x^{n}\end{aligned}$$

پس $(x+\frac{1}{m})^n < a$ ، لذا $x+\frac{1}{m} \in E$ واین متناقض با انتخاب x است.

اگر $x^n > a$ ، $k = \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}$ انتخاب می کنیم. دراین صورت $0 < k < x$. اگر $t \geq x-k$ نتیجه می گیریم که $x^n - t^n \leq x^n - (x-k)^n < knx^{n-1} = x^n - a$ پس $t^n > x$ و $t \notin E$.این نشان می دهدکه $x-k$ کران بالای E است که تناقض است بنابراین $x^n = a$ واثبات تمام است . اثبات یکتایی x به عهدهٔ خوانندهواگذار می شود.

درقضیهٔ قبل x به صورت $\sqrt[n]{a}$ یا $a^{\frac{1}{n}}$ نوشته می شود.

یکی از نتایجی که از قضیه قبل گرفته می‌شود این است که اعداد حقیقی اعضایی دارد که گویا نیستند ، این اعداد را اصم یا گنگ می‌خوانند .

با توجه به شناختی که تا کنون از اعداد حقیقی به دست آورده‌ایم می‌دانیم که معادله $x^2 = -1$ در $\mathbb{R}$ جواب ندارد و لذا نیاز به دستگاه اعداد بزرگتری برای جواب این معادله داریم . این معادله در دستگاه اعداد مختلط جواب دارد . ما از بیان دستگاه اعداد مختلط در اینجا صرفنظر می‌کنیم .

خواننده علاقه مند می‌تواند به کتابهایی که راجع به اعداد مختلط نوشته شده مراجعه نماید.

تمرین.

۱− اگر α عددی اصم و r عدد گویا ، آن گاه:

آ) $\alpha \pm r$ و $-\alpha$ و $\frac{1}{\alpha}$ اصم هستند.

ب) اگر $r \neq 0$ ، $\frac{\alpha}{r}$ اصم می‌باشند.

۲− بین هر دو عدد حقیقی یک عدد اصم وجود دارد .

۳− اگر $a,b \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه :

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

۴− اگر $a \in \mathbb{R}^+$ و $m,n \in \mathbb{N}$ آن گاه :

$$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

۵− فرض کنید $a \in \mathbb{R}^+$ و

$$E = \{n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \ : \ n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} < a \ , k = 0, 1, 2, \ldots, n_i \in \mathbb{Z}\}$$

نشان دهید $x = \sup E$. در این صورت $n_0.n_1n_2n_3\ldots$ را بسط اعشاری x می‌گویند .

۶– به ازای هر عددطبیعی n وهر دوعددنامنفی a و b

i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

ii)اگر $a > 1$ آن گاه $\sqrt[n]{a} > 1$ واگر $0 < a < 1$ آن گاه $0 < \sqrt[n]{a} < 1$

iii) $a < b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

۷– به ازای هر عددحقیقی h که $1 + h \geq 0$ وهرعددطبیعی n

$$\sqrt[n]{1+h} \leq 1 + \frac{h}{n}$$

۸– نشان دهید

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2}$$

۹– اگر $a \geq 0$ و $b \geq 0$ آن گاه $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

۱۰– اگر $a > 1$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$ آن گاه عددطبیعی مانند k هست که $n^{-k} < a$.

۱۱– فرض کنیم a عددی حقیقی وn عددطبیعی بزرگ‌ترازیک باشد.نشان دهیدبه‌ازای هرعددصحیح k عددصحیحی مانندm هست که

$$mn^k \leq a < (m+1)n^k$$

(راهنمایی : $A = \{x \in \mathbb{N} : xn^k \leq a\}$ و $maxA$ رادرنظربگیرید.)

۱۲– فرض کنید L مجموعهٔ تمام دنباله های کراندار $x = \{x_n\}$ ازاعدادحقیقی باشد وبرای هر $x, y \in L$

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n = 1, 2, \ldots\}$$

نشان دهیدکه

i) $d(x,y) \geq 0$ وتساوی تنهازمانی برقراراست که $x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

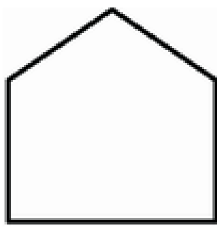
فصل ۸

اصل انتخاب و صورتهای معادل آن

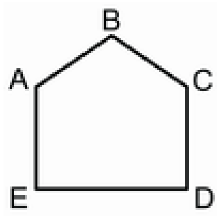
در این فصل به بیان اصل انتخاب و صورتهای معادل آن می‌پردازیم . این اصل یکی از اساسی ترین اصول ریاضی است که هرگونه تلاش برای اثبات یا ردّ آن به شکست انجامیده است.

۱.۸ اندیس

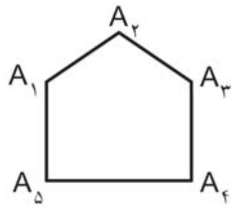
مثال . می‌خواهیم رئوس چند ضلعی زیر را نام گذاری کنیم .



حل . یک راه برای نام گذاری این است که از حروف A ، B ، C و . . . استفاده شود.



یک راه دیگر استفاده از حروف $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و ... می‌باشد. برای این کار از یک رأس شروع می‌کنیم و تمام رأسها را نام گذاری می‌کنیم .



مثال . تمام توابع از $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦\}$ به $B = \{۰, ۱\}$ را بنویسید.

حل . با توجه به این که تعداد توابع خیلی زیاد است استفاده کردن از حروف الفبا برای نام گذاری مناسب نیست ، سعی می‌کنیم از روش دوم برای این کار استفاده کنیم :

$$\begin{array}{lll} f_۱ & : & A \longrightarrow B \\ & & x \longrightarrow ۱ \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} f_۲ & : & A \longrightarrow B \\ & & x \longrightarrow ۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f_۳ & : & A \longrightarrow B \\ & & ۱ \longrightarrow ۱ \\ & & x \longrightarrow ۰ \quad x \neq ۱ \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} f_۴ & : & A \longrightarrow B \\ & & ۲ \longrightarrow ۱ \\ & & x \longrightarrow ۰ \quad x \neq ۲ \end{array}$$

شما می‌توانید در ادامهٔ این کار $۲^٦$ تابع بنویسید.

آیا می‌توان با کمک روش فوق تمام توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰, ۱\}$ را نام گذاری کرد؟ آیا می‌توان تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\{۰, ۱\}$ را با روش فوق نام گذاری کرد؟اگر جواب منفی است ، آیا راه حلی برای نام گذاری این توابع وجود دارد؟

همچنان که از قبل می‌دانید در A_i ، i را اندیس گوییم . در زیر تعریف دقیق اندیس را می آوریم و جواب سؤا لات بالا نیز به مرور داده خواهد شد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید I یک مجموعه و f تابعی بر I باشد . f را یک خانواده[1] و برای هر $i \in I$ ، $f(i)$ را یک عضو خانواده گویند. I را مجموعه اندیس[2] و

[1] family
[2] index

هر عضو I را یک اندیس نامند .

در این گونه موارد مقدار f را در عضو دلخواه $i \in I$ معمولاً با f_i وخود تابع f را به صورت $\{f_i\}_{i\in I}$ می‌نویسند. f_i را مولفه i ام نیز گویند.

مثال . فرض کنید f تابعی بر $\mathbb{N}$ با ضابطه $f(n) = [n, ۲n]$. در این صورت f یک خانواده است که به شکل $\{[n, ۲n]\}_{n\in N}$ نوشته می‌شود.

مثال . مجموعه‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$و $\mathbb{Z}$و $\mathbb{N}$ و ϕ و $\mathbb{R}$ را اندیس گذاری کنید.

حل . اگر $I = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦\}$ و f تابعی بر I با ضابطهٔ

$$f(۱) = \mathbb{R}\ ,\ f(۲) = \mathbb{Q}\ ,\ f(۳) = \mathbb{Z},\ f(۴) = \mathbb{N}\ ,\ f(۵) = \phi\ ,\ f(٦) = \mathbb{R}$$

باشند. در این صورت f یک خانواده است که اعضای آن عبارتند از $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$و $\mathbb{Z}$و $\mathbb{N}$ و ϕ و $\mathbb{R}$. دو $\mathbb{R}$ که در خانواده f است ، یکی مولفه اول و دیگر مولفه ششم هستند و بنابراین با یکدیگر کاملاً متفاوتند.

مثال . مجموعه زیر مجموعه‌های $X = \{۱, ۲, ۳\}$ را اندیس گذاری کنید.

حل . با توجه به این که این مجموعه دارای ۸ زیر مجموعه می‌باشد $I = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦, ۷, ۸\}$ در نظر می‌گیریم و f را بر I با ضابطه:

$$\begin{array}{llll} f(۱) = \{\} & f(۲) = \{۱\} & f(۳) = \{۲\} & f(۴) = \{۳\} \\ f(۵) = \{۱, ۲\} & f(٦) = \{۱, ۳\} & f(۷) = \{۲, ۳\} & f(۸) = \{۱, ۲, ۳\} \end{array}$$

می‌نویسیم .

مثال . اگر f تابعی بر $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(i) = ۱$ برای هر $i \in \mathbb{R}$. در این حالت f یک خانواده با مجموعه اندیس گذار $\mathbb{R}$ است که به صورت $\{۱\}_{i\in \mathbb{R}}$ نوشته می شود . همچنان که از تعریف خانواده مشخص است خانواده $\{۱\}_{i\in \mathbb{R}}$ بی‌نهایت عضو دارد .

در مثالهای فوق دیده می‌شود اعضای یک خانواده می‌توانند متمایز نباشند . به همین دلیل یک خانواده دسته‌ای معین از اشیاء که لزوماً متمایز نیستند نیز گفته‌اند.

مثال . می‌خواهیم مجموعه $P(\mathbb{N})$ را اندیس گذاری کنیم ، برای این کار $I = P(\mathbb{N})$ و f را تابعی بر I در نظر بگیرید که برای هر $i \in I$ ، $f(i) = i$.

حال می‌توان اجتماع و اشتراک هر تعداد دلخواه مجموعه را نیز تعریف کرد.

فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد در این صورت :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \ : \ \exists i\in I \ \ x\in X_i\}$$
$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \ : \ \forall i\in I \ \ x\in X_i\}$$

مثال . $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ را بیابید .

حل . $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})=\phi$ زیرا برای هر $x>0$ ، بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی یک $n\in \mathbb{N}$ هست که $\frac{1}{n}<x$ و لذا $x\notin(0,\frac{1}{n})$ و در نتیجه $x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})$.

$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=0$ واضح است که $0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$. حال اگر x یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد دو حالت زیر را داریم :

حالت اول : اگر $x>0$ بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی یک $n\in\mathbb{N}$ هست که $\frac{1}{n}<x$ و لذا $x\notin(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ پس $x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

حالت دوم : اگر $x<0$ ، آن گاه $-x>0$ و لذا به ازای nای $-x\notin(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ پس $x\notin(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ و لذا $x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$.

تمرین ۱.۸

۱ـ آ) مجموعهٔ اعدادطبیعی زوج رابا $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کنید.

ب) مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ رابا $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کنید.

ج) مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ را با $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کنید.

۲ـ آ) نشان دهید $[0,1)$ را نمی توان با $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کرد.

ب)باپیداکردن تابع دوسوی $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow(0,1)$ نشان دهید که $\mathbb{R}$ با $\mathbb{N}$ اندیس گذاری نمی شود.

ج)زیر مجموعه ای از $[0,1)$ بیابید که با $\mathbb{N}$ اندیس گذاری شود.

۳ـ نشان دهید اگر $f:A\longrightarrow\mathbb{N}$ تابع یک به یک باشد آن گاه می توان A را بازیرمجموعه ای از $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کرد.

۴– نشان دهید اگر $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ تابع برو باشد آن گاه A را می توان بازیرمجموعه ای از $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کرد.

۵– فرض کنید A یک مجموعه باشد،مجموعهٔ $P(A)$ رااندیس گذاری کنید.

٦– فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعدادطبیعی و

$T = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A \Longrightarrow$ هرمقسوم‌علیه n متعلق‌به A است$\}$. نشان دهید

i) $\phi, \mathbb{N} \in T$

ii) اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از اعضای T باشدنشان دهید $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$.

iii) نشان دهیداشتراک هرتعدادمتناهی ازاعضای T عضوی از T است .

۷– مسئلهٔ قبل راوقتی $T = \{E_n | E_n = \{n, n+1, \ldots\}\} \cup \{\phi\}$ تکرارکنید.

۸– فرض کنید $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعدادصحیح باشد $T \subseteq p(\mathbb{Z})$ راچنان تعریف کنید شرایط i) و ii) و iii) تمرین ٦ راداشته باشد.

۲.۸ اصل انتخاب و اصل تسرملو

مثال . گیریم $X_1 = \{*, o\}$ و $X_2 = \{*, \Delta\}$ باشد ، چند تابع

$$f \ : \ \{1,2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2$$

می‌توان نوشت که $f(1) \in X_1$, $f(2) \in X_2$.

$$\begin{array}{lll} f_1 & : & \{1,2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2 \\ & & 1 \longrightarrow * \\ & & 2 \longrightarrow * \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} f_2 & : & \{1,2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2 \\ & & 1 \longrightarrow * \\ & & 2 \longrightarrow \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f_3 & : & \{1,2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2 \\ & & 1 \longrightarrow o \\ & & 2 \longrightarrow * \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} f_4 & : & \{1,2\} \longrightarrow X_1 \cup X_2 \\ & & 1 \longrightarrow o \\ & & 2 \longrightarrow \Delta \end{array}$$

به توابع f_1 و f_2 و f_3 و f_4 در مثال فوق توابع انتخاب گویند .

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد تابع

$$\begin{array}{lll} f & : & I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \\ & & i \longrightarrow f(i) \in X_i \end{array}$$

را یک تابع انتخاب[1] گویند .

---

[1] choice function

مثال . یک تابع انتخاب برای $\{(n, ۲n)\}_{n\in N}$ بنویسید.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I\!\!N \longrightarrow \bigcup_{n=۱}^{\infty} (n, ۲n) \\ & n \longrightarrow \frac{n+۲n}{۲} \end{aligned}$$

مثال . فرض کنید

$$A_n = [n, n+۱] \times [n, n+۱]$$

اگر a_n محل برخورد قطرهای هر مربع باشد ، آن گاه تابع

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I\!\!N \longrightarrow \bigcup_{n\in N} A_n \\ & n \longrightarrow a_n \end{aligned}$$

یک تابع انتخاب برای $\{A_n\}_{n\in N}$ است .

مثال . فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ و M مجموعه تمام زیر مجموعه غیر تهی A باشد .

اگر $I = M$ ، اجتماع اعضای M را با $\cup M$ نشان می‌دهند ، در این صورت $\cup M = \{a, b, c\}$. تابع $f \ : \ I \longrightarrow A$ با ضابطه :

$$\begin{array}{llll} f(\{a\}) = a & f(\{b\}) = b & f(\{c\}) = c & f(\{a,b\}) = a \\ f(\{a,c\}) = a & f(\{b,c\}) = b & f(\{a,b,c\}) = a & \end{array}$$

یک تابع انتخاب است که به آن تابع انتخاب برای مجموعه A گویند.

اکنون ابزار لازم برای تعریف حاصل ضرب تعداد دلخواهی مجموعه را در اختیار داریم .

تعریف ۲.۲ . فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشد . حاصل ضرب $\{X_i\}_{i\in I}$ رابا $\prod_{i\in I} X_i$ نوشته و آن را مجموعه تمام توابع انتخاب برای خانوادهٔ $\{X_i\}_{i\in I}$ تعریف می‌کنند به عبارت دیگر

$$\prod_{i\in I} X_i = \{\ f \ | f : I \longrightarrow \cup X_i \quad , f(i) \in X_i \ \ \forall i \in I\}$$

مثال . فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی و $f \in \prod_{i\in I} X_i$ باشد، اگر $f(i) = x_i \in X_i$ بگیریم ، آن گاه طبق قرار دادی که در بخش اول انجام دادیم می‌توانیم برای تابع انتخاب f از $\{x_i\}_{i\in I}$ استفاده کنیم . در این صورت می‌توان نوشت:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} : x_i \in X_i\}$$

در حالتی که $I = \mathbb{N}$ یا $I = \{۱,۲,\ldots,n\}$ باشد از نماد $(x_۱, x_۲, x_۳, \ldots)$ یا $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ به جای $\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یا $\{x_i\}_{i=۱}^{n}$ استفاده می‌شود. $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ را n تایی مرتب و $(x_۱, x_۲, x_۳, \ldots)$ را بی نهایت تایی مرتب می‌گویند.

حال مثال اول را با نماد اخیر می‌نویسیم :

$$\prod_{i=۱}^{۲} X_i = \{(\star,\star)\ ,\ (\star,\Delta)\ ,\ (\circ,\star)\ ,\ (\circ,\Delta)\}$$

به عنوان مثالی دیگر اگر $X_۱ = \{۱\}$ و $X_۲ = \{۱,۲\}$ و $X_۳ = \{۱,۲,۳\}$ ، آن گاه

$$\prod_{i=۱}^{۳} X_i = \{\{۱,۱,۱\}_{i=۱}^{۳}, \{۱,۱,۲\}_{i=۱}^{۳}, \{۱,۱,۳\}_{i=۱}^{۳}, \{۱,۲,۱\}_{i=۱}^{۳}, \{۱,۲,۲\}_{i=۱}^{۳}, \{۱,۲,۳\}_{i=۱}^{۳}\}$$

باتوجه به توضیحات بالا

$$\prod_{i=۱}^{۳} X_i = \{(۱,۱,۱), (۱,۱,۲), (۱,۲,۱), (۱,۲,۲), (۱,۲,۳)\}$$

در ریاضیات وقتی که مجموعه‌ای تعریف می‌شود ، قبل از هرگونه استفاده از مجموعه تلاش می‌شود که مخالف تهی بودن آن ثابت گردد. حال سؤ الی که این جا مطرح می‌شود این است که آیا $\prod_{i\in I} X_i \neq \phi$. اصل انتخاب به این سؤ ال پاسخ می‌دهد؟

اصل انتخاب : اگر $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از مجموعه های ناتهی باشد ، آن گاه حداقل یک تابع انتخاب برای این مجموعه وجود دارد.

با توجه به این اصل $\prod_{i\in I} X_i \neq \phi$. تلاش زیادی انجام شد که اصل انتخاب ثابت شود امّا متأسفانه این کار میسر نگردید . حتی سعی در ردّ این اصل نیز به جایی نرسید .

به ناچار آن را به عنوان یک اصل پذیرفتند ، بسیاری از مسایل ریاضی با کمک این اصل اثبات می‌شود ، اما در تلاش برای اثبات این اصل به اصول دیگری رسیدند که در این بخش وبخشهای بعد به آنها اشاره خواهیم کرد. یکی از اصولی که با اصل انتخاب معادل است اصل تسرملو است .
مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال . فرض کنید $X_n = [n, n+۱)$ ، برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$. می‌خواهیم مجموعه B را چنان بسازیم که $B \subseteq \bigcup_{n=۰}^{+\infty} X_n$ و به ازای هر n ، $B \cap X_n$ فقط دارای یک عضو باشد .

جواب ساده است مجموعه $B = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ جواب است . شما می‌توانید با کمی دقت مجموعه‌های دیگری برای این کار انتخاب کنید .
سعی کنید مسألهٔ زیر را حل کنید:

اعداد $۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, \frac{۷}{۸}, \frac{۵}{۱۰}, \ldots$ را در نظر بگیرید . قرارمی دهیم

$$X_۱ = (۰, \frac{۱}{۲}), X_۲ = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}), X_۳ = (\frac{۳}{۴}, \frac{۷}{۸})$$

B را چنان بسازید که $B \subseteq \bigcup_{i=۱}^{+\infty} X_i$ باشد و $B \cap X_i$ برای هر i تنهایک عضو داشته باشد.

سؤ الی که در اینجا مطرح است این است که آیا دو مثال فوق را برای هر خانواده از مجموعه‌های مجزا می‌توان تکرار کرد ؟ تلاش زیادی برای پاسخ به این سؤ ال انجام شد. تمام راه حلها به شکست انجامید و تنها نتیجه‌ای که بدست آمد این بود که مسأ له با اصل انتخاب معادل است .

اصل تسرملو : اگر $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از مجموعه‌های ناتهی مجزا باشد ، آن گاه مجموعه Bای چنان هست که $B \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$ و $B \cap X_i$ برای هر i عضو I تنها یک عضو دارد .

قضیه ۳.۲. اصل انتخاب و تسرملو معادل هستند.

اثبات . فرض کنیم اصل انتخاب برقرار باشد و $\{X_i\}_{i\in I}$ یک خانوادهٔ ناتهی از مجموعه‌های ناتهی و مجزا باشد ، آن گاه این خانواده دارای یک تابع انتخاب مانند f است . تعریف می‌کنیم $B = \{f(i) \ : \ i \in I\}$. با توجه به این که به ازای هر $i \in I$ ،

$f(i) \in X_i$ پس $B \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$ حال اگر $B \cap X_i$ شامل دو عضو $f(j), f(i)$ باشد ، آن گاه با توجه به این که $f(j) \in X_j$ ، نتیجه می‌شود که $f(j) \in X_i \cap X_j$ و این متناقض با مجزا بودن X_iهاست ، پس $B \cap X_i$ فقط شامل یک عضو است .

بعکس فرض کنیم اصل تسرملو برقرار باشد و $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد قرار می‌دهیم $Y_i = X_i \times \{i\}$ ، آن گاه $\{Y_i\}_{i\in I}$ یک خانواده ناتهی از مجموعه‌های مجزا است . بنابه اصل تسرملو مجموعه Bای هست که $B \subseteq \bigcup_{i\in I} Y_i$ و $B \cap Y_i$ تنها یک عضو دارد . فرض کنیم برای هر $i \in I$ ، $B \cap Y_i = \{(x_i, i)\}$ باشد . تابع

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I \longrightarrow \bigcup X_i \\ & i \longrightarrow x_i \end{aligned}$$

یک تابع انتخاب برای $\{X_i\}_{i\in I}$ می‌باشد.

تمرین .

۱– فرض کنیم F مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی سره[۱] $I\!N$ باشد .سه تابع انتخاب برای F بنویسید.

۲– اگر به ازای $n \in I\!N$ ، $X_n = (-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n})$. یک تابع انتخاب برای $\{X_n\}_{n\in N}$ بنویسید.

۳– اگر $X_۱ = (۰, \frac{۱}{۲})$ ، $X_۲ = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴})$ ، $X_۳ = (\frac{۳}{۴}, \frac{۷}{۸})$ و ... یک تابع انتخاب برای $\{X_n\}_{n\in N}$ ارائه دهید.

۴– فرض کنید P افرازی برای مجموعه نا تهی X باشد . ثابت کنید زیر مجموعه‌ای مانند B از X وجود دارد به طوری که به ازای هر $A \in P$ ، $A \cap B$ تنها شامل یک عضو است.

۵– برای خانوادهٔ $\{(\frac{-۱}{n}, \frac{۱}{n})\}_{n\in N}$ مجموعهٔ B را چنان بیابیدکه دراصل تسرملو صدق کند.

آیامی توانیدیک مجموعهٔ دوعضوی پیداکنیدکه دراصل تسرملو صدق کند؟

٦– باکمک اصل تسرملو، برای خانوادهٔ $\{(۰, \frac{۱}{n})\}_{n\in N}$ یک تابع انتخاب بنویسید.

۷– باکمک اصل انتخاب ، مجموعهٔ B رابرای خانوادهٔ $\{(n, n+۱)\}_{n=۱}^{\infty}$ چنان بیابیدکه دراصل تسرملو صدق کند.

[۱] proper

۳.۸ لم تسورن

فرض کنید $(A,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزیی باشد و $x\in A$. دو گزارهٔ زیر را در نظر بگیرید

۱ $-$ x از همه عناصر A بزرگتر است .
۲$-$ هیچ عنصری در A از x بزرگتر نیست .

در ابتدا به نظر می‌رسد که این گزاره‌ها هیچ تفاوتی ازهم ندارند ، زیرا مثلاً در مجموعه $\{۱,۲,۳,۴\}$ ، « ۴ از همه عناصر A بزرگتر است » و « هیچ عنصر در A از ۴ بزرگتر نیست ». اکنون به مثال زیر توجه کنید .

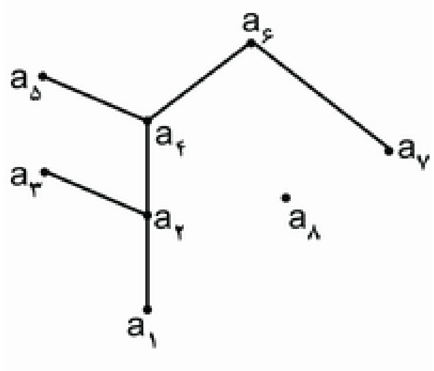
مثال . فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$ و $M=\{\{۱\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲\}\}$ ، می‌دانیم که‌مجموعهٔ $(M,\subseteq)$ مرتب جزیی است . همچنان که مشاهده می‌شود « هیچ عنصری در مجموعه از $\{۱,۲\}$ بزرگتر نیست» ولی $\{۱,۲\}$ از همه عناصر بزرگتر نمی‌باشد ، زیرا $\{۱,۲\}\not\subseteq\{۱,۳\}$ و $\{۱,۳\}\not\subseteq\{۱,۲\}$.

عنصر $\{۱,۲\}$ در این مجموعه را ماکسیمال گویند . به طور مشابه $\{۱,۳\}$ نیز عنصر ماکسیمال است .

تعریف۱.۳. فرض کنید $(A,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزیی باشد .
۱ $-$ $a\in A$ را ماکسیمال A نامند ، هرگاه هیچ عنصری در A از a بزرگتر نباشد.
۲$-$ $b\in A$ را مینیمال A نامند ، هرگاه هیچ عنصری در A از b کوچکتر نباشد .

تعریف فوق به صورت زیر نیز بیان می‌شود .
۱ $-$ $a\in A$ ماکسیمال A نامیده‌می شودهرگاه‌برای‌هر $x\in A$اگر $a\leq x$آن‌گاه $a=x$.
۲$-$ $b\in A$ مینیمال A نامیده می شود هرگاه‌برای‌هر $x\in A$ اگر $x\leq b$ آن‌گاه $b=x$

مثال . فرض کنید $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵,a_۶,a_۷,a_۸\}$ و رابطه ترتیب جزیی روی S مطابق نمودار زیر باشد . عناصر ماکسیمال و مینیمال آن را بیابید.



حل . عناصر ماکسیمال : $a_{۳}, a_{۵}, a_{۶}, a_{۸}$ و عناصر مینیمال : $a_{۱}, a_{۸}, a_{۷}$.

مثال . مجموعه $\mathbb{Z}$ به همراه $\leq$ معمولی ماکسیمال و مینیمال ندارد.

سعی کنیدباتوجه به‌تعاریف و مثالهای فوق ، تفاوت ماکسیمال وماکزیمم ومینیمال و مینیمم را دریک مجموعه مشخص کنید. قضیه زیر که به لم تسورن معروف است محکی برای وجود ماکسیمال می باشد.

قضیه۲.۳. فرض کنید $X \neq \phi$ و $(X, \leq)$ مرتب جزیی باشد به قسمی که هر زنجیر در X کران بالایی در X داشته باشد. در این صورت X حداقل یک عضو ماکسیمال دارد.

قبل از این که به اثبات این قضیه بپردازیم چند کاربرد از این قضیه را می آوریم و اثبات را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

قضیه۳.۳. فرض کنیم $X \neq \phi$ و $(X, \leq)$ مرتب جزیی باشد به قسمی که هر زنجیر در X دارای کران پایینی در X باشد در این صورت X حداقل یک عنصر مینیمال دارد.

اثبات . رابطه $\ll$ را روی X به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$a \ll b \Leftrightarrow b \leq a$$

به راحتی دیده می‌شود که $(X, \ll)$ مرتب جزیی است. اگر $\{x_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در X باشد ، آنگاه بنابه قضیه دارای کران پایینی مانند $x \in X$ است ، پس برای هر $i \in I$ $x \leq x_i$ ونتیجه این که برای هر $i \in I$ ، $x_i \ll x$. پس x کران بالایی برای $\{x_i\}_{i\in I}$ نسبت به رابطۀ $\ll$ است . بنابراین هر زنجیر در X نسبت به رابطه $\ll$ دارای کران بالاست ، لذا بنابه لم تسورن X دارای یک عنصر ماکسیمال مانند m نسبت به رابطۀ $\ll$ است . نشان می‌دهیم که m عنصر مینیمال X نسبت به رابطه $\leq$ است . برای این منظور فرض کنید که $x \leq m$. در این صورت $m \ll x$ و چون m نسبت به رابطه $\ll$ ماکسیمال است ، لذا $m = x$.

قضیه۴.۳. اگر A و B دو مجموعه‌ناتهی باشند ، آن گاه تابع ۱—۱ از A به B یا از B به A وجود دارد.

اثبات . قرارمی دهیم

$$\mathcal{A}=\{f \ : \ f \ : \ X \overset{\text{تابع‌یک‌به‌یک}}{\longrightarrow} B \ , \ X\subseteq A\}$$

$\mathcal{A}\neq\phi$ ، زیرا از آن جایی که A وB ناتهی هستندxای درA وyای درB وجود دارد. تابع $\begin{array}{l} f \ : \ \{x\}\longrightarrow B \\ x\longrightarrow y\end{array}$ عضو $\mathcal{A}$ است.

رابطه $\leq$ را روی $\mathcal{A}$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f\leq g\Leftrightarrow D_f\subseteq D_g \ , \ g|_{D_f}=f$$

تحقیق کنید که $(\mathcal{A},\leq)$ مرتب جزیی است.

حال فرض کنیم $\{f_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در $\mathcal{A}$ باشد . اگر $X=\bigcup Df_i$ و $x\in X$ ، آن گاه به ازای یک $i\in I$ ، $x\in D_{f_i}$ ، $f(x)=f_i(x)$ تعریف می‌کنیم.

واضح است که به ازای هر i ، $f_i\leq f$ و $X\subseteq A$.اکنون اگربرای x و x' در X ، $f(x)=f(x')$ آن گاه

به ازای یک i و j در I ، $x\in D_{f_i}$ و $x'\in D_{f_j}$ و $f_i(x)=f_j(x')$. چون $\{f_i\}$ یک زنجیر است نتیجه می‌شود که $f_i\leq f_j$ یا $f_j\leq f_i$. فرض کنیم $f_i\leq f_j$ ، در این صورت $f_i(x)=f_j(x)$ پس $f_j(x)=f_j(x')$ و چون f_j یک به یک است $x=x'$. لذا تابع $f\in\mathcal{A}$.

حال بنابه لم تسورن مجموعه $\mathcal{A}$ نسبت به رابطه $\leq$ تعریف شده در بالا دارای عضو ماکسیمال است. اگر g عضو ماکسیمال آن باشد ، آن گاه به ازای یک $X\subseteq A$. $g \ : \ X\longrightarrow B$ یک تابع یک به یک است. اگر $X\subsetneq A$ ، آن گاه یک $a\in A-X$. اگر $g \ : \ X\longrightarrow B$ برو نباشد ، آن گاه $b\in B-Img$ وجود دارد . تعریف می‌کنیم :

$$\begin{array}{rcl} h \ : \ X\cup\{a\} & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{ll} g(x) & x\in X \\ b & x=a\end{array}\right.\end{array}$$

تابع $h\in\mathcal{A}$ و $g\lneq h$ و این تناقض است. پس $g \ : \ X\longrightarrow B$ برومی باشد .تابع $h \ : \ B\longrightarrow X$ چنان هست که $goh=I_B$ و لذا $h \ : \ B\longrightarrow X$ یک تابع یک به یک است وبنابراین $h \ : \ B\longrightarrow A$ نیز یک به یک خواهد بود.

تمرین ۳.۸

۱− فرض کنید X یک مجموعه n عضوی باشد و $M = p(X) - \{\phi, X\}$. می‌دانیم $(M, \subseteq)$ مرتب جزیی است . عناصر ماکسیمال و مینیمال M را بیابید.

۲− فرض کنید $(A, \leq)$ مرتب کلی و دارای عضو ماکسیمال باشد . نشان دهید این عضو ماکسیمال یکتاست.

۳− فرض کنید $A = \{۲, ۳, ۴, \ldots\}$ با رابطه عاد کردن مرتب شده باشد . عناصر ماکسیمال و مینیمال A را مشخص کنید.

۴− مسأ له قبل را برای $\{۲, ۳, ۴, ٦, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲\}$ تکرار کنید.

۵− مجموعه مرتب جزیی $(L, \leq)$ را شبکه گوییم ، هرگاه به ازای هر $x, y \in L$ ، $\sup\{x, y\}$, $\inf\{x, y\}$ موجود و یکتا باشند . ثابت کنید اگر هر زنجیر در شبکه L کران بالا داشته باشد ، آن شبکه دارای عضو ماکسیمال منحصر به‌فرد است .

٦− اگر $(A, \leq)$ مرتب جزیی باشد ، به طوری که هر زنجیر آن دارای کران بالاست . نشان دهید برای هر $a \in A$ ، عنصر ماکسیمال $u \in A$ هست که $u \geq a$.

۷− مجموعه مرتبی (جزیی یا کلی) مثال بزنید که درست یک عنصر ماکسیمال داشته ولی عنصر max نداشته باشد.

۸− فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشد .به کمک لم تسورن ثابت کنید تابعی از A به B وجود دارد .

۹− فرض کنید A مجموعه‌ای با بیش از یک عضو باشد . تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{A} = \{(f, X) \mid f \;:\; \begin{array}{c} X \overset{\text{تابع دوسو}}{\longrightarrow} X \\ x \longrightarrow f(x) \neq x \end{array} \qquad X \subseteq A\}$$

آ) نشان دهید $\mathcal{A} \neq \phi$.

ب) نشان دهید $\mathcal{A}$ با رابطه زیر مرتب جزیی است .

$$(f, X) \leq (g, Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y \;\;,\;\; g|_X = f$$

ج) نشان دهید $\mathcal{A}$ نسبت به رابطه فوق دارای عضو ماکسیمال است.

د) اگر (f, B) عضو ماکسیمال $\mathcal{A}$ باشد ، نشان دهید اگر $A - B$ ناتهی باشد آن گاه $A - B$ بیش ازدو عضوندارد.

ه) اگر $A - B \neq \phi$ آن گاه نگاشت $g : A \longrightarrow A$ راچنان تعریف کنیدکه برای هر $x \in A$ ، $g(x) \neq x$.

نتیجه اینکه تابع دوسویی $f \;:\; A \longrightarrow A$ هست که‌برای هر $x \in A$ ، $f(x) \neq x$.

۱۰ – فرض کنیم A یک مجموعه غیر تهی باشد

آ) تعریف می‌کنیم

$$S = \{(X,R) \;:\; \text{مرتب کلی و خوشترتیب است } (X,R)\ ,\ X \subseteq A\}$$

نشان دهید $S \neq \phi$.

ب) رابطه زیر را روی S تعریف می‌کنیم

$$(X,R) \leq (Y,R') \Leftrightarrow X \subseteq Y\ ,\ R'|_{X\times X} = R$$

نشان دهید $\leq$ روی S مرتب جزیی است.

ج) ثابت کنید $(S,\leq)$ دارای عضو ماکسیمال است .

د) فرض کنیم (Y,R) عضو ماکسیمال باشد .اگر $a \in A - Y$ باشد. نشان دهید رابطهٔ زیرروی $X = Y \cup \{a\}$ یک رابطهٔ خوشترتیب است .

$$R' = R \cup \{(y,a) : y \in Y\} \cup \{(a,a)\}$$

ه) نشان دهید $Y = A$ ونتیجه بگیریدهرمجموعهٔ خوشترتیب شدنی است .

۴.۸ اصل ماکسیمالیتی هاسدورف

تعریف ۱.۴. مجموعه $(A,\leq)$ را مرتب جزیی تمام گویند هرگاه ، هر زیر مجموعه A که دارای کران بالا باشد ، $\sup$ آن در A باشد.

مثال . با توجه به اصل کمال ، $(\mathbb{R},\leq)$ مرتب کلی تمام است ، در صورتی که $(\mathbb{Q},\leq)$ مرتب جزیی تمام نیست(قضیهٔ ۲.۳.۷) .

قضیه(نقطه ثابت کناستر[۱]). فرض کنید $(A,\leq)$ مرتب جزیی تمام و A دارای ماکزیمم و مینیمم باشد ، اگر $f \;:\; A \longrightarrow A$ تابع صعودی باشد ، آن گاه f حداقل

[۱] kenaster

یک نقطه را ثابت نگه می‌دارد. به عبارت دیگر یک aای در A هست که $f(a)=a$.

اثبات . فرض کنید $M=\max A$و$m=\min A$و$B=\{x\ :\ x\in A\ ,\ x\leq f(x)\}$.
چون $m\in B$ ، لذا $B\neq\phi$. از طرفی M کران بالای B است . پس بنابه تمام بودن A ، سوپریمم B در A است ، فرض کنیم $a=\sup B$. نشان می‌دهیم $f(a)=a$.

برای هر $b\in B$ ، $b\leq a$ پس $b\leq f(b)\leq f(a)$. نتیجه این که $f(a)$ کران بالا برای B است ، لذا $a\leq f(a)$. از این که $a\leq f(a)$ ، نتیجه می‌شود که $f(a)\leq f(f(a))$ ، پس $f(a)\in B$ ، لذا $f(a)\leq a$.

قضیه ۳.۴ (تعمیم نقطه ثابت کناستر). فرض کنید $(A,\leq)$ مرتب جزیی باشد و هر زنجیر آن دارای supای در A . اگر $f\ :\ A\longrightarrow A$ تابعی باشد که برای هر $a\in A$ ، $a\leq f(a)$ ، آن گاه f یک نقطه را ثابت نگه می‌دارد.

اثبات . مراجعه شودبه تمرین ۱۰ .

یکی دیگر از اصولی که معادل اصل انتخاب است ، اصل ماکسیمالیتی هاسدورف می‌باشد که در زیر می آید.

اصل ماکسیمالیتی هاسدورف : فرض کنید $(X,\leq)$ مرتب جزیی و Y مجموعه کلیه زنجیرهای X باشد ، Y نسبت به رابطه $\subseteq$ دارای ماکسیمال است.

قضیه۴.۴. اصل انتخاب ، اصل ماکسیمالیتی هاسدورف را نتیجه می‌دهد.

اثبات . فرض کنید $(X,\leq)$ مرتب جزیی و Y مجموعه کلیه زنجیرهای X باشد. اگر Y دارای عضو ماکسیمال نسبت به رابطه $\subseteq$ نباشد ،آن گاه برای هر $z\in Y$ وجود دارد $u\in Y$ که $z\subsetneqq u$. حال مجموعه $z^*=\{u\ :\ u\in Y\ ,\ z\subsetneqq u\}$ مخالف تهی است . گردایه $\{z^*\}_{z\in Y}$ را در نظر می‌گیریم ، بنا به اصل انتخاب تابع $g\ :\ \begin{array}{l}\{z^*\}_{z\in y}\longrightarrow Uz^*\\ z^*\longrightarrow g(z^*)\in z^*\end{array}$ وجود دارد .

اینک تابع $f:Y\longrightarrow Y$ باضابطهٔ $f(z)=g(z^*)$ به همراه $(Y,\subseteq)$ در شرایط تعمیم قضیه نقطه ثابت کناستر صدق می‌کند ، زیرا:

اولاً : $(Y,\subseteq)$ مرتب جزیی است .

ثانیاً : فرض کنید μ یک زنجیر در Y باشد ، $\sup\mu=\cup\mu=S$ ، $S\subseteq X$. گیریم $t,s\in S$ در این صورت وجو دارد $M_۱,M_۲\in\mu$ که $t\in M_۱$ و $s\in M_۲$. چون μ زنجیر است می‌توان فرض کرد که $M_۱\subseteq M_۲$ پس $t,s\in M_۲$. از آنجایی که $M_۲\in Y$ یک زنجیر در X نسبت به رابطه $\leq$ است ، پس $s\leq t$ یا $t\leq s$. لذا S یک زنجیر در X

است و بنابراین $S \in Y$.

ثالثاً : اگر $z \in Y$ ، آن گاه $f(z) = g(z^*)$ پس $f(z) \in z^*$ و لذا $z \subsetneq f(z)$.

حال بنابه قضیه یک $z \in Y$ هست که

$$z = f(z) \in z^*$$

و این متناقض با تعریف z^* می‌باشد.

حال به اثبات لم تسورن می‌پردازیم .

قضیه۵.۴. اصل ماکسیمالیتی هاسدورف ، لم تسورن را نتیجه می‌دهد.

اثبات . فرض کنید $(X, \leq)$ مرتب جزیی و هر زنجیر در X دارای کران بالا باشد اگر Y مجموعه کلیه زنجیرهای X باشد ، آن گاه Y نسبت به رابطه $\subseteq$ دارای عضو ماکسیمالی مانند $S \in Y$ است ، چون S یک زنجیر در X است ، لذا S دارای یک کران بالا مانند α است . نشان می‌دهیم α عنصر ماکسیمال X است.

گیریم برای یک $x \in X$، $\alpha \leq x$. قرار می‌دهیم $S' = S \cup \{x\}$ ، دیده می‌شود که S' یک زنجیر در X است ، لذا $S' \in Y$ و چون $S \subseteq S'$ پس $S = S'$ نتیجه این که $x \in S$ پس $x \leq \alpha$ و در نتیجه $\alpha = x$.

قضیه۶.۴. لم تسورن اصل خوش تر تیبی را نتیجه می‌دهد.

اثبات . رجوع شود به تمرین۳.۱۰ .

قضیه۷.۴. اصل انتخاب از اصل خوش ترتیبی نتیجه می‌شود.

اثبات . فرض کنید $\{X_i\}_{i \in I}$ مجموعه‌ای غیر تهی از مجموعه‌های ناتهی باشد و $A = \bigcup_{i \in I} X_i$. بنابه اصل خوش ترتیبی رابطهٔ R چنان هست که (A, R) خوش ترتیب است . چون هر $X_i \subseteq A$ پس دارای عضو می‌نیمم مانند x_i است. تابع

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & I \longrightarrow \cup X_i \\ & i \longrightarrow x_i \end{aligned}$$

یک تابع انتخاب است.

نمودارذیل رابطهٔ بین تمام اصول این فصل رانشان می دهد.

قضیه خوشترتیبی	$\Longleftarrow$	لم تسورن
$\Downarrow$		$\Uparrow$
اصل انتخاب	$\Longrightarrow$	اصل ماکسیمالیتی هاسدورف
$\Updownarrow$		
اصل تسرملو		

تمرین ۴.۸

۱ــ فرض کنید $(A,\leq)$ مرتب کلی باشد . ثابت کنید $(A,\leq)$ خوشترتیب است اگر و فقط اگر شامل هیچ دنباله اکیداً نزولی و نامتناهی نباشد.

۲ــ بدون استفاده از اصل خوشترتیبی نشان دهید $\mathbb{Q}$ خوشترتیب است.

۳ــ فرض کنید $(A,\leq)$ مرتب جزیی و برای هر $B\subseteq A$ ، $\min B$ موجود باشد . نشان دهید $(A,\leq)$ مرتب کلی و بنابراین خوشترتیب است .

۴ــ ثابت کنید در هر مجموعه خوشترتیب هر زیر مجموعه که کران بالا داشته باشد،دارای $\sup$ یکتاست.

۵ــ نشان دهیداصل انتخاب معادل است بااین که هرتابع پوشاوارون راست دارد.

٦ــ فرض کنید $S=\{(m,n):m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$. رابطهٔ $\leq$ رابه طریق زیرتعریف‌می‌کنیم

$$(m,n)\leq(m',n')\iff n<n' \text{ یا } (n=n',m\leq m')$$

نشان دهید $(S,\leq)$ مجموعهٔ مرتب کلی است . بااستفاده ازرابطهٔ فوق نشان دهیدمجموعهٔ اعدادگویا خوشترتیب است .

۷ــ فرض کنیم S مجموعهٔ کلیهٔ ترتیب های جزیی X باشد.مجموعهٔ مرتب جزیی $(S,\subseteq)$ رادر نظربگیرید.ثابت کنید $T\in S$ ماکسیمال است اگروفقط اگرمرتبط باشد.

۸ــ اگر R ترتیب جزیی برای X باشد آن گاه ترتیب کلی مانند $\bar{R}$ روی X وجودداردبه قسمی که $R\subseteq\bar{R}$.

۹ــ ثابت کنیداگر R ترتیب کلی بر X وR' ترتیب جزیی بر X باشدو $R\subseteq R'$ آن‌گاه $R=R'$.

۱۰ــ دراین تمرین می خواهیم قضیهٔ ۳.۴ راثابت کنیم .فرض کنیم f و A همانهایی باشندکه درصورت قضیه آمده اند

آــ فرض کنید $a\in A$ و

$$T=\{B:a\in B,B\subseteq A,f(B)\subseteq B, \text{ سوپریمم هرزنجیر } B \text{ در } B \text{ باشد}\}$$

نشان دهید $T\neq\phi$.

ب – فرض کنید $M = \bigcap_{B \in T} B$.نشان دهید $M \in T$ و $M \neq \phi$.

پ – فرض کنید $N = \{x \in M : \forall y \in M (y < x \longrightarrow f(y) \leq x\}$.نشان دهید برای هر $y \in N$، $P_y = \{x \in M : x \leq y \vee x \geq f(y)\}$ برابر M است (راهنمایی :نشان دهید $P_y \in T$)

ت – نشان دهید که هرعضو N باهرعضو M قابل مقایسه است .

ث – فرض کنید $n \in N$ دلخواه و $y \in M$ چنان باشدکه $y < f(n)$ نشان دهید $f(y) \leq f(n)$.

ج – نشان دهید $f(N) \subseteq N$.

چ – فرض کنید S یک زنجیرناتهی از N باشد.نشان دهید S سوپریممی مانند β در T دارد.

ح – فرض کنید y عضودلخواهی از M و $y < \beta$.نشان دهید qای در S هست که $y \leq q$.(راهنمایی :ازقسمت پ استفاده کنید)

خ – نشان دهید $\beta \in N$.

د – نشان دهید $N \in T$ ونتیجه بگیرید $N = M$.

ذ – نشان دهید $\alpha = \sup M$ در A موجوداست و $f(\alpha) = \alpha$.

فصل ۹

مجموعه‌های متناهی ، نامتناهی ، شمارا و ناشمارا

در این فصل مجموعه های متناهی، نا متناهی ، شمارا و ناشمارا را تعریف کرده وروابط بین آنهارامورد بررسی قرار می دهیم .هم چنین نشان می‌دهیم که مجموعه اعداد طبیعی ،صحیح ،گویا، گنگ و حقیقی نامتناهی هستند.

۱.۹ همتوانی و قضیه شرودربرنشتاین

تعریف۱.۱. دو مجموعه A و B را همعدد نامند هرگاه تناظری ۱—۱ بین A و B موجود باشد ،که آن رابا $A \sim B$ نشان می دهند.

قضیه۲.۱. رابطه همعددی یک رابطه هم‌ارزی است.

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود.

مثال . مجموعهٔ اعداد طبیعی با مجموعه اعداد طبیعی زوج همعدد است .

مثال . اگر A یک مجموعه و

$$W = \{f \mid f \ : \ A \xrightarrow{\text{تابع}} \{۰,۱\}\}$$

آن گاه $W \sim P(A)$.

حل . فرض کنید $B \in P(A)$.نگاشت زیررا تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_B \quad &: \quad A \longrightarrow \{۰,۱\} \\ & \quad x \longrightarrow \begin{cases} ۱ & x \in B \\ ۰ & x \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

اکنون دو تابع

$$\begin{aligned} \lambda \quad &: \quad P(A) \longrightarrow W \\ & \quad B \longrightarrow \mathcal{X}_B \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad \begin{aligned} \mu \quad &: \quad W \longrightarrow P(A) \\ & \quad f \longrightarrow \{x \in A \ : \ f(x) = ۱\} \end{aligned}$$

معکوس یکدیگرندولذا λ تابعی دوسویی است .

قضیه۳.۱. اگر $A \sim B$ و $C \sim D$ ، آن گاه $A \times C \sim B \times D$.

اثبات. فرض کنید $f \ : \ A \longrightarrow B$ و $g \ : \ C \longrightarrow D$ نگاشت دوسویی باشند. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} h \quad &: \quad A \times C \longrightarrow B \times D \\ & \quad (a,c) \longrightarrow (f(a), g(c)) \end{aligned}$$

آن گاه h تابعی دوسویی است .

قضیه۴.۱ (شرودر—برنشتاین)[۱]. اگر A با زیر مجموعه‌ای از B و B با زیر مجموعه‌ای از A همعدد باشد ، آن گاه $A \sim B$.

اثبات . فرض کنید $f \ : \ A \longrightarrow B$ و $g \ : \ B \longrightarrow A$ دو تابع ۱—۱ باشند . $(p(A), \subseteq)$ مرتب جزیی است و $A = \max P(A) \ , \ \phi = \min P(A)$.

فرض کنید $X \in p(A)$ ، دراین صورت $f(X) \subseteq B$ ، پس $B - f(X) \subseteq B$ و لذا $g(B - f(X)) \subseteq A$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad P(A) \longrightarrow P(A) \\ & \quad X \longrightarrow A - g(B - f(X)) \end{aligned}$$

آن گاه $(p(A), \subseteq, F)$ در شرایط قضیه نقطهٔ ثابت کناستر صدق می‌کند ، بنابراین

$$\exists Z \in p(A) \qquad , \qquad F(Z) = Z$$

پس $Z = A - g(B - f(Z))$ و لذا $A - Z = g(B - f(Z))$. چون $g \ : \ B \longrightarrow A$ ۱—۱ است ، لذا وجود دارد $k \ : \ A \longrightarrow B$ ، به طوری که $kog = I_B$ ، پس

[۱] Schroder.Bernstein

$k(A-Z)=B-f(Z)$.اکنون نگاشت

$$\begin{aligned} h \ : \ & A \longrightarrow B \\ & x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & x \in Z \\ k(x) & x \in A-Z \end{cases} \end{aligned}$$

دوسو است .

تمرین ۱.۱

۱ــ آ) نشان دهید $(a,b) \sim (۰,۱)$ به ازای هر $a,b \in \mathbb{R}$.

ب) نشان دهید به ازای هر $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ، $(a,b) \sim (c,d)$.

ج) ثابت کنید $\mathbb{R} \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

د) نشان دهیدبه ازای هر $a,b \in \mathbb{R}$ ، $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

۲ــ ثابت کنید $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

۳ــ ثابت کنید $\mathbb{R} \sim (0,+\infty)$.

۴ــ آ) ثابت کنید $[۰,۱) \sim (۰,۱)$

ب) نشان دهید که به ازای هر a,b ، $(a,b) \sim [a,b]$.

۵ــ آ) ثابت کنید $(۰,۱] \sim (۰,۱)$.

ب) ثابت کنید $[۰,۱) \sim [۰,۱]$.

۶ــ ثابت کنید $(۰,۱) \sim (۰,۱) \times (۰,۱)$. (راهنمایی : از قضیه شرودرــبرنشتاین استفاده کنید)

۷ــ بین دو پاره‌خط AB و CD تناظر ۱ــ۱ برقرار کنید.

۸ــ بین دو دایره $C_۱ \ : \ x^۲+y^۲=a^۲$ و $C_۲ \ : \ x^۲+y^۲=b^۲$ ، تناظر ۱ــ۱ برقرار کنید.

۹ــ دریک مجموعهٔ A ، ثابت کنیدمجموعهٔ کلیهٔ رابطه های هم ارزی A ، بامجموعهٔ کلیهٔ افرازهای A همعدداست .

۱۰ــ نشان دهید $\mathbb{R} \sim [۰,۱) \times \mathbb{N}$. (راهنمایی: تابع $f(n,x)=n+x$ رابر $\mathbb{N} \times [۰,۱)$ درنظربگیرید)

۱۱ــ فرض کنید $A \sim B$ و $C \sim D$ و A با زیرمجموعه ای از C همعددباشد.نشان دهید B نیزبازیرمجموعه ای از D همعدداست .

۲.۹ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعریف ۱.۲. به ازای عدد طبیعی k ، $I_k = \{۱, ۲, ۳ \dots, k\}$ را قطعه[۱] kام اعداد طبیعی گویند .

اصل حجره‌ها : فرض کنید $m > n$ دو عدد طبیعی باشند ، اگر m شئ را در n حجره قرار دهید ، حجره‌ای با بیش از یک شئ وجود دارد.

قضیه ۲.۲. $I_m \sim I_n \Longleftrightarrow m = n$

اثبات . اگر $m = n$ باشد ، که واضح است $I_m \sim I_n$.

بالعکس فرض کنیم $m > n$. اعضای I_m را توپ و I_n را حجره بگیرید. بنابه اصل حجره‌ها ، حجره‌ای با بیش از یک عنصر وجود دارد ، لذا $I_m \not\sim I_n$.

تعریف ۳.۲. مجموعه A را متناهی[۲] گویند ، هرگاه $A = \phi$ یا A با قطعه‌ای از اعداد طبیعی هم عدد باشد . در غیر این صورت A را نامتناهی[۳] گویند .

مثال . مجموعهٔ اعداداول ، نا متناهی است .

حل . به قضیهٔ ۶.۲.۷ مراجعه شود.

نتیجه جالبی که ازاین تعریف گرفته می‌شود این است که ، اگر A متناهی باشد ، آن گاه یک k یکتایی هست که $A \sim I_k$.

قضیه ۴.۲. هر زیرمجموعه I_n متناهی است .

اثبات . فرض کنیم $A \subseteq I_n$ باشد . چون A از بالا کراندار است پس دارای ماکزیمم‌است، فرض کنیم $a_۱ = \max A$. اگر $A - \{a_۱\} = \phi$ آن گاه $A = \{a_۱\}$ و لذا متناهی است ، اگر $A - \{a_۱\} \neq \phi$ ، $a_۲ = \max A - \{a_۱\}$ در نظر می‌گیریم. اگر $A - \{a_۱, a_۲\} = \phi$ ، آن گاه $A = \{a_۱, a_۲\}$ پس متناهی است و در غیر این صورت $a_۳ = \max A - \{a_۱, a_۲\}$ انتخاب می‌کنیم. در ادامه این کار دنباله $a_۱ > a_۲ > a_۳ > \dots$ از اعداد طبیعی به دست می‌آید .

چون تمام این اعداد بزرگتر از ۱ هستند ، لذا باید به ازای یک kای $A - \{a_۱, \dots, a_k\} = \phi$ ، پس $A = \{a_۱, \dots, a_k\}$ و بنابراین $A \sim I_k$.

قضیه ۵.۲. اگر A و B دو مجموعه متناهی و $A \cap B = \phi$ ، آن گاه $A \cup B$ متناهی

---

[۱] segment
[۲] finite
[۳] infinite

است.

اثبات . فرض کنیم $A \sim I_m$ و $B \sim I_n$ و $f : I_m \longrightarrow A$ و $g : I_n \longrightarrow B$ توابعی دوسو باشند . نگاشت

$$\begin{aligned} h \;:\; & I_{m+n} \longrightarrow A \cup B \\ & x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & x \leq m \\ g(x-m) & x > m \end{cases} \end{aligned}$$

دو سو است و لذا $A \cup B$ متناهی است .

قضیه۲.۶. اگر C نامتناهی و D متناهی ، آنگاه $C \cap D$ متناهی است .

اثبات. فرض کنیم $f : D \longrightarrow I_k$ ، تابعی دوسو باشد . در این صورت نگاشت

$$\begin{aligned} h \;:\; & C \cap D \longrightarrow I_k \\ & x \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

نگاشتی ۱—۱ است . پس $C \cap D$ با زیر مجموعه‌ای از I_k همتوان است ، لذا متناهی است .

نتیجه ۲.۷. اگر C نامتناهی و D متناهی باشد ، آن گاه $C - D$ نامتناهی است .

اثبات . اگر $C - D$ متناهی باشد ، چون $C = (C-D) \cup (C \cap D)$ ، لذا C متناهی است .

نتیجه ۲.۸. اگر $C \subset D$ و D متناهی باشد ، آن گاه C نیز متناهی است .

اثبات . اگر C نامتناهی باشد ، آن گاه $C - D = \phi$ نامتناهی است که تناقض است.

نتیجه ۲.۹. $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند.

اثبات . به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود .

قضیه۲.۱۰. اگر A و B متناهی باشند ، آن گاه $A \cup B$ نیز متناهی است .

اثبات. می‌دانیم $A \cup B = A \cup (B - A)$. چون $B - A \subset B$ ، لذا $B - A$ متناهی است ، پس $A \cup B$ متناهی است .

قضیه ۲.۱۱. اگر $X \subseteq Y$ و X نامتناهی باشند ، آن گاه Y نامتناهی است .

اثبات . به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود .

نتیجه ۲.۱۲. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ نا متناهی است.

اثبات . مجموعهٔ $\{\sqrt{p} : \text{اول } p\}$ نامتناهی است .

تمرین

۱– آ) نشان دهید $I_m \times I_n \sim I_{mn}$.

ب) ثابت کنید اگر A و B متناهی باشند ، آن گاه $A \times B$ نیز متناهی است .

۲– ثابت کنید $(۰, ۱)$ نامتناهی است و نتیجه بگیرید که به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، (a, b) نامتناهی است .

۳– اگر $A \times B$ نامتناهی باشد ، آن گاه A یا B نامتناهی است .

۴–اگر هر زیر مجموعه سره B متناهی باشد ، آن گاه B نیز متناهی است .

۵– اگر $f : A \longrightarrow B$ یک به یک و B متناهی باشد ، آن گاه A نیز متناهی است.

۶– اگر $f : A \longrightarrow B$ برو باشد و A متناهی ، آن گاه B نیز متناهی است.

۷– نشان دهید مجموعه $S = \{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۱\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ نامتناهی است .

۸– مجموعه اعداد گویای بین دو عدد حقیقی نا متناهی است.

۹– مجموعه اعداد اصم بین دو عدد حقیقی نا متناهی است.

۳.۹ مجموعه‌های شمارا

تعریف۱.۳. مجموعه S شماراست اگر متناهی یا همعدد با $\mathbb{N}$ باشد.اگر $S \sim \mathbb{N}$ آن را شمارای نامتناهی گویند .

بلافاصله از تعریف به دست می‌آید که اگر $S \sim T$ و S شمارا ، آن گاه T شماراست.

قضیه۲.۳. هر زیر مجموعه M از $\mathbb{N}$ شماراست .

اثبات . اگر M متناهی باشد که با توجه به تعریف شماراست . اگر M نامتناهی باشد ، تابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$f(۱) = m_۱ = \min M$$
$$f(n + ۱) = m_{n+۱} = \min M - \{m_۱, m_۲, \ldots, m_n\}$$

با توجه به انتخاب m_iها به ازای هر i, j اگر $i < j$ ، آن گاه $m_i < m_j$ و لذا $f(i) \neq f(j)$ ، پس f ۱–۱ است ، بنابراین $\mathbb{N}$ با زیر مجموعه‌ای از M همعدد است ، از طرفی چون $M \sim M \subseteq \mathbb{N}$ ، بنابه قضیه شرودر برنشتاین $M \sim \mathbb{N}$.

نتیجه ۳.۳. مجموعهٔ S شماراست اگروفقط اگر تابع یک به یکی از S به $\mathbb{N}$ موجود باشد.

اثبات . به عهدهٔ خواننده‌گذاشته می شود .

قضیه۴.۳. هر زیر مجموعه یک مجموعه شمارا ، شماراست .

اثبات . فرض کنیم S شماراباشدو $T \subseteq S$ بنا به نتیجهٔ قبل ،تابع یک به یک $f : S \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود است . تابع $g : T \longrightarrow \mathbb{N}$ باضابطهٔ $g(x) = f(x)$ برای هر $x \in T$ یک به یک است و لذا T شماراست .

قضیه۵.۳. اگر S شمارا و $f : T \longrightarrow S$ یک به یک باشد ، آن گاه T شماراست .

اثبات . $T \sim f(T) \subseteq S$.

قضیه۶.۳. اگر S شمارا و $g : S \longrightarrow T$ برو باشد ، آن گاه T شماراست .

اثبات . وجود دارد $f : T \longrightarrow S$ ، به طوری که $gof = I_T$ ، بنابراین f ۱—۱ است ، پس بنابه قضیه قبل T شماراست .

نتیجه ۷.۳. مجموعهٔ S شماراست اگروتنهااگرتابع برویی از $\mathbb{N}$ به S موجودباشد.

قضیه۸.۳. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست .

اثبات . نگاشت $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ باضابطهٔ $f(m,n) = ۲^m۳^n$ ، یک به یک است ، زیرا اگر $f(m,n) = f(m',n')$ ، آن گاه $۲^m۳^n = ۲^{m'}۳^{n'}$ ، پس $۲^{m-m'} = ۳^{n'-n}$. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که $m - m'$ و $n' - n$ هر دو باید همزمان مثبت یا صفر باشند .

اگر $n' - n > ۰$ باشد ، آن گاه $۳|۳^{n'-n}$ پس $۳|۲^{m-m'}$ که تناقض است ، لذا باید $n' - n = ۰$ و در نتیجه $m - m' = ۰$ ، پس $m = m' \ , \ n = n'$. اکنون با توجه به قضیه قبل $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست .

قضیه۹.۳. اگر S و T شمارا باشند ، آن گاه $S \times T$ نیز شماراست .

اثبات . فرض کنیم $g : S \longrightarrow \mathbb{N}$ و $h : T \longrightarrow \mathbb{N}$ دو تابع ۱—۱ باشند . قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} f \ : \ & S \times T \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & (s,t) \longrightarrow (g(s), h(t)) \end{aligned}$$

f تابعی ۱—۱ است و لذا $S \times T$ شماراست .

قضیه۱۰.۳. اجتماع شمارایی مجموعه شمارا ، شماراست .

اثبات . فرض کنیم $\{X_n\}_{n\in N}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های شمارا باشد . چون X_n شماراست لذا تابع برو $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow X_n$ موجود می‌باشد ، تعریف می‌کنیم

$$\begin{array}{rl} F : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in N} X_n \\ & (m,n) \longrightarrow f_n(m) \end{array}$$

F تابعی بروست . زیرا اگر $x \in \bigcup\limits_{n\in N} X_n$ ، آن گاه به ازای یک $n \in \mathbb{N}$ ، $x \in X_n$. از آن جایی‌که f_n برو است ، لذا وجود دارد یک $m \in \mathbb{N}$ که $f_n(m) = x$ پس $F(m,n) = x$. حال با توجه به قضیهٔ ۶.۳ ، $\cup_{n\in N} X_n$ شماراست .

قضیه. $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ شمارا هستند .

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

تمرین ۳.۹

۱− نشان دهید مجموعه اعداد اول شمارای نامتناهی است .

۲− آیا مجموعه $\{\sqrt[n]{۲}\}_{n=۲}^{\infty}$ شماراست ؟

۳− ثابت کنید مجموعه تمام چند جمله‌ایها ی درجه n با ضرایب گویا ، شماراست .

۴− فرض کنید S یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد . نشان دهید اگر تعداد متناهی عنصر از S کم کنیم باز هم مجموعه حاصل شمارای نامتناهی است . همچنین نشان دهید اگر تعداد متناهی عنصر به S اضافه کنیم باز هم مجموعه حاصل شمارای نامتناهی است .

۵− نشان دهیدمجموعهٔ اعدادجبری شمارای نامتناهی است .

۶− بامعرفی تابعی دوسواز $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ نشان دهید $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شماراست .

۷− نشان دهید تابع زیر،تابعی دوسواز $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ است ونتیجه بگیریدکه $\mathbb{Z}$ شماراست .
برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f(n) = (-۱)^n \dfrac{۲n-۱+(-۱)^n}{۴}$.

۸− فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $P_n = \{۲^n, ۳^n, ۵^n, \ldots\}$. نشان دهید $\bigcup\limits_{n\in N} P_n$ شماراست .

۴.۹ بررسی نتایجی ازمجموعه های نامتناهی

قضیه۱.۴. هر مجموعه نامتناهی دارای زیر مجموعه شمارای نامتناهی است .

اثبات . فرض کنید S مجموعه‌ای نامتناهی باشد ، بنابراین $S \neq \phi$. $x_1 \in S$ را در نظر می‌گیریم ، با توجه به نتیجهٔ ۷.۲ $S - \{x_1\}$ ناتهی است.فرض می‌کنیم $x_n \in S$ را انتخاب کرده ودرنتیجه $S - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ نا تهی است ، ازاین رو $x_{n+1} \in S - \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ وجوددارد . حال مجموعه $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ زیر مجموعه‌ای شمارای نامتناهی از S است .

قضیه ۲.۴. اگر C نامتناهی و $D \subseteq C$ متناهی باشد ، آن گاه $C - D \sim C$.

اثبات . فرض کنیم $D = \{x_1, \dots, x_n\}$. از آنجایی که $C - D$ نامتناهی است ، لذا دارای یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی مانند $A = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ می‌باشد ، نگاشت

$$\begin{array}{rll} \phi & : & C - D \longrightarrow C \\ & & x_{n+i} \longrightarrow x_i \qquad i = 1, 2, \dots \\ & & x \longrightarrow x \qquad x \notin A \end{array}$$

دو سو است .

قضیه ۳.۴. اگر C نامتناهی و D متناهی باشد ، آن گاه $C \cup D \sim C$.

اثبات . فرض کنیم $D = \{y_1, \dots, y_n\}$ و $D \cap C = \phi$. چون C نامتناهی است لذا دارای زیرمجوعه شمارای نامتناهی مانند $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ است . در این صورت نگاشت

$$\begin{array}{rllll} \phi & : & C & \longrightarrow & C \cup D \\ & & x_1 & \longrightarrow & y_1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & x_n & \longrightarrow & y_n \\ & & x_{n+1} & \longrightarrow & x_1 \\ & & x_{n+2} & \longrightarrow & x_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & x & \longrightarrow & x \quad x \notin A \end{array}$$

دو سو است .

دو قضیه فوق بیان می‌کنند که اگر به مجموعه نامتناهی C تعداد متناهی عنصر اضافه یا تعداد متناهی عنصر کم کنیم ، مجموعه حاصل با C همعدد است . در فصل بعد خواهیم دید که این موضوع برای تعیین تعداد اعضای یک مجموعه چه قدر مفید و جالب است .

قضیه ۴.۴. C نامتناهی است اگر وفقط اگر با یک زیر مجموعه سرهٔ خود همعدد باشد .

اثبات . اگر C نامتناهی باشد و $x \in C$ بنابه قضیه قبل $C - \{x\} \sim C$.بعکس فرض کنیم C متناهی و $A \subsetneq C$ باشد ، آن گاه A متناهی است ، گیریم $A = \{x_۱, \dots, x_k\}$ و فرض کنیم $x_{k+۱}, \dots, x_r \in C - A$ باشند ، آن گاه $C = \{x_۱, \dots, x_k, x_{k+۱}, \dots, x_r\}$. واضح است که $A \sim I_k$ و $C \sim I_r$. چون $k < r$ پس $I_k \not\sim I_r$ ، لذا $A \not\sim C$.

این بخش را با یک استفاده جالب از لم تسورن به اتمام می‌رسانیم .

لم ۱. فرض کنید A یک مجموعه نامتناهی و

$$F = \{(f, X) \mid f \ : \ X \times \{۰, ۱\} \stackrel{\text{دوسویی}}{\longrightarrow} X \quad , X \subseteq A\}$$

رابطه $\leq$ را روی F به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$(f, X) \leq (g, Y) \Longleftrightarrow X \subseteq Y \ , \ g|_{X \times \{۰,۱\}} = f$$

در این صورت $(F, \leq)$ مجموعهٔ مرتب جزیی است که دارای عضو ماکسیمال است .

اثبات . چون A نامتناهی است ، لذا دارای زیر مجموعه شمارای نامتناهی مانند D است ، پس $D \times \{۰, ۱\}$ نیز شمارای نامتناهی است ، لذا $D \sim D \times \{۰, ۱\}$ پس تابع دوسوی $f \ : \ D \times \{۰, ۱\} \longrightarrow D$ وجود دارد و بنابراین $(f, D) \in F$ ، پس $F \neq \phi$.

اثبات اینکه $(F, \leq)$ مرتب جزیی است، به عهده خواننده‌گذاشته می شود .گیریم $\{(f_i, X_i)\}_{i \in I}$ یک زنجیراز عناصر F باشد ، تعریف می‌کنیم $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ ، بنابراین $X \times \{۰, ۱\} = \bigcup\limits_{i \in I} (X_i \times \{۰, ۱\})$. حال اگر $(x, k) \in X \times \{۰, ۱\}$ که $k \in \{۰, ۱\}$ ، آن گاه به ازای یک $i \in I$ ، $(x, k) \in X_i \times \{۰, ۱\}$. $g(x, k) = f_i(x, k)$ یک تابع از $X \times \{۰, ۱\} \longrightarrow X$ می‌باشد ، نشان می‌دهیم g دوسو است .

گیریم $g(x, k) = g(x', k')$ و i و j دو عنصر I باشند که $(x, k) \in X_i \times \{۰, ۱\}$ و $(x', k') \in X_j \times \{۰, ۱\}$. چون $\{(f_i, X_i)\}_{i \in I}$ یک زنجیر است می‌توان فرض کرد که $X_j \times \{۰, ۱\} \subseteq X_i \times \{۰, ۱\}$ لذا $(x, k) \ , \ (x', k') \in X_i \times \{۰, ۱\}$ ، پس $f_i(x, k) = f_i(x', k')$ و لذا $(x, k) = (x', k')$.

حال اگر $x \in X$ باشد ، آن گاه به ازای یک $i \in I$ ، $x \in X_i$ پس وجود دارد $(x_i, k) \in X_i \times \{۰, ۱\}$ که $f_i(x_i, k) = x$ ، بنابراین $g(x_i, k) = x$. نتیجه این که $(g, X) \in F$. حال بنابه لم تسورن F دارای عضو ماکسیمال است .

لم ۲. فرض کنید A یک مجموعه نامتناهی و

$$F = \{(f, X) \mid f \ : \ X \times X \overset{\text{دوسو}}{\longrightarrow} X \ \ , \ \text{نامتناهی}\ X \subseteq A\}$$

رابطه $\leq$ را F به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(f, X) \leq (g, Y) \Longleftrightarrow X \subseteq Y \ , \ g|_{X \times X} = f$$

در این صورت $(F, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است که دارای ماکسیمال است.

اثبات . مراجعه شودبه تمرین ۱ .

تمرین ۴.۹

۱– لم ۲ را اثبات کنید :

آ) نشان دهید F مخالف تهی است (راهنمایی : A دارای زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی است .

ب)نشان دهید $(F, \leq)$ مرتب جزیی است .

ج) نشان دهیدهرزنجیر در F دارای کران بالاست.

د) نشان دهید F دارای عضوماکسیمال است .

۲– پاره خط AB را در نظر بگیرید ،یک زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی برای آن بیابید.

۳– برای دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ یک زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی بیابید.

۴– فرض کنید $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع صعودی باشد. نشان دهید مجموعه نقاطی که f در آنها ناپیوسته است ،شمارای نامتناهی است.

۵– نشان دهید مجموعهٔ شمارای $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در اعدادگویا چنان هست که $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = \sqrt{۲}$.این تمرین رابرای هرعددگنگ تکرار کنید.

٦– فرض کنید $\sim$ رابطه ای هم ارزی روی مجموعهٔ شمارای A است .نشان دهید $A/_{\sim}$ شماراست .

۷– فرض کنید A یک مجموعهٔ شمارای نامتناهی باشد.نشان دهید A دارای زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی مانند B است که $A - B \sim A$.

۵.۹ مجموعه‌های ناشمارا

همچنان که در بخش قبل دیدیم مجموعه شمارا مجموعه‌ای بود که می‌توانستیم اعضای آن را با کمک اعداد طبیعی اندیس گذاری کنیم و یا به بیان خیلی ساده اعضای آن را با کمک اعداد طبیعی بشماریم . آیا مجموعه‌ای هست که اعضای آن را نتوان شمرد؟

قضیه۱.۵. مجموعه $\mathbb{R} \supseteq [۰, ۱)$ شمارا نیست .

اثبات . فرض کنید $[۰, ۱)$ شمارا باشد.اعضای آن رابه‌صورت $\{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$ می‌نویسیم ، هر عدد این بازه به صورت عدد اعشاری نامختوم نوشته می‌شود.گیریم:

$$\begin{aligned} x_۱ &= ۰/a_{۱۱}a_{۱۲}a_{۱۳} \quad \ldots \\ x_۲ &= ۰/a_{۲۱}a_{۲۲}a_{۲۳} \quad \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

اگر $y = ۰/b_۱b_۲b_۳\ldots$ که $b_n = \begin{cases} a_{nn} + ۱ & a_{nn} < ۹ \\ ۱ & a_{nn} = ۹ \end{cases}$ بدیهی است که $y \in (۰, ۱]$ و برای هر i ، $y \neq x_i$ و این دو با هم متناقض هستند .

تعریف۲.۵. مجموعه‌ای که شمارا نباشد رامجموعهٔ ناشمارا[۱] گویند .

قضیه۳.۵. اگر S ناشماراو $S \subset T$ ، آن گاه T ناشماراست .

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

نتیجه ۴.۵. $\mathbb{R}$ ناشماراست.

قضیه زیر که به قضیه کانتور معروف است نشان می‌دهد که تعداد نامتناهی مجموعه ناشمارا وجوددارد.

قضیه۵.۵. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد ، در این صورت $S \not\sim p(S)$.

اثبات . فرض کنید $f \ : \ S \longrightarrow p(S)$ یک تابع باشد . بنابراین به ازای هر $x \in S$ ، $f(x) \subseteq S$ قرار می‌دهیم

$$T = \{x \ : \ x \in S \ , \ x \notin f(x)\}$$

واضح است که $T \in p(S)$.

اگر $t \in S$ چنان باشد که $f(t) = T$ ، آن گاه دو حالت داریم :

حالت اول : اگر $t \in T$ باشد ، آن گاه $t \notin f(t)$ ، لذا $t \notin T$ که تناقض است .

---
[۱] uncountable

حالت دوم : اگر $t \notin T$ ، آن گاه $t \in f(t)$ ، پس $t \in T$ واین نیز تناقض است ، لذا چنین tای وجود ندارد . نتیجه این که f برو نیست ، پس $S \not\sim p(S)$.

نتیجه ٦.٥. $p(\mathbb{N})$ ناشماراست .

تمرین ۵.۹

۱ – نشان دهید مجموعه $S = \{(x, y) \ : \ x^{۲} + y^{۲} = ۱\}$ ناشماراست .

۲– نشان دهید مجموعه اعداد گنگ ناشماراست.

۳– نشان دهید مجموعهٔ نقاط روی یک پاره خط ناشماراست.

۴– نشان دهیدمجموعهٔ تمام توابع $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{۰, ۱\}$ ناشماراست.

۵– نشان دهیداگرمجموعهٔ A ناشمارا وB یک مجموعهٔ دلخواه غیر تهی باشد آن گاه $A \cup B$ و $A \times B$ ناشماراست.

٦– ثابت کنیداگر $\{A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده ازمجموعه های ناشماراباشد آن گاه $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ و$\prod\limits_{i \in I} A_i$ ناشماراست .

۷– اگر $\ldots \supseteq A_۳ \supseteq A_۲ \supseteq A_۱$ یک زنجیراز مجموعه های ناشماراباشد آیا$\bigcap\limits_{i=۱}^{+\infty} A_i$ ناشماراست .

۸– نشان دهیدکه یک مجموعهٔ مرتب جزیی متناهی همیشه دارای عنصرمینیمال وماکسیمال است .

فصل ۱۰

اعداد اصلی

در این فصل به هر مجموعه یک عدد نسبت داده‌می شود،که آن را عدد اصلی مجموعه نامند . سپس برروی این اعدادمی توان اعمال جبری تعریف نمود و خواص آنها را مورد بررسی ومطالعه قرار داد .

۱.۱۰ عدد اصلی

فرض کنید A مجموعه ای دلخواه باشد.دراین صورت همواره می توان به تعدادعناصرموجوددر A یک عدد نسبت داد.به عنوان مثال می‌توان به مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ عدد ۵ را نسبت داد .

ملاحظه می شودکه اگر A مجموعه ای متناهی باشد ، آن گاه یک n یکتایی هست که $A \sim I_n$. می‌توانیم به A عدد n را نسبت دهیم . حال اگر $B \sim A$ ، آن گاه $B \sim I_n$ و لذا به B نیز عدد n نسبت داده می‌شود .

حال به مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{R}$ و $[۰,۱)$ که نامتناهی هستند به چه صورتی می‌توان یک عدد نسبت داد ؟ برای این منظوربه کارگیری مفهوم‌تناظر ۱—۱می تواند بسیار مفیدباشد .

تعریف ۱.۱. فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه باشد عدد اصلی[۱] مجموعهٔ A را با

[۱] cardinal number

$Card\ A$ یا $|A|$ نشان می‌دهند و آن عبارتست از :

۱ــ اگر $A=\phi$ ، آن گاه $Card\ A=\circ$.

۲ــ اگر $A\neq\phi$ و متناهی باشد ، آن گاه یک k یکتایی هست که $A\sim I_k$ ، در این صورت $Card\ A=k$ تعریف می شودودراین حالت گویندعدداصلی A متناهی است .

۳ــ اگر A نامتناهی باشد ، آن گاه $Card\ A=\{X\ :\ X\sim A\}$ تعریف می شود. در این حالت عدد اصلی A نامتناهی گفته می شود .

نتیجه‌ای که بلافاصله از تعریف گرفته می‌شود این است که

$$A\sim B\Longleftrightarrow Card\ A=Card\ B$$

قرارداد. $Card\ \mathbb{N}=\mathcal{N}_\circ$ و $Card\ \mathbb{R}=\mathcal{N}$ و می‌خوانیم الف صفر و الف .

تعریف۲.۱. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، تعریف می‌کنیم $Card\ A<Card\ B$ اگر و فقط اگر A با زیر مجموعه‌ای از B هم عدد باشد همچنین

$$\mathrm{Card}A\leq\mathrm{Card}\ B\Longleftrightarrow\mathrm{Card}\ A<\mathrm{Card}\ B\ \text{ یا }\ \mathrm{Card}\ A=\mathrm{Card}\ B$$

مثال . اگر $A=\{*,\circ,\triangle,\square\}$ و $B=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ ، آن گاه

$$۴=CardA<CardB=۱۰$$

مثال. $Card\ \mathbb{N}<Card\ \mathbb{R}$.

حل. $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\subset\ \mathbb{R}$ پس $Card\mathbb{N}\leq Card\ \mathbb{R}$. چون $\mathbb{R}$ ناشماراست، پس $Card\ \mathbb{N}<Card\ \mathbb{R}$.

مثال . تحقیق کنید $\mathrm{Card}\ \mathbb{N}=\mathrm{Card}\ \mathbb{Z}=\mathrm{Card}\ \mathbb{Q}=\mathrm{Card}\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

قضیه ۳.۱. اگر $A\subseteq B$ ، آن گاه $\mathrm{Card}\ A\leq\mathrm{Card}\ B$.

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

قضیه۴.۱. رابطه $\leq$ تعریف شده روی اعداد اصلی مرتب کلی است.

اثبات . فرض کنیم α و β و γ سه عدد اصلی باشند و A و B و C سه مجموعه که

$$\mathrm{Card}A=\alpha\ ,\ \mathrm{Card}B=\beta\ ,\ \mathrm{Card}C=\gamma$$

۱ − چون $A \sim A$ پس Card A =Card A و لذا $\alpha \leq \alpha$.
۲ − اگر $\beta \leq \alpha$ و $\alpha \leq \beta$ ، آن گاه A با زیرمجموعه‌ای از B و B با زیرمجموعه‌ای از A همعدد است ، لذا بنابه قضیه شرودر برنشتاین $A \sim B$ پس $\alpha = \beta$.
۳ − اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ ، آن گاه A با زیر مجموعه‌ای از B و B با زیرمجموعه‌از C همعدد است . به وضوح دیده می‌شود که A با زیر مجموعه‌ای از C همعدد می‌باشد ، لذا $\alpha \leq \gamma$.
۴ − با توجه به قضایای قبل تابع ۱ − ۱ از A به B یا تابع ۱ − ۱ از B به A وجود دارد ، لذا A با زیرمجموعه‌ای از B یا B با زیر مجموعه‌ای از A همعدد است ، پس $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$.

قضیه ۵.۱. هر عدد اصلی متناهی از $\mathcal{N}_\circ$ کمتر است .

اثبات . فرض کنیم n یک عدد اصلی متناهی باشد و Card $I_n = n$ چون $I_n \subseteq \mathbb{N}$ پس Card $I_n \leq$Card $\mathbb{N}$ ، لذا $n \leq \mathcal{N}_\circ$. اگر $n = \mathcal{N}_\circ$ ، آنگاه $I_n \sim \mathbb{N}$ که تناقض است ،لذا $n < \mathcal{N}_\circ$.

قضیه ۶.۱. $\mathcal{N}_\circ$ کوچکترین عدد اصلی نامتناهی است.

اثبات . فرض کنیم α یک عدد اصلی نامتناهی باشد و A یک مجموعه نامتناهی که Card $A = \alpha$. با توجه به قضیهٔ ۱.۴.۹ A دارای یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی مانند B است ، پس

$$\mathcal{N}_\circ = \text{Card}B \leq \text{Card}A = \alpha$$

قضیه ۷.۱ (کانتور). Card $A <$Card $p(A)$.

اثبات . اگر $A = \{a, b, c, \ldots\}$ واضح است که $A \sim \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots\} \subseteq p(A)$ لذا

$$\text{Card } A = \text{Card}\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots\} \leq \text{Card } p(A)$$

اگر Card A =Card $p(A)$ ، آن گاه $A \sim p(A)$ که تناقض با قضایای قبل دارد ، پس

$$Card\ A < Card\ p(A)$$

یکی از نتایجی که از قضیه کانتور گرفته می‌شود این است که‌تعداد اعداد اصلی نامتناهی هستند.

تمرین ۱.۱

۱– نشان دهید مجموعهٔ اعداد اصلی نامتناهی ، نامتناهی است.

۲– نشان دهید:

$$Card\{(x,y) : y \geq ۰, x^۲ + y^۲ = ۱\} = \mathcal{N}$$

۳– عدد اصلی مجموعه های زیر رابیابید

آ) $\{x \in \mathbb{R} : [\mathrm{x}] \leq \frac{\mathrm{x}}{2}\}$

ب) $\{\sin x : x \in \mathbb{R}\}$

ج) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{[\mathrm{x}] - \mathrm{x}} \in \mathbb{R}\}$

د) $\{x \in \mathbb{R} : \sin \mathrm{x} = \mathrm{a}\}$

۴– نشان دهید اگر $f : A \longrightarrow B$ یک به یک باشد آن گاه$CardA \leq CardB$ و اگر برو باشد آن گاه $CardB \leq CardA$.

۵– فرض کنید $۰ < x < ۱$ و $y \in \mathbb{R}$ نشان دهید

$$Card\{(x,y) \ : \ [x] = [y]\} = \mathcal{N}$$

۶– نشان دهید که رابطهٔ زیریک هم ارزی روی $\mathcal{Q}$است

$$\forall a, b \in \mathcal{Q} \ : \ a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

حال $Card\ [۰]$ و $Card\ [\frac{۱}{۲}]$ را بیابید.نشان دهید $^{Q}/_{\sim}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است

.

۷– فرض کنیدS یک مجموعهٔ متناهی باعدداصلی n باشدو α و β دوتابع از S به S باشند به طوری که $|\beta(S)| = |\alpha(S)| = n - ۱$.نشان دهیدتوابع دوسوی f و g از S به S هستندبه طوری که $\beta = f\alpha g$.

۲.۱۰ جمع اعداد اصلی

باتوجه به این که اعداد اصلی متناهی ما همان اعداد طبیعی هستند می‌خواهیم عمل « + » را روی اعداد اصلی چنان تعریف کنیم که در اعداد اصلی متناهی همان « + » معمولی باشد .

فرض کنید $CardI_{۳} = ۳$ و $Card\{*, \circ, \Box, \triangle\} = ۴$.دراین صورت

$$۳ + ۴ = \mathrm{Card}(\{۱, ۲, ۳\} \cup \{*, \circ, \Box, \triangle\}) = \mathrm{Card}\{۱, ۲, ۳, *, \circ, \Box, \triangle\} = ۷$$

اما اگر $\mathrm{Card}\ \{۱, ۲, ۳\} = ۳$ ، $\mathrm{Card}\ \{۱, ۲, ۳, ۴\} = ۴$ بگیریم در تعریف فوق $۳ + ۴ = ۴$

بنابراین برای تعریف کردن جمع دو عدد اصلی α و β همواره باید دو مجموعه مجزای A و B داشته باشیم که $\mathrm{Card}\ A = \alpha$ و $\mathrm{Card}\ B = \beta$. آیا این حالت همواره امکان پذیر است ؟

قضیه ۱.۲. اگر α و β دو عدد اصلی باشند ، آن گاه دو مجموعه مجزای A و B چنان هستند که:

$$\alpha = \mathrm{Card}\ A \quad , \quad \beta = \mathrm{Card}\ B$$

اثبات . فرض کنید $\mathrm{Card}\ X = \alpha$ و $\mathrm{Card}\ Y = \beta$ و $A = X \times \{۱\}$ و $B = Y \times \{۰\}$ واضح است که $A \sim X$ و $B \sim Y$ و $Card\ A = \alpha$ و $Card\ B = \beta$ و $A \cap B = \phi$.

تعریف ۲.۲. اگر α و β دو عدد اصلی باشند ، آن گاه $\alpha + \beta$ را $Card\ A \cup B$ تعریف می کنند . جایی که $\mathrm{Card}\ A = \alpha$ و $\mathrm{Card}\ B = \beta$ و $A \cap B = \phi$.

مثال . $n + \mathcal{N}_{\circ} = ?$.

حل . $\mathrm{Card}\ I_n = n$,$\mathrm{Card}\ \{n + ۱, n + ۲, \ldots\} = \mathcal{N}_{\circ}$ پس

$$n+\mathcal{N}_{\circ} = \mathrm{Card}\ I_n+\mathrm{Card}\{n+۱, n+۲, \ldots\} = \mathrm{Card}\ I_n\cup\{n+۱, n+۲, \ldots\} = \mathrm{Card}\mathbb{N} = \mathcal{N}_{\circ}$$

مثال . $\mathcal{N}_{\circ} + \mathcal{N}_{\circ}$

حل .

$$\mathcal{N}_{\circ} + \mathcal{N}_{\circ} = \mathrm{Card}\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, \ldots\} + \mathrm{Card}\{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\} = \mathrm{Card}\ \mathbb{N} = \mathcal{N}_{\circ}$$

قضیه۳.۲ اگر α و β و γ سه عدد اصلی باشند ، آن گاه

۱- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

۲- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

۳- $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

قضیه۴.۲. α عدد اصلی نامتناهی است اگر و فقط اگر $\alpha = \alpha + ۱$.

اثبات . فرض کنید $\alpha =$Card A و α عدد اصلی نامتناهی باشد . x را یک شئ که در A نیست درنظربگیرید.بنابه قضیهٔ ۳.۴.۹ ، $A \sim A \cup \{x\}$ پس

$$\alpha = \text{Card } A = \text{Card } A \cup \{x\} = \text{Card } A + \text{Card}\{x\} = \alpha + ۱$$

اگر α عدد اصلی متناهی باشد ، آن گاه $\alpha \in \mathbb{N}$ و بنابراین $\alpha \neq \alpha + ۱$.

نتیجه ۵.۲. اگر α عدد اصلی نامتناهی باشد ، آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha + n = \alpha$.

نتیجه ۶.۲. اگر به ازای عددطبیعی n ، $\alpha + n = \alpha$ ، آن گاه α عدد اصلی نامتناهی است .

قضیه۷.۲. اگر α عدد اصلی نامتناهی باشد ، آن گاه $\alpha + \alpha = \alpha$.

اثبات . فرض کنید $\alpha =$Card A باشد پس A یک مجموعه نامتناهی است . اگر

$$F = \{(f, X) \mid f \ : \ X \times \{۰, ۱\} \overset{\text{تابع دوسو}}{\longrightarrow} X \quad , X \subseteq A\}$$

و رابطه $\leq$ به شکل زیر تعریف شده باشد

$$(f, X) \leq (g, Y) \Longleftrightarrow X \subseteq Y \quad , \qquad g|_{X \times \{۰,۱\}} = f$$

همچنان که در لم ۱ فصل ۹ دیدیم F دارای عنصر ماکسیمال مانند (f, X) است .

با توجه به این که $X \sim X \times \{۰, ۱\}$ و $X \times \{۰, ۱\} = X \times \{۰\} \cup X \times \{۱\}$ ، آن گاه

$$\text{Card } X = \text{Card} X \times \{۰\} + \text{Card} X \times \{۱\} = \text{Card } X + \text{Card } X$$

بنابراین برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم که Card $A =$Card X . باتوجه به این که $A = X \cup (A - X)$ کافی است ثابت کنیم $A - X$ متناهی است . فرض کنیم $A - X$ نامتناهی باشد و $B \subseteq A - X$ زیر مجموعه شمارای نامتناهی آن باشد لذا $B \sim B \times \{۰, ۱\}$ فرض کنیم‌تابع $g \ : \ B \times \{۰, ۱\} \longrightarrow B$ دوسوباشد.تعریف می‌کنیم:

$$h \;:\; (X\cup B)\times\{۰,۱\} \longrightarrow X\cup B$$
$$(x,k) \longrightarrow \begin{cases} g(x,k) & x\in B \\ f(x,k) & x\in X \end{cases}$$

h تابعی دوسو است ، لذا $(h, X\cup B)\in F$ و از (f,X) بزرگتر است . واین تناقض می‌باشد ، لذا $A-X$ متناهی است پس $A = X\cup(A-X)\sim X$.

قضیه۸.۲. اگر $\beta \leq \alpha$ و β عدد اصلی نامتناهی باشد ، آن گاه $\alpha+\beta=\beta$.

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

تمرین ۲.۱۰

۱ـ اگر A نامتناهی و B متناهی باشد ، ثابت کنید$CardA\cup B = CardA$ و $CardA\times B = CardA$.

۲ـ $Card\{(x,y)\in \mathbb{R}\times \mathbb{R} : x^{۲}+y^{۲}=۱\}$ و $Card\{(x,y)\in \mathbb{R}\times \mathbb{R} : [x]=[y]\}$ رابیابید.

۳ـ تحقیق کنید $Card(\mathbb{R}-Q) = Card\ \mathbb{R}$.

۴ـ ثابت کنیداگر $A\times A\sim A$ آن گاه $CardA+CardA=CardA$.

۵ـ قضیهٔ ۳.۲ راثابت کنید.

۶ـ ثابت کنید

$$\mathcal{N}+\mathcal{N}+\mathcal{N}\ldots=\mathcal{N}$$
$$۲+۲+۲+\ldots=\mathcal{N}_{۰}$$
$$۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\ldots=\mathcal{N}_{۰}$$

۳.۱۰ ضرب اعداد اصلی

تعریف۱.۳. اگر α , β دو عدد اصلی باشند که $\alpha=$Card A و $\beta=$Card B آن گاه $\alpha\beta$ راعدداصلی مجموعهٔ $A\times B$ تعریف می کنند.

عمل فوق خوش تعریف است زیرا اگر $\alpha=\alpha'$ و $\beta=\beta'$ و $\alpha'=$Card A' و $\beta'=$Card B' آن گاه $A\sim A'$ و $B\sim B'$ و بنابه قضیهٔ ۳.۱.۹ $A\times B\sim A'\times B'$ پس $\alpha\beta=\alpha'\beta'$.

قضیه ۲.۳. اگر α و β و γ سه عدد اصلی باشند ، آن گاه

۱– $\alpha\beta = \beta\alpha$

۲– $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

۳– $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

۴– اگر $\alpha \leq \beta$ ، آن گاه $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

اثبات . به عهده خواننده‌گذاشته می شود .

قضیه ۳.۳. اگر α عدد اصلی نامتناهی باشد آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n\alpha = \alpha$

اثبات . فرض کنید $\alpha =$Card A عدد اصلی و $n \in \mathbb{N}$ عدداصلی I_n باشدآن گاه

$$\begin{aligned} n\alpha &= \text{Card } I_n \times A = \text{Card}(\{۱\} \times A \cup \{۲\} \times A \cup \ldots \cup \{n\} \times A) \\ &= \text{Card}\{۱\} \times A + \text{Card}\{۲\} \times A + \ldots + \text{Card}\{n\} \times A \\ &= \text{Card } A + \text{Card } A + \ldots + \text{Card } A = \alpha + \alpha + \ldots + \alpha = \alpha \end{aligned}$$

قضیه۴.۳. اگر α عدد اصلی نامتناهی باشد ، آن گاه $\alpha\alpha = \alpha$.

اثبات . فرض کنیم $\alpha =$Card A و

$$F = \{(f,X) \mid f \ :\ X \times X \overset{\text{تابع دوسو}}{\longrightarrow} X \quad , X \subseteq A\}$$

رابطه زیر را روی F تعریف می‌کنیم :

$$(f,X) \leq (g,Y) \Longleftrightarrow X \subseteq Y \quad , \quad g|_{X \times X} = f$$

همچنان که در لم ۲ فصل ۹ مشاهده شد $(F,\leq)$ مرتب جزیی است و دارای عنصر ماکسیمالی،مانند (f,X) است ، آن گاه $X \times X \sim X$ و X نامتناهی است پس

$$\text{Card } X = \text{Card } (X \times X) = \text{Card } X \text{Card } X$$

لذا برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم $X \sim A$.

با توجه به این که $A = X \cup (A - X)$ کافی است نشان دهیم $Card(A-X) \leq CardX$. اگر Card $(A - X) >$Card X باشد، آنگاه وجود دارد $B \subseteq A - X$ به طوری که $Card\ X = Card\ B$ در این صورت

$$\text{Card } B \times B = \text{Card } B \text{Card } B = \text{Card } X \text{Card } X = \text{Card } X = \text{Card } B$$

و همچنین

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}((B\cup X)\times(B\cup X)) &= \mathrm{Card}((B\times B)\cup(B\times X)\cup(X\times B)\cup(X\times X))\\ &= \mathrm{Card}(B\times B)+\mathrm{Card}(B\times X)+\mathrm{Card}(X\times B)\\ &+\mathrm{Card}(X\times X)\\ &= \mathrm{Card}\ B+\mathrm{Card}\ B+\mathrm{Card}\ B+\mathrm{Card}\ X\\ &= \mathrm{Card}\ B+\mathrm{Card}\ X=\mathrm{Card}B+\mathrm{Card}B=\mathrm{Card}B\end{aligned}$$

لذا نگاشت دوسو $g\ :\ (B\cup X)\times(B\cup X)\longrightarrow B\cup X$ وجود دارد .
حال نگاشت زیر

$$h\ :\ (B\cup X)\times(B\cup X)\longrightarrow B\cup X$$

$$(x,y)\longrightarrow\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in X\times X\\ g(x,y) & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

دوسو است . پس $(h,B\cup X)\in F$ واز (f,X)بزرگتر و این تناقض است بنابراین $Card(A-X)\leq CardX$ ، ازاینرو

$$\mathrm{Card}\ A=\mathrm{Card}X\cup(A-X)=\mathrm{Card}\ X+\mathrm{Card}\ (A-X)=\mathrm{Card}\ X$$

قضیه.۵.۳ اگر $\alpha\leq\beta$ و β عدد اصلی نامتناهی باشد ، آن گاه $\alpha\beta=\beta$.

اثبات . به عهده خوانندهگذاشته می شود.

تمرین ۳.۱۰

۱− فرض کنید $\alpha=CardA$ و $\beta=CardB$ و$\gamma=CardC$ و$B\cap C=\phi$ نشان دهید

آ) $A\times B\sim B\times A$ ونتیجه بگیرید $\alpha\beta=\beta\alpha$.

ب) $A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$ ونتیجه بگیرید $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

ج) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

د) اگر $\alpha\leq\beta$ آن گاه $\alpha\gamma\leq\beta\gamma$.

۲− نشان دهیداگر $CardA\times B=CardA$ آن گاه A نامتناهی و $CardB\leq CardA$.

۳− فرض کنید A یک مجموعهٔ نامتناهی و $A^n=A\times A\times\ldots A$ ، نشان دهید $Card\bigcup_{n=1}^{+\infty}A^n=CardA$.

۴– اگر(k مرتبه) $I_n^k = I_n \times I_n \times \ldots \times I_n$ آن گاه نشان دهید $Card \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_n^k = \mathcal{N}_0$

۵– فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی و $F(\mathbb{N})$ مجموعهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ باشد،نشان دهید:

آ) $Card\mathbb{N} \leq CardF(\mathbb{N})$.

ب) اگر(k مرتبه) $\mathbb{N}^k = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ آن گاه تابع $\phi : F(\mathbb{N}) \longrightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathbb{N}^k$ باضابطهٔ $\phi(\{a_1, \ldots, a_k\}) = (a_1, \ldots, a_k)$ ، ۱–۱ است .

ج) نشان دهید $CardF(\mathbb{N}) \leq Card\mathbb{N}$.

د) نشان دهید $CardF(\mathbb{N}) = Card\mathbb{N}$.

۶– نشان دهیدبه ازای هردوعدداصلی α و β بزرگتریا مساوی ۲ ، $\alpha + \beta \leq \alpha\beta$

۴.۱۰ توان

فرض کنید A و B دومجموعه باشند، مجموعهٔ همهٔ توابع از B به A راباA^B نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۴ . اگر A و B و X و Y چهار مجموعه باشند و $A \sim X$ و $B \sim Y$ ، آن گاه $A^B \sim X^Y$.

اثبات . فرض کنید $f : A \longrightarrow X$ و $g : B \longrightarrow Y$ دو تابع دوسو باشند . می‌خواهیم تابع دوسوی $\phi : A^B \longrightarrow X^Y$ را بیابیم . گیریم $h \in A^B$ پس $h : B \longrightarrow A$ یک تابع است ، نمودار زیر را در نظر بگیرید

$$Y \xrightarrow{g^{-1}} B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} X$$

کافی است $\phi(h) = fohog^{-1}$ تعریف کنیم .

اگر $\phi(h) = \phi(h')$ برای هر $h, h' \in A^B$ ، آن گاه $fohog^{-1} = foh'og^{-1}$. تساوی اخیر را از چپ با f^{-1} و از راست باg ترکیب می‌کنیم ، نتیجه این که $h = h'$ ولذا ϕ ۱–۱ است .

اگر $k \in X^Y$ بگیریم ، آن گاه باتوجه به نمودار $B \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f^{-1}} A$ ، $f^{-1}okog$ عضوی از A^B است و $\phi(f^{-1}okog) = fof^{-1}okogog^{-1} = k$.

تعریف ۲.۴. اگر α و β دوعدداصلی باشندو $\alpha = Card\ A$ و $\beta = Card\ B$ ، α^{β} راعدداصلی مجموعهٔ همهٔ توابع از B به A تعریف می کنند.

قضیه۳.۴. $\text{Card}\ p(A) = ۲^{\text{Card}\ A}$.

اثبات . به عهده خوانندهگذاشته می شود .

قضیه۴.۴. اگرα و β و γ سه عدد اصلی باشند ، آن گاه$\alpha^{\beta}.\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$.

اثبات . فرض کنید $\alpha = \text{Card}\ A$ و $\beta = \text{Card}\ B$ و $\gamma = \text{Card}\ C$ ، گیریم $B \cap C = \phi$. تحقیق کنید که تابع

$$\begin{array}{ccccc} h & : & A^B \times A^C & \longrightarrow & A^{B\cup C} \\ & & (f,g) & \longrightarrow & \begin{array}{ccccc} f\cup g & : & B\cup C & \longrightarrow & A \\ & & x & \longrightarrow & \begin{cases} f(x) & x\in B \\ g(x) & x \in C \end{cases} \end{array} \end{array}$$

دوسو است ، لذا

$$\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \text{Card}A^B\text{Card}A^C = \text{Card}A^B \times A^C = \text{Card}A^{B\cup C} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

قضیه۵.۴. اگر α و β و γ سه عدد اصلی باشند ، آنگاه$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

اثبات . فرض کنید $\alpha = \text{Card}\ A$ و $\beta = \text{Card}\ B$ و $\gamma = \text{Card}\ C$. نشان می‌دهیم که

$$(A^B)^C \sim A^{B\times C}$$

فرض کنید $f \in (A^B)^C$ پس $f\ :\ C \longrightarrow A^B$ یک تابع است . برای هر $c \in C$ تصویر c تحت f را با f_c نشان می‌دهیم ، بنابراین $f_c \in A^B$. تحقیق کنیدکه نگاشت

$$\begin{array}{ccccc} \phi & : & (A^B)^C & \longrightarrow & A^{B\times C} \\ & & f & \longrightarrow & \begin{array}{ccccc} \phi_f & : & B\times C & \longrightarrow & A \\ & & (b,c) & \longrightarrow & f_c(b) \end{array} \end{array}$$

دوسو است.

تمرین ۱۰.۴.

۱– نشان دهید $۲^{\mathcal{N}_۰} = \mathcal{N}$ ونتیجه بگیریدکه $P(\mathbb{N})$ را نمی توان با $\mathbb{N}$ اندیس گذاری کرد.

۲– نشان دهید اگر $\alpha \leq \beta$ آن گاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha^n \leq \beta^n$.

۳– فرض کنید

$$A=\{f \mid f\ :\ \mathbb{R} \xrightarrow{\text{تابع پیوسته}} \mathbb{R}\} \text{ و } \mathrm{B}=\{\mathrm{f} \mid \mathrm{f}\ :\ \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{تابع}} \mathbb{R}\}$$

نشان دهید:

آ) تابع $\phi : A \longrightarrow B$ با ضابطهٔ $\phi(f)=f|_{\mathbb{Q}}$ یک به یک است.

ب) نشان دهید $CardA \le \mathcal{N}$.

ج) نشان دهید که

$$Card\{f \mid f\ :\ \mathbb{R} \xrightarrow{\text{تابع ثابت}} \mathbb{R}\}=\mathcal{N}$$

د) نتیجه بگیرید که $CardA=\mathcal{N}$.

۴– اگر α وβ دوعدداصلی باشند و $n \in \mathbb{N}$ ، $(\alpha+\beta)^n$ رامحاسبه کنید.

۵– آیا می توان مجموعهٔ

$$\{f \mid f\ :\ \mathbb{R} \xrightarrow{\text{تابع}} \{0,1\}\}$$

را با $\mathbb{R}$ اندیس گذاری کرد؟

٦– فرض کنید α ، β و γ سه عدداصلی باشند و فرض کنید $\alpha =$Card A و $\beta =$Card B و $\gamma =$Card C نشان دهید

آ) اگر $\alpha \le \beta$ آن گاه $\alpha^\gamma \le \beta^\gamma$

ب) اگر α و β متناهی وبزرگترازیک و γ نامتناهی آن گاه $\alpha^\gamma=\beta^\gamma$

ج) برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha^n=\alpha\alpha\ldots\alpha$.بنابراین اگر α نامتناهی باشد آن گاه $\alpha^n=\alpha$

۵.۱۰ فرضیه پیوستار

قضیه۱.۵. اگر $A^n=A\times A\times\ldots\times A$ ، آن گاه $\text{Card } A^n=(\text{Card } A)^n$ هرگاه A متناهی باشد . اگر A نامتناهی باشد ، آن گاه $\text{Card } A^n = \text{Card } A$. همچنین:

$$\text{Card} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A^n = \mathcal{N}_\circ \text{Card} A$$

اثبات . با استفاده از تعریف ضرب اعداد اصلی $\text{Card }A^n = (\text{Card }A)^n$.

اگر A نامتناهی باشد با توجه به قضایای قبل $CardA^n = (CardA)^n = CardA$.
بنابر این نگاشت دو سو $f_n \ : \ A^n \longrightarrow A$ وجود دارد .فرض کنید $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A^n$ دراین صورت به ازای تنها یک n ، $x \in A^n$. تحقیق کنیدتابع $g : \bigcup_{n=1}^{+\infty} A^n \longrightarrow \mathbb{N} \times A$ باضابطهٔ $g(x) = (n, f_n(x))$ دوسوست و $\text{Card} \bigcup_{n=1}^{+\infty} A^n = \text{Card}\mathbb{N} \times A = \mathcal{N}_\circ \text{Card}A$.

در صورتی که $A = \phi$ باشد ، مسأ له به راحتی قابل حل است . فرض کنید A متناهی وناتهی باشدپس A^n متناهی و ناتهی است و نگاشت ۱—۱، $f_n \ : \ A^n \longrightarrow \mathbb{N}$ وجود دارد . تحقیق کنیدتابع $g : \bigcup_{n=1}^{+\infty} A^n \longrightarrow \mathbb{N} \times A$ باضابطهٔ $g(x) = (n, f_n(x))$ یک‌به‌یک است وبنابراین $\text{Card} \bigcup A^n \leq \text{Card}\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathcal{N}_\circ \mathcal{N}_\circ = \mathcal{N}_\circ$. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \cup A^n$ با ضابطهٔ $f(n) = (f(1), f(1), \ldots, f(1))$ یک‌به‌یک است پس $\mathcal{N}_\circ \leq Card \cup A^n$ وبنابراین $Card \cup A^n = \mathcal{N}_\circ = \mathcal{N}_\circ CardA$

قضیه۲.۵ اگر A نامتناهی و $F(A)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های متناهی A باشد ، آن گاه:

$$\text{Card}F(A) = \text{Card } A$$

اثبات . تحقیق کنیدتوابع

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F(A) \\ x & \longrightarrow & \{x\} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & \cup A^n \\ \{a_1, \ldots, a_n\} & \longrightarrow & (a_1, \ldots, a_n) \end{array}$$

۱—۱ هستند ، لذا

$$\text{Card } A \leq \text{Card}F(A) \qquad \text{Card}F(A) \leq \text{Card} \cup A^n = \text{Card } A$$

وبنابراین $\text{Card}F(A) = \text{Card } A$.

این فصل رابا بیان تناقض کانتور و فرضیه پیوستار به اتمام می‌رسانیم .

تناقض کانتور. عبارت مجموعه مجموعه‌ها صحیح نیست .

فرض کنید V مجموعهٔ مجموعه‌ها باشد و $A = p(V)$ ، آن گاه $A \subseteq V$ پس

$$۲^{\text{Card } V} = \text{Card} p(V) = \text{Card } A \leq \text{Card } V < ۲^{\text{Card } V}$$

و این تناقض است .

فرضیه پیوستار : عدد اصلی مانند x که در $\mathcal{N}_۰ < x < \mathcal{N}$ صدق کند وجود ندارد.

تمرین ۵.۱۰

۱− فرض کنید $F(\mathbb{N})$ مجموعهٔ زیرمجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ باشد ،

آ) $F(\mathbb{N})$ رااندیس گذاری کنید.

ب) یک تابع انتخاب برای $F(\mathbb{N})$ بنویسید.

ج) مجموعهٔ B را برای $F(\mathbb{N})$ چنان بیابیدکه دراصل تسرملو صدق کند.

۲− اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده ازمجموعه های متناهی و I نامتناهی باشد آن گاه $Card \bigcup\limits_{i\in I} A_i \leq Card\ I$.

۳− مجموعهٔ $W \subseteq P(\mathbb{Z})$ راچنان بیابیدکه

i) $\phi, \mathbb{Z} \in W$

ii) اجتماع هرتعدادازاعضای W عضو W باشد

iii) اشتراک هرتعدادمتناهی ازاعضای W عضو W باشد.

۴− فرض کنید $W = \{\phi,\ \mathbb{R}\} \cup \{(a,b) : a, b \in\ \mathbb{R}\}$.نشان دهید W در شرایط i و ii و iii مسئلهٔ قبل صدق می کند. می توانید به غیراز W زیرمجموعهٔ دیگری از $P(\ \mathbb{R})$ بیابیدکه بازهم درآن شرایط صدق کند؟

۵− نشان دهیدکه $W = \{\phi,\ \mathbb{R}\} \cup \{[a,b] : a, b \in\ \mathbb{R}\}$ درشرایط مسئلهٔ ۳ صدق نمی کند.امّادرشرایط زیرصدق می کند

i) $\phi,\ \mathbb{R} \in W$

ii) اجتماع هرتعدادمتناهی ازاعضای W عضو W باشد

iii) اشتراک هرتعداد ازاعضای W عضو W باشد.

٦− اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانوادهای اززیرمجموعههای $\mathbb{R}$ باشندکهدرخاصیت زیرصدق‌می‌کنند

برای هر $i \in I$ وهر $x, y \in A_i$ ، $x - y \in A_i$

آن گاه نشان دهید $\bigcup_{i\in I} A_i$ نیزدرخاصیت فوق صدق می کند امّا $\bigcap_{i\in I} A_i$ درآن خاصیت صدق نمی کند.چه شرطی روی خانوادهٔ $\{A_i\}_{i\in I}$ بگذاریم تادرخاصیت فوق صدق کند.

۷– فرض کنید $\{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای‌اززیرمجموعه‌های $p(X)$ باشندکه

i) برای هر $i \in I$ ، $\phi, X \in T_i$

ii) برای هر $i \in I$ ،اجتماع هرتعدادازاعضای T_i عضوی از T_i باشد

iii) برای هر $i \in I$ ،اشتراک تعدادمتناهی ازاعضای T_i عضوی از T_i باشد.

نشان دهیدکه $\bigcap_{i\in I} T_i$ درشرایط i و ii و iii صدق می کند ولی $\bigcup_{i\in I} T_i$ ممکن است چنین نباشد.

۸– فرض کنید $(S, \leq)$ به طورجزیی مرتب باشدو

$$T = \{X \subseteq S : (x \in X, y \leq x) \Longrightarrow y \in X\}$$

نشان دهید

i) $\phi, S \in T$

ii) اجتماع هرتعدادازاعضای T عضوی از T باشد

iii) اشتراک تعدادمتناهی ازاعضای T عضوی از T است .

کتابنامه

۱ – ایان استیوارت ،دیویدتال،مبانی ریاضیات ،ترجمه محمدمهدی ابراهیمی ،مرکزنشردانشگاهی ،۱۳۶۵.

۲– ویلیام و.آدامز،لری جوئل گولدشتین ،آشنایی بانظریهٔ اعداد،ترجمه دکترآدینه محمدنارنجانی ،انتشارات مرکزنشردانشگاهی ،۱۳۶۲ .

۳– ک .ج .بین مور،مبانی ریاضیات ،ترجمهٔ دکتراسدا...نیکنام ودکترابوالقاسم بزرگ نیا ،انتشارات آستان قدس رضوی ،۱۳۷۰ .

۴– حسین دوستی ،غلامرضاجهانشاهلو،مبانی ریاضیات ،انتشارات دانشگاه تربیت معلم ،۱۳۷۵.

۵– غلامحسین مصاحب ،آنالیزریاضی ،جلداول ،انتشارات فرانکلین ،۱۳۴۸.

۶– آ.گ .همیلتن ،منطق برای ریاضیدانان ،ترجمهٔ دکترمحمدعلی پورعبدا...،انتشارات آستان قدس رضوی ،۱۳۷۱.

7 - R.E.Johnson , F.L.Kiokemeister , calculus with analytic geometry , by Allen and Bacon , Inc(1969)

8 - Thomas W.Hungerford , Algebra , Spring-Verlag Newyork Inc(1974)

پیوست A

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

الف	*aleph*
جبر	*algebra*
جبری	*algebraic*
دستگاه—	*−system*
مقدم	*antecedent*
نامتقارن	*antisymetric*
ارشمیدسی	*archimedian*
خاصیت ارشمیدسی	*−property*
شرکت پذیر	*associative*
شرکت پذیری	*associativity*
اصل موضوع	*axiom*
اصل موضوعی	*axiomatic*
دوشرطی	*biconditional*
بیژکسیون (یکبیک وپوشا)	*bijection*
دوتایی	*binary*
بند—کران	*bound*
کراندار	*bounded*
اسقاط	*cancelation*
قاعده —	*law*
علامت $\cap$	*cap*
عدداصلی	*cardinal number*
— متناهی	*finite−*
— نامتناهی	*infinite*
حاصلضرب دکارتی	*cartesian product*
زنجیر	*chain*
مقسوم علیه مشترک	*common divisor*
بزرگترین —	*highest−*
مضرب مشترک	*common multiple*
کوچکترین —	*least−*

تعویض‌پذیر .... *commutative*
تعویض‌پذیری .... *commutativity*
تمامیت .... *completeness*
اصل موضوع — .... *—axiom*
مرکبهٔ تابع ونسبت .... *composite*
گزارهٔ مرکب .... *composite sentence*
ترکیب تابع و نسبت .... *composition*
شرط .... *condition*
— لازم .... *necessary—*
— لازم و کافی .... *necessary and sufficient—*
— کافی .... *sufficient—*
شرطی .... *conditional*
رابط — .... *—connective*
گزاره — .... *—sentence*
عطفی .... *conjunction*
تناقض .... *contradiction*
متناقض .... *contradictory*
عکس نقیض .... *contrapositive*
تناظر .... *correspondence*
— یک به یک .... *one — to — one—*
شمارا .... *countable*
مثال نقض .... *counter example*
تصویرعکس .... *counterimage*
اعشاری .... *decimal*
نزولی .... *decreasing*
استنتاج .... *deduction*
معین .... *definite*
چگال .... *dense*
تفاضل .... *difference*

— متقارن .... $symmetric-$
مجموعه های جدا ازهم .... $disjoint\ sets$
ترکیب فصلی .... $disjunction$
توزیعی ،پخشی .... $distributive$
توزیعپذیری ،پخشی .... $distributivity$
عادکردن .... $divide$
قابلیت قسمت .... $divisibility$
تقسیم .... $division$
مقسوم علیه .... $divisor$
عضو .... $element$
مجموعهٔ تهی .... $empty\ set$
تساوی .... $equality$
همعدد .... $equipotential$
هم ارزی .... $equivalence$
ردهٔ — .... $-class$
معادل .... $equivalent$
سوروجودی .... $existential\ quantifier$
توسیع .... $extension$
عامل .... $factor$
فاکتوریل .... $factorial$
متناهی .... $finite$
فرمول .... $formula$
— تراجعی .... $recurrence$
کسر .... $fraction$
کسری .... $fractional$
تابع .... $function$
— مرکب .... $composite-$
— همانی .... $identity-$
— معکوس .... $inverse-$

— گزاره نما .... *propositional—*
همانی ،اتّحاد .... *identity*
عضوهمانی .... *—element*
تالی بلا فصل .... *immediate successor*
استلزام .... *implication*
جزئیت .... *inclusion*
یا به معنی منطقی .... *inclusive "or"*
صعودی .... *increasing*
نامعین .... *indefinite*
اندیس .... *index*
استقراٗ .... *induction*
نامساوی .... *inequality*
اینفیمم .... *infimum*
نامتناهی .... *infinite*
انژکسیون (یکبیک) .... *injection*
عددصحیح .... *integer*
صحیح .... *integral*
جزصٔحیح .... *—part*
اشتراک ، مقطع .... *intersection*
بازه ،فاصله .... *interval*
اصم .... *irrational*
عدداصم .... *—number*
ماکسیمال .... *maximal*
ماکسیمم .... *maximum*
مینیمال .... *minimal*
مینیمم .... *minimum*
هنگ .... *modulus*
ضرب .... *multiplication*
ضربی .... *multiplicative*

نظریهٔ اعداد .... *number theory*
ترتیب .... *order*
مجموعهٔ مرتب .... *ordered set*
—مرتب جزیی .... *partially—*
—مرتب قوی (کلی) .... *strong—*
مثبت .... *positive*
اصل موضوع .... *postutale*
توان ،قوه ، نما .... *power*
مجموعهٔ توان .... *powerset*
اول .... *prime*
عدد— .... *—number*
اصل .... *principle*
حاصلضرب .... *product*
گزاره .... *proposition*
حساب گزاره ها .... *propositional calculus*
سور .... *quantifier*
—وجودی .... *existential—*
—عمومی .... *universal*
خارج قسمت .... *quotient*
نسبت .... *ratio*
گویا .... *rational*
عدد— .... *—number*
عددحقیقی .... *real number*
برهان خلف .... *reductio ad absurdum*
رابطه .... *relation*
سوپریمم .... *supremum*
راستگو .... *tautology*
سه تایی مرتب .... *ternary*
عددمتعالی .... *transcendental number*

تعدّ ی .... *transitivity*
تثلیث .... *trichotomy*
جدول ارزش .... *truth table*
ارزش راستی .... *truth value*
بی کران ، نامحدود .... *unbounded*
ناشمارا .... *uncountable*
اجتماع، اتحادیه .... *union*
کران بالا ، بندبالا .... *upper bound*
درست(دراستنتاج) .... *valid*
درستی (دراستنتاج) .... *validity*
مقدار .... *value*
متغیر .... *variable*
خوشترتیب .... $well-ordered$
خوشترتیبی .... $well-ordering$
زورن .... *zorn*