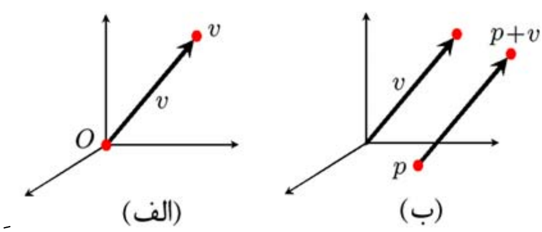
فصل ۳

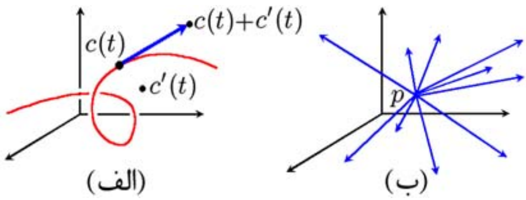
کلاف مماس

۱.۳ فضای مماس به فضای اقلیدسی

در بسیاری جاها، نقطهٔ $v \in \mathbb{R}^n$ را به عنوان پیکانی از o به v در نظر می‌گیرند. وضعیاتی نیز وجود دارد که مایلیم آن را به صورت پیکانی با شروع از نقطهٔ دلخواه $p \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم. به شکل ۱.۳ توجه شود. مثلاً، فرض کنید $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ خمی دیفرانسیلپذیر است. در این صورت $c'(t) = (c'(t), \cdots, c^n(t))$ نیز نقطه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، اما بین $c(t)$ و $c(t)+c'(t)$ است و بر منحنی مماس می‌باشد. آن را **بردار سرعت** یا **بردار مماس** $c'(t)$ **به خم** c نامیده و به صورت پیکانی که از $c(t)$ به $c(t)+c'(t)$ امتداد دارد، در نظر می‌گیریم.



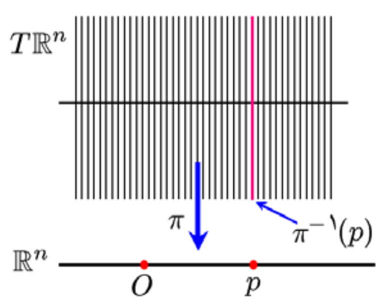
شکل ۱.۳



شکل ۲.۳

به منظور مدل سازی این تصور به شکل ریاضی، کافی است پیکان از p به $p+v$ را با زوج (p,v) توصیف کنیم. مجموعهٔ همهٔ چنین زوجهایی درست $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ است، که آنرا با نماد $T\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم، و **فضای مماس** $\mathbb{R}^n$ نامیده و اعضاء آنرا **بردارهای مماس به** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم (به شکل ۲.۳ توجه شود).

معمولاً $(p,v)\in T\mathbb{R}^n$ را با نماد v_p (بردار v در p) نشان می‌دهیم، نظر به این نماد گذاری، مجموعهٔ همهٔ (p,v) های با $v\in\mathbb{R}^n$ را با نماد $T_p\mathbb{R}^n$ نمایش می‌دهیم. فعلاً، بهتر است که هر عضو از $T\mathbb{R}^n$ را با تنها یک حرف v نشان دهیم.



شکل ۳.۳

برای حصول به اولین عضو از $v\in T\mathbb{R}^n$، نگاشت تصویر $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $\varphi(a,b)=a$ را در نظر می‌گیریم. به ازاء هر بردار مماس v، $\varphi(v)$ نقطه‌ای است که v بر آن استوار می‌باشد. از سوی دیگر، $\varphi^{-1}(p)$ را به عنوان زیر مجموعه‌ای بخصوص از $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ می‌توان در نظر گرفت؛ که برای حالت $n=1$، به صورت در شکل ۳.۳ می‌توان آنرا نشان داد. این شکل انگیزه‌ای است برای اینکه $\varphi^{-1}(p)$ را **تار** بر p بنامیم. این تار را به طریق زیر به یک فضای برداری می‌توان تبدیل نمود: کافی است تعریف شود

$$\begin{aligned}(p,v)\oplus(p,w) &:= (p,v+w)\\ a\odot(p,v) &:= (p,av)\end{aligned}$$

(اعمال $\oplus$ و $\odot$) عملاً بترتیب بر $\bigcup_{p\in\mathbb{R}^n}\varphi^{-1}(p)\times\varphi^{-1}(p)$ و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شوند. معمولاً $\oplus$ و $\odot$ را بترتیب با $+$ و $\bullet$ معمول نشان می‌دهند.)

اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ نگاشتی دیفرانسیلپذیر بوده و $p\in\mathbb{R}^n$، آنگاه از نگاشت خطی $Df(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$، نگاشتی خطی از $T_p\mathbb{R}^n$ به $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ با ضابطهٔ $v_p\mapsto[Df(p)(v)]_{f(p)}$ می‌توان تعریف نمود. این نگاشت خواص ظاهراً غیر عادی‌ای دارد که به تشریح آن خواهیم پرداخت. این نگاشت را با نماد f_{*p} نشان می‌دهیم؛ نگاشت $T\mathbb{R}^n\to T\mathbb{R}^m$ حاصل از اجتماع همهٔ f_{*p} ها را با نماد f_* نشان می‌دهیم. چون $f_{*p}(v)$ برداری در $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ تعریف می‌کند، دیاگرام زیر تعویض‌پذیر است (یعنی، دو ترکیب ممکن از $T\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ برابرند):

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{R}^n \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi"'] & T\mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \pi\circ f_*=f\circ\pi$$

بنابراین f_* نه تنها از روی f، بلکه از روی $Df(p)$ نیز ساخته می‌شود. این تنها دلیل تعریف f_* در این حالت خاص نیست. فرض کنید $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ تابع دیفرانسیلپذیر دیگری است؛ در نتیجه، بنابه قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$D(g\circ f)(p)=Dg(f(p))\circ Df(p) \qquad (۱.۳)$$

بنابه تعریف، داریم

$$g_*\Big([Df(p)(v)]_{f(p)}\Big)=\Big(D_g(f(p))(Df(p)(v))\Big)_{g(f(p))}$$

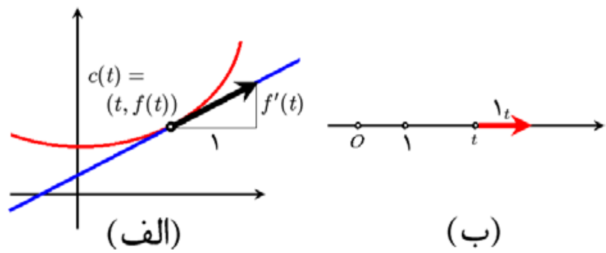
این فرمول را به کمک (۱.۳) به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$g_*(f_*(v_p)) \;=\; (g\circ f)_*(v_p)$$

بنابراین

$$g_*\circ f_* \;=\; (g\circ f)_*$$

چنانچه $f_*(v_p)$ در $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ نبود، این فرمول کاملاً بی معنی می‌شد؛ البته، تا اینجا استفاده از f_* صرفاً بیان مجدد قاعدهٔ زنجیره‌ای را در برداشت.



شکل ۴.۳

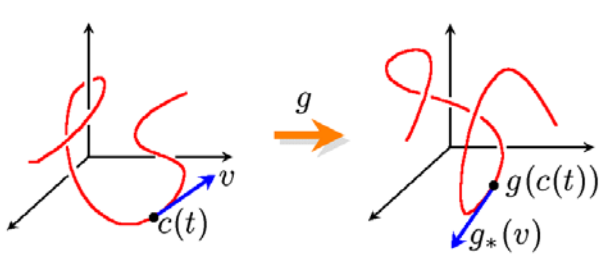
از این پس، همواره خواص و مفاهیم در ارتباط با ماتریس ژاکوبی، نظیر رتبه یا تکینگی را بر اساس f_* بیان می‌کنیم نه بر حسب Df. بردار مماس به منحنی $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ را بر اساس این مفهوم نیز می‌توان بیان نمود. بردار مماس به c در t را به صورت $c'(t)_{c(t)} \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم. (اگر، منحنی به شکل $c(t) = (t, f(t))$ باشد که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، آنگاه $c'(t)_{c(t)} = (\text{۱}, f'(t))_{(t)}$؛ این بردار در امتداد خط مماس به نمودار f در $(t, f(t))$ است. به قسمت (الف) از شکل ۴.۳ توجه شود.) توجه کنید که بردار مماس به نمودار c در لحظهٔ t دقیقاً عبارت است از

$$\begin{aligned} c_*(\text{۱}_t) &= [Dc(t)(\text{۱})]_{c(t)} \\ &= ({c^{\text{۱}}}'(t), \cdots, {c^n}'(t))_{c(t)} \end{aligned}$$

که $\text{۱}_t = (t, \text{۱})$ برداریکهٔ مماس به $\mathbb{R}$ در t است (به قسمت (ب) از شکل ۴.۳ توجه شود). اگر $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه $g \circ c$ یک منحنی در $\mathbb{R}^m$ است. بردار مماس به $g \circ c$ در t عبارت است از

$$\begin{aligned} (g \circ c)_*(\text{۱}_t) &= g_*(c_*(\text{۱}_t)) \\ &= g_*(\text{بردار مماس به } c \text{ در } t) \end{aligned}$$

به شکل ۵.۳ توجه شود.



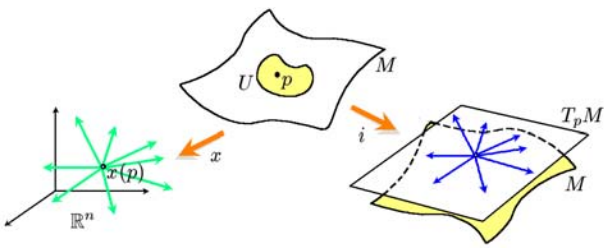
شکل ۵.۳

۲.۳ فضای مماس به منیفلد نشانده شده

حال منیفلد هموار $n-$بعدی M و نشاننده‌ی $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک دستگاه مختصات (x, U) حول p داریم. در این صورت $i \circ x^{-1}$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^N$ با رتبهٔ n است. نتیجتاً، $(i \circ x^{-1})_*(T_{x(p)}\mathbb{R}^n)$ زیر فضایی $n-$بعدی از $T_{i(p)}\mathbb{R}^N$ است. به شکل ۶.۳ توجه گردد. این زیر فضا به دستگاه مختصاتی x بستگی ندارد؛ زیرا، اگر y دستگاه مختصاتی دیگری باشد، آنگاه

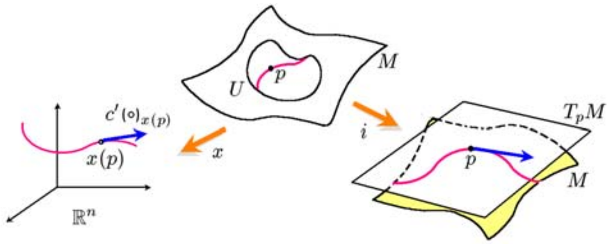
$$\begin{aligned}(i \circ y^{-1})_* &= (i \circ x^{-1} \circ x \circ y^{-1})_* \\ &= (i \circ x^{-1})_* \circ (x \circ y^{-1})_*\end{aligned}$$

و بنابراین $T_{x(p)}\mathbb{R}^n \to T_{y(p)}\mathbb{R}^n : (x \circ y^{-1})_{*y(p)}$ ایزومورفیسمی با وارون $(y \circ x^{-1})_{*x(p)}$ است.



شکل ۶.۳

به طریقی دیگر نیز می‌توان به این بحث توجه کرد، که به صورت در شکل ۷.۳ آن را توصیف نموده‌ایم. اگر $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ خمی با $c(\circ) = x(p)$ باشد، آنگاه $\alpha = i \circ x^{-1} \circ c$ خمی در $\mathbb{R}^N$ است که تماماً در $i(M)$ قرار دارد، و هر خم هموار در $i(M)$ نیز به این شکل است (اثبات؟). در این صورت $\alpha_*(1_\circ) = (i \circ x^{-1})_* \circ c_*(1_\circ)$، و بنابراین بردار مماس به هر α ای در $(i \circ x^{-1})_*(T_{x(p)}\mathbb{R}^n)$ قرار دارد. بعلاوه، هر بردار در این زیر فضا، بردار مماس یک α ای است؛ زیرا هر بردار در $T_{x(p)}\mathbb{R}^N$، بردار مماس به خمی c می‌باشد. بنابراین، زیر فضای $n-$بعدی ما درست عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس در $i(p)$ به خمهای هموار در $i(M)$. این زیر فضای $n-$بعدی را با نماد $T_p(M, i)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۷.۳

اکنون اجتماع (مجزای) فضاهای حاصل را قادریم تشکیل دهیم:

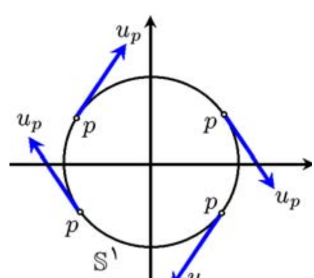
$$T(M,i) := \bigcup_{p\in M} T_p(M,i) \subset i(M)\times\mathbb{R}^N \subset T\mathbb{R}^N$$

نگاشتی تصویری $\varphi : T(M,i)\to M$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(v)=p \quad\Leftrightarrow\quad v\in T_p(M,i)$$

مثل در حالت $T\mathbb{R}^n$، هر تار $\pi^{-1}(p)$ ساختار فضای برداری دارد. با این حال، در ارائه مثالها باید کمی دقت بیشتر نمود.

منیفلد $M=\mathbb{S}^1$ و نگاشت تحتوای $i:\mathbb{S}^1\hookrightarrow\mathbb{R}^1$ را در نظر بگیرید. منحنی $c(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ از کلیهٔ نقاط $\mathbb{S}^1$ می‌گذرد و $c'(\theta)=(-\sin\theta,\cos\theta)$.



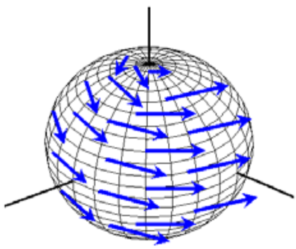
شکل ۸.۳

به ازای هر $p=(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{S}^1$ ای تعریف می‌کنیم $u_p=(-\sin\theta,\cos\theta)$ (روشن است که هر چنین برداری به بینهایت مقدار θ، یعنی $\theta+2k\pi$ با $k\in\mathbb{Z}$ قابل بیان می‌باشد، ولی مشکلی از این حیث وجود ندارد). در این صورت $T_p(\mathbb{S}^1,i)$ عبارت است از فضای شامل همهٔ مضارب u_p. به شکل ۸.۲ توجه شود. بنابراین همئومورفیسم

$f_1 : T(\mathbb{S}^1, i) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ با ضابطهٔ $f_1(\lambda u_p) = (p, \lambda)$ را داریم، که دیاگرام زیر را تعویضپذیر می‌سازد:

$$\begin{tikzcd} T(\mathbb{S}^1, i) \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathbb{S}^1 & \end{tikzcd}$$

یعنی $\pi = \pi' \circ f_1$ که $\pi'(a, b) = a$. اگر مجموعه‌های بشکل $\pi'^{-1}(p)$ را تارهای π' تعریف کنیم، در این صورت هر تاری (به شکل طبیعی) یک ساختار فضای برداری دارد. تعویضپذیری دیاگرام به این معنی است که f_1 تارها را به تارها می‌برد؛ بعلاوه روشن است است که تحدی f_1 به هر تاری، یک ایزومورفیسم خطی بروی تصویرش می‌باشد.



شکل ۹.۳: سر کروی را نمی‌شود شانه کرد!

حال منیفلد $M = \mathbb{S}^2$ و نگاشت احتوای $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. در این حالت، هیچ نگاشت $f_2 : T(\mathbb{S}^2, i) \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ با ویژگیهای نگاشت f_1 مشروح در بالا وجود ندارد. زیرا، اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، آنگاه به ازای هر بردار ثابت $v \neq 0$ در $\mathbb{R}^2$، می‌بایستی مجموعهٔ بردارهای $\{f^{-1}(v_p) | p \in \mathbb{S}^2\}$ گردایه‌ای از بردارهای ناصفر باشد، که به هر نقطه از $\mathbb{S}^2$ برداری نسبت داده می‌شود، و این بردارها به شکل پیوسته تغییر می‌کنند. قضیه‌ای (دشوار) از توپولوژی اذعان می‌دارد که چنین وضعیتی غیر ممکن است (سر کروی را نمی‌شود شانه کرد! به شکل ۹.۳ توجه گردد).
مثال دیگر نیز هست که می‌توان اثبات نمود در آن حالت نیز نگاشت مناسبی $T(M, i) \to M \times \mathbb{R}^2$ وجود ندارد؛ اما بدون استفاده از قضیه‌ای دشوار و یا موضوعاتی نظیر آن! نگاشت $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ را از نگاشت احتوای **نوار موبیوس** M در نظر بگیرید. به بیان دقیقتر، زیر مجموعه‌ای بخصوص از $\mathbb{R}^3$ که در فصل یک تعریف شد: M تصویر نگاشت

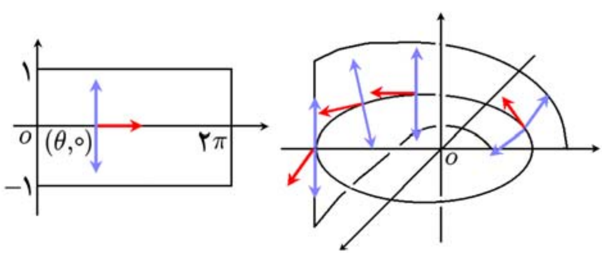
$f:[۰;۲\pi]\times(-۱;۱)\to\mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ

$$\begin{aligned} f(\theta,t) &= \Big(۲\cos\theta+t\cos(\theta/۲)\cos\theta \\ &\qquad ,۲\sin\theta+t\cos(\theta/۲)\sin\theta, t\sin(\theta/۲)\Big) \end{aligned}$$

است. در هر نقطهٔ $p=(۲\cos\theta,۲\sin\theta,۰)$ از M، بردار

$$v_p:=(-۲\sin\theta,۲\cos\theta,۰)=f_*\big((۱,۰)_{(\theta,۰)}\big)$$

به M مماس است. همین مطلب دربارهٔ همهٔ مضارب $f_*((۰,۱)_{(\theta,۰)})$ درست است، که در شکل ۱۰.۳ با خطوط نقطه چین نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۳

توجه کنید که

$$\begin{aligned} f_*((۰,۱)_{(\theta,۰)}) &= \Big[Df(۰,۰)(۰,۱)\Big]_{(۲,۰,۰)} \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(۰,۰)\right]_{(۲,۰,۰)}=(۱,۰,۰)_{(۲,۰,۰)} \end{aligned}$$

و حال آنکه

$$f_*((۰,۱)_{(۲\pi,۰)})=\left[\frac{\partial f}{\partial t}(۲\pi,۰)\right]_{(۲,۰,۰)}=(-۱,۰,۰)_{(۲,۰,۰)}$$

بدان معنی است که هرگز قادر به حرکت بردارهای نقطه چین بر همهٔ نقاط $(۲\cos\theta,۲\sin\theta,۰)$ و به صورت پیوسته نیستیم؛ زیرا، اگر چنین می‌شد، آنگاه هر برداری به شکل $f_*((۰,\lambda(\theta))_{(\theta,۰)})$ می‌بود که $\lambda:[۰;۲\pi]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. این تابع باید در همه جا مخالف صفر باشد و بعلاوه $\lambda(۲\pi)=-\lambda(۰)$، که (بنا به قضیهٔ مقدار میانی از حسابان، که قضیه‌ای ساده است) محال می‌باشد. محال بودن انتخاب بردارهای نقطه چین بطور پیوسته، به

وضوح نشان می‌دهد که هیچ نگاشتی از $T(M,i)$ بروی $M\times\mathbb{R}^2$ همیومورفیسم بوده و تار به تار نیز باشد، وجود ندارد. به این ترتیب، حالت دیگری پیش آمد که $T(M,i)$ شبیه $M\times\mathbb{R}^n$ نیست.

با این حال، اگر $i:M\hookrightarrow\mathbb{R}^N$ نشاننده باشد، ساختار $T(M,i)$ از نظر موضعی بسیار ساده است: اگر (x,U) دستگاه مختصاتی بر M باشد، آنگاه $\pi^{-1}(U)$ (یعنی، بخشی از $T(M,i)$ که روی U قرار دارد) را معمولاً به صورت تار به تار و به شکل همیومورف به شکل همیومورف به روی $U\times\mathbb{R}^n$ می‌توان نگاشت. در واقع، به ازاء هر $p\in U$ ای، تار (M,i) با

$$m_p({}_{x(p)}\mathbb{R}^n):=(i\circ x^{-1})_{*x(p)}(T_{x(p)}\mathbb{R}^n)$$

برابر است، که m_p به جهت خلاصه نویسی وضع شده است. بنابراین، می‌توانیم تعریف کنیم

$$f:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n \qquad f(m_p(v_{x(p)}))=(p,v)$$

به زبان فنی معمول، $T(M,i)$ موضعاً بدیهی است. این جنبه‌های $T(M,i)$ موجب می‌شود که $T(M,i)$ به خانواده‌ای فوق العاده بزرگ و مهم از ساختارها تعلق بگیرد:

۳.۳ کلاف برداری

کلاف برداری n−بعدی (یا **کلاف n−صفحه‌ای**) یک پنجم تایمی $\xi=(E,\pi,B,\oplus,\odot)$ است که

۱) E و B فضا هستند (آنها را بترتیب **فضای کلی** و **فضای پایهٔ** ξ می‌نامیم).

۲) $\pi:E\to B$ نگاشتی پیوسته به روی B است.

۳) $\oplus$ و $\odot$ نگاشتهایی به شکل

$$\begin{aligned}\oplus &: \bigcup_{p\in B}\pi^{-1}(p)\times\pi^{-1}(p)\to E\\ \odot &: \mathbb{R}\times E\to E\end{aligned}$$

هستند، که $\oplus(\pi^{-1}(p)\times\pi^{-1}(p))\subseteq\pi^{-1}(p)$ و همچنین $\odot(\mathbb{R}\times\pi^{-1}(p))\subseteq$ $\pi^{-1}(p)$ و به واسطهٔ آنها هر تار $\pi^{-1}(p)$ یک فضای برداری n−بعدی است

(با میدان زمینهٔ $\mathbb{R}$)؛ به گونه‌ای که **شرط موضعاً بدیهی بودن** به شرح زیر برقرار است:

به ازاء هر $p \in B$، همسایگی U ای از p و همیومورفیسمی $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ چنان وجود دارد که به ازاء هر $q \in U$ ای یک ایزومورفیسم فضاهای برداری از $\pi^{-1}(q)$ به $\{q\} \times \mathbb{R}^n$ است.

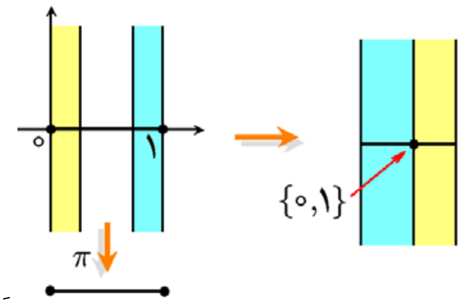
چون شرط موضعاً بدیهی بودن، در اساس شرطی موضعی است، به ازاء هر زیر مجموعهٔ $A \subset B$، بطور خودکار از کلاف مفروض $\xi = (E, \pi, B, \oplus, \odot)$ به کلافی $\xi|_A$ بر A می‌توان رسید. به بیان دقیقتر، به کلاف

$$\xi|_A := \Big(\pi^{-1}(A), \pi)\pi^{-1}(A), A, \oplus|_{\bigcup_{p\in A}\pi^{-1}(p)\times\pi^{-1}(p)}, \odot|_{\mathbb{R}\times\pi^{-1}(A)}\Big)$$

ملاحظه می‌شود که این نمادگزاری بیش از حد طولانی است؛ و به همین دلیل، کلاف را به صورت $\pi : E \to B$، و یا حتی با E تنها نشان می‌دهیم. برای بردارهای $v, w \in \pi^{-1}(p)$ و $a \in \mathbb{R}$، عناصر $\oplus(u, w)$ و $\odot(a, v)$ را بترتیب با $v + w$ و av نشان می‌دهیم.

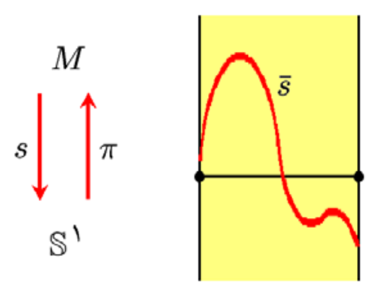
ساده ترین مثال از کلاف $n-$صفحه‌ای، عبارت است از خود $X \times \mathbb{R}^n$ با $\pi : X \times \mathbb{R}^n \to X$ تصویر روی اولین مؤلفه‌اش، که بر هر تار $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ ساختار بدیهی تعریف می‌گردد. این را **کلاف $n-$صفحه‌ای بدیهی روی** X نامیده و با نماد $\varepsilon^n(X)$ نشان می‌دهیم. کلاف مماس $T\mathbb{R}^n$ درست $\varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$ است.

پس همان طور که قبلاً ملاحظه گردید، کلاف $T(\mathbb{S}^1, i)$ با $\varepsilon^1(\mathbb{S}^1)$ هم ارز می‌باشد. اما، **هم ارزی** در اینجا یک اصطلاح فنی است: دو کلاف برداری مفروض $\xi_1 = \pi : E_1 \to B$ و $\xi_2 = \pi_2 : E_2 \to B$ را در صورتی هم ارز گوئیم (و می‌نویسیم $\xi_1 \cong \xi_2$) که همیومورفیسمی $h : E_1 \to E_2$ چنان یافت گردد که هر تار $\pi_1^{-1}(p)$ را به صورت ایزومورف روی $\pi_2^{-1}(p)$ تصویر کند. نگاشت h را هم ارزی می‌نامیم. کلاف هم ارز با $\varepsilon^n(B)$ را بدیهی می‌نامیم. (شرط بدیهی بودن در مورد کلافها درست به این معنی است که به ازاء هر نقطه p یک همسایگی U از p یافت می‌شود که $\xi|_U$ بدیهی است.)



شکل ۱۱.۳

کلافهای $T(\mathbb{S}^2, i)$ و $T(M, i)$ بدیهی نیستند، با این حال مثال ساده‌ای از یک کلاف غیر بدیهی به شرح ذیل نیز می‌توان مطرح نمود: خود نوار موبیوس (نه $T(M, i)$)، در صورتی که به عنوان یک کلاف برداری ۱−بعدی روی $\mathbb{S}^1$ در نظر گرفته شود، را در نظر بگیرید. M را با یکی گیری $(0, a)$ با $(1, -a)$ از روی $[0, 1]\times\mathbb{R}$ می‌توان ساخت، حال آنکه $\mathbb{S}^1$ را با یکی گیری ۰ با ۱ بر $[0, 1]$ می‌توان بدست آورد. نگاشت π را برای $0 < t < 1$ به صورت $\pi\{(0, a), (1, -a)\} = \{0, 1\}$ تعریف می‌کنیم. شکل ۱۱.۳ موضعاً بدیهی بودن M در نزدیکی نقطهٔ $\{0, 1\}$ از $\mathbb{S}^1$ را نشان می‌دهد. فرض کنید $s : \mathbb{S}^1 \to M$ تابعی پیوسته با $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$ باشد (چنین تابعی را یک **برش** از M می‌نامند). این تابع به تابعی پیوسته $\bar{s} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ که $\bar{s} = -\bar{s}(1)$ نظیر است. چون بایستی $\bar{s}$ در جایی صفر گردد، پس بایستی برش s در جایی صفر شود (یعنی، باید به ازای یک $\theta \in \mathbb{S}^1$ ای $s(\theta) \in \pi^{-1}(\theta)$ صفر گردد). این نشان می‌دهد که واقعاً M کلافی غیر بدیهی است.



شکل ۱۲.۳

روشن است که هم ارزی مشابه ایزومورف بودن می‌باشد. مشابه همومورفیسم بودن چنین است.[1]: نگاشت کلافی از ξ_1 به ξ_2 عبارت است از یک جفت از نگاشتهای پیوسته چون $(\tilde{f}, f)$، که $\tilde{f} : E_1 \to E_2$ و $f : B_1 \to B_2$، به گونه‌ای که

۱) دیاگرام زیر تعویضپزیر است:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

۲) نگاشت $\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(f(p))$ به ازای هر $p \in B_1$ ای خطی است.

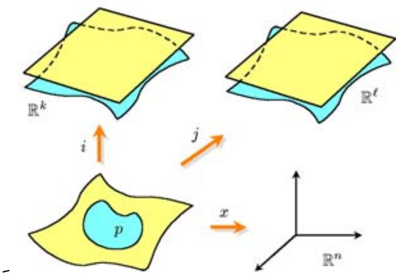
زوج (f_*, f) یک نگاشت کلافی از $T\mathbb{R}^k$ به $T\mathbb{R}^\ell$ است، که $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ تابع دیفرانسیلپذیر دلخواه است.

۴.۳　کلاف مماس بر منیفلد

اگر $M^n \subseteq \mathbb{R}^k$ و $N^m \subseteq \mathbb{R}^\ell$ زیر منیفلد، $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ و $j : N \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell$ نگاشتهای احتوی، و f در شرط $f(M) \subseteq N$ صدق کند، آنگاه f_* فضای $T(M, i)$ را به $T(N, j)$ می‌نگارد؛ برای ملاحظهٔ این امر کافی است توجه شود که $v \in T(M, i)$ بردار مماس به منحنی‌ای c در M می‌باشد، و لذا $f_*(v)$ بردار مماس به منحنی $f \circ c$ در N است، و در نتیجه $f_*(v) \in T(N, j)$. به این طریق به یک نگاشت—کلافی از $T(M, i)$ به $T(N, j)$ می‌رسیم. نکته اینجا است که در بحث حاضر $f : M \to N$ را نگاشتی هموار و موضعی می‌توان در نظر گرفت، چرا که f را به شکل موضعی به $\mathbb{R}^\ell$ می‌توان توسیع داد؛ یعنی، به حالتی که i و j نشانندهٔ دو منیفلد مجرد M و N هستند و نیز $f : M \to N$ نگاشتی هموار بین آنها است. کافی است نگاشت $j \circ f \circ i^{-1} : i(M) \to j(N)$ را در نظر گرفته و آن را به شکل موضعی به $\mathbb{R}^k$ توسیع دهیم. حالتی که بررسی می‌خواهیم

[1] بسته به اینکه همهٔ کلافها را یکجا در نظر بگیریم، کلافهای مختلف روی فضاهای مختلف را در نظر بگیریم، و یا فضای پایهٔ بخصوصی را با کلافهای مختلف در نظر بگیریم، عملاً حالتهای مختلفی برای تعریف نگاشت—کلافی وجود دارد. همچنین، ممکن است f به ایزومورفیسمی روی کلافها، یا فقط همانی بودن، و یا حتی همیومورفیسم بودن، محدود گردد. در مسایل موضوعاتی از این قسم، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

کنیم، ساده‌تر است: یعنی، حالت $M = N$ و $f = \mathrm{Id}_M$، که i و j نشاننده M در $\mathbb{R}^k$ و $\mathbb{R}^\ell$ باشند.



شکل ۱۳.۳

در این صورت، عناصر $T_p(M,i)$ را به شکل کلی $(i\circ x^{-۱})_*(w)$ که $w\in T_{x(p)}\mathbb{R}^n$ می‌توان نوشت، و حال آنکه اعضاء $T_p(M,j)$ را به شکل $(j\circ x^{-۱})_*(w)$ که $w\in T_{x(p)}\mathbb{R}^n$ می‌توان نوشت. چنانچه $(i\circ x^{-۱})_*(w)$ را به $(j\circ x^{-۱})_*(w)$ بنگاریم، به یک نگاشت—کلافی از $T(M,i)|_U$ به $T(M,j)|_U$ می‌رسیم، که بوضوح هم ارزی است. نگاشت $T_p(M,i)\to T_p(M,j)$ القائی بر تارها، مستقل از دستگاه مختصاتی است، زیرا اگر (y,V) دستگاه مختصاتی دیگری باشد، در این صورت

$$\begin{array}{ccc}
(i\circ y^{-۱})_*(w) = & (i\circ x^{-۱})_*\big((x\circ y^{-۱})_*(w)\big) \\
\Big\downarrow & \Big\downarrow \\
(j\circ y^{-۱})_*(w) = & (j\circ x^{-۱})_*\big((x\circ y^{-۱})_*(w)\big)
\end{array}$$

بنابراین، همهٔ این نگاشتها را می‌توان تجمیع نمود و به نگاشت ها ارزی از $T(M,i)$ به $T(M,j)$ رسید. به بیان دیگر، $T(M,i)$ مستقل از نشانندهٔ i است؛ لذا بجای $T(M,i)$ از TM می‌توان استفاده نمود. در حالی که توجه داریمَ عملاً TM نمایشگر خانواده‌ای از کلافهای هم ارز است، نه یک کلاف بخصوص. این شیوه‌ای است که اغلب جبریستها مایلند به این موضوع نگاه کنند، ولی حقیقتاً ظاهر خوشایندی ندارد! آنچه که به دنبال آن هستیم، ارائهٔ یک و تنها یک کلاف برداری برای هر M است به نحوی که کلیهٔ خواص $T(M,i)$ موجود در یک کلاس هم ارزی را داشته باشد و در عین حال باندازهٔ کافی طبیعی باشد. آیا قادر به این کار هستیم؟ بله! می‌توانیم. وقتی $T\mathbb{R}^n$ را بجز به معنی اولیه‌اش (یعنی، $(\varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$) استفاده می‌کنیم، f_* نیز برای $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ فرق خواهد نمود. در این حالت، از اصطلاح «f_* قدیم» استفاده می‌کنیم.

۱.۴.۳ قضیه. به هر n–منیفلد M، یک کلاف n–صفحه‌ای TM روی M و به هر نگاشت هموار $f : M \to N$، یک نگاشت–کلافی (f_*, f) به گونه‌ای می‌توان متناظر نمود که:

۱) اگر $\mathrm{Id} : M \to M$ نگاشت همانی باشد، آنگاه نگاشت $\mathrm{Id}_* : TM \to TM$ نیز همانی باشد. اگر $g : N \to P$، آنگاه $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

۲) به ازاء هر تابع هموار $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$، هم ارزیهایی $t^n : T\mathbb{R}^n \to \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$ و $t^m : T\mathbb{R}^m \to \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)$ می‌توان یافت به گونه‌ای که دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{R}^n \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "t^n"'] & T\mathbb{R}^m \arrow[d, "t^m"] \\ \varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "f_* \text{ قدیمی}"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m) \end{tikzcd}$$

۳) اگر $U \subseteq M$ زیر منیفلدی باز از M باشد، آنگاه TU با $(TM)|_U$ هم ارز است. به ازاء هر $f : M \to N$، نگاشت $(f|_U)_* : TM \to TN$ درست همان تحدید f_* است. به بیان دقیقتر، یک هم ارزی $TU \cong (TM)|_U$ به گونه‌ای وجود دارد که نمودارهای زیر تعویضپذیر می‌گردند. در اینجا $i : U \hookrightarrow M$ نگاشت احتوی است.[۲]

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cong"'] & TM \\ (TM)|_U \arrow[ur, "\subseteq"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TU \arrow[r, "(f|_U)_*"] \arrow[d, "i_*"'] & TM \\ TM \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

اثبات: ساخت TM با اینکه بسیار طبیعی است، حیله‌ای استادانه در آن نهفته است. تنها یک کلاف TM بدست می آوریم، ولی هر یک از اعضاء TM خانواده‌ای بزرگ از اشیاء هم ارز است.

چنانچه در ابتدای امر مشخص کنیم چه کلافهایی TM در اختیار داریم، مراحل ساخت را بهتر و ساده‌تر خواهیم فهمید. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه

[۲] وقتی از نماد f_* استفاده می‌کنیم، بایستی متوجه باشیم که «f» در واقع به معنی سه تایی (f, M, N) است که $f : M \to N$. نگاشت همانی Id_U از U به خودش و نگاشت احتوی $i : U \hookrightarrow M$ متفاوتند، زیرا نگاشتهای $\mathrm{Id}_{U*} : TU \to TM$ و $i_* : TU \to TM$ مشخصاً متفاوتند (هر یک TU را به مجموعه‌ای خاص می‌نگارد).

$x_* : TU \to T(x(U))$ یک هم ارزی خواهد بود (معکوس این نگاشت، $(x^{-1})_*$ است). چون TU اساساً همان $(TM)|_U$ است، و $T(x(U))$ نیز اساساً همان $x(U)\times\mathbb{R}^n$ می‌باشد، هر نقطهٔ $e\in\pi^{-1}(p)$ ای توسط x_* به زوجی به شکل $(x(p),v)$ برده می‌شود، که در اینجا v عنصری از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد (و چون x_* فضای $\pi^{-1}(p)$ را بشکل ایزومورف روی $\{p\}\times\mathbb{R}^n$ می‌نگارد، هر v ای از $\mathbb{R}^n$ نیز به همین شکل ظاهر خواهد شد). اگر y دستگاه مختصاتی دیگری باشد، آنگاه به ازاء یک $w\in\mathbb{R}^n$ ای $y_*(e)$ با $(y(p),w)$ برابر است. به راحتی می‌توان ارتباط بین بردارهای v و w را مشخص نمود؛ چون $(x(p),v)$ توسط $y_*\circ x_*^{-1}=(y\circ x^{-1})_*$ به $y(p,w)$ نگاشته می‌شود، چنانچه $(y\circ x^{-1})_*$ را بعنوان «$(y\circ x^{-1})_*$ قدیم» تلقی کنیم، داریم

$$w=D(y\circ x^{-1})(x(p))(v) \qquad (۲.۳)$$

این شرط بدون اینکه کلافها مشخص باشند، با معنی و قابل استناد است. این همان نکته‌ای است که ما را قادر به تعریف TM می‌سازد.

اگر x و y دو دستگاه مختصات با دامنه‌های شامل p باشند و $v,w\in\mathbb{R}^n$، آنگاه تعریف می‌کنیم

$$(x,v)\underset{p}{\sim}(y,w) \iff w=D(y\circ x^{-1})(x(p))(v)$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، به سادگی می‌توان تحقیق نمود که $\underset{p}{\sim}$ رابطه‌ای هم ارزی است؛ کلاس هم ارزی شامل (x,v) را با نماد $[x,v]_p$ نشان می‌دهیم. این کلاسهای هم ارزی را بردارهای مماس در p نامیده و مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس در $p\in M$ را با T_pM نمایش می‌دهیم؛ نگاشت π کلاسهای هم ارزی نسبت به $\underset{p}{\sim}$ را به p می‌نگارد. با فرمولهای

$$[x,v]_p+[x,w]_p:=[x,v,w]_p \quad , \quad a.[x,v]_p:=[x,a.v]_p$$

ساختار فضای برداری بر $\pi^{-1}(p)$ تعریف می کنیم. این تعریف مستقل از انتخاب دستگاه مختصاتی x یا y است، چرا که نگاشت $D(y\circ x^{-1})(x(p))$ ایزومورفیسمی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ است.

تعریف جدید برای TM، باعث نگاشتی یکبیک و پوشا به شرح زیر می‌شود:

$$t_x:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n \quad [x,u]_p\mapsto(q,v) \qquad (۳.۳)$$

دوست داریم که این گونه نگاشتها همیومورفیسم باشند، بنابراین لازم است به ازاء هر مجموعهٔ باز $A\subset U\times\mathbb{R}^n$، مجموعهٔ $t_x^{-1}(A)$ باز باشد، و لذا هر اجتماعی از این

مجموعه‌ها نیز باید باز باشد. متری بر TM وجود دارد که مجموعه‌های باز آن، درست همین مجموعه‌ها هستند. اما اثبات این امر کمی حساس است و از این رو به عنوان بخشی از یک مسالهٔ به خواننده سپرده می‌شود.

به این ترتیب، یک کلاف $\pi : TM \to M$ در اختیار داریم. تار $\pi^{-1}(p)$ را با نماد T_pM نشان نمی‌دهیم، درست شبیه نماد $T_p\mathbb{R}^n$. ابته، شاید نماد T_pM بهتر باشد. اگر $f : M \to N$، و (x, U) و (y, V) دستگاه مختصاتی حول بترتیب p و $f(p)$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$f_*([x, y]_p) := [y, D(y \circ f \circ x^{-1})(x(p))(v)]_{f(p)} \qquad (۴.۳)$$

البته، بایستی تحقیق شود که این تعریف مستقل از انتخاب x و y است (باز هم تمرین).

در این صورت، شرط (۱) از قضیه بدیهی است. برای اثبات (۲)، t^n را به صورت t_{Id} تعریف می‌کنیم که Id نگاشت همانی $\mathbb{R}^n$ است و t_x در (۳.۳) تعریف شده است، با اینکه تحقیق تعویضپذیری دیاگرام مشکلاتی دارد، حکم (۲) واضح است.

شرط (۳) نیز مشخصاً بدیهی است. در واقع، کلاف TU روی $U \ni p$ تقریباً همان تار TM بر p است؛ تنها تفاوت آن این است که هر کلاس هم ارزی برای M، عناصر بیشتری دارد، زیرا در M دستگاههای مختصاتی بیشتری گرد p وجود دارد، تا دستگاههای مختصاتی در $M \supset U$ و گرد p. $\square$

از این پس، کلاف $\pi : TM \to M$ را **کلاف مماس به** M می‌نامیم. اگر $i : M \to \mathbb{R}^k$ نشاننده باشد، آنگاه TM با $T(M, i)$ هم ارز است. در واقع، اگر (x, U) دستگاهی مختصات حول p باشد، و Id نگاشت یا دستگاه مختصاتی بدیهی $\mathbb{R}^k$ یاشد، آنگاه بنابه (۴.۳) داریم

$$\begin{array}{c} i_*([x, v]_p) \;=\; \Big[\mathrm{Id}, D(i \circ x^{-1})(p)(v)\Big]_{i(p)} \\ \Big\downarrow t^n \;=\; t_{\mathrm{Id}} \\ \Big(i(p), D(i \circ x^{-1})(x(p))(v)\Big) \in T_p(M, i) \end{array}$$

پس $t^n \circ i_*$ یک هم ارزی است. اما $T(M, i)$ هیچ نقش دیگری در این داستان ایفاء نمی‌کند، و از این پس، از نماد TM بجای آن استفاده می‌کنیم.

اکنون که موفق به ساخت کلافی بر M دلخواه شدیم که با $T(M, i)$ هم ارز است، باید مشخص کنیم که این ساخت تا چه اندازه اتفاقی است. آیا کلافهای دیگر با این ویزگیها می‌توانیم بیابیم؟ پاسخ مثبت است، و دو نوع مختلف از چنین کلافهایی را در ادامه خواهیم ساخت.

به عنوان اولین مثال، منحنی‌هایی $c : (-\omega,\omega) \to M$ را در نظر می گیریم، که هر یک در یک همسایگی حول ۰ تعریف می‌شوند و $c(0) = p$. اگر (x, U) دستگاه مختصاتی‌ای گرد p باشد، تعریف می کنیم

$$c_1 \underset{p}{\approx} c_2 \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{به عنوان نگاشتی از } x\circ c_2, x\circ c_1 \\ \text{.به } \mathbb{R}^n \text{ در ۰ مشتق برابر دارند } \mathbb{R} \end{array}$$

کلاسهای هم ارزی به ازاء $p \in M$ های دلخواه، عناصر کلاف جدید ما $T'M$ هستند. به ازاء نگاشت $f : M \to N$ نگاشتی $f_\#$ وجود دارد که کلاس هم ارزی c نسبت به $\approx_p$ به کلاس هم ارزی $f\circ c$ نسبت به $\approx_{f(p)}$ نگاشته می‌شود. بدون پرداختن به جزئیات، اظهار می کنیم که بسادگی می توان نشان داد که این مثال حقیقتاً همان TM است. برای این منظور کافی است $[x,v]_p$ را به کلاس هم ارزی $x^{-1}\circ y$ نسبت به γ نظیر کنیم که γ منحنی‌ای در $\mathbb{R}^n$ با $\gamma'(0) = v$ و $f_\#$ را نیز به f_* متناظر کنیم.

در مثال دوم، اشیاء چندان ساده نیستند. بردار مماس در p را عملگری خطی ℓ تعریف می‌کنیم که بر مجموعهٔ همهٔ توابع هموار f تعریف می‌شود و «یک مشتق در p است» به این معنی که

$$\ell(fg) = f(p)\ell(q) + g(p)\ell(f)$$

قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که عملگرهای $\ell = (\partial/\partial x^i)\big|_p$ این ویژگی را دارند. روشن است که اگر ℓ یک چنین عملگری باشد و f و g در یک همسایگی از p برابر باشند، آنگاه $\ell(f) = \ell(g)$. این شرط عملاً برای هر مشتقی ℓ بر قرار است. زیرا، اگر در یک همسایگی از p داشته باشیم $f = 0$، آنگاه تابع هموازی مانند $h : M \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $h(p) = 1$ و $\operatorname{Supp}(h) \subset f^{-1}(0)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &= \ell(0) = \ell(fh) \\ &= f(0)\ell(h) + h(0)\ell(f) = 0 + \ell(f) \end{aligned}$$

حال اگر در یک همسایگی از p داشته باشیم $f = g$، آنگاه

$$0 = \ell(f-g) = \ell(f) - \ell(g)$$

پس چنانچه f تنها بر یک همسایگی از p تعریف شده باشد، $\ell(f)$ را می‌توان محاسبه نمود: کافی است h را طوری انتخاب کنیم که در یک همسایگی از p برابر یک باشد و $\operatorname{Supp}(h) \subset f^{-1}(0)$ و سپس $\ell(f)$ را $\ell(fh)$ تعریف کنیم.

مجموعهٔ همهٔ چنین عملگرهایی یک فضای برداری است، ولی به هیچ دلیلی بعد آن از قبل معلوم نیست. ذیلاً با تعیین مقدار آن می‌پردازیم:

۲.۴.۳ لم. گیریم f تابعی هموار همسایگی باز محدب U از 0 در $\mathbb{R}^n$ است و $f(0) = 0$. در این صورت توابع هموار $g_i : U \to \mathbb{R}$ وجود دارد، به گونه‌ای که

۱) به ازاء هر $x \in U$ ای

$$f(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x^1, \cdots, x^n)$$

۲) به ازاء هر $i = l, \cdots, n$ ای داریم $g_i(0) = D_i f(0)$.

اثبات: به ازاء $x \in U$، تعریف می کنیم $h_x(t) := f(tx)$. چون U محدب است، h_x به ازاء $0 \leq t \leq 1$ قابل تعریف است. اکنون

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^1 h'_x(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} D_i f(tx).x^i\, dt \end{aligned}$$

بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم $g_i(x) = \int_0^1 D_i f(tx)\, dt$. □

۳.۴.۳ قضیه. مجموعهٔ همهٔ مشتقات خطی در $p \in M^n$ یک ککلاف برداری $n-$بعدی است. در واقع، اگر (x, U) دستگاه مختصاتی حول p باشد، آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

این فضا را تولید می‌کنند، و هر مشتق ℓ ای را به صورت

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell(x^i) \bullet \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

می‌توان نوشت (پس ℓ توسط اعداد $\ell(x^i)$ که $1 \leq i \leq n$ مشخص می‌شود).

اثبات: توجه کنید که

$$\ell(1) = \ell(1 \bullet 1) = 1 \bullet \ell(1) + \ell(1) \bullet 1$$

و بنابراین $\ell(1) = 0$. در نتیجه، به ازاء هر تابع ثابت c بر U داریم $\ell(c) = c \bullet \ell(1) = 0$. حالتی را در نظر بگیرید که $M = \mathbb{R}^n$ و $p = 0$. فرض کنید U محدب است. به

ازاء f دلخواه بر U، توابع g_i را مانند در لم ۲.۴.۳ برای تابع $f-f(\circ)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \ell(f-f(\circ)) = \ell\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Id}^i g_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big[\ell(\mathrm{Id}^i) g_i(\circ) + \mathrm{Id}^i(\circ)\ell(g_i)\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ell(\mathrm{Id}^i)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Id}^i}(\circ) = \circ \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\partial/\partial \mathrm{Id}^i\big|_p$ ها فضای برداری را تولید می‌کنند؛ بوضوح این عملگرها مستقل خطی هستند. استفاده از دستگاه مختصاتی x برای انتقال این احکام از $\mathbb{R}^n$ به M تمرینی ساده است. □

از قضیهٔ ۳.۴.۳ ملاحظه می‌گردد که باز هم کلاف ساخته شده از همهٔ مشتقات در همهٔ نقاط از M نیز حقیقتاً خود TM است. برای مشاهدهٔ این امر کافی است به دستهٔ هم ارزی $[x,a]_p$ عملگر $\ell = \sum_{i=1}^{n} a^i(\partial/\partial x^i)\big|_p$ را نظیر کنیم. فرمول

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$$

که در فصل ۲ نشان داده شد، نشان می‌دهد که

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \iff \sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} b^i\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$$

و این درست همان معادله‌ای است که می‌گوید $(x,a)\sim_p(y,b)$. به سادگی می‌توان نشان داد، که تحت این تناظر به f_* نگاشتی به شرح زیر نظیر می‌گردد:

$$\big[f_*(\ell)\big](g) = \ell(g\circ f)$$

توجه شود که اگر x نمایشگر دستگاه مختصاتی همانی بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} a^i(\partial/\partial x^i)\big|_p$ به a_p نظیر می‌شود، به شرط آنکه $T\mathbb{R}^n$ را با ε^N یکی بگیریم.

معمولاً هیچ تفاوتی میان بردار مماس $v\in T_pM$ و عملگر مشتق نظیرش قایل نیستیم. یعنی، هیچ تفاوتی بین $[x,a]_p$ و $\sum_{i=1}^{n} a^i(\partial/\partial x^i)\big|_p$ قایل نمی‌شویم؛ در نتیجه، اگر f تابعی باشد که بر همسایگی‌ای از p تعریف می‌گردد، از $v(f)$ می‌توانیم سخن به

میان آوریم. در عمل، تعبیر بردار مماس به عنوان یک عملگر مشتق (نظیر) راحت تر است و تأثیر نگاشت f_* نیز با استفاده از رابطهٔ زیر ساده‌تر فهمیده می‌شود:

$$(f_*v)(g) = v(g \circ f)$$

مرسوم است که دستگاه همانی بر $\mathbb{R}^۱$ را با نماد t نشان دهیم، و بجای $(\partial/\partial t)\big|_{t_۰}$ از $(d/dt)\big|_{t_۰}$ استفاده کنیم؛ این پایه‌ای برای $T_{t_۰}\mathbb{R}$ است. اگر $c : \mathbb{R} \to M$ منحنی‌ای دیفرانسیلپذیر باشد، بردار

$$c_*\left(\frac{d}{dt}\right)\Big|_{t_۰}) \in T_{c(t_۰)}M$$

را **بردار مماس به** c **در** $t_۰$ می‌نامیم. این بردار را با نماد آشنای $(dc/dt)\big|_{t_۰}$ نشان می‌دهیم. البته در استفاده از این نمادگزاری باید دقت کرد تا اشتباه معمول در حسابان رخ ندهد: معمولاً در آنجا از نماد dc/dt به معنی $(dc/dt)\big|_t$ استفاده می‌شود که t در dt یک دستگاه مختصاتی است، ولی t در $|_t$ یک نقطهٔ خاص از $\mathbb{R}^۱$ می‌باشد.

همان طور که تاکنون پی برده‌اید، دومین و سومین مثالمان، حقیقتاً همان TM هستند. قضیه‌ای کلی وجود دارد که می‌گوید همهٔ مثالهای قابل ملاحظه، این خاصیت را دارند. اما این قضیه کمی طولانی و خالی از لطف است و لذا در قسمت ضمیمه اثبات می‌گردد.

کلاف مماس TM به منیفلد هموار M ساختاری کاملتر از یک کلاف $n-$صفحه‌ای دلخواه دارد. چون TM موضعاً شبیه $U \times \mathbb{R}^n$ است، پس به وضوح TM خود یک منیفلد است؛ یعنی، طریقی طبیعی برای استوار کردن یک ساختار هموار روی TM وجود دارد. اگر $x : U \to \mathbb{R}^n$ چارتی بر M باشد، آنگاه هر عضو v از $(TM)|_U$ ای را به صورت منحصر بفرد به شکل

$$v = \sum_{i=۱}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \quad , \quad p = \pi(v)$$

می‌توان نوشت. بیائید a^i را با نماد $x^i(v)$ نشان دهیم. در این صورت، نگاشت

$$v \mapsto \Big(x^۱(\pi(v)), \cdots, x^n(\pi(v)), \dot{x}^۱(v), \cdots, \dot{x}^n(p)\Big) \in \mathbb{R}^{۲n}$$

همیومورفیسمی از $(TM)|_U$ به $U \times \mathbb{R}^n$ است. نگاشت حاصل $(x \circ \pi, \dot{x})$، عملاً نگاشت x_* است، به شرطی که TU را با $U \times \mathbb{R}^n$ به شکل استاندارد، یکی بگیریم. اگر (y, V) دستگاه مختصات دیگری باشد، و نیز اگر $v = \sum_n^{j=i}(\partial/\partial y^j)\big|_p$، آنگاه همان طور که

قبلاً ملاحظه شد، داریم

$$b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i D_i(y^i \circ x^{-1})(x(p))$$

پس، اگر $(t,a) = (t^1, \cdots, t^n, a^1, \cdots, a^n) \in \mathbb{R}^{2n}$، آنگاه

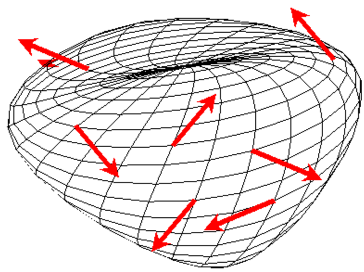
$$y_* \circ (x_*)^{-1}(t,a) = \Big(y \circ x^{-1}(t), \sum_{i=1}^{n} a^i D_i(y^1 \circ x^{-1})(t), \\ \cdots, \sum_{i=1}^{n} a^i D_i(y^n \circ x^{-1})(t) \Big)$$

این عبارت نشان می دهد که $\pi : E \to B$ هموار است.

بنابراین، گردایه‌ای از چارتهای C^∞−مرتبط بر TM داریم، که آنرا به اطلس ماکسیمال می‌توان گسترش داد. بدیهی سازیهای x_* با این ساختار هموار بر TM، هموار می‌شوند. در کل، کلاف برداری $\pi : E \to B$ را در صورتی کلاف برداری **هموار** گوئیم که E و B منیفلد هموار باشند و همهٔ بدیهی سازیهای موضعی آن در گرد هر نقطه‌ای هموار باشند. نتیجه اینکه $\pi : E \to B$ هموار است.

۵.۳ میدان برداری

یادآور می شویم که منظور از یک **برش** از کلاف $\pi : E \to B$، تابعی پیوسته $s : B \to E$ است که بر B رابطهٔ $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$ بر قرار می‌باشد؛ در مورد کلافهای برداری هموار، همواری برش را می‌توان شرط کرد و به مفهوم برش هموار رسید. برشهای TM را **میدان برداری بر** M می‌نامیم. اگر M زیر منیفلدی از $\mathbb{R}^N$ باشد، میدان برداری را به صورت انتخاب پیوستهٔ پیکانهای مماس به M می‌توان تعبیر نمود (به شکل ۱۴.۳ توجه شود). قضیه‌ای که می‌گوید موهای روی یک کره را نمی‌توان شانه زد، اذعان می‌دارد که هیچ میدان برداری بر $\mathbb{S}^2$ که در همه جا مخالف صفر باشد، وجود ندارد. بعداً، نشان خواهیم داد که نمی‌توان دو میدان برداری مماس که در همه جا مستقل خطی‌اند بر کل نوار موبیوس انتخاب نمود.



شکل ۱۴.۳

اغلب میدانهای برداری را با نمادهای X، Y و یا Z نشان داده و بردار $X(p)$ را به صورت X_p نشان می‌دهیم؛ توجه شود که $X_p \in T_pM$. برخی اوقات، تک بردار در T_pM را نیز با X نشان می‌دهیم. اگر TM را به عنوان مجموعهٔ مشتقات در نظر بگیریم، آنگاه به ازاء هر دستگاه مختصاتی (x,U) برای M داریم

$$\forall\, p \in U \quad : \quad X(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

توابع a^i وقتی و تنها وقتی پیوسته اند که هموارند که $X : M \to TM$ پیوسته یا هموار باشد. اگر X و Y میدان برداری باشند، میدان برداری جدید $X+Y$ را به صورت

$$(X+Y)(p) := X(p) + Y(p)$$

تعریف می‌کنیم. به صورت مشابه، اگر $f : M \to \mathbb{R}$، میدان برداری fX را به صورت

$$(fx)(p) := f(p)X(p)$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که اگر X، Y و f هموار باشند، آنگاه $X+Y$ و fX نیز هموار خواهند بود. بر U می‌توانیم بنویسیم

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

که $\partial/\partial x^i$ نمایشگر میدان برداری $p \mapsto (\partial/\partial x^i)\big|_p$ است.

اگر $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار و X میدانی برداری باشد، آنگاه با تأثیر X بر f در هر نقطهٔ دلخواه، تابعی جدید $\bar{X}(f) : X \to \mathbb{R}$ حاصل می‌شود:

$$\bar{X}(f) := X_p(f)$$

با کمی زحمت می‌توان ثابت نمود که اگر X میدان برداری هموار باشد، آنگاه به ازاء هر تابع هموار f، تابع $\bar{X}(f)$ نیز هموار است؛ چرا که، به شکل موضعی از $X(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i(p)(\partial/\partial x^i)|_p$ نتیجه می‌شود $\bar{X}(f) = \sum_{n}^{i=1} a^i(\partial f/\partial x^i)$ که مجموع آخر از حاصلضربهایی از توابع هموار تشکیل شده است. بالعکس، اگر $\bar{X}(f)$ به ازاء کلیهٔ توابع هموار، هموار باشد، آنگاه (چون بازاء هر i ای $\bar{X}(x^i) = a^i$) میدان برداری X هموار است.

گیریم $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ توابع بر M باشد. دیدیم که هر میدان برداری هموار X، موجب تعریف یک تابع $\bar{X} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ می‌گردد. به وضوح $\bar{X}(fg) = f\bar{X}(g) + g\bar{X}(f)$ و $\bar{X}(f+g) = f\bar{X}(f) + \bar{X}(g)$. بنابراین، $\bar{X}$ یک مشتق برای حلقهٔ $\mathcal{F}$ است. معمولاً، میدان برداری هموار X را با مشتق نظیرش $\bar{X}$ یکی می‌گیرند. دلیل این امر آن است که اگر $A : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ مشتقی دلخواه برای حلقهٔ $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه به ازاء یک میدان برداری هموار منحصر بفردی چون X، باید $A = \bar{X}$. در واقع، کافی است تعریف شود

$$X_p(f) := A(f)(p)$$

و به این ترتیب به یک مشتق X_p در p می‌رسیم.

۶.۳ جهتدهی

کلاف مماس نقطهٔ آغاز مطالعهٔ منیفلدهای هموار است، و فعلاً مطلب دیگری در این خصوص لازم نیست بررسی شود. چند فصل بعدی به مطالعهٔ مبسوط کلافهای نظیر به آن می‌پردازد. آهنگ اصلی در همهٔ این فصول، این موضوع است که اگر بتوان ساختاری بر یک فضای برداری تعریف نمود، بر هر کلاف برداری دلخواهی نیز می‌توان ساختار مشابه را تعریف کرد؛ به خصوص بر کلاف مماس هر منیفلد دلخواه. در حال حاضر، مفهوم جدیدی در خصوص منیفلدها مطرح می‌کنیم، که منشاء آن مفهوم جهت بر یک فضای برداری است.

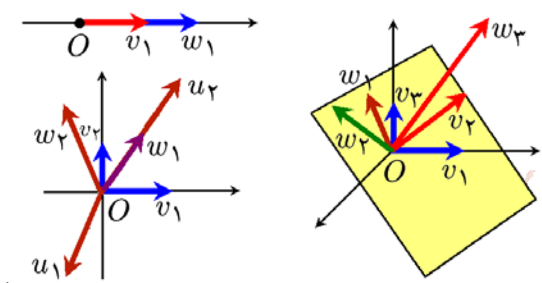
نگاشتهای خطی نامنفرد $f : V \to V$ تشکیل فضایی برداری با بعد متناهی می‌دهند و آنها را به دو بخش می‌توان تقسیم نمود: آنهایی که $\det f > ۰$، و آنهایی که $\det f < ۰$. تبدیلات خطی در گروه اول را **حافظ جهت** و در گروه دوم را **جهت برگردان** می‌گوئیم. مثالی ساده از یک تبدیل خطی جهت برگردان، نگاشت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $f(x) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, -x^n)$ است (انعکاس نسبت به ابر صفحهٔ $x^n = ۰$). هیچ راهی برای گذر پیوسته بین این دو گروه وجود ندارد؛ اگر نگاشتهای

خطی $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را با ماتریسهای $\mathbb{R}^{n^۲}$ یکی بگیریم (یعنی، عملاً با $\mathbb{R}^{n^۲}$)، در این صورت نگاشتهای حافظ جهت و نگاشتهای جهت برگردان، دو زیر منیفلد باز مجزا از مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای نامنفرد (یعنی، آنهایی که $\det \neq ۰$) تشکیل می‌دهند. اصطلاح حافظ جهت فعلاً کمی ثقیل است، چرا که هنوز مفهوم جهت را تعریف نکرده‌ایم، که قرار باشد چیزی آنرا حفظ کند یا خیر! چنانچه بخواهیم از نگاشت حافظ جهت بین دو فضای برداری متفاوت (ولی ایزومورف) V و W بحث کنیم، مسالهٔ جالبتری نمایان می‌شود؛ عملاً این کار ممکن نیست، مگر آنکه بر V و W ساختارهای اضافه‌ای قرار دهیم.

برای ساخت این ساختار جدید، به این نکته توجه می‌کنیم که هر دو پایهٔ مرتب $(v_۱, \cdots, v_n)$ و $(v'_۱, \cdots v'_n)$ برای V یک ایزومورفیسم $f : V \to V$ با ضابطهٔ $f(v_i) = v'_i$ مشخص می‌کنند؛ در این صورت، ماتریس $A = [a_{ij}]$ تابع f به کمک معادلات

$$v'_i = \sum_{j=۱}^{n} a_{ji} v_j$$

قابل حصول است. در صورتی می‌گوئیم $(v_۱, \cdots, v_n)$ و $(v'_۱, \cdots, v'_n)$ **همجهت** هستند که $\det A > ۰$ (یعنی، f حافظ جهت باشد) و آنها را در صورتی **با جهات مختلف** گوئیم که $\det A < ۰$. رابطهٔ همجت بودن به وضوح رابطه‌ای ارزی است، و لذا مجموعهٔ همهٔ پایه‌های مرتب نسبت به این رابطه به دو دستهٔ هم ارزی تقسیم می‌گردد.



شکل ۱۵.۳: نمونه‌هایی از کنجهای مرتب جهتدار و همجهت در $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$

به هر یک از این دو دستهٔ هم ارزی، یک **جهت برای** V گفته می‌شود. دسته‌ای که $(v_۱, \cdots, v_n)$ به آن تعلق دارد را با نماد $[v_۱, \cdots, v_n]$ نشان می‌دهیم. بنابراین، اگر μ جهتی بر V باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی $(v_۱, \cdots, v_n) \in \mu$، که داشته باشیم

$\mu = [v_1, \cdots, v_n]$. اگر μ جهتی مشخص بر V باشد، جهت دیگر را با نماد $-\mu$ نشان می‌دهیم. جهت $[e_1, \cdots, e_n]$ برای $\mathbb{R}^n$ را جهت استاندارد می‌نامیم.
حال اگر (V, μ) و (w, v) دو فضای برداری $n-$بعدی همراه با جهت باشند، ایزومورفیسم $f : V \to W$ را در صورتی **حافظ جهت** (نسبت به μ و ν) گوئیم که اگر $[v_1, \cdots, v_n] = \mu$، آنگاه $[f(v_1), \cdots, f(v_n)] = \nu$؛ روشن است که اگر این شرط برای یک $(v_1, \cdots v_n)$ ای برقرار باشد، آنگاه برای همهٔ انتخابهای ممکن از آن نیز درست است.

بر هر یک از تارهای $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ کلاف بدیهی بدیهی $n-$بعدی $\varepsilon^n(X) = X \times \mathbb{R}^n$، جهت استاندارد $[(x, e_1), \cdots, (x, e_n)]$ را نسبت می‌دهیم. اگر $f : \varepsilon^n(X) \to \varepsilon^n(X)$ هم ارزی و X همبند باشد، آنگاه یا f جهت بر هر تاری را حفظ می‌کند و یا جهت هر تاری را عوض می‌کند؛ زیرا اگر توابع $a_{ij} : X \to \mathbb{R}$ را بوسیلهٔ

$$f(x, e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x)(x, e_j)$$

تعریف کنیم، آنگاه $\det[a_{ij}] : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است و هیچگاه صفر نمی‌شود. چنانچه $\pi : E \to B$ کلاف $n-$صفحه‌ای غیر بدیهی و دلخواه باشد، منظور از یک جهت μ بر E، گردایه‌ای از جهات μ_p برای هر یک از تارهای $\pi^{-1}(p)$ است که به ازاء هر مجموعهٔ باز و همبند $U \subset B$ در شرط سازگاری مشروح در زیر صدق می‌کند:

> اگر $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ هم ارزی باشد، و تارهای $U \times \mathbb{R}^n$ را با جهت استاندارد توأم کنیم، در این صورت یا t بر همهٔ تارها حافظ جهت است و یا در همهٔ تارها جهت برگردان است.

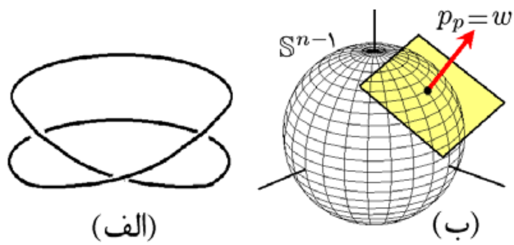
توجه شود که اگر این شرط برای t ای بخصوص بر قرار باشد، و $t' : \pi^{-1}(v) \to U \times \mathbb{R}^n$ هم ارزی دیگر باشد، آنگاه t' نیز خود به خود در همین شرط صدق می‌کند؛ زیرا

$$t' \circ t^{-1} : U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n$$

هم ارزی است. این نشان می‌دهد که جهات μ_p تعریف کنندهٔ یک جهت بر E هستند، مشروط به آنکه شرط سازگاری برای گردایه‌ای از مجموعه‌های U که B را پوشش می‌دهند، برقرار باشد.

اگر کلافی دارای جهت $\mu = \{\mu_p\}$ باشد، جهت دیگری $-\mu = \{-\mu_p\}$ نیز بر آن وجود دارد، اما این طور نیست که هر کلافی دارای جهت باشد. مثلاً، نوار موبیوس در صورتی که بعنوان یک کلاف برداری روی $\mathbb{S}^1$ در نظر گرفته شود، هیچ جهتی ندارد. زیرا در حالی که نوار موبیوس هیچ برشی ندارد، از هر تار آن دو بردار چنان می‌توان

اختیار نمود که گردایهٔ A همهٔ آنها بصورت دو برش بنظر آید. مثلاً، A را $[-1;1] \times \{-1,1\}$ می‌توان گرفت، که در آن $(0,a)$ یا $(1,-a)$ یکی گرفته شده‌اند. در این صورت A بصورت مرز نوار موبیوس M حاصل از $[-1;1] \times [-1;1]$ بنظر می آید (به قسمت الف از شکل ۱۶.۳ توجه شود). چنانچه بر M جهات سازگار μ_p را داشته باشیم، برشی $s : \mathbb{S}^1 \to M$ با انتخاب $s(p)$ برابر بردار منحصر بفرد $s(p) \in A \cap \pi^{-1}(p)$ با $[s(p)] = \mu_p$ تعریف می‌کنیم؛ که این محال است، زیرا M هیچ برشی نمی‌پذیرد.



شکل ۱۶.۳: الف) مرز نوار موبیوس.
ب) جهت بر کره

کلاف را در صورتی **جهتپذیر** گوئیم که آن را بتوان جهتدار نمود، و در غیر این صورت آن را **جهت ناپذیر** می‌گوئیم؛ **کلاف جهتدار** درست عبارت است از یک جفت به شکل (ξ,μ)، که μ جهتی بر کلاف ξ است. این تعریف را در حالت خاص کلاف مماس TM به یک منیفلد مفروض M می‌توان بکار برد. **منیفلد جهتدار** زوج مرتبی است به شکل (M,μ)، مرکب از منیفلد M و یک جهت بر TM. منیفلد $\mathbb{R}^n$ جهتدار است؛ زیرا، به وضوح $T\mathbb{R}^n \cong \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)$، که بر آن جهت استاندارد قابل تعریف است. کره $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ نیز جهتپذیر است. برای مشاهدهٔ این امر، کافی است برای هر نقطهٔ دلخواه $p \in \mathbb{R}^{n-1}$، بردار $w = p_p \in \varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \cong T\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم، که در $i_*(T_p\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq T_p\mathbb{R}^n$ قرار ندارد (مسألهٔ ۲۱)، و سپس تعریف کنیم: اگر $v_1,\cdots,v_{n-1} \in T_p\mathbb{S}^{n-1}$، آنگاه وقتی و تنها وقتی $[v_1,\cdots,v_{n-1}] \in \mu_p$ که $[w, i_*(v_1),\cdots,i_*(v_{n-1})]$ به جهت استاندارد برای $T_p\mathbb{R}^n$ متعلق باشد (به قسمت (ب) از شکل ۱۶.۳ توجه شود). جهتی $\mu = \{\mu_p | p \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ که به این ترتیب تعریف می‌گردد، جهت استاندارد بر $\mathbb{S}^{n-1}$ تعریف می‌گردد.

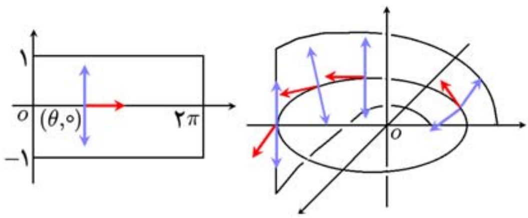
تیوب $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ مثالی دیگر از یک منیفلد جهتپذیر است. برای مشاهدهٔ این امر کافی ایت توجه شود که اگر M_1 و M_2 منیفلدهایی جهتدار باشند، آنگاه تار $T_p(M_1 \times M_2)$ از کلاف مماس $T(M_1 \times M_2)$ را به صورت $V_{1p} \times V_{2p}$ می‌توان نوشت که $(\pi_i)_* : V_{ip} \to T_p(M_i)$ ایزومورفیسم فضاهای برداری است و زیر فضاهای V_{ip} بر حسب p به

شکل پیوسته حرکت می‌کنند (مسألهٔ ۲۶). چون $T\mathbb{S}^1$ بدیهی است، این نشان می‌دهد که $T(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$ نیز بدیهی است و در نتیجه جهتپذیر است. هر تیوب $n-$حلقه‌ای نیز به همین صورت، جهتپذیر می‌باشد (اثبات آن در مسألهٔ ۱۶ مطرح شده است، که در آن کلاف مماس به منیفلد مرزدار نیز تشریح می‌گردد).

نوار موبیوس ساده ترین مثال از یک منیفلد ۲−بعدی جهتناپذیر می‌باشد. قبلاً مشاهده نمودیم که در مورد مدل نشانده شدهٔ M در $\mathbb{R}^3$، بر زیر مجموعهٔ

$$S=\{(2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)|0\leq\theta<2\pi\}\subset M$$

می‌توان بردارهای v_p را به گونه‌ای تعیین نمود که نسبت به p بطور پیوسته حرکت می‌کنند. اما، محال است که بتوان از بین بردارهای حاشور خورده در هر نقطه ($w_p=$ $f_*((0,1)_{(\theta,0)})$ و یا منفی آن) برداری را انتخاب نمود که مجموعهٔ همهٔ آنها تشکیل یم میدان برداری بدهد. چنانچه برای هر $p\in S$ ای جهت μ_p را داشته باشیم، آنگاه w_p را به این صورت می‌توانیم انتخاب کنیم که $[v_p,w_p]\in\mu_p$ و در غیر این صورت $-w_p$ را انتخاب می‌کنیم. که این محال است (به شکل ۱۷.۳ توجه گردد).



شکل ۱۷.۳: نوار موبیوس جهتناپذیر است.

صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}^2$ نیز باید جهتناپذیر باشد، زیرا نوار موبیوس را در بر دارد. در واقع، به ازای هر کلاف جهتپذیر دلخواه $\xi=\pi:E\to B$ و هر زیر مجموعهٔ $B'\subset B$، تحدید $\xi|_{B'}$ نیز جهتپذیر است. جهتناپذیری $\mathbb{P}^2$ را به صورت دیگری نیز می‌توان مشاهده نمود؛ کافی است نگاشت متقاطر $A:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ با ضابطهٔ $A(p)=-p$ را در نظر بگیرید. این نگاشت تحدید نگاشت خطی $\bar{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با همین ضابطه می‌باشد. در این صورت، نگاشت $A_*:T_p\mathbb{S}^2\to T_{-p}\mathbb{S}^2$ درست عبارت است از $(p,v)\mapsto(A(p),\bar{A}(v))$، مشروط به اینکه $T_p\mathbb{S}^2$ را با $\{p\}\times\mathbb{R}^3$ یکی بگیریم. نگاشت $\bar{A}$ جهت برگردان است، چرا که اگر $v_i=(p,u_i)\in T_p\mathbb{S}^2$ با $i=1,2$ پایه‌ای برای $T_p\mathbb{S}^2$ باشد، آنگاه پایه‌های (u_1,u_2,p) و $(\bar{A}(u_1),\bar{A}(u_2),A(p))$ با جهتهای مختلفند.
ین نشان می دهد که اگر μ جهت استاندارد بر $\mathbb{S}^2$ باشد و $[v_1,v_2]\in\mu_p$، آنگاه $[\bar{A}(v_1),\bar{A}(v_2)]\in$

$-\mu_{A(p)}$. بنابراین، نگاشت $A:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$ جهت برگردان است (در صورتی که f نشانده‌ای از یک منیفلد جهتدار به منیفلدی جهتدار باشد و بعد آن منیفلدها یکسان باشد، مفاهیم حافظ جهت بودن و جهت برگردانی با نعنی هستند). از این حکم به راحتی استنباط می‌گردد که $\mathbb{P}^2$ جهتپذیر نیست: اگر $\mathbb{P}^2$ دارای جهت $\nu=\{\nu_{[p]}\}$ باشد و $g:\mathbb{S}^2\to\mathbb{P}^2$ نگاشت با ضابطهٔ $p\mapsto[p]$ باشد، آنگاه چنانچه بخواهیم g حافظ جهت باشد، جهتی $\{\bar\mu_p\}$ بر $\mathbb{S}^2$ حاصل می‌گردد؛ در این صورت باید نگاشت A نسبت به $\bar\mu$ جهت را حفظ نماید، که محال می‌باشد. زیرا، بایستی $\bar\mu$ برابر μ یا $-\mu$ باشد.

در مورد ۳−فضای تصویری $\mathbb{P}^3$ در $\mathbb{R}^4$ وضعیت کمی پیچیده‌تر است. در این حالت نگاشت متقاطر $A:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ حافظ جهت است! اگر $g:\mathbb{S}^3\to\mathbb{P}^3$ نگاشت $p\mapsto[p]$ باشد، آنگاه به وضوح با طلب کردن حافظ جهت بودن g، جهاتی v_p برای نقاط مختلف $\mathbb{P}^3$ می‌توان بدست آورد. در کل، این استدلال نشان می‌دهد که اگر n فرد باشد، آنگاه $\mathbb{P}^n$ جهتپذیر است و در غیر این صورت جهت ناپذیر می باشند.

تعریف ساده‌تری برای جهتپذیری M وجود دارد که در آن از مفهوم کلاف مماس TM اصلاً استفاده نمی‌گردد. بر طبق این تعریف، منیفلد M در صورتی **جهت پذیر** است که زیر مجموعه‌ای $\mathcal{A}'$ از $\mathcal{A}$ (اطلس بر M) وجود دارد که

۱) دامنهٔ همهٔ $(x,U)\in\mathcal{A}'$ ها M را می‌پوشاند.

۲) به ازای هر $(x,U),(y,V)\in\mathcal{A}'$ ای $\det[\partial y^i/\partial x^j]$ بر $U\cap V$ مثبت است.

اکنون اگر μ جهتی بر M بوده و $\mathcal{A}$ اطلسی دلخواه بر M باشد، زیر مجموعه‌ای $\mathcal{A}'$ از $\mathcal{A}$ به گونه‌ای می‌توانیم مشخص کنیم که شامل همهٔ چارتهای (x,U) ای از $\mathcal{A}$ است که نگاشت مشتق نظیرش $x_*:TM|_U\to T(x(U))\cong x(U)\times\mathbb{R}^n$ حافظ جهت باشد (البته، روشن است که جهت بر فضای $x(U)\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{2n}$، جهت استاندارد گرفته شده است). اکنون، شرط (۲) درست به این معنی است که نگاشت مشتق $(y\circ x^{-1})_*:T(x(U))\to T(x(V))$ حافظ جهت باشد که بی درنگ برقرار است. بالعکس، اگر $\mathcal{A}'$ از قبل مشخص شده باشد، تارهای $TM|_U$ را به گونه‌ای می‌توان جهتدار نمود که x_* حافظ جهت باشد، و به این ترتیب جهتی بر TM حاصل می‌گردد. البته، تعریف نخست از نظر هندسی و شهود پذیری بهتر است. با این حال، تعریف مبتنی بر مثبت بودن علامت دترمینان بعداً بسیار بکار خواهد آمد.

۷.۳ هم ارزی کلافهای مماس

اینکه همهٔ شرایط قابل توجه برای کلاف مماس به M برقرار است، درست به این معنی برقراری قضیهٔ ذیل می‌باشد.

۱.۷.۳ قضیه. [۳] اگر به ازاء هر منیفلد دلخواه M، کلافی برداری $T'M$ بر M، و به ازاءِ هر نگاشت هموار $f : M \to N$، یک نگاشت کلافی $(f_\#, f)$ چنان وجود داشته باشد که

۱) قضیهٔ ۳.۴.۱ برقرار باشد،

۲) قضیهٔ ۳.۴.۱ برای هم ارزیهای خاص t'^n برقرار باشد،

۳) قضیهٔ ۳.۴.۱ برای هم ارزیهای خاص $T'U \cong (T'M)|_U$ برقرار باشد،

آنگاه هم ارزیهای $e_M : TM \to T'M$ ای وجود دارند که دیاگرام زیر به ازاء هر نگاشت هموار $f : M \to N$ ای تعویضپذیر است:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \downarrow{\scriptstyle e_M} & & \downarrow{\scriptstyle e_N} \\ T'M & \xrightarrow{f_*} & T'N \end{array}$$

اثبات: جزئیات این اثبات چنان حجیم است که احتمالاً شما را از ادامهٔ آن منصرف می‌کند (و یا بالاخره در جائی از آن خسته می‌شوید)؛ نماد خوشیمن □ خیلی دیر ظاهر می‌گردد. با همهٔ این اوصاف، ایدهٔ اصلی در اثبات فوق العاده ساده است. اگر (u, U) چارتی بب M باشد، آنگاه $(TM)|_U$ و $(T'M)|U$ هر دو شبیه $x(U) \times \mathbb{R}^n$ هستند. بنابراین، نگاشتی وجود دارد که تارهای یکی را به دیگری تصویر می‌کند و بالعکس. آنچه که عملاً مایلیم نشان دهیم این است که شرایط بر TM و $T'M$ تا آنجا مشابهت دارند که حقیقتاً بتوان آنها را یکی گرفت. البته، این دو عملاً خواستهٔ ما را برآورده می‌کنند و تا کنون شاهد مواردی از آن بوده‌ایم؛ با این حال به جهت ایجاد ثبات لازم در کارها، لازم است اثباتی برای این امر اقامه گردد.

[۳] از نقطه نظر کاتگوری، قضایای ۳.۴.۱ و ۳.۷.۱ اذعان می‌دارند که در حد هم ارزی طبیعی بین فانکتورها، یک فانکتور منحصر بفرد از کاتگوری منیفلدهای هموار و نگاشتهای هموار به کاتگوری کلافها و نگاشتهای کلافی وجود دارد که بطور طبیعی با (ε^n, f_*) بر فضاهای اقلیدسی و تحدید فانکتور به زیر منیفلدهای باز، هم ارز است.

گیریم (x, U) دستگاه مختصاتی بر M باشد. دراین صورت هم ارزیهایی به شرح زیر را داریم؛ دو تا از آنها را که با نماد واحد $\cong$ نشان داده‌ایم، هم ارزیهایی هستند که شرط (۳) را به ثبوت می‌رسانند. ترکیب $(t^n|_{x(U)})\circ \cong \circ x_* \circ (\cong)^{-1}$ را با نماد α_x نشان داده‌ایم.

$$\begin{array}{ccccc} TU & \xrightarrow{x_*} & T(x(U)) & \xrightarrow{\cong} & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & & & \downarrow{\scriptstyle t^n|_{x(U)}} \\ (TM)|_U & & \xrightarrow{\alpha_x} & & \varepsilon(\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \end{array}$$

به صورت مشابه، با استفاده ار هم ارزی $\cong'$ برای T'، می‌توانیم β_x را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{array}{ccccc} T'U & \xrightarrow{x_\#} & T'(x(U)) & \xrightarrow{\cong'} & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \\ \downarrow{\scriptstyle\cong'} & & & & \downarrow{\scriptstyle t'^n|_{x(U)}} \\ (T'M)|_U & & \xrightarrow{\beta_x} & & \varepsilon(\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \end{array}$$

در این صورت $\beta_x^{-1}\circ\alpha_x : (TM)|_U \to (T'M)|_U$ یک هم ارزی است، و لذا تار TM روی p را به صورت ایزومورفیسم به تار $T'M$ روی p می‌نگارد که $p\in M$ دلخواه می‌باشد. هدف اصلی ما نشان دادن این مطلب است که ایزومورفیسم مذکور بین تارهای روی p از انتخاب دستگاه مختصاتی مستقل است.

(الف) فرض کنیم $V\subseteq U$ باز است و $y = x|_V$. لازم است که همهٔ نگاشتهای احتوای

$$\begin{array}{ll} i : U \hookrightarrow M & \tilde{i} : V \hookrightarrow M \\ j : V \hookrightarrow U & k : y(U) \hookrightarrow x(U) \end{array}$$

را نماگذاری کنیم. به منظور مقایسهٔ α_x و α_y دیاگرام زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccccccc} (TM)|_U & \xleftarrow{\cong} & TU & \xrightarrow{x_*} & T(x(U)) & \xrightarrow{\cong} & \\ \downarrow{\scriptstyle\subseteq} & (۱) & \downarrow{\scriptstyle j_*} & (۲) & \downarrow{\scriptstyle j_*} & (۳) & \\ (TM)|V & \xleftarrow{\cong} & TV & \xrightarrow{y_*} & T(y(V)) & \xrightarrow{\cong} & \end{array}\qquad (۵.۳)$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(۳)"] & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[r, "t^n|_{x(U)}"] \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, "(۴)"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[d, "\subseteq"] \\
{} \arrow[r, "\cong"] & (T\mathbb{R}^n)|_{y(V)} \arrow[r, "t^n|_{y(V)}"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{y(U)}
\end{tikzcd}$$

هر یک از چهار مربع در دیاگرام بالا تعویضپذیرند. برای ملاحظهٔ این امر در مورد مربع (۱)، آن را به صورت زیر بزرگ نمایی می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd}
(TM)|_V \arrow[d, "\cong"'] & TM \arrow[l, "\subseteq"'] \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[dr, "i_*"] & (TM)|_U \arrow[d, "\cong"] \\
TV \arrow[ur, "\tilde{i}_*"] \arrow[rr, "j_*"] & & TU
\end{tikzcd}$$

دو مثلث در سمت چپ به دلیل وجود شرط (۳) برای TM تعویضپذیرند و مثلث سمت راست نیز چون $\tilde{i} = i \circ j$، تعویضپذیر است. به دلیل اینکه $k \circ y = x \circ j$، مربع (۲) نیز تعویضپذیر می‌باشد. با استدلالی مشابه در مورد مربع (۱)، می شود نشان داد که مربع (۳) نیز تعویضپذیر است؛ در آن نگاشتهای احتوی $x(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ و $y(V) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ بکار می آیند. اکنون، از تعویضپذیری دیاگرام (۵.۳) نتیجه می‌شود که دیاگرام زیر نیز تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
(TM)|_U \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{x(U)} \arrow[d, "\subseteq"] \\
(TM)|_V \arrow[r, "\alpha_y"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{x(V)}
\end{tikzcd}$$

این بدان معنی است که به ازای هر $p \in V$ ای ایزومورفیسم α_y بین تارهای روی p همان ایزومورفیسم القائی از α_x است. به وضوح همین مطلب در مورد β_x و β_y صحیح است. چرا که در استدلال بالا از خواص (۱) تا (۳) استفاده شده است و نه از ساختار بخصوص TM. بنابراین، به ازای هر $p \in M$ ای تساوی $\beta_y^{-۱} \circ \alpha_y = \beta_x^{-۱} \circ \alpha_x$ بر تارهای روی p برقرار است.

(ب) اکنون به لمی نیاز داریم که در مورد TM و $T'M$ به یک شکل قابل اجرا است. این لم را نیز تنها برای TM ثابت می‌کنیم، و چون در آن تنها از خواص (۱) تا (۳) استفاده می‌کنیم، استدلال برای $T'M$ نیز درست می‌باشد.

لم. اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و $B \subseteq \mathbb{R}^m$ باز باشند و $f : A \to B$ نگاشتی هموار، آنگاه دیاگرام زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, "t^n|_A"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[d, "f_* \text{ قدیم}"] \\
TB \arrow[r, "\cong"] & (T\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, "t^m|_B"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{tikzcd}$$

اثبات لم: **حالت ۱.** نگاشتی $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $\bar{f} = f$ بر A. دیاگرام زیر را در نظر بگیرید، که $i : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ و $j : B \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتهای احتوی هستند.

$$\begin{tikzcd}
 & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, "t^n|_A"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[d, "\subseteq"] \\
TA \arrow[ur, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & T\mathbb{R}^n \arrow[r, "t^n"] \arrow[d, "\bar{f}_*"'] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "f_* \text{ قدیم}"] \\
TB \arrow[dr, "\cong"'] & T\mathbb{R}^m \arrow[r, "t^m"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m) \arrow[d, "\subseteq"] \\
 & (T\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, "t^m|_B"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{tikzcd}$$

به وضوح، هر حلقهٔ ممکن در این دیاگرام تعویضپذیر است. این امر موجب می‌شود که دو ترکیب

$$TA \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{t^n|A} \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{\subseteq} \varepsilon^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{f_* \text{ قدیم}} \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)$$

و

$$TA \xrightarrow{f_*} TB \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^m)|_A \xrightarrow{t^m|_B} \varepsilon^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\subseteq} \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)$$

بابرند و این لم را در حالت ۱ به اثبات می‌رساند. زیرا، نگاشتهای «$\bar{f}_*$ قدیم» و «f_* قدیم» بر A برابرند.

حالت ۲. حالت کلی. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر $p \in A$ ای دو نگاشت بر تار روی p یکی هستند.

نگاشتی $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ با $\bar{f} = f$ بر مجموعه‌ای باز A' وجود دارد که $p \in A' \subseteq A$. سپس، دیاگرام به شرح زیر را داریم، که هر $\cong$ از این نکته نتیجه می‌شود که

مجموعه‌ای زیر منیفلد باز دیگری است، و $i : A' \hookrightarrow A$ نگاشت احتوی است.

$$
\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, equal] \arrow[dd, "f_*"'] & TA \arrow[r] & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, equal] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \arrow[dd, "\bar{f}_*\ \text{قدیم}"] \\
 & TA' \arrow[u, "(f|_{A'})_*"'] \arrow[d, "(f|_{A'})_*"] \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur, phantom, "(۲)"] \arrow[dl, phantom, "(۱)"] & (T\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[r, "t^n|_{A'}"] \arrow[ur, phantom, "(۳)"] \arrow[d, phantom, "(۴)"] & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[d, "\text{قدیم}\ (f|_{A'})_*"'] \arrow[dr, phantom, "(۵)"] & \\
TB \arrow[r, equal] & TB \arrow[r, "\cong"] & (T\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, "t^m|_B"] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B \arrow[r, equal] & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{tikzcd}
\qquad (۶.۳)
$$

تعویضپذیری حلقه‌های مستطیل شکل (۱)، (۳) و (۵) بدیهی است و در مورد (۴) نیز از حالت ۱ نتیجه می‌گردد. برای مشاهدۀ تعویضپذیری حلقۀ (۲) (که مثلث در وسط است)، آن را دیاگرام بزرگتری به شرح زیر می‌نشانیم که $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشت احتوی است و سایر نگاشتها را نیز به دلیل ایجاد سهولت در مراجعات بعدی، اسمگذاری نموده‌ایم.

$$
\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\cong_{(k)}"'] & TA' \arrow[d, "\cong_{(\lambda)}"] \arrow[dr, "j_*"] & \\
(T\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[r, "\subseteq_{(\mu)}"] & (T\mathbb{R}^n)|_A \arrow[r, "\subseteq_{(\mu)}"] & T\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

برای اثبات $\mu \circ k = \lambda \circ i_*$، کافی است اثبات گردد که $\nu \circ \lambda \circ i_* = \nu \circ \mu \circ k$، زیرا ν یکبیک است. بنابراین، کافی است اثبات گردد که $j_* \circ i_* = \nu \circ \mu \circ k$، که به معنی تعویضپذیری دیاگرام

$$
\begin{tikzcd}
TA' \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, "(j \circ i)_*"] & \\
(T\mathbb{R}^n)|_{A'} \arrow[r, "\subseteq"] & T\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

است. چون $j \circ i$ درست نگاشت احتوی A' در $\mathbb{R}^n$ است، این امر محقق می‌باشد.

تعویضپذیری دیاگرام (۶.۳) نشان می‌دهد که ترکیب

$$TA \xrightarrow{f_*} TB \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^m)|_B \xrightarrow{t^m|_B} t^m(\mathbb{R}^m)|_B$$

و نیز

$$TA \xrightarrow{\cong} (T\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{t^n|_A} \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \xrightarrow{\bar{f}_*\ \text{قدیم}} \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B$$

بر $(TA)|_{A'}$ برابرند، و لذا «$\bar{f}_*$ قدیم» را بر A' با «f_* قدیم» می‌توان تعویض نمود. به بیان دیگر، دو ترکیب در همسایگی‌ای از هر $p \in M$ با هم برابرند و بنابراین لم اثبات شد. $\square$

(ج) حال فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو دستگاه مختصات دلخواه با $p \in U \cap V$ هستند. برای اثبات اینکه $\beta_y^{-1} \circ \alpha_y$ و $\beta_x^{-1} \circ \alpha_x$ بر تار در p از TM یکی ایزومورفیسم را القاء می‌کنند، بدون کاستن از کلیت بحث می‌توانیم فرض کنیم که $U = V$، زیرا کافی است قسمت (الف) را برای x و $x|_{U\cap V}$ و همچنین y و $y|_{U\cap V}$ اجرا کنیم.

فرض کنیم $U = V$، در این صورت دیاگرام (۷.۳) مشروح در زیر تعویضپذیر است. زیرا، تعویضپذیری مثلث سمت چپ بدیهی است، و بنابه قسمت (ب)، مستطیل سمت راست نیز تعویضپذیر است. اکنون، دیاگرام (۷.۳) نشان می‌دهد که $(y\circ x^{-1})_* \circ$ قدیم$\alpha_x = \alpha_y$. درست همین استدلال برای T' صحیح است. یعنی، $(y \circ x^{-1})_* \circ$ قدیم$\beta_x = \beta_y$. اکنون، حکم مورد نظر $\beta_x^{-1}\circ\alpha_x = \beta_y^{-1}\circ\alpha_y$ بی‌درنگ حاصل می‌گردد.

$$\begin{array}{ccccccc}
TU & \xrightarrow{x_*} & T(x(U)) & \xrightarrow{\cong} & (T\mathbb{R}^n)|_{x(U)} & \xrightarrow{t^n|_{x(U)}} & \varepsilon^n(\mathbb{R}^n)|_A \\
{\scriptstyle\cong}\downarrow & \searrow{\scriptstyle y_*} & \downarrow{\scriptstyle (y\circ x^{-1})_*} & & & & \text{قدیم}\ {\scriptstyle (y\circ x^{-1})_*}\downarrow \\
(TM)|_U & & T(y(U)) & \xrightarrow{\cong} & (T\mathbb{R}^n)|_{y(U)} & \xrightarrow{t^n|_{y(U)}} & \varepsilon^m(\mathbb{R}^m)|_B
\end{array} \qquad (۷.۳)$$

به این ترتیل، یک نگاشت—کلافی خوشتعریف $TM \to T'M$ (مرکب از اجتماع همهٔ $\beta_x^{-1} \circ \alpha_x$ ها) داریم، که به وضوح یک هم ارزی e_M است. اثبات $e_N \circ f_* = f_\# \circ e_M$ به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده. $\square$

۸.۳ تمرینات

۱) گیریم M مجموعه‌ای دلخواه، و $\{(x_i, U_i)\}$ دنباله‌ای از توابع یکبیک $x_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ با $U_i \subset M$ و $\pi(U_i)$ باز در $\mathbb{R}^n$ است، به گونه‌ای که هر یک از توابع

$$x_i \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow x_j(U_i \cap U_j)$$

پوسته است. به نظر می رسد که بایستی M متری بپذیرد که هر یک از U_i ها نسبت آن بازند و هر یک از x_i ها همیومورفیسم هستند. اما در حقیقت، این طور نیست.

(الف) گیریم $M = \mathbb{R} \cup \{*\}$، که $* \notin \mathbb{R}$. گیریم $U_1 = \mathbb{R}$ و $x_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ همانی است، و $U_2 = \mathbb{R} - \{0\} \cup \{*\}$ با $x_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$x_2(a) = a \ \ , \ \ a \neq 0, * \ \ , \ \ x_2(*) = 0$$

نشان دهید هیچ متری بر M با ویژگی خواسته شده وجود ندارد. برای این منظور، نشان دهید که هر همسایگی از 0، همهٔ همسایگی‌های $*$ را قطع می‌کند. از این گذشته، شبه متر ρ بر M (یعنی تابعی $\rho : M \times M \to M$) که همهٔ خواص متر را دارد بجز اینکه ممکن است به ازاء $p \neq q$ ای $\rho(p, q) = 0$) چنان وجود دارد که هر یک از U_i ها نسبت به آن بازند و هر یک از x_i ها نیز همیومورفیسم هستند.

(ب) اگر $A \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، دنباله‌ای $A_1, A_2, A_3, \cdots$ از زیر مجموعه‌های باز A چنان وجود دارد که هر یک از زیر مجموعه‌های باز در A، اجتماعی از A_i های بخصوص است.

(ج) دنبالهای از توابع پیوسته $f_i : A \to [0, 1]$ با $\mathrm{Supp}(f_i) \subseteq A$ وجود دارد که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌سازد؛ اگر C بسته و $p \in A - C$، آنگاه f_i ای با $f_i(p) \not\in \overline{f_i(A \cap C)}$ وجود دارد. [راهنمایی: ابتدا به کمک (ب)، دنبالهٔ جفت مجموعه‌های (A_i, A_j) را طوری مرتب کنید که $\bar{A}_i \subset A_j$.

(د) گیریم $f_{i,j}$ که $j = 1, 2, 3, \cdots$ دنباله‌هایی مثل در (ج) برای هر یک از مجموعه‌های باز $x_i(U_i)$ باشند. $g_{i,j} : M \to [0, 1]$ را به صورت

$$g_{i_{ij}}(p) = \begin{cases} f_{i,j}(p) & \text{اگر } p \in U_i \\ 0 & \text{اگر } p \notin U_i \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. همهٔ $g_{i,j}$ ها در دنباله‌ای خاص $C_1, C_2, C_3, \cdots$ مرتب کرده و فرض کنید d متری کراندار بر $\mathbb{R}$ است و ρ را بر M به صورت

$$\rho(p, q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(G_i(p), G_i(q))$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید ρ شبه متر مورد نظر است.

(ه) فرض کنید به ازاء هر $p, q \in M$ ای یک U_i و یک U_j با $p \in U_i$ و مجموعه‌های باز $B_i \subset x_i(U_i)$ و $B_j \subset x_j(U_j)$ چنان وجود دارند که $p \in x_i^{-1}(B_i)$، $q \in x_j^{-1}(B_j)$ و $x_i^{-1}(B_i) \cap x_i^{-1}(B_i) = \emptyset$. نشان دهید که ρ عملاً یک متر بر M است.

۲) (الف) فرض کنید (x,U) و (y,V) دو دستگاه مختصات هستند، و دو نگاشت بر TM به صورت

$$\begin{array}{ll} t_x:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n & [x,u]_q\longrightarrow(q,v)\\ t_y:\pi^{-1}(V)\to V\times\mathbb{R}^n & [y,w]_q\longrightarrow(q,w)\end{array}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید مجموعه‌های به شکل $t_x^{-1}(A)$ که $A\subset U\times\mathbb{R}^n$ باز است و در $\pi^{-1}(U\cap V)$ قرار دارند، درست همان مجموعه‌های به شکل $t_y^{-1}(B)$ که $B\subset V\times\mathbb{R}^n$ باز است، می‌باشد.

(ب) نشان دهید که اگر متری بر TM چنان باشد که به ازاء یک گردایه (x_i,U_i) با $M=\cup_i U_i$، هر یک از t_{x_i} ها همیومورفیسم باشند، آنگاه همهٔ t_x ها همیومورفیسم هستند.

(ج) از مسالهٔ ۲۱ نتیجه بگیرید که بر TM متری وجود دارد که هر یک از t_x ها نسبت به آنها همیومورفیسم هستند.

۳) نشان دهید که در تعریف هم ارزی کافی است فرض شود $E_1\to E_2$ پیوسته است. (برای اثبات پیوستگی معکوس، توجه کنید که به شکل موضعی نگاشتی از $U\times\mathbb{R}^n$ به $U\times\mathbb{R}^n$ می‌باشد).

۴) نشان دهید که در تعریف کلاف مماس، پیوستگی نگاشت $f:B_1\to B_2$، بطور خودکار از پیوستگی $\tilde f:E_1\to E_2$ نتیجه می‌گردد.

۵) هم ارزی ضعیف بین دو کلاف روی یک فضای پایه B، عبارت است از یک نگاشت کلافی $(\tilde f,f)$، به گونه‌ای که $\tilde f$ بر هر تاری ایزومورفیسم است، و f همیومورفیسمی از B به روی خودش است. دو کلاف غیر هم ارز ولی هم ارز ضعیف روی فضاهای پایه‌ای به شرح ذیل بیابید:

(الف) اجتماع مجزای دو دایره

(ب) شکل بینهایت ∞

(ج) تیوپ.

٦) فرض کنید $(\tilde f,f)$ نگاشتی کلافی است. در این صورت، نشان دهید $\tilde f=g\circ h$ که g و h چنان نگاشتهای پیوسته‌ای هستندکه h هر تار را بطور خطی به روی تاری دیگر می‌برد، و g بر هر یک از تارها ایزومورفیسم می‌باشد.

۷) (الف) نشان دهید که به ازاء هر کلاف $\pi : E \to B$، نگاشت $s : B \to E$ که به ازاء هر $p \in B$ ای $s(p)$ صفر در $\pi^{-1}(p)$ است، یک برش برای π است.

(ب) نشان دهید که هر کلاف $n-$صفحه‌ای ξ وقتی و تنها وقتی بدیهی است که n برش s_1، . . . و s_n وجود داشته باشند، که در همه جا مستقل خطی هستند. به بیان دیگر، به ازاء هر $p \in B$ ای $s_1(p), \cdots, s_n(p) \in \pi^{-1}(p)$ مستقل خطی هستند.

(ج) نشان دهید که هر کلاف $n-$صفحه‌ای دارای n برش مستقل خطی است، البته به شکل موضعی!

۸) (الف) نشان دهید که $\tilde{p}$ بر مجموعهٔ زوجهای (x, v)، رابطهٔ هم ارزی است.

(ب) تحقیق کنید که تعریف f_* مستقل از انتخاب دستگاههای مختصاتی x و y مورد استفاده در تعریف آن می‌باشد.

(ج) جزئیات مانده در قضیهٔ ۱.۴.۳ را تحقیق کنید.

۹) (الف) نشان دهید که تناظر بین TM و دسته‌های هم ارزی منحنی‌هایی که $[x, v]_p$ ها را به دسته‌های $\approx_p$ هم ارزی از $x^{-1} \circ \gamma$ نظیر می‌کنند، که γ منحنی‌ای در $\mathbb{R}^n$ با $\gamma'(0) = v$ است، نگاشت f_* را به $f_\#$ نظیر می‌کند.

(ب) نشان دهید که با توجه به وجود تناظر دوسویی $[x, a]_p \to \sum_i a^i (\partial/\partial x^i)\big|_p$، نگاشت f_* را به صورت $[f_*(\ell)](q) = \ell(g \circ f)$ می‌توان تعریف نمود.

۱۰) اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی روی $\mathbb{R}$ باشد، ساختاری هموار بر V تعریف نموده و همیومورفیسمی از حاصلضرب $V \times V$ به TV بیابید که مستقل از انتخاب پایه باشد. مثل در حالت $\mathbb{R}^n$، مثل در حالت $\mathbb{R}^n$، به ازاء $v, w \in V$ از نماد $v_w \in V_w$ برای نمایش بردار (v, w) استفاده کنید.

۱۱) نشان دهید که اگر $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه به ازاء نگاشتی هموار $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داریم

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + x^2 h(x)$$

۱۲) (الف) گیریم $\mathcal{F}_p$ مجموعهٔ همهٔ توابع هموار $f : M \to \mathbb{R}$ با $f(p) = 0$ است و $\ell : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ عملگری خطی است که به ازاء همهٔ $f, g \in \mathcal{F}_p$ ها $\ell(fg) = 0$. نشان دهید ℓ توسیعی منحصر بفرد به یک مشتق دارد.

(ب) گیریم W زیر فضای برداری از $\mathcal{F}_p$ تولید شده توسط همهٔ حاصلضربهای fg با $f, g \in \mathcal{F}_p$ است. نشان دهید فضای برداری همهٔ مشتقات در p با فضای دوگان $(\mathcal{F}_p/W)^*$ ایزومورف است.

(ج) چون بعد $(\mathcal{F}_p/W)^*$ برابر با بعد منیفلد M است، پس $\mathcal{F}_p/W$ نیز همان بعد را دارد. اگر x دستگاهی مختصاتی با $x(p) = \circ$ باشد، نشان دهید که همدسته‌های $x^1 + W$، . . . و $x^n + W$ پایه‌ای برای $\mathcal{F}_p/W$ تشکیل می‌دهند (از لم ۲.۴.۳ استفاده کنید). همان طور که در مسالهٔ بعد مشهود است، در مورد توابع C^1 وضعیت کاملاً متفاوت است.

۱۳) (الف) گیریم V فضای برداری همهٔ توابع C^1 به شکل $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با $f(\circ) = \circ$ است و W زیر فضای از V تولید شده توسط همهٔ حاصلضربهای در V است. نشان دهید که به ازاء همهٔ $f \in W$ ها $\lim_{x\to\circ} f(x)/x$ وجود دارد.

(ب) به ازاء $\circ < \epsilon < 1$، فرض کنیم

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} x^{1+\epsilon} & x \geq \circ \\ \circ & x \leq \circ \end{cases}$$

نشان دهید همهٔ f_ϵ ها در V هستند، و همگی در V/W عناصر مستقل خطی می‌سازند.

(ج) نتیجه بگیرید $(V/W)^*$ با بعد $c^c = 2^c$ است که c کاردینالیتی $\mathbb{R}$ است.

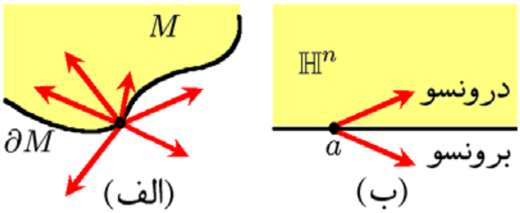
۱۴) نشان دهید که اگر $f : M \to N$، و f_* بر هر تاری صفر باشد، آنگاه f بر هر مؤلفهٔ M ثابت است.

۱۵) (الف) نگاشت $f : M \to N$ وقتی و تنها وقتی ایمرشن است که f_* بر هر تار از TM یکبیک باشد. کلی‌تر، رتبهٔ f در $p \in M$ برابر رتبهٔ تبدیل خطی $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ است.

(ب) اگر $f \circ g = f$، که g دیفیئومورفیسم است، نشان دهید که رتبهٔ $f \circ g$ در a با رتبهٔ f در $g(a)$ برابر است. (با مسالهٔ ۲—۳۳—(د) مقایسه کنید.)

۱۶) (الف) اگر M مرزدار باشد، کلاف مماس TM درست مثل حالت M معمولی تعریف می‌شود: عناصر T_pM دسته‌های هم ارزی $\tilde{p}$ از جفتهای (x, v) هستند. با اینکه x همسایگی از $p \in \partial M$ را بروی $\mathbb{H}^n$ می‌برد نه بروی $\mathbb{R}^n$، اما هنوز هم v بر کل $\mathbb{R}^n$ حرکت می‌کند. نتیجتاً، در T_pM بردارهای مماس در همهٔ راستاهای

وجود دارد. اگر $p \in \partial M$ و $x : U \to \mathbb{H}^n$ دستگاهی مختصاتی حول p باشد، آنگاه $T_pM \supseteq x^{-1}(T_{x(p)}\mathbb{R}^{n-1})$ زیر فضای برداری است. نشان دهید که این فضا مستقل از انتخاب x نیست؛ در واقع، اگر $i : \partial M \to M$ ایمرشن باشد، آن با $i_*(T_p(\partial M))$ برابر است.



شکل ۱۸.۳ : (الف) بردارهای مماس بر مرز منیفلد. (بَ) بردارهای داخلی و خارجی.

(ب) گیریم $a \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{H}^n$. بردار مماس بر $T_a\mathbb{H}^n$ را دزر صورتی داخلی گوئیم که نسبت به یکی گیری $T\mathbb{H}^n$ با $\varepsilon(\mathbb{H}^n)$، به شکل (a, v) باشد که $v^n > 0$. بردار $v \in T_pM$ که در $i_*T_p(\partial M)$ نیست را داخلی گوئیم هرگاه $x_*(v) \in T_{x(p)}\mathbb{H}^n$ داخلی باشد. نشان دهید که این تعریف از انتخاب دستگاه مختصاتی x مستقل است.

(شکل)

(ج) نشان دهید که اگر M دارای جهت μ باشد، آنگاه ∂M جهتی منحصر بفرد $\partial\mu$ می‌پذیرد که $(\partial\mu)_p = [v_1, \cdots, v_{n-1}]$ اگر و فقط اگر به ازاء هر بردار خارجی $w \in T_pM$ ای $[w, i_*(v_1), \cdots, i_*(v_{n-1})] = \mu_p$.

(د) اگر μ جهت معمولی $\mathbb{H}^n$ باشد، نشان دهید که $\partial\mu$ برابر است با $(-1)^n$ ضرب در جهت معمولی موجود بر $\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{H}^n$. (دلیل این انتخاب در فصل ۸ روشن می‌شود.)

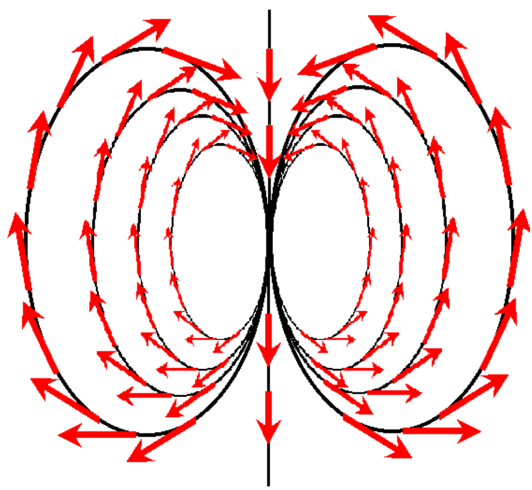
(ه) فرض کنید مسالهٔ ۱۴ از فصل ۲ برقرار است. نگاشت $g : \partial M \times [0, 1) \to \partial N \times [0, 1)$ را به صورت $g(p, t) = (f(p), t)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که در این صورت، با یکی گیری $(\beta^{-1})_* \circ g_* \circ \alpha_*(v) \in T_{f(p)}(\partial N)$ و $v \in T_p(\partial M)$، TP از روی $TM \cup TM$ قابل ساخت است.

(و) اگر M و N دارای جهت بترتیب μ و ν باشند و $f : (\partial M, \partial\mu) \to (\partial N, \partial\nu)$ حافظ جهت باشد، نشان دهید P جهتی دارد که با μ بر $M \subset P$ و ν بر $N \subset P$ سازگار است.

(ز) فرض کنید M عبارت از $\mathbb{S}^۲$ است که دو قرص از سطح آن جدا کرده‌ایم و $N = [۰, ۱] \times \mathbb{S}^۱$. گیریم f دیفیئوموفیسمی از M به N است که بر یک کپی از $\mathbb{S}^۱$ حافظ جهت است و بر دیگری، برگردان جهت می‌باشد. منیفلد نتیجه P چه است؟

۱۷) نشان دهید $T\mathbb{R}^۲$ با فضای حاصل از $T(\mathbb{S}^۲, i)$ با یکی گیری $(p, v) \in T_p(\mathbb{S}^۲, i)$ و $(-p, -v) \in T_{-p}(\mathbb{S}^۲, i)$ همیومورف است.

۱۸) با اینکه بر $\mathbb{S}^۲$ هیچ میدان برداری ناصفری وجود ندارد، بر $\mathbb{S}^۲ - \{(۰, ۰, ۱)\}$ که با $\mathbb{R}^۲$ دیفئومورف است، چنین میدان برداری‌ای وجود دارد. نشان دهید چنین میدان برداری را طوری می‌توان یافت که در حوالی $(۰, ۰, ۱)$ شبیه به میدان برداری نشان داده شده در شکل ۱۹.۳ باشد.



شکل ۱۹.۳

۱۹) فرض کنید نگاشتی $(a, b) \mapsto a \bullet b$ از $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ وجود دارد به گونه‌ای که به ازای هر $a, a_۱, a_۲, b, b_۱, b_۲ \in \mathbb{R}^n$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ ای

$$(a_۱ + a_۲) \bullet b = a_۱ \bullet b + a_۲ \bullet b$$

$$a \bullet (b_۱ + b_۲) = a \bullet b_۱ + a \bullet b_۲$$

$$\lambda(a \bullet b) = (\lambda a) \cdots b = a_۲ \bullet (\lambda b)$$

$$a \bullet (۱, ۰, \cdots, ۰) = a$$

و به ازای هر $a \neq \circ$، یک b ای چنان وجود داشته باشد که $a \bullet b = b \bullet a = (۱, \circ, \cdots, \circ)$. (مثلاً، برای $n = ۱$ کافی است ضرب معمولی را در نظر بگیریم؛ و برای $n = ۲$، ضرب مختلط $(a, b) \bullet (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ را در نظر بگیرید.) گیریم $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ پایهٔ استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ استم ثابت کنید

(الف) هر نقطه در $\mathbb{S}^{n-۱}$ به ازای یک $a \in \mathbb{R}^n$ ای منحصر به فرد به شکل $a \bullet e_۱$ است.

(ب) اگر $a \neq \mathbf{0}$، آنگاه $a \bullet e_۱$، . . . و $a \bullet e_n$ مستقل خطی‌اند.

(ج) اگر $p = a \bullet e_۱ \in \mathbb{S}^{n-۱}$، آنگاه تصاویر $a \bullet e_۱$، . . . و $a \bullet e_n$ $T_p(\mathbb{S}^{n-۱}, i)$ مستقل خطی‌اند.

(د) ضربِ در a پیوسته است: $p \mapsto a \bullet p$.

(ه) $T\mathbb{S}^{n-۱}$ بدیهی است.

(و) $T\mathbb{P}^{n-۱}$ بدیهی است.

هر دو کلاف مماس $T\mathbb{S}^۲$ و $T\mathbb{S}^۳$ بدیهی هستند.ضرب مناسبی بر $\mathbb{R}^۴$ و $\mathbb{R}^۸$ بترتیب با استفاده از چهارتایی‌های همیلتن و هشتایی‌های کیلی قابل تعریف است. چهارتایی‌های همیلتن تعویضپذیر نیستند و اعداد کیلی حتی شرکتپذیر نیز نیستند. قضیه‌ای کلاسیک وجود دارد که می‌گوید «مجموعهٔ اعداد حقیقی، مختلط و چهارتایی‌های همیلتن، تنها مثالهای از ضرب شرکتپذیر بر هیأت اعدا حقیقی هستند» به مقالهٔ پالیس [?] توجه شود. اخیراً، فرانک آدامز با استفاده از توپولوژی جبری ثابت می‌کند که این حکم برای n مساوی ۱، ۲، ۳ و ۸ درست است.

۲۰) (الف) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ایزومورفیسم فضاهای برداری است و فضای حاصل از $\mathbb{R}^n \times [\circ; ۱]$ با یکی گیری $(\circ, v)$ و $(۱, T(v))$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این فضا را به عنوان فضای کلی یک کلاف برداری بر $\mathbb{S}^۱$ می‌توان قلمداد نمود (تعمیم نوار موبیوس).

(ب) نشان دهید کلاف حاضر وقتی و تنها وقتی جهتپذیر است که T حافظ جهت باشد.

۲۱) با نشان دادن اینکه به ازای همهٔ منحنیهای c با $c(\circ) = p$ و به ازای هر t ای $\|c'(t)\| = ۱$، ضرب داخلی $< p, c'(\circ) >$ صفر است، نشان دهید به ازای هر $p \in \mathbb{S}^۲$ ای بردار مماس $p_p \in T_p\mathbb{R}^۳$ به $i_*(T\mathbb{S}^۲)$ متعلق نیست. یاد آوری می‌کنیم که بنابه صفحهٔ ۲۳ از کتاب حسابان بر منیفلدها اثر اسپیواک، رابطهٔ زیر

را داریم:

$$< f,g >' (t) =< f'(t)^t, g(t) > + < f(t), g'(t)^t >$$

۲۲) گیریم M منیفلد هموار دلخواهی است. فرض کنید به ازای هر $A \subset M$ همیومورف با $\mathbb{S}^1$، کلاف $(TM)|_A$ بدیهی باشد. نشان دهید M جهتپذیر است. راهنمایی: هر قوس c از $p_\circ \in M$ به $p \in M$ در یک چنین A ای قرار دارد و لذا $(TM)|_c$ نیز بدیهی است. بنابراین، جهت بر $T_{p_\circ}M$ را به T_pM می‌توان منتقل نمود. بایستی بررسی شود که این انتقال به انتخاب c بستگی ندارد. ابتدا یک جفت c و c' در نظر بگیرید که یکدیگر را در $p_\circ$ و p ملاقات می‌کنند. در کل با شکستن c به قطعات کوچکی که در همسایگی‌های مختصاتی جای گیرند، ممکن است حالتهای در همی به وجود آید.
یادداشت: با استفاده از احکام در ضمیمهٔ فصل ۹ و نیز مسألهٔ ۲۹، می‌توان نتیجه گرفت که اگر M جهتناپذیر باشد، آنگاه همسایگی‌ای از $\mathbb{S}^1 \subset M$ ای وجود دارد که جهتپذیر نیست.

دو مسألهٔ بعدی به ساختهای مهم روی کلافهای برداری اختصاص دارد.

۲۳) فرض کنید $\xi = \pi : E \to X$ یک کلاف برداری و $f : Y \to X$ نگاشتی پیوسته است. گیریم $E' \subset Y \times E$ مجموعهٔ همهٔ (y,e) هایی با $f(y) = \pi(e)$ است و نگاشت $\pi' : E' \to X$ را به صورت $\pi'(y,e) = y$ و $\tilde{f} : E' \to E$ را به صورت $\tilde{f}(y,e) = e$ تعریف کنیم. با استفاده از ساختار فضای برداری بر $\pi^{-1}(f(y))$، ساختار فضای برداری بر $\pi'^{-1}(y) = \{(y,e)|e \in \pi^{-1}(f(y))\}$ می‌توان تعریف نمود. نشان دهید که $\pi'^{-1} : E' \to X$ کلاف برداری است و $(\tilde{f}, f)$ نگاشتی کلافی می‌باشد که بر هر تار ایزومورف می‌باشد. این کلاف را با نماد $f^*(\xi)$ نشان داده و **کلاف القائی** (از ξ) توسط f می‌نامیم.

(ب) فرض کنید کلافی دیگر $\xi'' : \pi'' : E'' \to X$ داریم و همچنین $(\tilde{f}', f)$ یک نگاشت کلافی از ξ'' به ξ است که بر هر تاری ایزومورفیسم می‌باشد. نشان دهید که $\xi'' = \xi' = f^*(\xi)$.

(ج) اگر $A \subset X$ و $i : A \hookrightarrow X$ نگاشت احتوی باشد، آنگاه $f^*(\xi) = \xi|_A$.

(د) اگر ξ جهتپذیر باشد، آنگاه $f^*(\xi)$ نیز جهتپذیر است.

(ه) مثالی بیاورید که نشان دهد ممکن است ξ جهت ناپذیر باشد ولی $f^*(\xi)$ جهتپذیر باشد.

(و) گیریم B $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری است. چون $\pi : E \to B$ نگاشتی پیوسته از فضایی به فضای پایهٔ B کلاف ξ است، نماد $\pi^*(\xi)$ با معنی است. نشان دهید که اگر ξ جهتناپذیر باشد، آنگاه $\pi^*(\xi)$ نیز جهتناپذیر خواهد بود.

(۲۴) (الف) به ازای کلاف n–صفحه‌ای $\xi = \pi : E \to B$ و کلاف m–صفحه‌ای $\eta = \pi' : E' \to B$ مفروض، فرض کنیم $E'' \subset E \times E'$ مجموعهٔ همهٔ جفتهای (e, e') با $\pi(e) = \pi'(e')$ است. گیریم $\pi'' : E'' \to B$ با ضابطهٔ $\pi''(e, e') = (\pi(e), \pi'(e'))$ است. نشان دهید $\pi'' : E'' \to B$ یک کلاف برداری $(m + n)$–صفحه‌ای است. این کلاف را **مجموع ویتینی** $\xi \oplus \eta$ کلافهای ξ و η می‌نامند. تار $\xi \oplus \eta$ بر p با جمع مستقیم $\pi^{-1}(p) \oplus \pi'^{-1}(p)$ برابر است.

(ب) اگر $f : Y \to B$، نشان دهید که در این صورت $f^*(\xi \oplus \eta) = f^*(\xi) \oplus f^*(\eta)$.

(ج) به ازای کلافهای مفروض $\xi_1 = \pi_i : E_i \to B_i$، با $i = 1, 2$، نگاشتهای $\pi : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ را به صورت $\pi(e_1, e_2) = (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که به این ترتیب یک کلاف برداری $\xi_1 \times \xi_2$ بر $B_1 \times B_2$ داریم.

(د) اگر $\Delta : B \to B \times B$ نگاشت قطری $\Delta(x) = (x, x)$ باشد، نشان دهید $\xi \oplus \eta = \Delta^*(\xi \times \eta)$.

(ه) نشان دهید که اگر ξ و η جهتپذیر باشند، آنگاه $\xi \oplus \eta$ نیز جهتپذیر است.

(و) نشان دهید که اگر ξ جهتپذیر و η جهت ناپذیر باشند، آنگاه $\xi \oplus \eta$ جهت ناپذیر است.

(ز) برای هر فضای برداری دلخواه W، جهتی طبیعی بر $W \times W$ تعریف نموده و به کمک آن نشان دهید که همواره $\xi \oplus \xi$ جهتپذیر است.

(ح) چنانچه X به شکل ∞ باشد، دو کلاف ۱–صفحه‌ای ξ و η بر X به گونه‌ای مشخص کنید که خودشان جهت ناپذیرند و $\xi \oplus \eta$ نیز جهت ناپذیر است.

(۲۵) (الف) اگر $\pi : E \to M$ کلاف برداری هموار باشد، در این صورت π_* در هر نقطه‌ای با رتبهٔ حداکثر است، و هر تار $\pi^{-1}(p)$ از آن یک زیر منیفلد هموار از E

می‌باشد.

(ب) برش صفر زیر منیفلدی از E است، که توسط π به صورت دیفیئوموف روی B تصویر می‌گردد.

۲۶) (الف) اگر M و N منیفلدهایی هموار باشند و همچنین نگاشتهای $\pi_M : M \times N \to M$ و $\pi_N : M \times N \to N$ بترتیب تصاویر طبیعی بر M و N. در این صورت، نشان دهید که $T(M \times N) \cong \pi_M^*(TM) \oplus \pi_N^*(NT)$.

(ب) در صورتی که M و N جهتپذیر باشند، نشان دهید $M \times N$ نیز هست.

(ج) در صورتی که $M \times N$ جهتپذیر باشد، ثابت کنید M و N هر دو جهتپذیرند.

۲۷) نشان دهید که ماتریس ژاکوبی $y_* \circ (x_*)^{-۱}$ به شکل

$$\begin{pmatrix} D_j(y^i \circ x^{-۱}) & O \\ X & D_j(y^i \circ x^{-۱}) \end{pmatrix}$$

است. این نشان می‌دهد که همواره منیفلد TM جهتپذیر است؛ یعنی، $T(TM)$ جهتپذیر است. (در این حالت، وضعیت بخصوصی است: به ازاء هر $v \in TM$، جهت برای $(TM)_v$ را به صورت

$$\left[\frac{\partial}{\partial(x^۱ \circ \pi)}\Big|_v, \dots, \frac{\partial}{\partial(x^n \circ \pi)}\Big|_v, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^۱}\Big|_v, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{x}^n}\Big|_v\right]$$

تعریف می‌کنیم $y_* \circ (x_*)^{-۱}$ نشان می‌دهد که این جهتدهی از انتخاب x مستقل است.) در مسالهٔ ۲۹ اثباتی متفاوت برای جهتپذیری منیفلد TM وجود دارد.

۲۸) (الف) گیریم (x, U) دستگاهی مختصاتی با $v(p) = ۰$ بر M است و $v \in T_pM$ برابر $\sum_{i=۱}^n a^i (\partial/\partial x^i)\big|_p$ است. منحنی با ضابطهٔ $c(t) = v + t(\partial/\partial x^i)|_p$ در TM را در نظر بگیرید. نشان دهید $(dc/dt)(۰) = (\partial/\partial \dot{x}^i)\big|_v$.

(ب) منحنی‌ای بیابید که مماس آن در صفر برابر $(\partial/\partial(x^i \circ \pi))\big|_v$ است.

۲۹) حل این مساله نیاز به آشنایی با مفهوم دنباله‌های دقیق دارد. دنبالهٔ $E_۱ \xrightarrow{\tilde{f}} E_۲ \xrightarrow{\tilde{g}} E_۳$ از نگاشتهای کلافی با $f = g = \mathrm{Id}_B$ را در صورتی **دقیق** گوئیم که در هر تار، دنباله‌ای دقیق از نگاشتهای بین فضاهای برداری باشد.

(الف) اگر $\xi = \pi : E \to B$ کلاف برداری هموار باشد، نشان دهید که دنباله‌ای دقیق به شکل

$$۰ \to \pi^*(E) \to TE \to \pi^*(TB) \to ۰$$

وجود دارد. راهنمایی: (۱) هر عضو از فضای کلی $\pi^*(\xi)$ زوج مرتبی از نقاط در یک تار است، که برداری مماس به آن تار مشخص می‌کنند. (۲) عنصر $X \in T_e(TE)$ را به $(e, \pi_* X)$ بنگارند.

(ب) اگر $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ دنباله‌ای دقیق از کلافهای برداری باشد، نشان دهید اگر دو تار از E_i ها جهتپذیر باشند، سومی نیز هست.

(ج) نشان دهید $T(TM)$ همیشه جهتپذیر است.

(د) اگر $\pi : E \to M$ جهتپذیر نباشد، در این صورت نشان دهید که منیفلد E نیز جهتپذیر نیست. (این راهی برای اثبات این مطلب است که نوار موبیوس منیفلدی جهت ناپذیر است. همچنان که به عنوان کلافی بر $\mathbb{S}^1$ جهت ناپذیر است.)

مسایل ۳۰ و ۳۱ اطلاعات بیشتری در خصوص گروهها در بردارند و ادامهٔ تمرین ۳۳ از فصل ۲ به شمار می‌آیند. علاوه بر اینکه از آنها در مسالهٔ ۳۲ استفاده می‌شود، در فصل ۱۰ نیز با اهمیت هستند.

۳۰) (الف) فرض کنیم $p_0 = (0, \cdots, 0, 1) \in^{n-1}$. به ازاء $n \geq 2$ نگاشت $f : \mathrm{SO}(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ را به صورت $f(A) = A(p_0)$ تعریف می کنیم. نشان دهید f پیوسته و باز است. نشان دهید $f^{-1}(p_0)$ با $\mathrm{SO}(n-1)$ همیومورف است، و سپس نشان دهید که به ازاء هر $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ ای $f^{-1}(p)$ با $\mathrm{SO}(n-1)$ همیومورف است.

(ب) $\mathrm{SO}(1)$ تک نقطه‌ای است و لذا همبندی می‌باشد. با استفاده از قسمت (الف) و اسقراء بر n، ثابت کنید که بازاء هر $n \geq 1$ ای $\mathrm{SO}(n)$ همبند است.

(ج) نشان دهید $\mathrm{O}(n)$ دقیقاً دو مولفه دارد.

۳۱) (الف) در صورتی که $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تبدیلی خطی باشد، نگاشت الحاقی $T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را به صورت $\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ تعریف می‌کنیم (به ازاء هر v، نگاشت $\langle v, T(w)\rangle \longrightarrow w)$ خطی است، و لذا به ازاء یک $T_*(v)$ منحصر بفرد، داریم $w \mapsto \langle T^*(v), w\rangle$). چنانچه A ماتریس T نسبت به پایهٔ استاندارد باشد، ماتریس T^* برابر ترانهادهٔ A^t ماتریس A خواهد بود.

(ب) تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را در صورتی **خود الحاق** گوئیم که $T = T^*$. یعنی، به ازای هر $v, w \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$. اگر A ماتریس تبدیل T نسبت به پایهٔ استاندارد باشد، آنگاه وقتی و تنها وقتی T

خود الحاق است که ماتریس A متقارن باشد: $A^t = A$. قضیه‌ای استاندارد از جبر خطی اذعان می‌دارد که هر ماتریس متقارن را به صورت CDC^{-1} می‌توان نوشت، که D ماتریسی قطری است. (در صفحهٔ ۱۲۲ از کتاب حسابان اسپیوک اثباتی تحلیلی از آن آورده شده است.) نشان دهید می‌توان C را ماتریسی متعامد می‌توان انتخاب نمود. برای این منظور از این نکته شروع کنید که بردارهای ویژهٔ نظیر به مقادیر ویژهٔ متفاوت بر هم عمود هستند.

(ج) تبدیل خطی خوذ الحاق T (یا ماتریس متقارن نظیرش A) را در صورتی **مثبت نیم—معین** گوئیم که به ازای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ای $\langle v, T(v)\rangle \geq 0$؛ آنرا در صورتی **مثبت معین** گوئیم که به ازای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ای داشته باشیم $\langle v, T(v)\rangle > 0$. نشان دهید که اگر A مثبت معین باشد، آنگاه معکوسپذیر است. راهنمایی: از نامساوی کوشی شوارتز استفاده شود.

(د) نشان دهید $A^t.A$ همواره مثبت نیم—معین است.

(ه) نشان دهید که اگر A مثبت نیم—معین باشد، آنگاه B ای وجود دارد که $A = B^2$. (یادتان باشد که A متقارن فرض شده است.)

(و) نشان دهید که هر $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ای را به صورت $A = A_1.A_2$ می‌توان نوشت که $A_1 \in \mathrm{O}(n)$ و A_2 مثبت معین است. راهنمایی: $A.A^t$ و قسمت (ه) را در نظر بگیرید.

(ز) ثابت کنید ماتریسهای A_1 و A_2 توابعی پیوسته از A هستند. راهنمایی: اگر $\{A^{(n)}\}$ دنباله‌ای همگرا به A بوده و $A^{(n)} = A_1^{(n)}.A_2^{(n)}$، آنگاه زیر دنباله‌ای از $\{A_1^{(n)}\}$ همگرا است.

(ح) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ با $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ همئومورف است و دقیقاً دو مؤلفه دارد: $\{A | \det A > 0\}$ و $\{A | \det A < 0\}$. (توجه کنید که این روش دیگری برای تعیین بعد $\mathrm{O}(n)$ می‌باشد.)

۳۲) دو تابع پیوسته $f_0, f_1 : X \to Y$ را در صورتی **هموتوپ** گوئیم که تابعی پیوسته $H : X \times [0; 1] \to Y$ چنان یافت گردد که $H(x, 0) = f_0(x)$ و $f_1(x) = H(x, 1)$. توابع H_t با ضابطهٔ $H_t(x) := H(x, t)$ را به عنوان مسیری از توابع از $H_0 = f_0$ به $H_1 = f_1$ می‌توان تلقی نمود. نگاشت H را **هموتوپی** بین f_0 و f_1 می‌نامند.

اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$، نماد $f : (X, A) \to (Y, B)$ بدین معنی است که $f : X \to Y$ و $f(A) \subset B$. یادآور می‌شویم که $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$

(به عنوان نگاشتهایی از (X,A) به (Y,B)) در صورتی هموتوپند که H ای مانند قبل یافت گردد که $H_t:(X,A)\to(Y,B)$.

(الف) اگر $A:[0;1]\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ پیوسته بوده و $H:\mathbb{R}^n\times[0;1]\to\mathbb{R}^n$ به صورت $H(x,t)=A(t)(x)$ تعریف شود، نشان دهید H پیوسته است و لذا H_0 و H_1 به عنوان نگاشتهایی از $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$ به توی خودش $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$ هموتوپند. نتیجه بگیرید که هر تبدیل خطی نامنفرد $T:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$ با $\det T>0$، با نگاشت همانی هموتوپ می‌باشد.

(ب) فرض کنید نگاشت $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ هموار است، $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ و $f(\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\subset\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$. در صورتی که $Df(\mathbf{0})$ نامنفرد باشد، نشان دهید که نگاشتهای

$$f:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$$
$$Df(\mathbf{0}):(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$$

هموتوپ است. راهنمایی: به ازای $0<t\leq 1$ تعریف کنید $H(x,t)=f(tx)$ و نیز $H(x,0)=Df(\mathbf{0})(x)$. برای اثبات پیوستگی در نقاط $(x,0)$ از لم ۲.۴.۳ استفاده کنید.

(ج) گیریم U همسایگی‌ای از مبداء $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ است و $f:U\to\mathbb{R}^n$ همیومورفیسمی با $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ می‌باشد. گیریم $B_r\subset V$ گوی باز به مرکز در $\mathbf{0}$ و شعاع $r>0$ است و $h:\mathbb{R}^n\to B_r$ همیومورفیسمی می‌باشد که با ضابطهٔ $h(x)=(\frac{2r}{n}\arctan|x|)x$ تعریف شده است. در این صورت، نگاشتهای

$$f,f\circ h:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$$

را **حافظ جهت در $\mathbf{0}$** گوئیم، هر گاه $f\circ h$ با

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\})$$

هموتوپ باشد. نشان دهید که این تعریف از انتخاب $B_r\subset V$ مستقل می‌باشد.

(د) فرض کنیم به ازای هر $p\in\mathbb{R}^n$ ای نگاشت $T_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ را به صورت $T_p(q)=p+q$ تعریف کنیم. اگر $f:U\to V$ همیومورفیسم باشد، و $U,V\subset\mathbb{R}^n$ باز باشند. نشان دهید که اگر M جهتپذیر باشد، آنگاه در صورتی f در p حافظ جهت است که نگاشت $T_{f(p)\circ f\circ T_p}$ در $\mathbf{0}$ حافظ جهت باشد. نشان دهید که اگر M جهتپذیر باشد، آنگاه گردایه‌ای $\mathcal{C}$ از چهارتها وجود دارد که دامنهٔ آنها M را می پوشاند و به ازای هر $(x,U),(y,V)\in\mathcal{C}$ ای نگاشت $y\circ x^{-1}$ به ازای هر p از $U\cup V$ حافظ جهت است.

(ه) توجه کنید که شرط در (د) حتی برای وقتی که $y \circ x^{-1}$ دیفرانسیلپذیر نباشد با معنی است. بنابراین، اگر M منیفلد (نه لزوماً دیفرانسیلپذیر) باشد، می‌توان تعریف نمود که M در صورتی جهتپذیر است که گردایه‌ای $\mathcal{C}$ از همیومورفیسمها $x : U \to \mathbb{R}^n$ یافت گردد که دامنهٔ آنها M را بپوشاند و $\mathcal{C}$ در شرط (د) صدق کند. برای اثبات اینکه این تعریف با تعریف قبلی مطابقت دارد، به حکمی از توپولوژی جبری نیاز داریم: اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ همیومورفیسمی با $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ بوده و $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ به شکل $T(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, x^n)$ باشد، آنگاه درست یکی از نگاشتهای f و $T \circ f$ در $\mathbf{0}$ حافظ جهت است. با فرض درستی این حکم، نشان دهید که اگر M چنین گردایه‌ای $\mathcal{C}$ از همیومورفیسمها بپذیرد، آنگاه به ازای هر ساختار هموار بر M، کلاف مماس TM جهتپذیر است.

۳۳) گیریم $M^n \subset \mathbb{R}^N$ زیر منیفلدی هموار و $n-$بعدی است. منظور از یک زِه در M، نقطه‌ای به شکل $p - q$ است، که $p, q \in M \subset \mathbb{R}^N$.

(الف) ثابت کنید که اگر $N > 2n + 1$، آنگاه بردار $v \in \mathbb{S}^{N-1}$ ای چنان وجود دارد که

(۱) هیچ زهی از M با v موازی نیست.

(۲) صفحهٔ مماس T_pM به M در p، بردار v را در بر دارد. راهنمایی: نگاشتهای بخصوص از زیر مجموعه‌های باز مناسب از $M \times M$ و TM بتوی $\mathbb{S}^{N-1}$ را در نظر بگیرید.

(ب) گیریم $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ زیر فضای عمود به v است و $\pi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ تصویر نظیر به آن می‌باشد. نشان دهید که $\pi|_M$ ایمرشنی یکبیک است. به ویژه، اگر M فشرده باشد، آنگاه $\pi|_M$ نشاننده است.

(ج) هر منیفلد $n-$بعدی هموار و فشرده را در $\mathbb{R}^{2n-1}$ می‌توان نشاند.

یادداشت: این حالت خاصی از قضیهٔ کلاسیک ویتینی [?] است، که بنابه آن این حکم برای هر منیفلد غیر فشرده‌ای نیز درست است. اثباتهایی از آن را در «مقدمه‌ای بر منیفلدهای دیفرانسیلپذیر، اثر اوسلاند و مکنزی» و یا «درسهایی در هندسه دیفرانسیل، اثر استرنبرگ» می‌توانید مشاهده کنید. در کتاب «توپولوژی مقدماتی، اثر مانکرز» نیز نوع دیگری از این استدلال آمده است و ثابت می‌گردد که هر $n-$ منیفلد نه لزوماً فشرده M را در یک $\mathbb{R}^N$ ای مناسب می‌توان نشاند (عملاً با $N = (n+1)^2$). با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نشان داد که در اینجا باید از وجود نگاشت سره‌ای $f : M \to \mathbb{R}$ که در مسألهٔ ۳۰ از فصل ۲ آمده

استفاده نمود. (با «توپولوژی دیفرانسیل، اثر پولاک و گیلومن» مقایسه گردد).
حکم دیگری از ویتینی [?] نشان می‌دهد که M^n را عملاً در $\mathbb{R}^{2n}$ می‌توان نشاند.