



به نام خداوند بخشنده مهربان

آمار توصیفی و مقدمه ای بر احتمال

Descriptive Statistics and Introduction to Probability

UNIVERSITY OF SISTAN AND BALUCHESTAN

Department of Statistics, Dr. Dehghan

مهارت‌های لازم و مفید برای دانشجویان

(1) نرم افزار R ، SPSS و Minitab

(2) نرم افزار Word و یا Excel

مراجع

➤ 1- جزوه کلاسی

➤ 2- کتاب: آمار و کاربرد آن در مدیریت، جدیجه جمشیدی

➤ 3- تمرینات کتاب فوق

- آمار Statistics :
- آمار توصیفی Descriptive Statistics
- آمار استنباطی Inferential Statistics
- آمار توصیفی: بر اساس نتایج حاصل از نمونه آماری به تجزیه و تحلیل نمونه می پردازد.
- آمار استنباطی: بر اساس نتایج حاصل از نمونه آماری به تجزیه و تحلیل جامعه آماری می پردازد. یعنی از روی نتایج نمونه ، با احتمال نتایج را به جامعه مورد نظر تعمیم می دهد.

فصل اول: آمار توصیفی

Descriptive Statistics

تعاریف اولیه Basic Definitions

- **جامعه آماری Statistical population:** به مجموعه‌ای از اشیاء، یا افراد گفته می‌شود که حداقل یک ویژگی (صفت) مشترک آنها مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
- **مثال:** جامعه دانشجویان دانشگاه سیستان و بلوچستان در سال 1403،
- جامعه درختان یک مزرعه،
- جامعه لامپهای تولیدی کارخانه A.
- **نمونه آماری Statistical sample:** بخشی از جامعه آماری را که به روش خاصی انتخاب می‌شود، نمونه آماری گویند.
- **صفت آماری Statistical adjective:** هر مشخصه از جامعه آماری را که مورد بررسی قرار می‌گیرد یک صفت آماری گویند.

فصل اول : آمار توصیفی Descriptive Statistics

- صفت آماری: مانند قد، وزن، تعداد دندانهای پروتز شده یک فرد، تعداد اعضای خانوار ...
- متغیر کمی Quantity variable: متغیرهایی که معمولاً قابل اندازه گیری هستند و می توان مقدار آنها را به صورت عددی نمایش داد. برای اندازه گیری صفت بکار می رود.
- متغیر کمی Quantity variable: به دو دسته تقسیم می شوند.
 1. متغیر گسسته: متغیرهایی که بین دو مقدار متصور آنها هیچ عدد دیگری وجود نداشته باشد. تعداد اعضای خانواده، تعداد کپی، تعداد کتابهای دانشجو ...
 2. متغیر پیوسته: متغیرهایی که بین هر دو مقدار متصور آنها همواره عددی دیگری وجود دارد. مانند قد، وزن، سن

مقیاس‌های اندازه گیری در آمار

All Measurement scales in statistics

➤ **متغیر کیفی Quality variable:** متغیرهایی که مستقیماً توسط اعداد و ارقام قابل اندازه گیری نیستند. مانند گروه خون افراد A,B,AB,O یا ملیت افراد، رنگ سیب درختی، رنگ چشم

➤ مقیاس اندازه گیری چیست؟

➤ آنچه در هر مطالعه مورد توجه قرار می گیرد، اندازه گیری ویژگی ها یا صفات اشخاص و اشیای جامعه است که بوسیله اعداد یا نمرات نسبت داده می شود.

➤ مثلاً وقتی برای سنجش نگرش مردم نسبت به یک مجموعه تلویزیونی از پرسشنامه استفاده می کنیم، برای تعیین نمره رضایت هر شخص به برنامه تلویزیونی عدد یا اعدادی را در نظر می گیریم. بسته به اینکه چه چیزی و چگونه اندازه گیری می نمایم اعداد به دست آمده ویژگی های متفاوتی خواهند داشت. این ویژگیهای متفاوت اعداد را مقیاس های اندازه گیری می نامیم.

انواع مقیاس های اندازه گیری

All Types of measurement scales

➤ انواع مقیاس های اندازه گیری

مقیاس های اندازه گیری را در چهار سطح می توان دسته بندی کرد:

اسمی ➤

ترتیبی ➤

نسبی ➤

فاصله ای ➤

انواع مقیاس های اندازه گیری All Types of measurement scales

■ مقیاس اسمی

■ اندازه گیری اسمی یعنی جای دادن اشیا یا افراد در طبقاتی است که از نظر کیفی با هم متفاوت هستند.

■ یک مثال ساده در این مورد متغیر جنسیت است. در سطح اندازه گیری اسمی استفاده از اعداد تنها به منظور مشخص کردن طبقات می باشد و هیچ رابطه ی مقایسه ای که با اعمال ریاضی مطابقت کند بین آن ها وجود ندارد. اعداد به کار رفته در یک مقیاس اسمی معرف مقدار مطلق یا نسبی هیچ ویژگی نیستند. مثال گروه خونی افراد- نام شهرها، رنگ چشم، کارخانه شماره 1، 2، 3

انواع مقیاس های اندازه گیری

All Types of measurement scales

➤ مقیاس ترتیبی

- مقیاس های ترتیبی برای ما امکان رتبه بندی و ترتیب سطوح متغیر مورد بررسی را فراهم می آورند.
- مثال: برای بررسی میزان مهارت یک شخص، از متخصصین می خواهیم این ویژگی یا صفت را برحسب درجه اهمیت آن از 1 تا 5 رتبه بندی کنند.
- یا میزان تحصیلات را با اعداد 1 تا 5 را رتبه بندی می کنیم ، دیپلم ، ... ، دکترا
- سه نفر اول در یک دومی دانی، سه نفر اول ورودی رشته روانشناسی 1403 دانشگاه س ب
- با این حال یکی از مشکلات مقیاس ترتیبی آن است که هرچند محقق می تواند تفاوت های مورد نظر را برحسب بزرگتر- کوچکتر بودن، بهتر- بدتر بودن و غیره رتبه کند ولی قادر نیست فاصله ی این تفاوت ها را بدست آورد. به عبارت دیگر مقادیر حاصل در مقیاس ترتیبی فاقد معنای کمی و عددی هستند. علت این امر آن است که در مقیاس ترتیبی هیچ مبدای وجود ندارد تا ارزش ها نسبت به آن سنجیده شوند.

انواع مقیاس های اندازه گیری

All Types of measurement scales

➤ **مقیاس فاصله ای:** ویژگی عمده ی مقیاس فاصله ای آن است که مقدار ارزشها را با نمره های عددی می سنجد. این مقیاس علاوه بر آن که اطلاعات (خواص) مربوط به مقیاس های اسمی و ترتیبی را در بر دارد، اطلاعات بیشتری در مورد تفاوت ارزشها به دست می دهد.

➤ برای مثال 11 دو دمای 30 و 40 درجه در نظر بگیرید. این دو دما با یکدیگر تفاوت دارند، دمای 40 بیشتر از 30 است و همچنین دقیقا 10 درجه تفاوت وجود دارد. به این ترتیب در این مقیاس می توان روشهای آماری مختلف مانند محاسبه میانگین، میانه، مد، واریانس، همبستگی و... را انجام داد. در این مقیاس نسبت فاصله ها ثابت است.

$$F = \frac{9}{5}C + 32. \quad \rightarrow$$

5	10	15	سیلیسیوس
41	50	59	فارنهایت

انواع مقیاس های اندازه گیری

All Types of measurement scales

■ لازم به ذکر است که این مقیاس دارای نقطه ی صفر مطلق نیست ولی می توان برای آن صفر قراردادی برگزید. در مثال فوق دو تا صفر داریم 0 و 32. به طور مثال اگر سه نفر در یک آزمون روانشناسی نمرات 20، 30 و 15 گرفته باشند نمی توان گفت نمره 30 معرف دو برابر بودن دانش فرد نسبت به فرد با نمره 15 است. چون مبنا را هنوز نمی دانیم.

انواع مقیاس های اندازه گیری All Types of measurement scales

➤ مقیاس نسبتی

- این مقیاس نه تنها دارای تمام ویژگی های مقیاس های قبلی است بلکه دارای مبدأ مطلق یا صفر حقیقی نیز می باشد و بنابراین امکان محاسبه نسبت های مختلف از لحاظ صفت مورد نظر در این مقیاس وجود دارد.
- متغیرهایی مانند سن، نرخ مرگ و میر، وزن، قد افراد، جمعیت و ... از این دست هستند. تمام اعمال آماری و ریاضی را می توان بر روی این مقیاس انجام داد.
- تذکر: اگر خواص مقیاسهای فوق را در نظر بگیریم، آنها را بترتیب زیر می توان مرتب کرد:
- مقیاس نسبتی < مقیاس فاصله ای < مقیاس ترتیبی < مقیاس اسمی

انواع مقیاس های اندازه گیری All Types of measurement scales

- مثال‌هایی 12 از مقیاس‌ها:
- اسمی : رنگ چشم شما چیست؟
- کدามیک از مجموعه های تلویزیونی را تماشا می کنید؟
- ترتیبی : مجموعه های تلویزیونی مورد توجه شما تا چه حد منعکس کننده واقعیت های زندگی است؟
- خیلی زیاد، زیاد، متوسط ، کم، بسیار کم
- فاصله ای : بهره هوشی افراد مجموعه تلویزیونی مورد علاقه خود را حدس بزنید؟
- نسبی : هفته ای چند ساعت مجموعه ی تلویزیونی تماشا می کنید؟
- هفته ای چند ساعت درس می خوانید؟

جدول آماری Statistical table: در جداول آماری علاوه بر داده ها، تعداد و درصد تکرار آنها نمایش داده می شود بطوریکه با یک نگاه به جدول می توان اطلاعات مفیدی در مورد پراکندگی و توزیع داده ها بدست آورد.

(1) **فراوانی Frequency:** با شمردن تعداد دفعات تکرار هر داده در میان تمامی داده ها فراوانی آن داده بدست می آید. معمولاً برای داده های کیفی یا گسسته یا طبقه بندی شده بکار می رود.

فراوانی طبقه ام را به f_i :

$$\sum_{i=1}^k f_i = N \text{ و } 1 \leq f_i \leq N \text{ و } 1 \leq i \leq k \text{ (تعداد کل داده ها)}$$

مثال 1: گروه خون

(2) **فراوانی نسبی Relative frequency:** حاصل تقسیم فراوانی هر طبقه بر تعداد کل داده هاست.

$$r_i = \frac{f_i}{N}, i = 1, \dots, k$$

$$g_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j$$

(2) فراوانی تجمعی :Cumulative frequency

حاصل جمع فراوانی هر طبقه با طبقات قبل از آن را فراوانی تجمعی نامند.

$$g_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i = \sum_{j=1}^i f_j$$

(2) فراوانی تجمعی نسبی :Relative cumulative frequency

حاصل جمع فراوانی نسبی هر طبقه با طبقات قبل از آن را فراوانی نسبی تجمعی نامند.

$$r_i = \frac{f_i}{N}, i = 1, \cdots, k$$

$$s_i = r_1 + r_2 + \cdots + r_i = \sum_{j=1}^i s_j = s_i = \frac{1}{N} g_i$$

جدول فراوانی برای داده های گسسته

مثال 2: داده های زیر تعداد فرزندان تحت پوشش بیمه در ۳۰ خانواده را نشان می دهد.

4 1 5 0 3 2 2 2 2 3 0 1 4 5 2 5 3 4 0 2 1 5 2 3 3 1 5 4 3 0

ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ برای تشکیل جد اول فراوانی مرتب می کنیم:

0 0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5

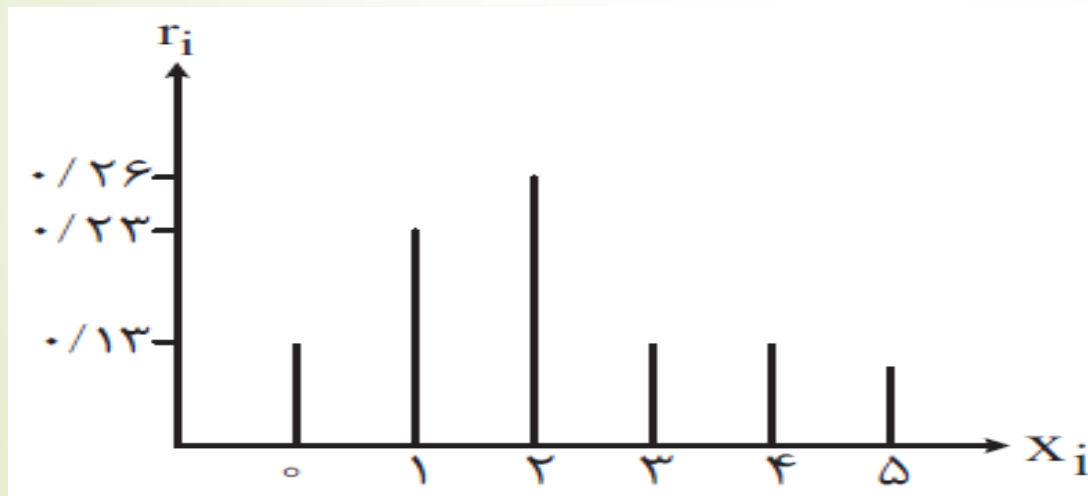
جدول فراوانی برای داده های گسته

0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5

xi	fi	gi	ri	si
0	4	4	0.1333	0.1333
1	4	8	0.1333	0.2666
2	7	15	0.2333	0.5
3	6	21	0.2	0.7
4	4	25	0.1333	0.8333
5	5	30	0.1666	1

نمودارهای آماری Statistical graphs

نمودارهای میله‌ای: در این نمودار محور X ها نمایش دهنده مقادیر داده‌ها و محور Y ها نمایش دهنده فراوانی یا فراوانی نسبی می باشد. مثال تعداد بیمه شده ها

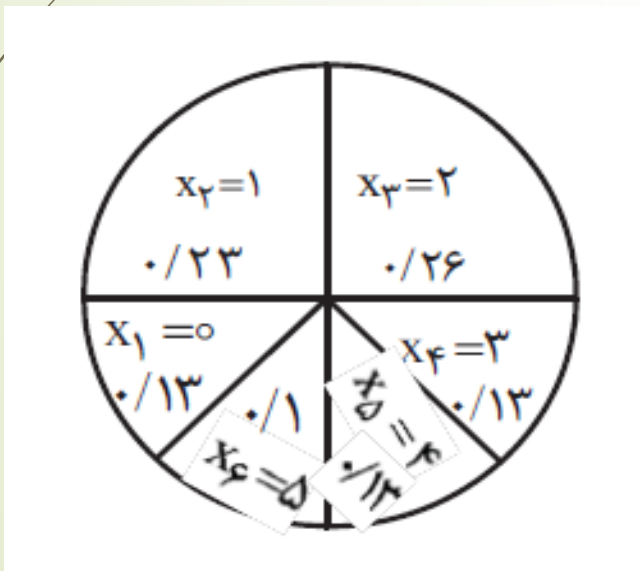


نمودارهای آماری

Statistical pie

نمودار دایره ای: این نمودار درون دایره ای رسم می شود که به قطاع هایی تقسیم شده است و هر قطاع متناسب با مساحت خود معرف یکی از فراوانی های نسبی در جدول فراوانی می باشد.

$$\theta_i = 0.23 * 360 = 82.8$$



نمودارهای آماری

Statistical pie

➤ **نمودار شاخه و برگ:** در این نمودار عدد دهگان داده ها را به عنوان شاخه و رقم یگان آنها را برگ می نامند.

➤ **مثال:** این نمودار را برای داده های زیر رسم کنید.

62 75 31 44 56 54 30 81 88 6 35 11 91 63 32 42 65 69 39 6 36 76 75 27 20 42 56 75 39 40 62 47
50 68 50 53 61 59 29 65 29 27 83 56 52 51 64 35 33 52 62 45 5 75 22 28 36 42 72 36 37

```

0 | 66
1 | 1
2 | 07799
3 | 012355699
4 | 02247
5 | 00122346669
6 | 122345589
7 | 5556
8 | 138
9 | 1

```

جدول فراوانی برای داده های پیوسته

➤ مثال 4: داده های زیر طول عمر ۴۰ عدد لامپ را نشان می‌دهند که به نزدیکترین عدد صحیح گرد شده‌اند.

11	9	12	15	20	13	14	17	23	22
8	16	17	21	11	18	21	12	11	10
14	13	19	16	15	17	20	8	7	13
15	17	16	14	22	12	11	9	18	19

جدول فراوانی برای داده های پیوسته، محاسبه تعداد طبقات برای داده های خام

23

$$K = 1 + 3.222 \log_{10}^{40} = 6.322 \cong 7 \Rightarrow \omega = \frac{17}{7} = 2.4 \cong 3$$

$$\text{تعداد رده ها} = K \quad \text{طول رده} = \omega = \frac{R}{K}$$

$$S = \frac{\text{واحد گرد شده داده ها}}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

برای داده های خام به صورت زیر عمل می کنیم:

کمترین داده = 7

بیشترین داده = 23

کران پایین طبقه (رده) اول $7 - 0.5 = 6.5$

کران بالای طبقه (رده) آخر $23 + 0.5 = 23.5$

$$\text{کوچکترین داده} = \min \quad -S = 7 - 0.5 = 6.5$$

$$\text{بزرگترین داده} = \max \quad +S = 23 + 0.5 = 23.5$$

$$\text{دامنه تغییرات داده ها} \quad R = \max - \min = 23.5 - 6.5 = 17$$

جدول فراوانی برای داده های پیوسته

24

ب عگرد شده اند. رابلالبی بیی برای

برای داده های خام به صورت زیر عمل می کنیم:

کمترین داده=7

بیشترین داده=23

کران پایین طبقه (رده) اول $7-0.5=6.6$

کران بالای طبقه (رده) آخر $23+0.5= 23.5$

دامنه تغییرات:

$$\text{Range} = \text{Max} - \text{Min} + 1$$

$$\text{Range} = C_{k+1} - C_1$$

نماینده طبقه:

$$X_i = (C_{i+1} + C_i) / 2$$

$$X_i = (A_i + B_i) / 2$$

جدول فراوانی برای داده های پیوسته

ردیف	حدود طبقات $A_i - B_i$	کران طبقات $C_i - C_{i+1}$	نماینده طبقه X_i	فراوانی مطلق f_i	فراوانی نسبی r_i	فراوانی تجمعی g_i	فراوانی نسبی تجمعی s_i	
1	7-9	6.5-9.5	8					
2	10-12	9.5-12.5	11					
3	13-15	12.5-15.5	14					
4	16-18	15.5-18.5	17					
5	19-21	18.5-21.5	20					
6	22-24	21.5-24.5	23					

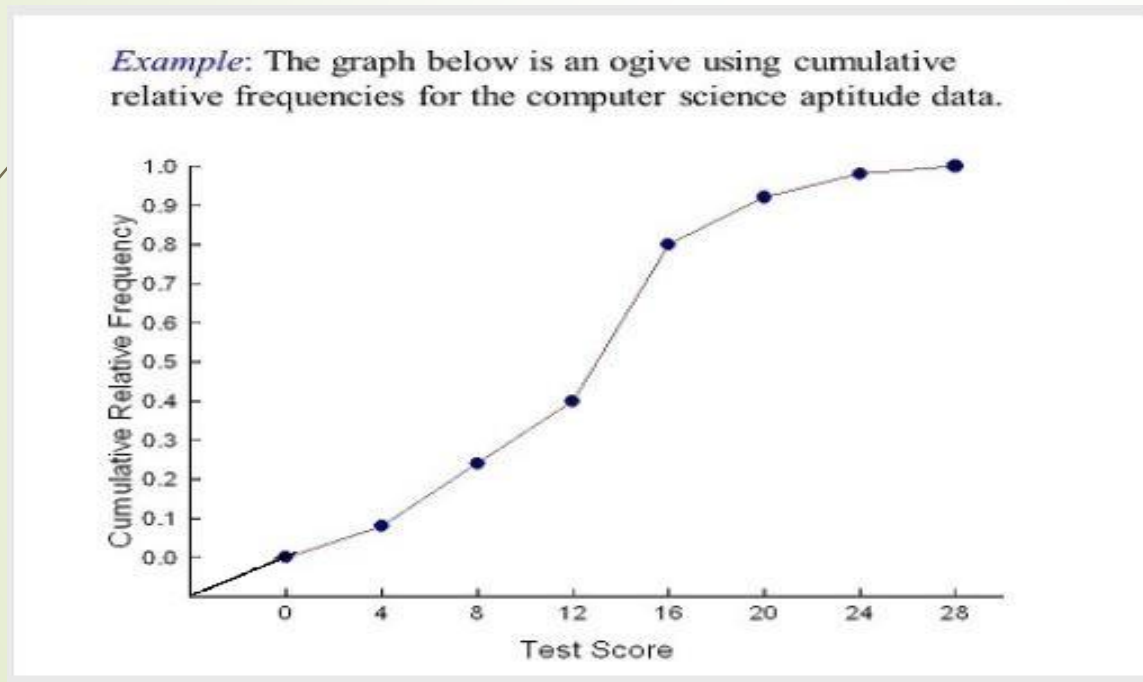
تذکر: X_i معرف نماینده هر رده است که عضو رده می باشد.

✓ چون آخرین رده شامل هیچ عضوی نداشت آنرا حذف می کنیم
 رده 27/5 - 24/5 شامل هیچ عضوی نیست بنابراین حذف
 می شود. نمودار دایره ای را رسم کنید.

رده‌ها	خط و نشان	X_i	f_i	r_i	g_i	s_i
6/5-9/5		۸	۵	0/125	۵	0/125
9/5-12/5		۱۱	۸	0/2	۱۳	0/325
12/5-15/5		۱۴	۹	0/225	۲۲	0/55
15/5-18/5		۱۷	۹	0/225	۳۱	0/775
18/5-21/5		۲۰	۶	0/15	۳۷	0/925
21/5-24/5		۲۳	۳	0/075	۴۰	1/0
جمع			۴۰			

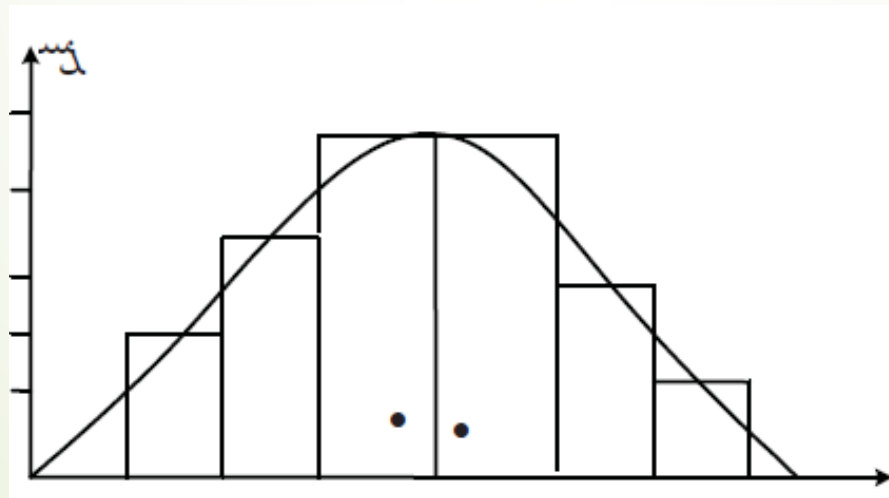
نمودارهای آماری برای داده های پیوسته

این نمودار روی کرانها رسم می شود. ➡



نمودارهای فراوانی نسبی تجمعی داده‌ها

هستوگرام (نمودار ستونی) و چندبر فراوانی: این نمودار کاملاً مشابه نمودار میله ای می باشد با این تفاوت که محور X ها نمایش دهنده رده های جدول فراوانی است و به ازای هر رده مستطیلی که عرض آن یک واحد و ارتفاع آن معادل فراوانی نسبی آن رده است رسم می شود.



➤ مثال 5: جدول فراوانی داده های زیر را کامل کنید، هیستوگرام، چندبر فراوانی، نمودار فراوانی نسبی و نمودار دایره ای داده ها را رسم کنید.

➤ داده ها 12 11 10 9 8 7 6 4 3

➤ فراوانی 1 3 4 3 7 4 6 1 1

➤ تعداد طبقات را 5 در نظر بگیرید.

➤ تذکر: برای طبقه بندی داده های پیوسته، کران پایین طبقه اول را برابر کمترین مقدار داده ها یا عددی کوچکتر از آن در نظر می گیریم. مثلاً اگر $\min(X)=5.6587$ باشد کران پایین طبقه اول می تواند همین مقدار یا 5.65 باشد.

پارامترهای مرکزی مرکزی Central tendency parameters

عموماً داده ها در جامعه آماری یکنوع تجمع و فشردگی حول یک مقدار خاص از صفت مورد مطالعه را بوجود می آورند که این مقدار خاص به عنوان یک پارامتر مرکزی معرفی می شود. مهمترین پارامترهای (شاخصهای) مرکزی عبارتند از:

میانگین،

میانه

مد (نما)

میانگین Mean: میانگین بر چند نوع است که معروفترین آنها میانگین حسابی، هندسی، وزنی، همساز (هارمونیک) و میانگین درجه دوم می باشد.

پارامترهای مرکزی مرکزی Central tendency parameters

- میانگین Mean: میانگین بر چند نوع است که معروفترین آنها:
- میانگین حسابی Arithmetic mean،
- میانگین هندسی Geometric Mean،
- میانگین Weighted mean،
- میانگین همساز (هارمونیک) Harmonic mean،
- میانگین درجه دوم Quadratic mean می باشد.
- (1) میانگین حسابی :

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K f_i x_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$$

که در آن k تعداد طبقات است.

پارامترهای گرایش مرکزی Central tendency parameters

(1) میانگین وزنی: مثال 2

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k w_i X_i}{w} ; \quad w = \sum_{i=1}^k w_i \quad (2)$$

(3) داده‌ها 15, 16, 18, 14

(4) فراوانی 3, 3, 2, 4

(5) میانگین هندسی: برای داده‌های (مثبت) درصدی، نرخ تورم،
نرخ سود و زیان و نرخ بازدهی سبد سرمایه گذاری ...

(6) مثال 1

$$\bar{X}_G = (\prod_{i=1}^k X_i^{f_i})^{1/n} \quad \text{یا} \quad \bar{X}_G = (\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n} \quad 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5 \quad (7)$$

که در آن $\sum f_i = n$

پارامترهای مرکزی مرکزی Central parameters

میانگین همساز: برای داده هایی مثل سرعت (کیلومتر بر ساعت) مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{X_i} f_i} \quad \text{یا} \quad \bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

میانگین ریشه ای رتبه دو:

$$\bar{X}_{R2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \right)^{1/2} \quad \text{یا} \quad \bar{X}_{R2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i^2}{n} \right)^{1/2}$$

میانه (برای داده های گسسته):

میانه (برای داده های گسسته): با مرتب نمودن داده ها به صورت غیر نزولی، عدد m را بعنوان میانه آنها در نظر می گیریم اگر تقریباً نیمی از داده ها سمت چپ آن و نیمی دیگر در سمت راست آن قرار داشته باشند.

1) برای داده های گسسته با ترتیب نزولی:

(اگر n زوج باشد)

$$m = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

مثال 6: 10, 2, 5, 7, 8, 9, 4, 3

اگر n فرد باشد عددی را که در وسط داده ها قرار گیرد میانه است.

مثال: 7, 2, 3, 8, 9, 1, 6

2) میانه برای داده های پیوسته و طبقه ای:

$$m = L_{0/5} + \frac{(0/5 N - g_{0/5}) \omega}{f_{0/5}}$$

$l_{0/5}$: حد پایین رده میانه دار

N : تعداد داده ها

$g_{0/5}$: فراوانی تجمعی رده قبل از رده میانه دار

$f_{0/5}$: فراوانی رده میانه دار

ω : طول رده

مثال 7: صفحه 12

(3) چندکها برای داده های گسسته :

فرض کنید n داده داریم. $x_1, \dots, x_n$

اول آنها را مرتب می کنیم. $y_1 \leq \dots \leq y_n$

حال اگر Q_p چندک مرتبه p باشد و $P(n+1)$ بابر عدد صحیح مانند r باشد آنگاه y_r را برای چندک مرتبه p می گیریم یعنی $Q_p = y_r$. در غیر اینصورت قسمت صحیح آنرا r و قسمت اعشاری آنرا w فرض می کنیم و

$$Q_p = (1 - w)y_r + wy_{r+1}$$

مثال:

$$2, 6, 4, 6, 8, 9, 5 \rightarrow 2, 4, 5, 6, 6, 8, 9$$

$$P=0.25, \quad p(n+1)=0.25*8=2 \quad Q_p = 4$$

اگر به داده ها عدد 10 را اضافه کنیم: $2, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 10$

$$P=0.25, \quad p(n+1)=0.25*9=2.25$$

$$Q_p = (1 - 0.25)4 + 0.25 * 5 = 4.25$$

تذکر: اگر $p = 0.25, 0.5, 0.75$ یا $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ یا $p = 0.01, 0.02, \dots, 0.99$

Q_p را بترتیب چارک، دهک، صدک مرتبه p نامند.

➡ **مد یا نما:** داده‌ای که فراوانی آن از فراوانی سایر داده‌ها بیشتر باشد مد یا نما گفته می‌شود و با M نمایش داده می‌شود.

(1) روش محاسبه مد برای داده‌های گسسته:

برای داده‌های ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چون $M=2$ فراوانی ۱ و ۲ برابر است و این دو عدد به صورت متوالی قرار گرفته‌اند در این حالت مد برابر است با میانگین این دو عدد:

اما برای داده‌های ۴ و ۴ و ۴ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ فراوانی ۱ و ۴ مساوی می‌باشد ولی مجاور یکدیگر نیستند و مقدار برای مد خواهیم داشت که عبارتند

$$M_1 = 1 \quad M_2 = 4$$

➡ **مد یا نما:** اگر دو داده کنار هم با بیشترین فراوانی باشد، میانگین حسابی دو داده کنار هم را میانه در نظر می‌گیریم. برای داده‌های ۴ و ۴ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ ، فراوانی ۱ و ۲ مساوی می‌باشد و چون مجاور یکدیگر هستند مقدار مد برابر است با

$$M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

(2) روش محاسبه مد برای داده‌های پیوسته:

- L_M : کران پایین رده نمایی دار
- D_1 : اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نمایی و رده قبل از آن
- D_2 : اختلاف فراوانی‌های نسبی رده نمایی و رده بعد از آن
- ω : طول رده
- مثال 8: صفحه 12

$$M = L_M + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \right) \omega$$

(2) روش محاسبه مد برای داده های پیوسته :

- L_M : کران پایین رده نمایی دار
- D_1 : اختلاف فراوانی های نسبی رده نمایی و رده قبل از آن
- D_2 : اختلاف فراوانی های نسبی رده نمایی و رده بعد از آن
- ω : طول رده

$$M = L_M + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \right) \omega$$

مثال 9: مد = 19.556

	FX	Freq	CFreq	Relative	Crelative
1	(5.42,10.3]	4	4	0.08	0.08
2	(10.3,15.2]	7	11	0.14	0.22
3	(15.2,20]	15	26	0.30	0.52
4	(20,24.9]	14	40	0.28	0.80
5	(24.9,29.8]	9	49	0.18	0.98
6	(29.8,34.7]	1	50	0.02	1.00

- تمرین 1: میانگین داده های فوق را محاسبه کنید.

(2) روش محاسبه چندکها برای داده های گسسته:

- فرض کنید د داده داریم. اگران پایین رده نمایی دار
- D_1 : اختلاف فراوانی های نسبی رده نمایی و رده قبل از آن
- D_2 : اختلاف فراوانی های نسبی رده نمایی و رده بعد از آن
- ω : طول رده

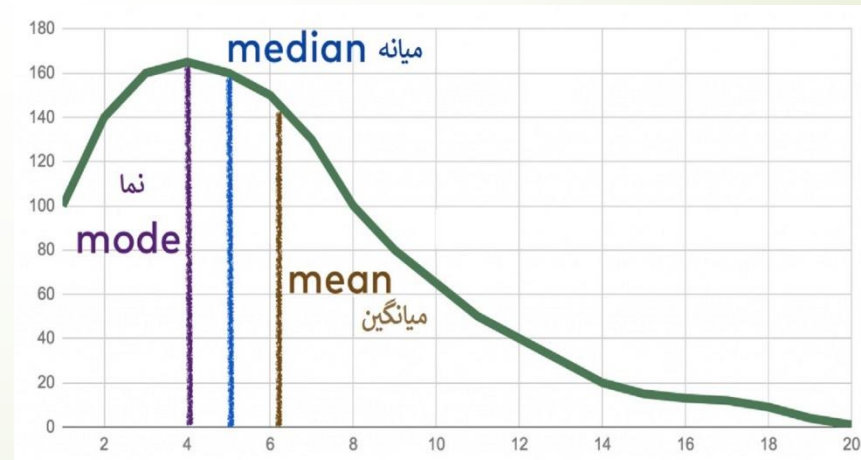
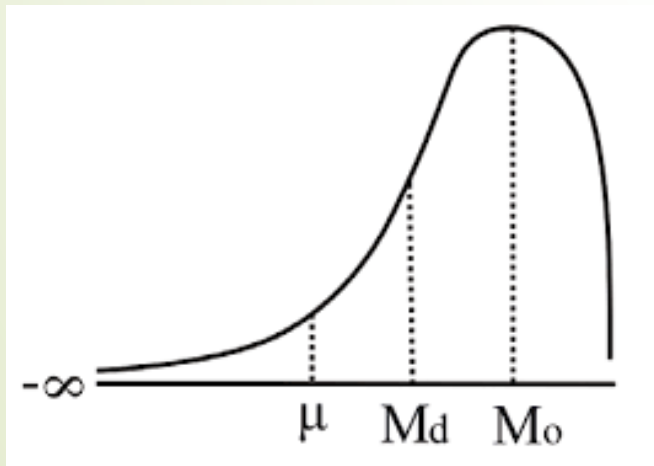
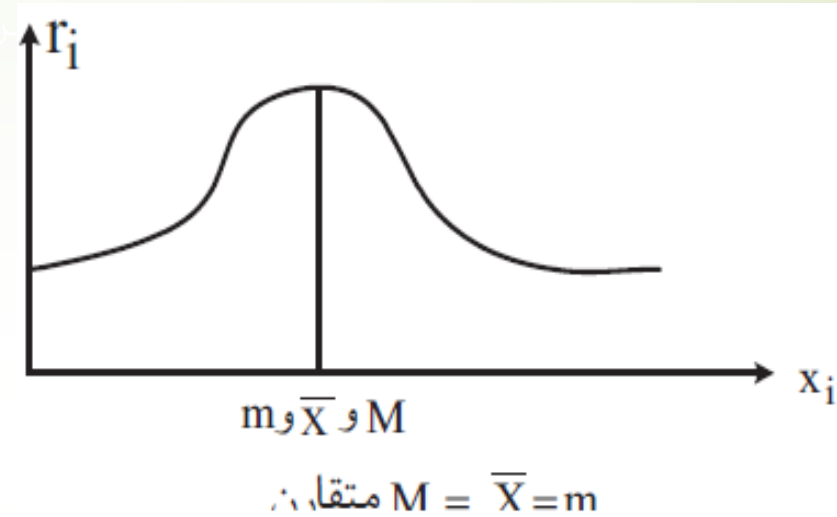
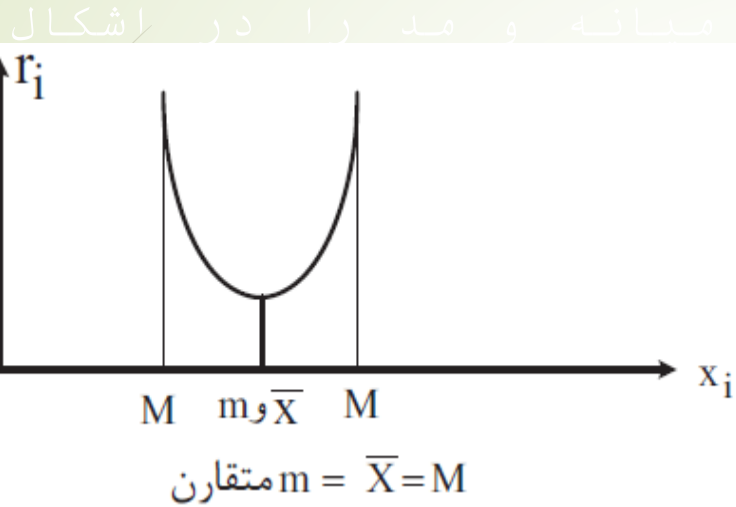
مثال 9: مد = 19.556

$$M = L_M + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \right) \omega$$

FX	Freq	CFreq	Relative	Crelative
1 (5.42,10.3]	4	4	0.08	0.08
2 (10.3,15.2]	7	11	0.14	0.22
3 (15.2,20]	15	26	0.30	0.52
4 (20,24.9]	14	40	0.28	0.80
5 (24.9,29.8]	9	49	0.18	0.98
6 (29.8,34.7]	1	50	0.02	1.00

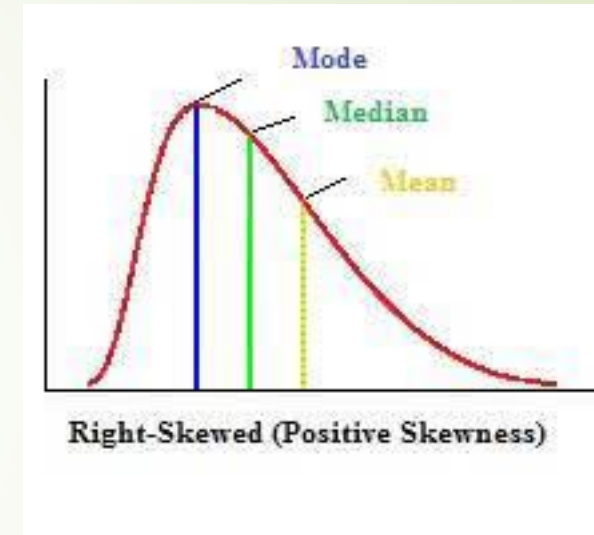
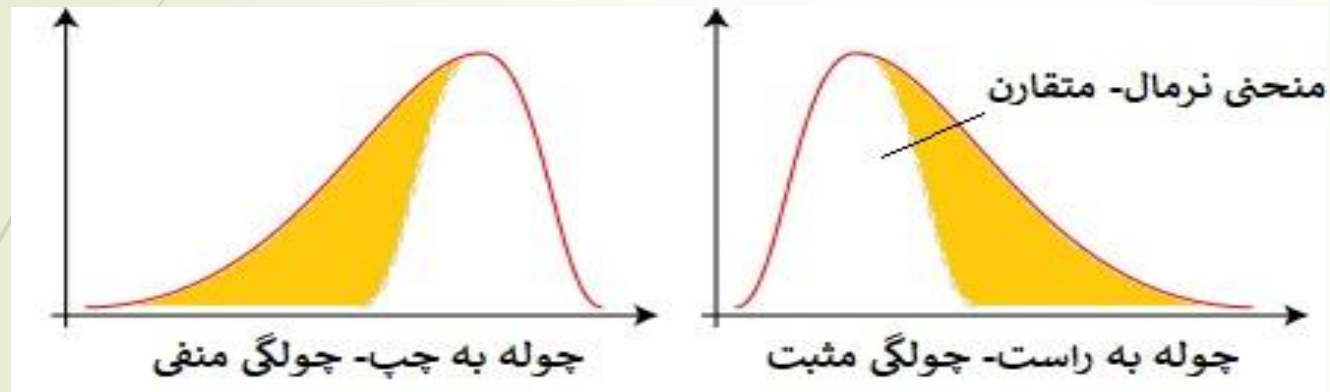
- تمرین 1: میانگین داده های فوق را محاسبه کنید.

چولگی (کشیدگی چپ یا راست) توزیع فراوانی داده‌ها



چولگی (کشیدگی چپ یا راست) توزیع فراوانی داده‌ها

چگونگی قرار گرفتن میانگین و میانه و مد را در اشکال زیر مشاهده می‌شود.



محاسبه میزان عدم تقارن منحنی (روش پیرسون):

$$\bar{X} - M \cong 3(\bar{X} - m)$$

رابطه بین میانه و مد و میانگین

بدست آوردن ضریب چاولگی از مفهوم گشتاور مرتبه Kام حول میانگین (گشتاور مرکزی و غیر مرکزی مرتبه Kام):

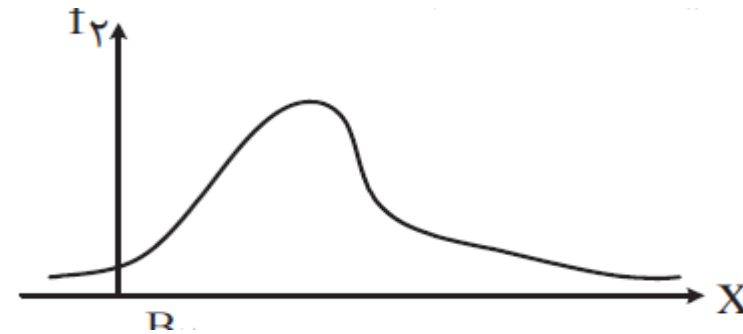
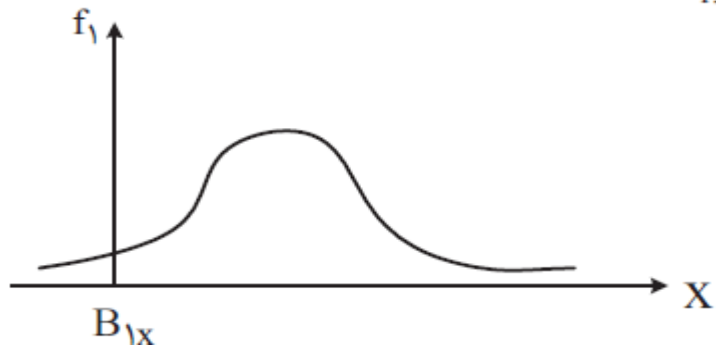
$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^k}{N}; \quad \mu_k = \frac{\sum_{i=1}^p f_i (X_i - \bar{X})^k}{N}; \quad \mu_k' = \frac{\sum_{i=1}^p f_i X_i^k}{N}; \quad \mu_k' = \frac{\sum_{i=1}^N X_i^k}{N}$$

ضریب چاولگی که با B_1 :

$$B_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

هرچه B_1 مقدار بزرگتری (کوچکتری) داشته باشد نشان دهنده افزایش عدم تقارن می باشد.

$$B_{1x} < B_{1y}$$

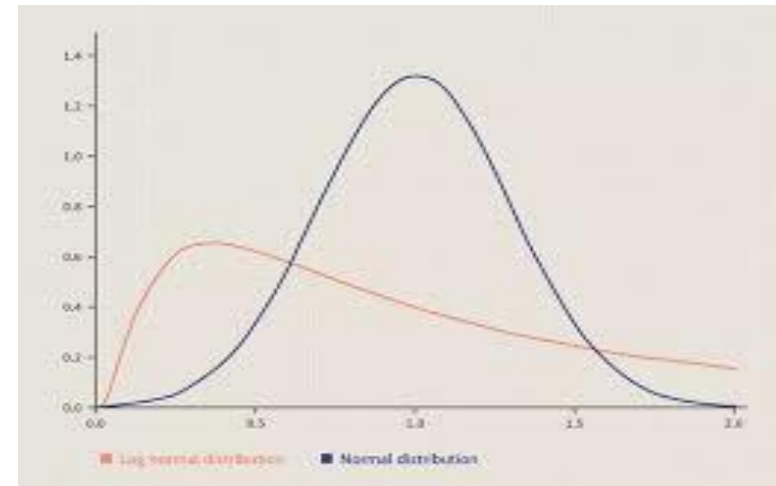
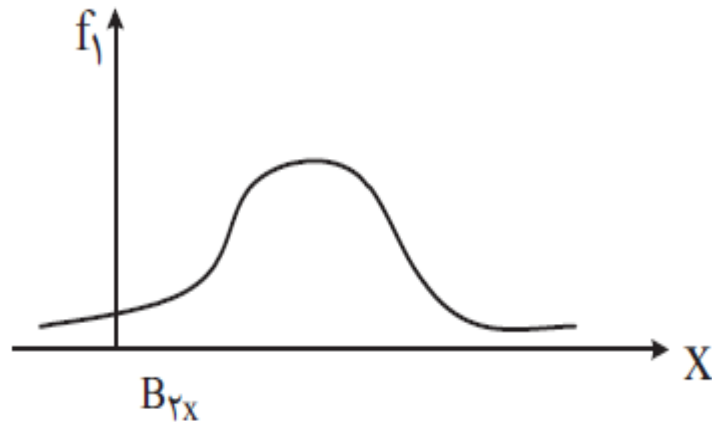


➤ ضریب کشیدگی (ارتفاع) منحنی فراوانی: نشان دهنده میزان کشیدگی منحنی می باشد و به صورت زیر تعریف می شود.

$$B_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

➤ کشیدگی توزیع نرمال برابر 3 است.

دو منحنی زیر مقارن اما ضریب کشیدگی در آنها متفاوت است.



پارامترهای پراکندگی Dispersion parameters (Measures)

➤ **دامنه (تغیرات) داده ها:** حاصل تفاضل بزرگترین داده از کوچکترین داده را R یا دامنه داده ها می گویند.

$$R = X_{(N)} - X_{(1)}$$

➤ که در آن داده ها به فرم $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(N)}$ با فرض اینکه مرتب شده اند.

➤ **میانگین انحرافات:** فاصله داده x_i از میانگین داده ها $\bar{x}$ که به صورت $|x_i - \bar{x}|$ محاسبه می شود را انحراف از میانگین می نامند. اگر مجموع این مقادیر را بر تعداد داده ها تقسیم کنیم، میانگین انحرافات از میانگین بدست خواهد آمد.

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |X_i - \bar{X}|}{N}; \quad D = \frac{\sum_{i=1}^N |X_i - \bar{X}|}{N} \quad \rightarrow$$

➤ **واریانس و انحراف استاندارد:** میانگین مجذور انحرافات را واریانس می نامیم و با نماد s^2 یا s_x^2 نمایش می دهیم. جذر واریانس را انحراف معیار

$$s_b^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^K f_i (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{نامند.}$$

➤ **ضریب تغییرات:** در محاسبه میزان پراکندگی داده‌ها همواره با داده‌هایی سروکار داریم که با مقیاس‌های مختلفی اندازه‌گیری شده‌اند بنابر این برای مقایسه میزان پراکندگی داده‌های بدست‌آمده از دو جامعه آماری که با مقیاس‌های مختلفی اندازه‌گیری شده‌اند استفاده از واریانس مناسب نمی‌باشد. در نتیجه در این موارد از ضریب تغییرات استفاده می‌شود که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.

➤ **تغییر مقیاس و مبدا داده‌ها:**

$$CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

(1) تغییرات مقیاس:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow ax_1, ax_2, \dots, ax_n$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \bar{X}_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n ax_i = a \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \right) = a \bar{X} \Rightarrow \bar{X}_a = a \bar{X}$$

(2) تغییر مبدا داده‌ها. در صورتی که به تمام داده‌ها مقدار b را اضافه یا کم کنیم می‌توان نشان داد که مقادیر $\bar{X}$ و S^2 جدید از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$\bar{X}_b = \bar{X} + b$$

$$S_b^2 = S^2$$

$$\bar{Y} = a \bar{X} + b$$

$$S_a^2 = a^2 S^2$$

نرمال (استاندارد) سازی Standardize

از یک جامعه آماری یک نمونه n تایی مانند $x_1, x_1, \dots, x_n$ به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم بطوریکه میانگین واریانس نمونه‌ها به ترتیب $\bar{x}$ و s_x^2 می‌باشد با توجه به تغییر مبدا و تغییر مقیاس مقدار هر نمونه از میانگین داده‌ها کم می‌کنیم و حاصل را بر s_x تقسیم می‌کنیم بنابراین داده‌های

$$y_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{s_x}, y_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{s_x}, \dots, y_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s_x}$$

را خواهیم داشت. مثال عددی داده شود.

خواص داده های نرمال استاندارد:

1- مستقل از واحد است.

$$\bar{y} = 0, \text{var}(y) = 1$$

3- برای مقایسه دو جامعه بکار می‌رود.

4- هرچه بزرگتر باشد بهتر است.

مثالهای عددی از داده های تبدیل یافته

➤ مثال 13:

X: 8 7 4 4 3 7 3 9 5 7 10 2 7 7 10 12 9 7 3 10 ➤

7 8 8 2 9 7 10 5 5 8 ➤

Mean(x)=6.776667 sd(x)= 2.64814 ➤

Var(x)=7.012644 ➤

Y=2+3x ➤

Y: 26 23 14 14 11 23 11 29 17 23 32 8 23 23 32 38 29 23 11 32 23 ➤

26 26 8 29 23 32 17 17 26

Mean(y)=2+3mean(x)=22.3 , sd(y)=3*sd(x)=7.944419 ➤

Var(y)=9var(x)=63.11379 ➤

مثالهای عددی از داده های استاندارد سازی

مثال 14: ➡

X: 8 7 4 4 3 7 3 9 5 7 10 2 7 7 10 12 9 7 3 10 ➡
7 8 8 2 9 7 10 5 5 8

Mean(x)=6.776667 sd(x)= 2.64814, Var(x)=7.012644

$Y = (x - \text{mean}(x)) / \text{sd}(x)$

Y: -0.69 -0.83 -1.25 -1.25 -1.38 -0.83 -1.38 -0.55 -1.11 -0.83 -0.41 -
1.52

-0.83 -0.83 -0.41 -0.14 -0.55 -0.83 -1.38 -0.41 -0.83 -0.69 -0.69 -1.52

-0.55 -0.83 -0.41 -1.11 -1.11 -0.69

sd(y)= 0.9996253, var(y)=0.9992507

Mean(y)=0.001

فصل دوم : آنالیز ترکیبی

Combinatorial analysis

(1) آنالیز ترکیبی:

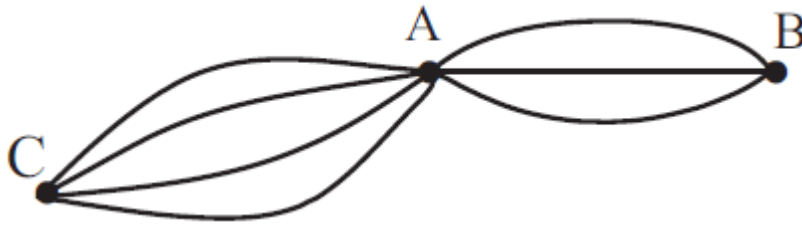
در پرتاب سکه دو حالت ممکن است رخ بدهد (شیر یا خط). اگر بخواهیم بدانیم با پرتاب ۳ عدد سکه چند حالت رخ می دهد می بایستی از قوانین شمارش استفاده کنیم.

✓ قوانین شمارش مبتنی بر دو اصل ضرب و جمع می باشند. با استفاده از این دو اصل می توان تمامی مسایل شمارش را به سادگی حل نمود.

✓ **اصل جمع:** اگر کاری را بتوان به n_1 طریق و کار دیگری را به n_2 طریق انجام داد و این دو کار را نتوان همزمان انجام داد، آنگاه کار اول یا کار دوم را می توان به $n_1 + n_2$ طریق انجام داد. (کارها به صورت موازی)

✓ اگر انجام کار اصلی منوط به انجام کار n_1 یا n_2 یا ... یا n_k باشد، آنگاه تعداد حالات انجام $n_1 + \dots + n_k$

مثال 14: فرض کنید از شهر A به سه طریق به شهر B سفر نمود و به دو طریق به شهر C سفر نمود به چند طریق می توان از A شهر به B یا C سفر نمود.



✓ **اصل ضرب:** اگر کاری را بتوان به N_1 طریق و کار دیگری را به N_2 طریق انجام داد و این دو کار را بتوان بصورت همزمان و یکی پس از دیگری انجام داد، آنگاه هر دو کار را می توان به $N_2 * N_1$ طریق انجام داد. (کار اصلی منوط به انجام کار 1 و کار 2 و ... و کار n باشد، تعداد حالات می شود: $N_1 * \dots * N_n$)

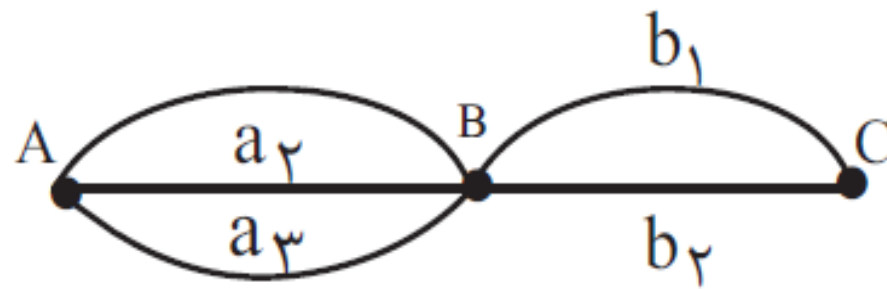
مثال 15: پرتاب ۳ سکه بصورت همزمان چند حالت ممکن را در پی دارد.

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

تمام حالات ممکن:

$$S = \{ (\text{ش و ش و ش}) \text{ و } (\text{خ و ش و ش}) \text{ و } (\text{ش و ش و خ}) \text{ و } (\text{خ و ش و خ}) \text{ و } (\text{ش و ش و خ}) \text{ و } (\text{خ و ش و خ}) \text{ و } (\text{ش و ش و ش}) \text{ و } (\text{خ و ش و ش}) \}$$

برای سفر از شهر A به شهر C چند حالت وجود دارد؟



➡ **فضای نمونه:** مجموعه تمام حالات ممکن از انجام یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه نامند و با **S** نمایش می دهند.

53

1-1) جایگشت:

یک جایگشت از ۲ شئی عبارتست از قرار دادن آنها در یک صف یا ردیف با رعایت یک نظم و ترتیب مشخص.

مثال: حروف A و I و A را به عنوان سه شئی در نظر بگیرید در این صورت کلمه Ali یک جایگشت از این سه حرف می باشد. توجه کنید که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم است مثلاً Ail یک جایگشت دیگر از این حروف می باشد و با جایگشت قبلی متمایز است.

✓ در حالت کلی تعداد جایگشتهای n شئی متمایز در یک ردیف (رعایت ترتیب) عبارتست از:

✓ توجه: اگر در محاسبه جایگشت ها تکرار اشیاء مجاز باشد، می توانیم در تمام مکان ها $n! = (1)(2) \dots (n-2)(n-1) \times n$ و در نتیجه تعداد کل جایگشت ها عبارتند از:

$$n \times n \times n \dots n = n^n$$

مثال‌هایی (5) از ترتیب (جایگشت)

- 1- برای پلاک گذاری ماشین‌ها از ارقام 0 تا 9 استفاده می‌کنیم. اگر پلاک‌ها 6 رقمی باشند، تعداد پلاک‌ها را حساب کنید.
- 2- برای پلاک گذاری ماشین‌ها از ارقام 0 تا 9 استفاده می‌کنیم. اگر پلاک‌ها 6 رقمی باشند و با 0 شروع نشوند، تعداد پلاک‌ها را حساب کنید.
- 3- برای پلاک گذاری ماشین‌ها از ارقام 0 تا 9 و 29 حرف انگلیسی استفاده می‌کنیم. اگر پلاک‌ها از 6 رقم و 2 حرف لاتین در سمت چپ ساخته شوند، تعداد پلاک‌ها را حساب کنید.
- 4 برای پلاک گذاری ماشین‌ها از ارقام 0 تا 9 و 29 حرف انگلیسی استفاده می‌کنیم. اگر پلاک‌ها از 6 رقم و 2 حرف لاتین ساخته شوند، با صفر شروع نشوند، تعداد پلاک‌ها را حساب کنید.
- 5- برای پلاک گذاری ماشین‌ها از ارقام 0 تا 9 و 29 حرف انگلیسی استفاده می‌کنیم. اگر پلاک‌ها از 6 رقم و 2 حرف لاتین ساخته شوند، شماره‌ها با صفر شروع نشوند ولی از یک حرف لاتین بتوان دوبار استفاده کرد، تعداد پلاک‌ها را حساب کنید.

ترتیبهای n شئی به گروههای r تایی (p_r^n) permutation:

یک حالت کلی تر از جایگشت هائیک قرار دادن n شئی متمایز در r ($r \leq n$) مکان، به ترتیب می باشد که با توجه به روش بدست آوردن تعداد کل جایگشت ها که گفته شد در این حالت نیز تعداد کل جایگشتهای n شئی متمایز در r مکان عبارتست از:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

که آنها را با (P_r^n) نشان می دهیم. توجه کنید که $P_n^n = n!$ که همان تعداد کل جایگشت هاست. و اگر تکرار اشیاء مجاز باشد در این صورت تعداد حالات ممکن عبارتست از:

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_r = n^r$$

نکته: $n! = n * (n-1)! = n * (n-1) * (n-2)!$

مثال 21: از بین 15 تیم شرکت کننده در مسابقه فوتبال به چند طریق سه تیم رتبه های اول و دوم و سوم را بدست می آورند.

$$p_3^{15} = \frac{15!}{12!} = \frac{15*14*13*12!}{12!} = 15 * 14 * 13 = 2730$$

تمرین 2-8

سه زاهدانی، 4 اصفهانی و 3 کرمانی را می خواهیم در یک صف قرار دهیم. مطلوبست تعداد حالت های ممکن اگر:

- (1) هیچ قیدی نداشته باشیم.
- (2) اصفهانی ها کنار هم باشند.
- (3) زاهدانی ها، کرمانی ها و اصفهانی ها کنار هم باشند.
- (4) اگر هم شهری ها کنار هم باشند و کرمانها در وسط قرار گیرند.
- (5) اگر این افراد را دور یک میز گرد بنشانیم.
- (6) اگر کرمانی ها باهم قهر باشند و نخواهند کنار هم باشند.
- (7) با ارقام 0 تا 9 چند عدد 5 رقمی می توان ساخت؟

■ تمرین 9-17 مطلوبست تعداد حالت‌های ممکن اگر:

- (1) فرض کنید 4 آلمانی و 5 ایرانی را در یک صف قرار گیرند.
- (2) آلمانی‌ها کنار هم باشند.
- (3) ایرانی‌ها کنار هم نباشند.
- (4) آلمانی‌ها کنار هم نباشند.
- (5) این افراد دور یک میز گرد بنشینند.
- (6) این افراد دور یک میز گرد بنشینند و ایرانی‌ها کنار هم باشند.
- (7) این افراد دور یک میز گرد بنشینند و ایرانی‌ها کنار هم نباشند.
- (8) این افراد دور یک میز گرد بنشینند و آلمانی‌ها کنار هم باشند.

(1-3) ترکیب و مسایل انتخاب:

58

تا بحال با اشیاء متمایز و نظم در ترتیب قرارگیری سروکار داشتیم اما اگر بخواهیم از ترتیب قرارگیری صرف نظر کنیم این حالت به مساله انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز تبدیل می‌شود که به آن ترکیب r از n شئی می‌گوییم.

مثال 22: از بین 5 مدل اتومبیل سه مدل را انتخاب کنیم، به چند طریق این امر امکان پذیر است؟

اتومبیل ها را از 1 تا 5 شماره گذاری می‌کنیم و سه جایگاه برای سه مدل اتومبیل انتخابی و مرتب کردن در نظر می‌گیریم بنابراین طبق جایگشت‌های 3 شئی از 5 شئی تعداد کل حالات عبارتست از:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

اما چون مساله تنها انتخاب 3 از 5 می‌باشد و ترتیب قرار گیری مورد نظر نیست بنابراین حالت‌های زیر تکراری محسوب می‌شوند:

$$\begin{array}{cccc} (1,2,3) & (3,2,1) & (2,1,3) & (2,3,1) \\ (1,3,2) & (3,1,2) & & \end{array}$$

➤ به تعداد جایگشت های مکان های سه اتومبیل، جایگشت تکراری داریم که طبق اصل ضرب یعنی عدد $3!$ اضافه در داخل p_3^5 ضرب شده است که با تقسیم بر آن داریم:

$$\frac{P_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

➤ در نتیجه تعداد کل انتخابها r از n عبارتست از:

$$c_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

در حالت کلی تعداد حالات انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز که ترتیب قرارگرفتن کنار هم مهم نباشد، بهصورت فوق و با علایم $c(n,r)$, C_r^n یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهند. C_r^n

در حالت کلی انتخاب r شئی از بین n شئی متمایز با تکرار برابر است با (بتوان در هر جایگاه هر تعداد شئی قرار داد):

$$\binom{n+r-1}{r}$$

تفسیر فرمول زیر و رسم شکل

فضای نمونه، پیشامد

Sample Space, Event

2) فضای نمونه و پیشامد (یادآوری):

مجموعه تمام حالت های ممکن از انجام یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه نامیدیم و آنرا با S نمایش داده ایم حال به معرفی پیشامد می پردازیم.

پیشامد Event: هر یک از زیر مجموعه های فضای نمونه را یک پیشامد می نامیم. و در صورتی که نتیجه آزمایش تصادفی عضوی از پیشامد E باشد می گوئیم پیشامد E بوقوع پیوسته (یا رخ داده) است.

مثال 23: یک سکه را پرتاب می کنیم. فضای نمونه و زیرمجموعه های آنرا مشخص کنید.

$$S=\{T, H\} \rightarrow E_1=\{T\}, \quad E_2=\{H\}, \quad E_3 = \{\} = \emptyset, \quad E_4=\{T,H\}$$

مثال 24: گلدانی حاوی 3 مهره به رنگهای قرمز، آبی و سبز است.

مثال 25: تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد پیشامدهای ممکن به ازای پرتاب یک عدد تاس را بدست آورید:

حل: پرتاب یک عدد تاس منجر به شش حالت ۱ تا ۶ می شود که در نتیجه فضای نمونه عبارتست از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ که ۶ عضو دارد اما چون هر کدام از زیر مجموعه های فضای نمونه می تواند به عنوان یک پیشامد در نظر گرفته شوند و تعداد کل زیر مجموعه های آن

$$A = \{\phi\} \quad D = \{1, 2, 3\} \quad C = \{2\} \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad 2^6 = 64 \text{ است.}$$

اگر یک مجموعه n عضو داشته باشد، تعداد پیشامدهای ممکن آن 2^n می باشد.

هر کدام از مجموعه های D, C, B, A پیشامدهایی برای فضای نمونه S می باشند:

2-1) انواع پیشامدها و اعمال روی پیشامدها:

■ **پیشامد ساده:** پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد را پیشامد ساده می نامیم مثل $E1 = \{T\}$, $E2 = \{H\}$

که در نتیجه حاصل از پرتاب دو سکه با هم می باشد.

$$E = \{(\text{خط و شیر})\}$$

▪ **پیشامد مرکب:** پیشامدی که دارای دو عضو یا بیشتر را مرکب می نامیم مثل

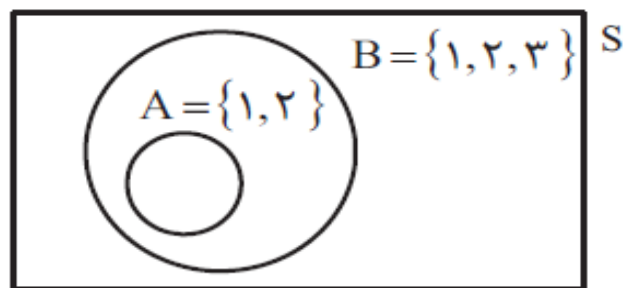
$$E = \{1, 2\}$$

▪ **پیشامد تهی یا محال:** اگر پیشامدی دارای هیچ عضوی نباشد به آن پیشامد محال گویند.

▪ **پیشامد حتمی:** پیشامدی که برابر با فضای نمونه S باشد پیشامد حتمی نامیده می شود مثلاً در پرتاب یک عدد تاس $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ پیشامد حتمی است.

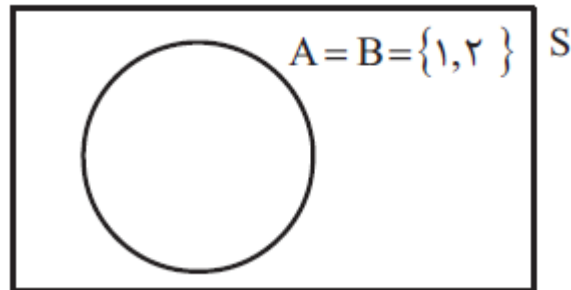
از آنجا که پیشامدها خود یک مجموعه می باشند می توان اعمالی که روی مجموعه ها تعریف می شود را روی پیشامدها نیز اعمال نمود. دو پیشامد را A و B و فضای نمونه را S در نظر می گیریم.

1. هر گاه وقوع پیشامد A وقوع پیشامد B را نتیجه دهد گوییم پیشامد A زیر پیشامد B می باشد و آنرا بصورت $A \subset B$ نمایش می دهیم. این مطلب را در شکل نیز مشاهده می کنید. نمودار ون:



2. هر گاه وقوع پیشامد A وقوع پیشامد B را نتیجه دهد و بالعکس دو پیشامد را مساوی گویند.

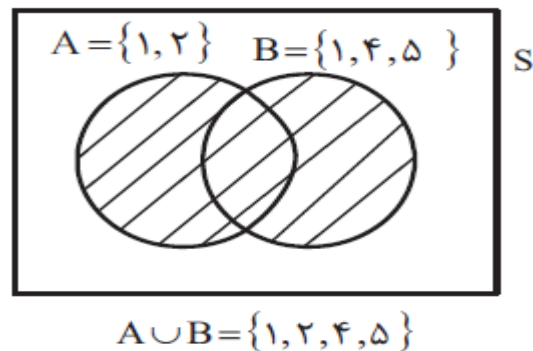
$$A=B \Leftrightarrow (A \subset B, B \subset A)$$



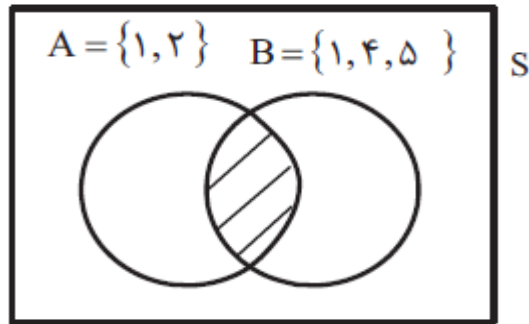
3. اجتماع دو پیشامد (به کمک نمودار ون): در صورتی که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند گویند اجتماع دو پیشامد یا

$A \cup B$ رخ داده است و آنرا بصورت زیر می نویسیم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



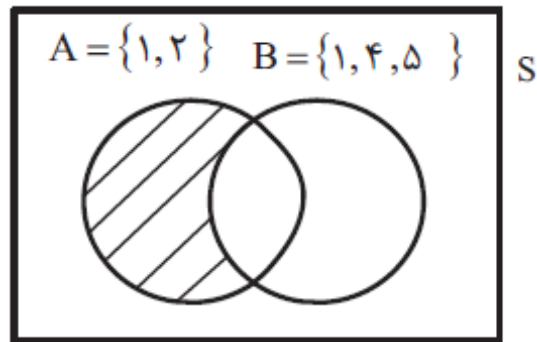
4. **اشتراک دو پیشامد:** در صورتی که هر دو پیشامد A و B بصورت همزمان رخ دهند گویند اشتراک آندو یا $A \cap B$ رخ داده است.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

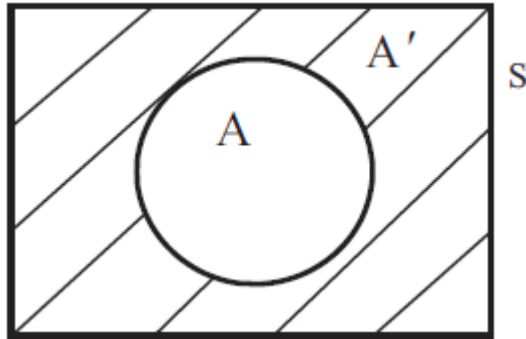
5. **تفاضل دو پیشامد:** اگر فقط A رخ دهد در حالی که B رخ نداده باشد گویند تفاضل دو پیشامد یا $A - B$ رخ داده است.



$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

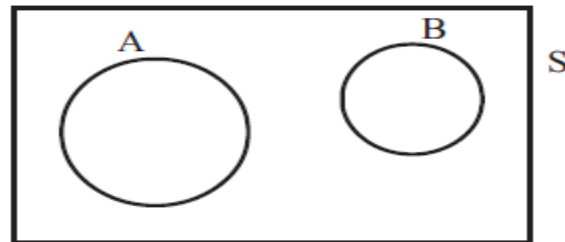
$$A - B = \{2\}$$

6. متمم یک پیشامد: A^c و $\bar{A}$ و A^c را متمم پیشامد A در نظر می گیریم وقتی که رخ دادن A^c به معنی عدم وقوع A می باشد.



$$A' = \{x \mid x \in S, x \notin A\}$$

7. در صورتی که دو پیشامد همزمان نتواند رخ دهند یا به عبارتی اشتراکی نداشته باشند آندو را دو پیشامد ناسازگار گوئیم در این حالت $A \cap B = \Phi$.



6. روابط بین مجموعه ها و پیشامدها:

66

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \subseteq S \Rightarrow$$

$$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B \subseteq S \Rightarrow$$

$$A \cap B \cap C \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \subseteq A \cup B \cup C \subseteq S \Rightarrow$$

$$A \cap B \cap C \subseteq A \cap C \subseteq C \Rightarrow$$

$$A \cap B \cap C \subseteq C \cap B \subseteq B \Rightarrow$$