فصل ۶

منیفلد انتگرال

۱.۶ پیش درآمد

اعتبار ریاضی‌دانان به چند برهان بدی است که اقامه می‌کنند. [کار پیشروها زشت است.]

آ. س. بیسکوویچ[۱]

زیبایی اولین آزمون است: در دنیا جایی برای ریاضیات زشت نیست. ج. ه. هارودی[۲]

در فصل قبل دیدیم که حتی اگر میدان برداری X بر کل منیفلد مفروض M هموار باشد، منحنی‌های انتگرال X ممکن است تنها برای زمان‌های باندازه کافی کوچک قابل تعریف باشند. اکنون کمی بحث را تغییر داده، و به دنبال احکام کلی در این رابطه هستیم. به جای میدان برداری، فرض می‌کنیم که به ازاء هر $p \in M$ ای یک زیر فضای یک بعدی $\Delta_p \subset T_pM$ داریم. تابع Δ حاصل را، توزیع ۱—بعدی می‌نامیم (این نوع توزیع ربطی با مفهوم توزیع در آنالیز که در ارتباط با اشیائی چون «$\delta-$ تابع» است، ندارد). در این صورت Δ به شکل **موضعی** توسط میدان برداری تولید می‌گردد؛ یعنی، به ازاء هر $p \in M$، در همسایگی p یک (و لذا تعداد زیادی) میدان برداری X

[۱] برگرفته از کتاب «مطالب گوناگونی از ریاضیدانان» از ج. ر. لیتل وود.
[۲] برگرفته از کتاب «عذرخواهی یک ریاضیدان».

به گونه‌ای می‌توانیم انتخاب کنیم که به ازاء هر q از آن همسایگی $0 \neq X_q \in \Delta_q$. Δ را در صورتی توزیع هموار گوئیم که در هر نقطه، X را میدانی هموار بتوان انتخاب نمود.

مفهوم منحنی انتگرال در مورد توزیع ۱—بعدی بی معنی است، ولی می‌توانیم چنین تعریف کنیم که: زیر منیفلد ۱—بعدی N از M را در صورتی منحنی انتگرال Δ گوئیم که به ازاء هر $p \in N$ ای $i_*(T_pN) = \Delta_p$، که $i = N \hookrightarrow M$ نگاشت احتوی است. به ازاء هر $p \in M$ ای، همیشه می‌توان منیفلد انتگرالی N برای توزیع هموار Δ یافت که $p \in N$؛ کافی است میدان برداری X را انتخاب کنیم که به ازاء هر q از یک همسایگی از p داریم $0 \neq X_q \in \Delta_q$، و سپس انتگرال c میدان برداری X با شرط آغازی $p = C(0)$ را بدست بیاوریم. آنگاه با در نظر گرفتن N به صورت برد c، پارامتره کردن c را فراموش کنیم. این استدلال عملاً نشان می‌دهد که به ازاء هر $p \in M$ ای یک دستگاه مختصات (x, U) چنان وجود دارد که به ازاء هر مجموعهٔ ثابت از اعداد a^2، $\cdots$ و a^n، مجموعهٔ

$$\left\{q \in U \middle| x^2(q) = a^2, \cdots, x^n(q) = a^n\right\}$$

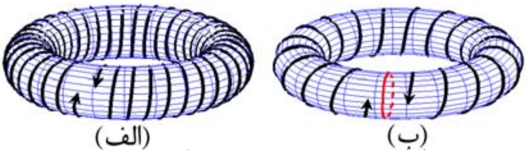
منیفلد انتگرال Δ بر U است، و اینها تنها منیفلدهای انتگرال در U هستند.

این هنوز هم حکمی موضعی است، اما چون با زیر منیفلدها سر و کار دارد و نه با منحنیهای با پارامترهای به خصوص، امکان متصل کردن زیر منیفلدهای انتگرال با هم وجود دارد. کل منیفلد M را به صورت اجتماعی مجزا از زیر منیفلدهای انتگرال همبند Δ می‌توان نوشت که موضعاً به شکل

(الف) (ب)

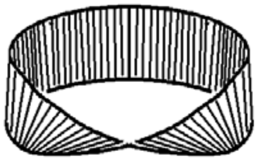
شکل ۱.۶

و یا صورتهای پیچیده‌تر می‌باشد. مثلاً همان طور که در فصل ۱ دیدیم، توزیعی بر چنبره وجود دارد که منیفلدهای انتگرال آن، منیفلدهای ۱—بعدی چگال هستند. به علاوه، بر چنبره توزیعی وجود دارد که داری تنا یک منیفلد انتگرال همبند فشرده هستند. همچنین، میدان‌های برداری‌ای بر چنبره یافت می‌شوند که هر یک از دو توزیع فوق الذکر، منحنی‌های انتگرال یکی از آنها هستند.



شکل ۲.۶: دو توزیع متفاوت بر تیوب

اما بر نوار موبیوس، توزیعی وجود دارد که تنها به شکل موضعی توسط میدان برداری تولید می‌شود و هیچ میدان برداری‌ای وجود ندارد که آنرا به شکل فراگیر تولید کند.


شکل ۳.۶: نوار موبیوس

جزئیات در ارتباط با کنار هم گذاری منیفلدهای انتگرال موضعی را به کنار می‌گذاریم، زیرا عملاً در ابعاد بالا این کار را نمی‌شود انجام داد. فعلاً، برای حالت ابعاد بالا به شکل موضعی عمل می‌کنیم.

توزیع $k-$بعدی بر M، تابعی $p\mapsto\Delta_p$ است که $\Delta_p\subset T_pM$ زیر فضایی $k-$بعدی از T_pM است. به ازاء هر $p\in M$، همسایگی U و k میدان برداری X_1، $\cdots$ و X_k چنان یافت می‌شوند که $X_1(q)$، $\cdots$ و $X_k(q)$ پایه‌ای برای Δ_q است به ازاء هر $q\in U$. Δ را در صورتی توزیع هموار گوئیم که میدان‌های برداری هموار X_1، $\cdots$ و X_k با ویژگی بالا بتوان انتخاب نمود (البته در همسایگی از هر نقطهٔ $p\in M$). زیر منیفلد ($k-$بعدی) N از M را در صورتی **منیفلد انتگرال** برای Δ گوئیم که به ازاء هر $p\in N$ ای $i_*(T_pN)=\Delta_p$، که $i:N\hookrightarrow M$ نگاشت احتوی است.

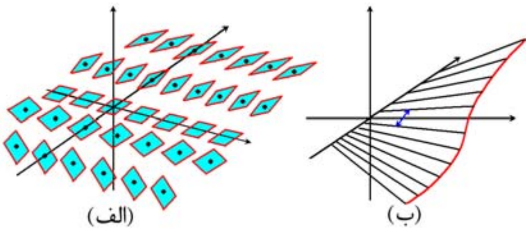
با اینکه به نظر تعاریف ذکر شده بسیار شبیه حالت ۱$-$بعدی است، اما احکام مربوطه خیلی متفاوت به نظر می‌آیند. در کل، حتی به صورت موضعی، ممکن است منیفلد انتگرال موجود نباشد.

به عنوان ساده‌ترین مثال، توزیع ۲$-$بعدی Δ در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید که $\Delta_p=\Delta_{(a,b,c)}$ توسط $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p+b\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ و $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$ تولید می‌شود. بنابراین

$$\Delta_p=\left\{r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p+s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p+br\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p : r,s\in\mathbb{R}\right\}$$

اگر $T\mathbb{R}^n$ را با $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ یکی بگیریم، در این صورت Δ_p از همهٔ بردارهای به شکل $(r,s,rb)_p$ تشکیل می‌شود. بنابراین Δ_p را به صورت صفحهٔ به معادلهٔ $z-c=b(x-$

$a)$ می‌توان تصور نمود. شکل زیر Δ_p را برای $p=(a,b,0)$ ها نشان می‌دهد. صفحهٔ $\Delta_{a,b,c}$ عبارت است از صفحهٔ گذشته از نقطهٔ (a,b,c) و موازی با صفحه‌ای که از $(a,b,0)$ می‌گذرد.



شکل ۴.٦: نمونه‌ای از یک توزیع انتگرال ناپذیر

چنانچه این توزیع را تجسم کنید، احتمالاً پی می‌برید که چرا هیچ منیفلد انتگرالی ندارد. فرض کنید منیفلد انتگرالی N از Δ با $0 \in N$ وجود داشته باشد. در این صورت، باید مقطع N و $\{(0,y,z)\}$ یک منحنی δ در $yz-$ صفحه باشد که از 0 می‌گذرد و بردارهای مماس به آن در مقطع $\Delta_{(0,y,z)}$ و $yz-$ صفحه قرار دارند. تنها چنین بردارهایی، بردارهای با مؤلفهٔ سوم صفرند، و لذا بایستی δ برابر $y-$ محور باشد. حال، به ازاء هر y_0 ثابت، مقطع $N\cap\{(x,y_0,z)\}$ را در نظر می‌گیریم. این یک منحنی در صفحهٔ $\{(x,y_0,z)\}$ است که از $\{(0,y_0,0)\}$ می‌گذرد، و همهٔ بردارهای مماس به آن با شیب y_0 هستند، لذا بایستی برابر خط $\{(x,y_0,y_0x)\}$ باشد. پس، در مجموع باید منیفلد انتگرال مورد نظر به صورت در قسمت (ب) از شکل ۴.٦ باشد. اما چنین زیر منیفلدی وجود ندارد. مثلاً فضای مماسش در $(1,0,0)$ برابر فضای همهٔ بردارهای با مؤلفهٔ سوم مخالف صفر است، که غیر ممکن است.

برای اینکه ببینیم واقعاً در اینجا چه اتفاقی رخ داده است، حالت کلی‌تر را در نظر می‌گیریم که $\Delta_{(a,b,c)}-\Delta_p$ برابر

$$\Delta_p := \left\{ r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \{rf(a,b)+sg(a,b)\}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p : a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

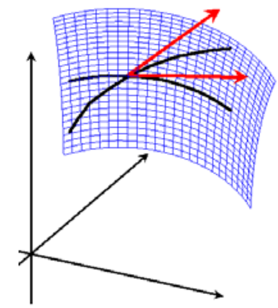
باشد. از نظر هندسی، Δ_p صفحه‌ای است به معادلهٔ

$$z-c=f(a,b)(x-a)+y(a,b)(y-b)$$

مثل در مثال اول، صفحهٔ $\Delta_{(a,b,c)}$ از (a,b,c) می‌گذرد و با صفحه‌ای که از $(a,b,0)$ می‌گذرد، موازی است، زیرا f و g تنها به a و b بستگی دارند.

اکنون می‌پرسیم که در چه صورت توزیع Δ به ازاء هر نقطه‌ای یک منیفلد انتگرال N عبوری از آن نقطه دارد. چون Δ_p هیچگاه به $xy-$ صفحه عمود نمی‌شود، زیر منیفلد به صورت موضعی به شکل نمودار تابعی از x و y قابل بیان است:

$$N = \{(x,y,z)\Big| z = \alpha(a,y)\}$$



شکل ۵.۶

اکنون، فضای مماس در $p = (a,b,\alpha(a,b))$ توسط

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a,b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a,b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

تولید می‌گردد. این بردارهای مماس، وقتی و تنها وقتی در Δ_p قرار دارند

$$f(a,b) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(a,b) \quad , \quad g(a,b) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(a,b)$$

بنابراین، تابعی $\alpha : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ لازم است بیابیم که

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = f \quad , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = g \qquad (۱.۶)$$

مشخص است که در حالت کلی، چنین تابعی وجود ندارد. با برابر قرار دادن مشتقات جزیی ترکیبی، شرط لازم بر f و g می‌یابیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (۲.۶)$$

در مثال قبلی ما $f(a,b) = b$، $g(a,b) = ۰$، $\frac{\partial f}{\partial y} = ۱$ و $\frac{\partial g}{\partial x} = ۰$ و لذا این شرط لازم در این حالت برقرار نیست. می‌دانیم که شرط لازم (۲.۶) برای وجود تابع α صادق در (۱.۶) برای یک همسایگی از هر نقطه، کافی نیز هست.

۱.۱.٦ گزاره. اگر f و g در شرط (۲.٦) صدق کنند، در همسایگی از ۰، و نیز اگر $z_\circ \in \mathbb{R}$، آنگاه تابعی α وجود دارد که در یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}^2$ تعریف می‌گردد، طوری که $\alpha(\circ,\circ) = z\circ$ و رابطهٔ (۱.٦) برقرار است.

اثبات: ابتدا $\alpha(x,\circ)$ را طوری تعریف می‌کنیم که $\alpha(\circ,\circ) = z_\circ$ و

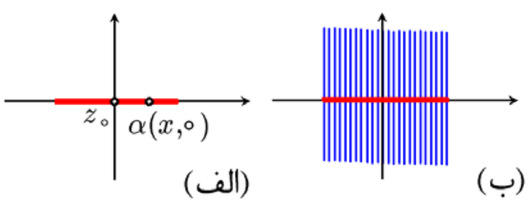
$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,\circ) = f(x,\circ) \tag{۳.٦}$$

یعنی، تعریف می‌کنیم

$$\alpha(x,\circ) = z_\circ + \int_\circ^x f(t,\circ)dt$$

سپس، به ازاء هر x ای $\alpha(x,y)$ را به صورت

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y) = g(x,y) \tag{۴.٦}$$



شکل ٦.٦

تعریف می‌کنیم؛ یعنی، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\alpha(x,y) &= \alpha(x,\circ) + \int_\circ^y g(x,t)dt \\ &= z_\circ + \int_\circ^x f(t,\circ)dt + \int_\circ^y g(x,t)dt\end{aligned}$$

در این ساخت از (۲.٦) استفاده نشد، و به موجب آن α ای بدست آوردیم که در (۴.٦) صدق می‌کند و $\partial\alpha/\partial y = g$. ادعا می‌کنیم که اگر (۲.٦) برقرار باشد، آنگاه بایستی بعلاوه داشته باشیم $\partial\alpha/\partial x = f$. برای اثبات این مطلب، به ازاء هر x ثابت، تابع $y \mapsto \frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) - f(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. بنا به (۳.٦) این تابع به ازاء $y = \circ$

برابر ۰ است. برای اینکه ثابت کنیم، تابع مذکور به ازاء هر y ای صفر است، کافی است نشان دهیم که مشتق آن ۰ است. اما مشتق آن در y عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &\overset{(2)}{=} \frac{\partial y}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &\overset{(**)}{=} 0\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

اکنون آماده‌ایم تا به طور اساسی به حالت کلی یک توزیع ۲−بعدی در $\mathbb{R}^3$ بپردازیم:

$$\Delta_p=\left\{r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p+s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p+(rf(p)+sg(p))\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p : r,s\in\mathbb{R}\right\}$$

که $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. فرض کنید $N=\{(x,y,z):z=\alpha(x,y)\}$ یک منیفلد انتگرال برای Δ است. فضای مماس به N در $p=(a,b,\alpha(a,b))$ باز هم توسط

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p+\frac{\partial\alpha}{\partial x}(a,b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p+\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

تولید می‌گردد. این بردارهای مماس وقتی و تنها وقتی در Δ_p قرار دارند که

$$f(a,b,\alpha(a,b))=\frac{\partial\alpha}{\partial x}(a,b) \quad , \quad g(a,b,\alpha(a,b))=\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b) \qquad (5.6)$$

جهت بدست آوردن شرایط لازم برای و چون چنین تابع α ای، باز هم از برقرار دادن مشتقات جزئی ترکیبی آغاز می‌کنیم. در این صورت، از (۵.۶) و قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial x}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,\alpha(a,b))+\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,\alpha(a,b)).\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}(a,b) &= \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\alpha(a,b))+\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,\alpha(a,b)).\frac{\partial\alpha}{\partial y}(a,b)\end{aligned}$$

این فرمول چندان مفید نیست، زیرا در آن همچنان تابع مجهول α حضور دارد، اما با جاگذاری از (۵.۶) داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,\alpha(a,b)) &+ \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,\alpha(a,b)).g(a,b,\alpha(a,b))\\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(a,b,\alpha(a,b)).f(a,b,\alpha(a,b))\end{aligned}$$

اکنون، به دنبال شرایطی هستیم که بایستی f و g در آنها صدق کنند تا به موجب آنها از هر نقطه‌ای یک منیفلد انتگرال Δ بگذرد؛ به این معنی که این معادلات در هر (a,b) ای برقرار باشند و فرقی نکند که $\alpha(a,b)$ چه باشد. به این ترتیب، به شرط لازم معروف به شرح ذیل می‌رسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}.g=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}.f \qquad (٦.٦)$$

ثابت می‌شود که در این حالت کلی نیز، شرط لازم بالا، عملاً یک شرط کافی نیست. در واقع، نیازی نیست که خود ما آنرا به تنها یک تابع که بر $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده است، محدود کنیم؛ قادر به بررسی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای n تابع بر $\mathbb{R}^m$ هستیم (به عبارت دیگر، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مورد یک تابع از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$). در قضیهٔ زیر، t را به عنوان نقاط در $\mathbb{R}^m$ و x را به عنوان نقاط در $\mathbb{R}^n$ استفاده می‌کنیم؛ پس، در مورد هر تابع $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ می‌توان از $\frac{\partial f}{\partial t^i}$ برای D_if و از $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ برای $D_{m+i}f$ استفاده کرد.

۲.۱.٦ قضیه. گیریم $U\times V\subseteq\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ باز است، که U همسایگی‌ای از $\circ\in\mathbb{R}^m$ است و $f_i:U\times V\to\mathbb{R}^n$ توابعی هموارند، که $i=۱,\cdots,m$. در این صورت، به ازاء هر $x\in V$ ای، حداکثر یک تابع $\alpha:W\to V$ وجود دارد که بر همسایگی‌ای از W از $\circ\in\mathbb{R}^m$ تعریف می‌شود و در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\alpha(\circ)=x\\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial t^i}(t)=f_j(t,\alpha(t)) \quad \forall\, t\in W\end{cases} \qquad (٧.٦)$$

(به بیان دقیق‌تر، هر دو چنین تابعی مانند $\alpha_۱$ بر $W_۱$ و $\alpha_۲$ بر $W_۲$، بر مؤلفه‌ای از $W_۱\cap W_۲$ که شامل $\circ$ است، برابرند.) چنین تابعی وقتی و تنها وقتی در همسایگی‌ای W از $\circ$ وجود دارد (و به طور خودکار هموار است) که همسایگی‌ای از $(\circ,x)\in U\times V$ چنان وجود داشته باشد که

$$\frac{\partial f_j}{\partial t^i}-\frac{\partial f_i}{\partial t^j}+\sum_{k=۱}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x^k}f_i^k-\sum_{k=۱}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x^k}f_j^k=\circ \quad i,j=۱,\cdots,m \qquad (٨.٦)$$

اثبات: یکتایی از اثبات وجود نتیجه می‌شود. نشان دادن لزوم شرایط (٨.٦) ساده است و به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده؛ بنابراین، کافی است نشان دهیم که اگر این

شرایط برقرار باشند، آنگاه تابعی با شرایط مورد نظر وجود دارد. اثبات شبیه گزارهٔ ۱.۱.۶ است، با یک مشکل کوچک در انتهای آن.

ابتدا می‌خواهیم $\alpha(t,0,\cdots,0)$ را طوری تعریف کنیم که

$$\begin{cases} \alpha(0,0,\cdots,0) \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t^1}(t,0,\cdots,0) = f_1(t,0m\cdots,0,\alpha(t,0,\cdots,0)) \end{cases} \qquad (۹.۶)$$

برای این منظور، معادله دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases} \beta_1(0) = x \\ \beta_1'(t) = f_1(t,0,\cdots,0,\beta_1(t)) \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله منحصر بفرد دارد که برای t های با $|t| > \varepsilon_1$ تعریف می‌گردد. تعریف می‌کنیم

$$\alpha(t,0,\cdots,0) = \beta_1(t) \qquad |t| < \varepsilon_1$$

در این صورت، رابطهٔ (۹.۶) برای $|t| < \varepsilon_1$ برقرار است.

اکنون برای هر t^1 ثابت با $\left|t^1\right| < \varepsilon_1$، معادلهٔ

$$\begin{cases} \beta_2(0) = \alpha(t^1,0,\cdots,0) \\ \beta_2'(t) = f_2(t^1,t,0,\cdots,0,\beta_2(t)) \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله نیز به ازاء t های باندازهٔ کافی کوچک، جواب منحصر بفرد دارد. در اینجا، لازم است خواننده به قضیهٔ ۲.۲.۵ برگردد و حکم ذیل را تحقیق کنید: اگر ε_1 را باندازهٔ کافی کوچک انتخاب کنیم، آنگاه به ازاء هر $\left|t^1\right| < \varepsilon_1$، جواب‌های معادلات برای β_2 با شرایط اولیهٔ $\beta_2(0) = \alpha(t^1,0,\cdots,0)$، هر یک برای $|t| < \varepsilon_2$ تعریف می‌گردند، که $\varepsilon_2 > 0$ عددی خاص است. در این صورت، تعریف می‌کنیم

$$\alpha(t^1,t,0,\cdots,0) = \beta_2(t) \qquad |t^1| < \varepsilon_2 \quad , \quad |t| < \varepsilon_2$$

به این ترتیب، داریم

$$\begin{cases} \alpha(0,0,\cdots,0) = x \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial t^2}(t^1,t,0,\cdots,0) = f_2(t^1,t,0,\cdots,0,\alpha(t^1,t,0,\cdots,0)) \\ |t^1| < \varepsilon_1 \ , \ |t| < \varepsilon_2 \end{cases} \qquad (۱۰.۶)$$

ادعا می‌کنیم که به ازاء هر t^1 ثابت با $|t^1| < \varepsilon_1$، به ازاء هر t با $|t| < \varepsilon_2$ نیز داریم

$$0 = g(t) = \frac{\partial\alpha}{\partial t^1}(t^1,t,\cdots,0) - f_1(t^1,t,0,\cdots,0)\alpha(t^1,t,0,\cdots,0) \qquad (۱۱.۶)$$

ابتدا توجه می‌کنیم که بنا به (۹.۶) داریم

$$g(0) = 0 \tag{۱۲.۶}$$

حال معادله‌ای برای $g'(t)$ استخراج می‌کنیم. در ادامه، همهٔ عبارات شامل α را در $(t^1, t, 0, \cdots, \cdots, 0, \alpha(t^1, t, 0, \cdots, 0))$ مقداریابی کرده‌ایم و همهٔ عبارات شامل f_i را در $(t^1, t$.
داریم

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2 \partial t^1} - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k}\frac{\partial \alpha^k}{\partial t^2} \\ &\overset{(۱۰.۶)}{=} \frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} f_2^k \\ &\overset{(۱۰.۶)}{=} \frac{\partial f_2}{\partial t^1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x^k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial t^1} - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} f_2^k \\ &\overset{(۱۱.۶)}{=} \frac{\partial f_2}{\partial t^1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x^k}(g^k(t) + f_1^k) - \frac{\partial f_1}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x^k} f_2^k \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x^k} g^k(t) \end{aligned} \tag{۱۳.۶}$$

اکنون، معادلهٔ (۵) یک معادله دیفرانسیل با جوابی منحصر بفرد برای هر شرط اولیه است. جواب با شرط اولیهٔ $g(0) = 0$ مطرح شده در (۴)، به وضوح به ازاء هر t ای $g(t) = 0$. پس (۳) درست است.

نشان دادن اینکه α عملاً بر $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \cdots \times (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$ تعریف می‌شود و در $(*)$ صدق می‌کند، تمرینی ساده است. □

قضیهٔ ۲.۱.۶ مسألهٔ اینکه در چه صورت توزیع‌ها، منیفلد انتگرال دارند را به طوری اساسی برای ما حل می‌کند. شیوهٔ بحث ما و نهایتاً مسألهٔ مذکور، مطلبی اساسی در مورد قضایای در هندسهٔ دیفرانسیل می‌دهد:

بسیاری از قضایای اساسی در هندسه دیفرانسیل، به دو دسته قابل تقسیم هستند. نوع اول از قضایا به ما می‌گویند که چنانچه وضعیت مناسبی پیش بیاید (نظیر، یک توزیع دارای زیرمنیفلدهای گذرنده از هر نقطه‌ای باشد) آنگاه شرایط دیگر نیز برقرارند؛ این شرایط با برابر قرار دادن مشتقات جزئی مرکب حاصل می‌شوند، و به آنها «شرایط انتگرال‌پذیری» گفته می‌شود. نوع دوم از قضایا، دلیل این اسم‌گذاری را توجیه می‌کنند؛ به این ترتیب که نشان می‌دهند «شرایط انتگراپذیری» برای رسیدن به آن وضعیت مناسب کافی هستند.

در قسمت‌های بعدی بحث، که ما برای اول بار به این گونه بحث‌ها وارد می‌شویم، مطالب مهم‌تری در مورد قضایای هندسه دیفرانسیل را نشان می‌دهد:
همیشه طرق جالب و در عین حال غیر قابل اقماضی برای شرح شرایط انتگرال‌پذیری وجود دارد، به نحوی که در اثبات کفایت آنها، هیچ گونه ظهور مشتقات جزئی در بحث ما لازم نیست.

۲.۶ نظریهٔ موضعی: قضیهٔ انتگرال‌پذیری فروبینیوس

اگر $f: M \to N$ تابعی هموار باشد، و X و Y میدان‌های برداری هموار به ترتیب M و N باشند در صورتی می‌گوئیم X و Y $f-$**مرتبط** هستند که به ازاء هر $p \in M$ ای $f_{*p}(X_p) = Y_{f(p)}$. اگر $g : N \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، آنگاه

$$Y_{f(p)}(g) = f_{*p}X_p(g) = X_p(g \circ f)$$

بنابراین

$$(Y_g) \circ f = X(f \circ g)$$

بالعکس، اگر این برای همهٔ توابع $g : N \to \mathbb{R}$ هموار برقرار باشد، آنگاه X و Y $f-$مرتبط هستند.

البته، ممکن است یک میدان برداری X ممکن است با هیچ میدان برداری دیگری Y $f-$مرتبط نباشد. به علاوه، لزومی ندارد که یک میدان برداری مفروض X بر M با یک میدان برداری دیگر بر M $f-$مرتبط باشد. حالت اخیر در یک حالت ممکن است محال باشد:

۱.۲.۶ گزاره. گیریم $f : M \to N$ تابعی هموار است، طوری که f ایمرشن می‌باشد. اگر Y میدان برداری هموار بر N با $Y_{f(p)} \in f_{p*}(T_pM)$ باشد، آنگاه یک میدان برداری هموار X بر M وجود دارد که با Y $f-$مرتبط است.

اثبات: روشن است که X_p را باید عنصر یکتایی از T_pM تعریف کنیم که $Y_{f(p)} \in f_{p*}X_p$. برای اثبات همواری X، از قضیهٔ ۳.۵.۲ (قسمت ۲) استفاده می‌کنیم: دستگاه مختصاتی (x, U) حول $p \in M$ و نیز (y, V) حول $f(p) \in N$ چنان وجود دارند که

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \cdots, a^n) = (a^1, \cdots, a^n, 0, \cdots, 0)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که در این صورت، بایستی

$$f_{p*}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$$

بنابراین، اگر $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial y^i}$، که α^i ها توابع هموارند، آنگاه $X = \sum_{i=1}^{n} \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$، که در آن $\alpha^i \circ f = \beta^i$. این ایجاب می‌کند که توابع β^i نیز هموارند (مسألهٔ ۳). □

ذیلاً، مهمتریت خاصیت f–مرتبط بودن را مطرح می‌کنیم:

۲.۲.٦ گزاره. اگر X_i و Y_i f–مرتبط باشند، که $i = 1, 2$. در این صورت $[X_1, X_2]$ با $[Y_1, Y_2]$ f–مرتبط است.

اثبات: اگر $g : N \to \mathbb{R}$ هموار باشد، آنگاه

$$(Y_i\, g) \circ f = X_i(g \circ f) \quad i = 1, 2 \tag{۱۴.٦}$$

در نتیجه، داریم

$$\begin{aligned} \{[Y_1, Y_2]g\} \circ f &= \{Y_1(Y_2 g)\} \circ f - \{Y_2(Y_1 g)\} \circ f \\ &= X_1([Y_2 g] \circ f) - X_2([Y_1 g] \circ f) \end{aligned}$$

بنا بر (۱) و اینکه g را با $Y_2 g$ و سپس $Y_1 g$ عوض کنیم، آنگاه

$$\begin{aligned} &\overset{(۱۴.٦)}{=} X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= [X_1, X_2](g \circ f) \end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

حال یک توزیع k–بعدی Δ را در نظر می‌گیریم. در صورتی می‌گوئیم میدان برداری X به Δ **متعلق** است که به ازاء همهٔ p ها $X_p \in \Delta_p$. فرض کنید N یک منیفلد انتگرال Δ است، و $i : N \hookrightarrow M$ نگاشت احتوای آن می‌باشد. اگر X و Y دو میدان برداری متعلق به Δ باشند، آنگاه به ازاء همهٔ $p \in N$ ها عناصر منحصر بفرد $\tilde{X}_p, \tilde{Y}_p \in T_pN$ به گونه‌ای وجود دارند که

$$X_p = i_* \tilde{X}_p \qquad Y_p = i_* \tilde{Y}_p$$

به بیان دیگر، X و $\tilde{X}$ f–مرتبط Y و $\tilde{Y}$ نیز i–مرتبطتند. گزارهٔ ۱.۲.٦ نشان می‌دهد که $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ میدان‌های برداری هموار بر N هستند، و گزارهٔ ۲.۲.٦ نیز نشان می‌دهد که

$[\tilde{X},\tilde{Y}]$ و $i[X,Y]$–مرتبط می‌باشند. یعنی $i_*[\tilde{X},\tilde{Y}]_p = [X,Y]_p$. در اینجا $[\tilde{X},\tilde{Y}]_p \in$ T_PN؛ بنابراین، در مجموع داریم $[X,Y]_p \in \Delta_p$. بالعکس اگر منیفلد انتگرالی برای Δ وجود داشته باشد که از هر p دلخواه بگذرد آنگاه $[X,Y]$ نیز به Δ متعلق است.

برای لحظه‌ای به توزیع Δ در $\mathbb{R}^۳$ که به صورت

$$\Delta_p = \left\{ r\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + s\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + (rf(p)+sg(p))\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \quad : \quad r,s\in\mathbb{R}\right\}$$

مطرح شد، برمی‌گردیم. میدان‌های برداری

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial z} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

به Δ متعلقند. به کمک فرمول در صفحهٔ ۱۲۸، ملاحظه می‌کنیم که

$$[X,Y] = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial y}{\partial z} - g\frac{\partial f}{\partial z}\right\}.\frac{\partial}{\partial z}$$

این تنها وقتی به Δ متعلق است که عبارت پشت $\partial/\partial z$ صفر باشد، که این درست همان شرطی است بر Δ که طی آن Δ دارای منیفلد انتگرال عبور کننده از هر نقطهٔ دلخواه است.

درکل، درصورتی Δ را **انتگرال‌پذیر** گوئیم که به ازاء هر X و Y متعلق به Δ، $[X,Y]$ نیز به Δ متعلق باشد. این شرط را اغلب به سادگی می‌توان تحقیق نمود:

۳.۲.۶ گزاره. اگر $X_۱$، $\cdots$ و X_k توزیع Δ را در یک همسایگی U از p تولید کنند، آنگاه وقتی و تنها وقتی Δ بر U انتگرال‌پذیر است که $[X_i,X_j]$ ترکیبی خطی به شکل

$$[X_i,X_j] = \sum_{\alpha=۱}^{k} C_{ij}^{\alpha}\, X_\alpha$$

با ضرایب هموار C_{ij}^{α} باشد.

اثبات: اگر $X_۱$، $\cdots$ و X_k توزیع Δ را در همسایگی U از p تولید کنند، آنگاه وقتی و تنها وقتی Δ بر U انتگرال‌پذیر است که هر یک از $[X_i,X_j]$ ها ترکیبی خطی به شکل

$$[X_i,X_j] = \sum_{\alpha=۱}^{k} C_{ij}^{\alpha}\, X_\alpha$$

باشند، که C_{ij}^{α} ها توابعی هموارند.

اثبات: به وضوح، اگر Δ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه چنین توابعی وجود دارند، زیرا به ازاء هر $q \in U$ ای $[X_i, X_j]_q$ به Δ_q متعلق است و Δ_q توسط $X_\alpha(q)$ ها تولید می‌گردد. بالعکس، فرض کنیم، چنین توابعی وجود داشته باشند. اگر X و Y به Δ متعلق باشند، به وضوح می‌توانیم بنویسیم

$$X = \sum_{i=۱}^{k} f_i\, X_i \quad , \quad Y = \sum_{j=۱}^{k} g_j\, X_j$$

روشن است که برای اثبات تعلق $[X, Y]$ به Δ کافی است تعلق هر یک از $[f_i\, X_i, g_j\, X_j]$ را به طور جداگانه در نظر بگیریم. چون

$$[f\, X, g\, Y] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

پس، اگر X، Y و $[X, Y]$ به Δ متعلق باشند، آنگاه $[f\, X, g\, Y]$ نیز هست. $\square$

اکنون آمادگی لازم برای طرح قضیهٔ اصلی را داریم. این قضیه با قضیهٔ ۲.۱.٦ معادل است؛ در واقع، قضیهٔ ۲.۱.٦ را از آن می‌توان استخراج کرد (مسألهٔ ۷). اما، اثبات آن اساساً متفاوت است.

۴.۲.٦ قضیه (قضیهٔ انتگرال‌پذیری فروبینیوس؛ نوع اول). گیریم Δ توزیع $k-$بعدی، انتگرال‌پذیر و هموار بر M است. به ازاء هر $p \in M$، یک دستگاه مختصاتی (x, U) با

$$x(p) = ۰ \quad , \quad x(U) = (-\varepsilon; \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

چنان وجود دارد که به ازاء هر $a^{k+۱}$، $\cdots$ و a^n با $\left|a^i\right| < \varepsilon$، مجموعهٔ

$$\{q \in U\ ;\ x^{k+۱}(q) = a^{k+۱}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$$

یک منیفلد انتگرال Δ است. $\square$

تحدید هر منیفلد انتگرال از Δ به U، به یکی از این مجموعه‌ها متعلق است.

اثبات: روشن است که می‌توانیم فرض کنیم در $\mathbb{R}^n$ هستیم و $p = ۰$. به علاوه، می‌توانیم فرض کنیم که $\Delta_۰ \subseteq T_۰\mathbb{R}^n$ توسط

$$\frac{\partial}{\partial t^۱}\Big|_۰, \cdots, \frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_۰$$

تولید می‌گردد. گیریم $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ تصویر بروی اولین k عامل است. در این صورت $\pi_* : \Delta_۰ \to T_۰\mathbb{R}^k$ ایزومورفیسم است. بنا به فرض پیوستگی، π_* به ازاء

q های نزدیک ۰ بر Δ_q یک به یک است. بنابراین، در نزدیکی ۰ بردارهای منحصر بفرد $X_1(q), \cdots, x_k(q) \in \Delta_q$ را طوری می‌توانیم انتخاب کنیم که

$$\pi_* X_i(q) = \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_{\pi(q)} \qquad i = 1, \cdots, k$$

در این صورت، میدان‌های برداری X_i (بر همسایگی‌ای از $0 \in \mathbb{R}^n$) و $\partial\partial t^i$ (بر $\mathbb{R}^k$) با هم π−مرتبط هستند. بنا به گزارهٔ ۲.۲.۶، داریم

$$\pi_* X_i(q) = \partial = \left[\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}\right]_{\pi(q)} = 0$$

اما، بنا به فرض $[X_i, X_j]_q \in \Delta_q$ و Δ بر Δ_q یک به یک است. بنابراین $[X_i, X_j] = 0$ قضیهٔ ۱۰.۴.۵، یک دستگاه مختصاتی π چنان وجود دارد که

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, k$$

به وضوح، مجموعه‌های $\{q \in U \ ; \ x^{k+1}(q) = a^{k+1}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$ منیفلدهای انتگرال Δ هستند، زیرا بردارهای مماس به آنها توسط $\partial/\partial x^i = X_i$ که $i = 1, \cdots, k$، تولید می‌گردند.

اگر N منیفلد انتگرال همبندی از Δ باشد که به U تحدید شده است و $i : N \hookrightarrow U$ نگاشت احتوای آن باشد، دیفرانسیل‌های $d(x^m \circ i)$ با $k + 1 \leq m \leq n$ را در نظر می‌گیریم. به ازاء هر بردار مماس X_q از T_qN داریم

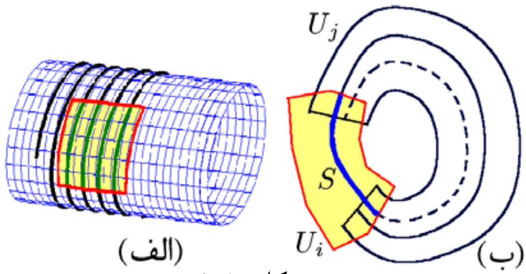
$$d(x^m \circ i)(X_q) = X_q(x^m \circ i) = i_* X_q(x^m) = 0$$

زیرا $i_* X_q \in \Delta_q$، که Δ_q توسط $\partial/\partial x^i\big|q$ های با $i = 1, \cdots, k$ تولید می‌گردد. بنابراین، $d(x^m \circ i) = 0$، که به موجب آن $x^m \circ i$ بر منیفلد انتگرال همبند N ثابت است. □

۳.۶ نظریهٔ فراگیر

اصطلاحی به شرح ذیل را به منظور بیان موفقتر احکام فراگیر مطرح می‌کنیم: اگر M منیفلدی هموار باشد، زیر منیفلد k−بعدی (و اغلب غیر همبند) N از M را در صورتی فولیشن! (به معنی، بر گنبدی) از M گوئیم که هر نقطه از M در (مؤلفه‌ای همبندی از) N قرار داشته باشد، و گرد هر نقطه $p \in M$، یک دستگاه مختصات (x, U) با $x(U) = (-\varepsilon; \varepsilon) \times \cdots \times (-\varepsilon; \varepsilon)$ چنان یافت گردد که مؤلفه‌های همبندی $N \cap U$

مجموعه‌هایی به صورت در قسمت (الف) از شکل ۷.٦ باشند. هر مؤلفهٔ همبندی N را یک **برگ**! از برگنبدی N می‌گوئیم.



شکل ۷.٦

توجه شود که امکان دارد دو مؤلفهٔ همبندی مجزا از $N\cap U$ به یک برگ از برگنبدی متعلق باشند.

۱.۳.٦ قضیه. گیریم Δ یک توزیع انتگرال‌پذیر، هموار و $k-$ بعدی بر M است. در این صورت، M توسط منیفلدهای انتگرال Δ برگنبدی است. (هر مؤلفهٔ همبندی از آن را، منیفلد انتگرال ماکسیمال Δ می‌نامیم).

اثبات: با استفاده از قضیهٔ ؟؟ ملاحظه می‌گردد که M را با دنباله‌ای از دستگاه‌های مختصاتی (x_i, U_i) صادق در شرایط قضیهٔ ۴.۲.٦ می‌توانیم پوشش دهیم. در مورد هر چنین دستگاه مختصاتی، (x, U)، هر یک از مجموعه‌های به شکل $\{q\in U\ ;\ x^{k+1}(q)=a^{k+1},\cdots,a^n(q)=a^n\}$ را یک **باریکه**! (**برش**) از U می‌نامیم. توجه شود که احتمال دارد باریکه‌ای از U_i مثل S، مجموعهٔ U_j را در بیش از یک باریکه قطع کند. اما $S\cap U_j$ حداکثر به تعدادی شمارا مؤلفهٔ همبندی دارد، و هر مؤلفهٔ همبندی از آن در باریکه‌ای به خصوص از U_j (بنا به قضیهٔ ۴.۲.٦) قرار دارد. در نتیجه، $S\cap U_j$ در حداکثر به تعدادی شمارا باریکه از U_j قرار دارد (به قسمت (ب) از شکل ۷.٦ توجه شود).

به ازاء هر $p\in M$ مفروض، دستگاهی مختصاتی $(x_\circ, U_\circ)$ با $p\in U_\circ$ انتخاب نموده و فرض می‌کنیم $S_\circ$ باریکه‌ای از $U_\circ$ باشد که p را در بردارد. باریکهٔ S از U_i را در صورتی **متصل** به p گوئیم که دنباله‌ای نظیر $\circ=i_\circ, i, \cdots i_\ell=۱$ و متناظر به آنها دنباله‌ای از باریکه‌های با $S_\circ=S_{i_\circ}, S_{i_۱}, \cdots S_{i_\ell}=S$ به گونه‌ای یافت گردد که

$$S_{i_\alpha}\cap S_{i_{\alpha+۱}}\neq\phi\qquad \alpha=\circ,\cdots,\ell-۱$$

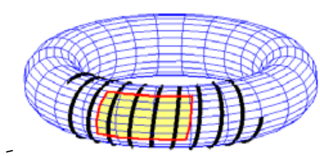
چون حداکثر به تعدادی شمارا دنباله‌ای از باریکه‌های مناسب نظیر به هر دنبالهٔ مفروض $i_\circ,\cdots,i_\ell$ وجود دارد و نیز حداکثر به تعدادی شمارا از چنین دنباله‌های اعدادی وجود

دارد، بنابراین، حداکثر تعدادی شمارا با باریکهٔ متصل به p وجود دارد. اکنون، به کمک مسألهٔ ۳−۱ ملاحظه می‌کنیم، که اجتماع همهٔ چنین باریکه‌هایی، زیر منیفلدی از M است. به ازاء هر $p \neq q$، یا اجتماع‌های نظیر مجزا هستند و یا اینکه کاملاً برابرند. پس چنین اجتماع‌هایی کاملاً از هم مجزا هستند. نتیجتاً، M با اجتماعی مجزا از همهٔ چنین زیر منیفلدهایی برگنبدی شده است؛ روشن است که این اجتماع مجزا، منیفلدی انتگرال از Δ می‌باشد. □

۲.۳.۶ یادداشت. با توجه به اینکه اجتماع منیفلدهای انتگرال، منیفلد انتگرال است، می‌توان در صورت قضیهٔ ؟؟ به جای «منیفلدهای انتگرال» از منیفلد انتگرال سخن گفت.

چنانچه منیفلدهای متر ناپذیر را مجاز بدانیم، اثبات ساده‌تر هم می‌شود، زیرا لازم نیست اجتماعی شمارا از دستگاه‌های مختصاتی برای هر برگ بیابیم، و کافی است توپولوژی برگنبدی را به صورت کوچکترین توپولوژی‌ای که نسبن به آن همهٔ برگ‌ها بازند، تعریف کنیم. البته، در این حالت مطالب بعدی درست نیست. در واقع، در ضمیمهٔ الف، منیفلد متر ناپذیری مطرح شده است توسط زیر منیفلد همبند با بعد کمتر برگنبدی شده است.

توجه شود که اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی از نوع توصیف شده در اثبات قضیه باشد، آنگاه ممکن است بی‌نهایت تعداد از باریکه‌های U به یک برگ واحد متعلق باشند. البته، این تعداد حداکثر شمارا است؛ در غیر این صورت، برگ اجتماعی ناشمارا از مجموعه‌های باز مجزا خواهد شد، که غیر ممکن است. این امر امکان استفاده از گزاره‌ای از فصل ۲ را به ما می‌دهد.

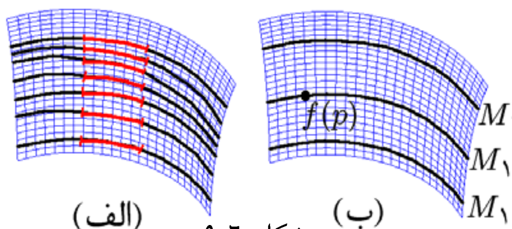


شکل ۸.۶

۳.۳.۶ قضیه. گیریم M منیفلدی هموار و M_1 یک برگ از برگنبدی مشخص شده توسط توزیع Δ باشد. گیریم P منیفلد هموار دیگری است و $f : P \to M$ تابعی هموار با $f(p) \subseteq M_1$ می‌باشد. در این صورت f به عنوان نگاشتی از P بتوی M_1 هموار است.

اثبات: بر طبق گزارهٔ ۴.۵.۲ کافی است نشان دهیم که f به عنوان نگاشتی بتوی M_1 پیوسته است. به ازاء هر $p \in P$ مفروض، دستگاهی مختصاتی (x, U) حول $f(p)$ چنان انتخاب می‌کنیم که باریکه‌های

$$\{q \in U \; ; \; x^{k+1}(q) = a^{k+1}, \cdots, a^n(q) = a^n\}$$



شکل ۹.۶

منیفلدهای انتگرال Δ باشند. اکنون، f به عنوان نگاشتی بتوی M پیوسته است، و بنابراین f همسایگی W ای از p را بتوی U می‌نگارد؛ W را همبند می‌توانیم بگیریم. به ازاء $k+1 \leq i \leq n$، اگر به ازاء یک $p' \in W$ ای $x^i(f(p')) \neq a^i$، آنگاه $x^i \circ f$ بایستی تمام مقادیر بین a^i و $x^i(f(p'))$ را (بنا به پیوستگی) اختیار کند. این بدان معنی است که $f(W)$ به تعداد ناشمارا باریکه در بردارد که با این واقعیت که $f(W) \subseteq M_1$ در تضاد می‌باشد. نتیجتاً به ازاء هر $p' \in W$ ای $x^i(f(p')) = a^i$. به بیان دیگر، $f(W)$ در باریکه‌ای به خصوص از U قرار دارد که p را شامل است. این روشن می‌سازد که f به عنوان نگاشتی بتوی M_1 پیوسته می‌باشد. $\square$

۴.۶ تمرینات

۱. الف) گیریم $\zeta = \pi : E \to B$ یک کلاف $n-$صفحه‌ای است، و $\zeta' = \pi' : E' \to B$ یک کلاف $k-$صفحه‌ای است، طوری که $E' \subset E$. اگر $i : E' \hookrightarrow E$ نگاشت احتوی بوده و $Id_B : B \to B$ نگاشت همانی باشد، در صورتی ζ' را **زیر کلاف** ζ گوئیم که (i, Id_B) نگاشت کلافی باشد. نشان دهید که هر توزیع $k-$بعدی بر M درست یک زیر کلاف از TM می‌باشد.

ب) در مورد کلاف‌های هموار ζ و ζ' روی منیفلد هموار M، زیر کلاف هموار تعریف نموده و نشان دهید که هر توزیع $k-$بعدی وقتی و تنها وقتی هموار است که زیر کلافی هموار باشد.

۲. لف) در مورد اثبات قضیهٔ ۲.۱.۶، ادعای در مورد با اندازهٔ کافی کوچک انتخاب کردن ε_1 را بررسی کنید.

ب) اثبات قسمت یکتایی قضیه را تکمیل کنید.

۳. الف) در اثبات گزارهٔ ۱.۲.۶ نشان دهید که $\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p = f_*\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big)$.

ب) اثبات گزارهٔ ۱.۲.۶ را تکمیل کرده و نشان دهید که اگر $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial y^i}$، آنگاه $X = \sum_{i=1}^{n} \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ که $\alpha^i \circ f = \beta^i$ و توابع β^i هموارند.

۴. در اثبات گزارهٔ ۳.۲.۶ نشان دهید که توابع C_{ij}^{α} همگی هموارند.

۵. گیریم Δ_1، $\cdots$ و Δ_h توزیع‌های انتگرال پذیر بر M با بعد به ترتیب d_1، $\cdots$ و d_h هستند. فرض کنید که به ازاء هر $p \in M$ ای $T_pM = (\Delta_1) \oplus \cdots \oplus (\Delta_h)_p$. نشان دهید که در گرد هر نقطه‌ای یک دستگاه مختصاتی (x, U) طوری وجود دارد که Δ_1 توسط $\frac{\partial}{\partial x^1}$، $\cdots$ و $\frac{\partial}{\partial d_1}$ تولید می‌گردد و $\cdots$.

۶. با در نظر گرفتن توزیع Δ در $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (با مختصات t و x) با ضابطهٔ

$$\Delta_p = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r^i \frac{\partial}{\partial t^i}\Big|_p + \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} r^i f_i^k(p) \Big) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \quad : \quad r \in \mathbb{R}^m \right\}$$

قضیهٔ ۲.۱.۶ را از ۴.۲.۶ نتیجه بگیرید. توجه کنید که حتی وقتی f_j به x بستگی ندارد، یعنی معادلات به شکل

$$\partial\alpha/\partial t^j(t) = f_j(t)$$

و با شرایط انتگرال‌پذیری $\frac{\partial f_i}{\partial t^j} = \frac{\partial f_j}{\partial t^i}$ هستند، هیچگاه در $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ کار نمی‌کنیم، بلکه در $\mathbb{R}^m$ انجام می‌دهیم. این با ترفند استفاده از متغیرهای مستقل جدید مربوط است.

۷. این مسأله روشی دیگر برای اثبات قضیهٔ ۲.۱.۶ به کمک طرح معادلات دیفرانسیل با مشتقلت جزئی و تبدیل آن‌ها به معادلات معمولی در امتداد خطوط گذرنده از مبداء، فراهم می‌کند. تکنیک مشابهی در بخش ۷ از فصل ۲ بود که بسیار بااهمیت است.

الف) اگر به ازاء تابعی $\beta : [0;\varepsilon) \times W \to V$ فرض شود $\alpha(ut) = \beta(u,t)$، نشان دهید β بایستی در دستگاه

$$\frac{\partial \beta}{\partial u}(u,t) = \sum_{j=1}^{m} t^j . f_j(ut, \beta(u,t)) \qquad \beta(0,t) = x$$

صدق کند. می‌دانیم که چنین معادلاتی را می‌توان حل کرد (چون معادله به پارامتر $t \in \mathbb{R}^m$ بستگی دارد، به مسألهٔ ۵—۵ نیاز داریم). لازم است بررسی شود که ε ای چنان می‌توان انتخاب نمود که برای همهٔ $t \in W$ ها کار کند.

ب) نشان دهید $\beta(u, vt) = \beta(uv, t)$. (نشان دهید که هر دو تابع در یک معادله دیفرانسیل به عنوان توابعی از u صدق می‌کنند، که شرط آغازی هر دو فیزیکی است.) با کشیدن W می‌توانیم فرض کنیم که $\varepsilon = 1$.

ج) نتیجه بگیرید که

$$\frac{\partial \beta}{\partial t^j}(v,t) = v . \frac{\partial \beta}{\partial t^i}(1, vt)$$

د) به کمک شرط انتگرال‌پذیری بر f نشان دهید که $\frac{\partial \beta}{\partial t^j}(v,t)$ و $v.f_j(vt, \beta(v,t))$ به عنوان توابعی از v در معادله دیفرانسیل واحدی صدق می‌کنند. از (ج) استفاده کرده و نشان دهید که این دو تابع یکی‌اند.

ه) تعریف کنید $\alpha(t) = \beta(1,t)$. توجه شود که $\alpha(vt) = \beta(v,t)$. نشان دهید α در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کند.

۸. این مسأله مطالبی در خصوص آنالیز مختلط را آموزش می‌دهد. گیریم $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ تحلیلی مختلط است. اگر توابع مختصاتی در $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ را به صورت $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ نشان دهیم، آنگاه $f = u, iv$ در معادلات کوشی—ریمان صدق می‌کند

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_i} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2$$

به کمک قضیهٔ ۲.۱.۶ ثابت کنید که معادلات

$$\frac{\partial \alpha^1}{\partial x} = u(x, y, \alpha^1(x,y), \alpha^2(x,y)) = \frac{\partial \alpha^2}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial x} = v(x, y, \alpha^1(x,y), \alpha^2(x,y)) = -\frac{\partial \alpha^1}{\partial y}$$

را در همسایگی‌ای از $0 \in \mathcal{C}$ (یا هر نقطهٔ دیگر $z_0 \in \mathcal{C}$) می‌توان حل نمود، و نتیجه بگیرید که معادله دیفرانسیل

$$\varphi'(z) = f(z, \varphi(z))$$

(که یعنی مشتق مختلط) در همسایگی ای از z_0 جواب دارد، که شرط اولیهٔ $\varphi(z_0) =$ w_0 دلخواه می‌باشد.