

عطارد، اختلالاتهای محاسبه شده چنان اند که سبب جلو رفتن نقطه حضیض عطارد نسبت به خورشید به اندازه ۵۳۱ ثانیه قوسی در طی يك قرن می شوند. جلورفتن مشاهده شده ۵۷۴ ثانیه قوسی طی يك قرن صورت می گیرد. اختلاف ۴۳ ثانیه در يك قرن را ظاهراً نظریه نسبیت عام اینشتین توضیح می دهد.

میدان گرانشی مجاور زمین نسبت به قانون عکس مجذوری اندکی انحراف پیدا می کند. علتش این است که زمین کاملاً يك کره واقعی نیست. در نتیجه، حضیض يك ماهواره مصنوعی که مدارش در نزدیکی صفحه استوا قرار دارد، همواره در جهت حرکت ماهواره به پیش می رود. در حقیقت مشاهده این پیشروی، یکی از روشهای دقیق تعیین شکل زمین است. این گونه مشاهدات نشان داده اند که زمین اندکی گلابی شکل است. پهن بودن سروه زمین، علاوه بر آنکه باعث جلورفتن حضیض مدار ماهواره ای می شود، همچنین سبب می شود که اگر مدار در صفحه استوایی زمین واقع نباشد، صفحه مدار بچرخد.

مسائل

۱۰۶ ربایش (جاذبه) گرانشی بین دو کره سربی صلب را که جرم هر کدام يك کیلوگرم است پیدا کنید، در صورتی که دو کره تقریباً بر هم مماس باشند. جواب را به صورت کسری از وزن یکی از کره ها بیان کنید. (چگالی سرب 11.35 g/cm^3 است.)

۲۰۶ نشان دهید که نیروی گرانشی وارد بر يك ذره آزمون واقع در داخل پوسته کروی نازک صفر است: (الف) از طریق یافتن مستقیم نیرو، (ب) با نشان دادن اینکه پتانسیل گرانشی ثابت است.

۳۰۶ به فرض آنکه زمین کره صلب یکنواخت باشد، نشان دهید که اگر حفرة مستقیمی از قطب شمال به قطب جنوب حفر شود و ذره ای در این حفرة بیفتد، این ذره باید حرکت هماهنگ ساده اجرا کند. نیز نشان دهید که زمان تناوب این نوسان فقط به چگالی زمین بستگی دارد و از ابعاد آن مستقل است. زمان تناوب بر حسب ساعت چقدر است؟ ($10^6 \times 638 = \text{زمین}$)

۴۰۶ نشان دهید که هر گاه ذره ای در داخل لوله صاف مستقیمی بلغزد که این لوله به طور مایل از میان زمین می گذرد، حرکت نوسانی ساده، با همان زمان تناوب مسئله قبل، اجرا می شود (از اثرات چرخشی چشم پوشید).

۵۰۶ با فرض دایره ای بودن مدار، نشان دهید که قانون سوم کپلر مستقیماً از قانون دوم نیوتون و قانون گرانش او: $GMm/r^2 = mv^2/r$ ، نتیجه می شود.

۶۰۶ (الف) نشان دهید که شعاع مدار دایره ای برای يك ماهواره همگام (یعنی همزمان) با حرکت چرخشی زمین (24 h)، تقریباً هفت برابر شعاع زمین است. (ب) فاصله تا ماه تقریباً حدود شصت برابر شعاع زمین است. با استفاده از آن، مدت يك ماه (زمان تناوب گردش مداری ماه) را محاسبه کنید.

۷۰۶ نشان دهید که زمان تناوب مداری برای يك ماهواره زمین در مدار دایره ای، درست

بالای سطح زمین، با زمان تناوب نوسان ذره‌ای که در داخل حفره‌ای افتاده است که از میان زمین می‌گذرد (مسئله ۳۰۶)، یکسان است.

۸۰۶ اگر منظومه شمسی را ابری از گرد و غبار یکنواخت با چگالی ρ دربر می‌گرفت، نشان دهید که قانون نیروی وارد بر سیاره‌ای واقع در فاصله r از مرکز خورشید، با عبارت زیر بیان می‌شود

$$F(r) = -GMm/r^2 - (4/3)\pi\rho mGr$$

۹۰۶ ذره‌ای متحرک در یک میدان مرکزی، مدار مارپیچی $r = r_0 e^{k\theta}$ را طی می‌کند. نشان دهید که قانون نیرو عکس مکعبی است و θ به صورت لگاریتمی با t تغییر می‌کند.

۱۰۰۶ ذره‌ای در میدان نیروی عکس مکعبی حرکت می‌کند. نشان دهید، که علاوه بر مدار مارپیچی نمایی مسئله ۹۰۶، دو نوع مدار ممکن دیگر وجود دارد، و معادله آنها را به دست آورید.

۱۱۰۶ مدار ذره‌ای که در یک میدان مرکزی حرکت می‌کند دایره‌ای است که از مبدأ می‌گذرد، یعنی $r = r_0 \cos \theta$. نشان دهید که قانون نیرو عکس توان پنجمی است.

۱۲۰۶ ذره‌ای در یک میدان مارپیچی به معادله $r = a\theta$ حرکت می‌کند. اگر θ با t به طور خطی افزایش یابد، آیا نیرو یک میدان مرکزی است؟ اگر نیست، تعیین کنید θ چگونه باید با t تغییر کند تا نیرو مرکزی باشد.

۱۳۰۶ یک کشتی موشکی ابتدا در مداری دایره‌ای در نزدیکی زمین حرکت می‌کند. می‌خواهند کشتی را در مدار جدیدی قرار دهند که فاصله اوج آن برابر با شعاع مدار ماه به دور زمین باشد. (الف) اگر برای انجام این کار نیروی پیشران موشکی به کار برده شود، نسبت سرعت نهایی به سرعت اولیه را به دست آورید. فرض کنید که شعاع مدار دایره‌ای اولی $\frac{1}{6}$ فاصله تا ماه باشد. (ب) اگر سرعت به نسبت یک درصد زیادتر شده باشد، مدار جدید را پیدا کنید. این مسئله دقت فوق‌العاده‌ای را نشان می‌دهد که برای دستیابی به مداری به دور ماه لازم است.

۱۴۰۶ زمان تناوب ستاره دنباله‌دار هالی را از اطلاعات داده شده در متن کتاب، بخش ۸۰۶ محاسبه کنید. همچنین سرعت ستاره دنباله‌دار را در حضيض خورشید و در اوج خورشیدی به دست آورید.

۱۵۰۶ یک ستاره دنباله‌دار ابتدا در فاصله d ، بر حسب یکاهای نجومی، از خورشید که با سرعت q برابر سرعت زمین در حال حرکت است، رؤیت می‌شود. نشان دهید بسته به اینکه کمیت $q^2 d$ بزرگتر، مساوی، یا کوچکتر از ۲ باشد، مدار ستاره دنباله‌دار به ترتیب هذلولی، سهمی، یا بیضی است.

۱۶۰۶ ذره‌ای در مداری بیضی شکل در میدان نیروی عکس مجذوری حرکت می‌کند. ثابت کنید که حاصلضرب سرعت‌های کمینه و بیشینه برابر با $(2\pi a/\tau)^2$ است، که a نیم قطر بزرگ و τ زمان تناوب است.

۱۷۰۶ ثابت کنید که متوسط زمانی انرژی پتانسیل ذره‌ای که مداری بیضوی را در میدان

نیروی عکس مجذوری $f(r) = -k/r^2$ طی می‌کند، عبارت است از k/a — که a نیم قطر بزرگ بیضی است.

۱۸.۶ زاویهٔ اوج مدارهای تقریباً دایره‌ای را در یک میدان مرکزی که قانون نیروی آن به صورت زیر است، پیدا کنید.

$$f(r) = -k \frac{e^{-br}}{r^2}$$

۱۹.۶ اگر ابری از گرد و غبار یکنواخت منظومهٔ شمسی را فرا گرفته باشد (مسئلهٔ ۸.۶)، زاویهٔ بین دو نقطهٔ اوج و حضیض سیاره‌ای که در مدار تقریباً دایره‌ای در حرکت است، چقدر باید باشد؟ این مطلب در گذشته به عنوان توضیح ممکن برای جلورفتن نقطهٔ حضیض خورشیدی عطارد، بیان شده بود.

۲۰.۶ نشان دهید که شرط پایداری برای یک مدار دایره‌ای به شعاع a با این شرط که $d^2U/dr^2 > 0$ به ازای $r=a$ برقرار باشد، معادل است؛ در آن $U(r)$ «پتانسیل مؤثری» است که در بخش ۱۰.۶ تعریف شده است.

۲۱.۶ هرگاه تابع نیرو به شکل بیان شده در مثال ۱۲.۶ باشد، یعنی

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\varepsilon}{r^4}$$

شرطی را بیابید که در آن مدارها دایره‌ای پایدار باشند.

۲۲.۶ (الف) نشان دهید که در مسئلهٔ ۱۸.۶ اگر کمیت ϵ کمتر از b^{-1} باشد، مدار دایره‌ای به شعاع ϵ پایدار است. (ب) نشان دهید که در میدان نیروی عکس مکعبی مدارهای دایره‌ای ناپایدارند.

۲۳.۶ ستارهٔ دنباله‌دار در مدار سهمی شکلی شرکت می‌کند که در صفحهٔ مدار زمین واقع شده است. مدار زمین را دایره‌ای به شعاع a به حساب آورده، نشان دهید که نقاط تقاطع مدار ستارهٔ دنباله‌دار با مدار زمین با رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$\cos \theta = -1 + \frac{2p}{a}$$

که p فاصلهٔ حضیض خورشیدی ستارهٔ دنباله‌دار است که در $\theta = 0$ تعریف شده است. ۲۴.۶ با بهره‌گیری از نتیجهٔ مسئلهٔ بالا نشان دهید فاصلهٔ زمانی که ستارهٔ دنباله‌دار در مدار زمین می‌ماند کسری از سال است، که این کسر عبارت است از

$$\frac{2^{1/2}}{3\pi} \left(\frac{2p}{a} + 1 \right) \left(1 - \frac{p}{a} \right)^{1/2}$$

و مقدار بیشینهٔ این فاصلهٔ زمانی $2/3\pi$ سال یا ۷۷٫۵ روز است، مطابق با $p = a/2$.

این فاصله زمانی را برای ستاره دنباله دار هالی ($p = 0.68$) محاسبه کنید.
 ۲۵۰۶ دو کتابهای درسی پیشرفته در زمینه نظریه پتانسیل، نشان داده می شود که انرژی پتانسیل ذره ای به جرم m در میدان گرانشی یک کره وار پخت، نظیر زمین، تقریباً عبارت است از

$$V(r) = -\frac{k}{r} \left(1 + \frac{\epsilon}{r^2} \right)$$

که r ، فواصل در صفحه استوایی، $k = GMm$ ، و $\epsilon = (2/5)R\Delta R$ که R شعاع استوایی و ΔR اختلاف بین شعاعهای قطبی و استوایی است. با استفاده از این مطلب زاویه اوجی یک ماهواره متحرك در مدار تقریباً دایره ای را در صفحه استوایی بیابید؛ $R = 3960$ mile و $\Delta R = 13$ mile.

۲۶۰۶ بنابر نظریه نسبیت خاص، ذره متحرك در میدان مرکزی با انرژی پتانسیل $V(r)$ همان مداری را طی می کند که ذره با انرژی پتانسیل

$$V(r) - \frac{[E - V(r)]^2}{2m_0c^2}$$

بنابر قوانین مکانیک ناسبیتی می پیماید. در این رابطه E انرژی کل، m_0 جرم ذره در حال سکون، و c سرعت نور است. از این مطلب زاویه اوجی را برای حرکت در میدان نیروی عکس می جذوری، $V(r) = -k/r$ ، به دست آورید.

۲۷۰۶ سرعت ستاره دنباله دار در هنگام رصد و فاصله آن از خورشید، r_{com} و v_{com} است، و جهت حرکت آن با بردار شعاعی از خورشید زاویه φ می سازد. نشان دهید که قطر بزرگ مدار بیضی شکل ستاره دنباله دار با بردار شعاعی اولیه ستاره دنباله دار، زاویه θ می سازد که از رابطه زیر بیان می شود

$$\theta = \cot^{-1} \left(\tan \varphi - \frac{v}{v^2 R} \csc 2\varphi \right)$$

که در آن، بنابر تعریفهایی که در مثال ۷۰۶ ارائه کردیم، $R = r_{com}/a_e$ و $V = v_{com}/v$ زمین. نتیجه را برای مقادیر عددی مثال ۷۰۶ به کار برید.