
بسم الله الرحمن الرحیم

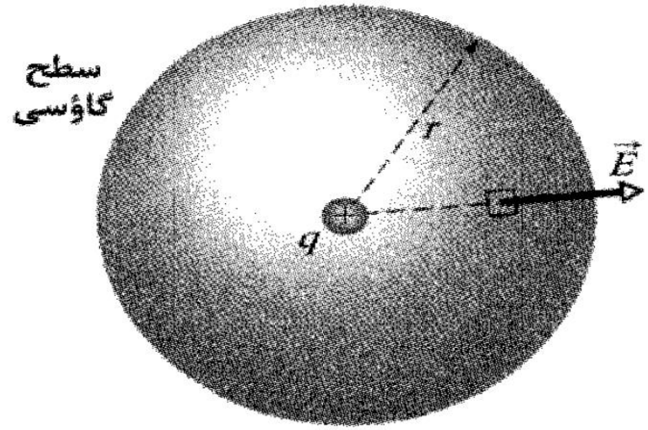
ادامه فصل ۱۹– قانون گاوس

- ۱– قانون گاوس و قانون کولن
- ۲– رسانای باردار منزوی
- ۳– کاربرد قانون گاوس – تقارن استوانه ای
- ٤– کاربرد قانون گاوس – تقارن صفحه ای
- ٥– کاربرد قانون گاوس – تقارن کروی

چون قانون گاؤس و قانون کولن روشهای متفاوتی برای توصیف رابطهٔ میان بار الکتریکی و میدان الکتریکی در حالتهای ایستا هستند، باید بتوانیم هر یک را از دیگری به دست آوریم. در اینجا قانون کولن را از قانون گاؤس، با توجه به برخی از ملاحظات تقارنی به دست می‌آوریم.

شکل ۱۹–۸ یک بار نقطه‌ای مثبت q را نشان می‌دهد که به دور آن یک سطح گاؤسی کروی هم‌مرکز به شعاع r رسم شده است. این سطح را به مساحتهای دیفرانسیلی dA تقسیم می‌کنیم. بنا بر تعریف، بردار سطح $d\vec{A}$ در هر نقطه بر این سطح عمود و جهت آن از سطح به طرف بیرون است. از تقارن شکل درمی‌یابیم که در هر نقطه، میدان الکتریکی $\vec{E}$ نیز بر سطح عمود و جهت آن به طرف بیرون است. بنابراین، چون زاویهٔ θ میان $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ برابر صفر است، معادلهٔ ۱۹–۷ را می‌توانیم به صورت زیر برای قانون گاؤس بازنویسی کنیم

$$\varepsilon_\circ \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_\circ \oint E\, dA = q_{\text{enc}} \qquad (۸–۱۹)$$



شکل ۱۹–۸ یک سطح گاؤسی کروی به مرکز بار نقطه‌ای q.

که در اینجا $q_{\mathrm{enc}} = q$ است. اگر چه E به طور شعاعی با فاصله از q تغییر می‌کند، با این حال مقدار آن در هر نقطه روی سطح کروی یکسان است. چون انتگرال در معادلهٔ ۱۹–۸ روی کل سطح گرفته می‌شود، E در انتگرالگیری مقداری ثابت است و می‌توانیم آن را از زیر علامت انتگرال بیرون بیاوریم. از آنجا خواهیم داشت

$$\varepsilon_\circ E \oint dA = q \qquad (۹–۱۹)$$

حال انتگرال صرفاً جمع همهٔ مساحتهای دیفرانسیلی dA روی کره است و بنابراین، درست برابر با مساحت این سطح، یعنی $۴\pi r^۲$، است. با قرار دادن این، خواهیم داشت

$$\varepsilon_\circ E(۴\pi r^۲) = q$$

یا

$$E = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{r^۲} \qquad (۱۰\text{–}۱۹)$$

که این دقیقاً معادلهٔ ۱۹–۳ است که آن را با استفاده از قانون کولن به دست آوردیم.

✔**نکتهٔ** ***وارسی ۳*** شار خالص معین Φ_i از یک کرهٔ گاؤسی به شعاع r که یک ذرهٔ باردار منزوی را در بر گرفته است، عبور می‌کند. فرض کنید این سطح گاؤسی به (الف) یک کرهٔ گاؤسی بزرگتر، (ب) یک مکعب گاؤسی با طول ضلعی برابر r، و (پ) یک مکعب گاؤسی با طول ضلعی برابر با $۲r$ تغییر کند. در هر حالت، آیا شار خالصی که از سطح گاؤسی جدید می‌گذرد، بزرگتر، کوچکتر، یا برابر Φ_i است؟ **چرا؟**

تدبیرهای حل مسئله

تدبیر ۱: انتخاب سطح گاؤسی

چون به دست آوردن معادلهٔ ۱۹–۱۰ با استفاده از قانون گاؤس تمرینی برای به دست آوردن میدانهای الکتریکی ناشی از سایر پیکربندیهای بار است، مرحله‌هایی را که طی کردیم مرور می‌کنیم.

با بار نقطه‌ای مثبت معین q شروع کردیم؛ می‌دانیم که خطهای میدان الکتریکی با یک نقش متقارن کروی به طور شعاعی از q به طرف بیرون است.

برای یافتن بزرگی E میدان الکتریکی در فاصلهٔ r با استفاده از قانون گاؤس (معادلهٔ ۱۹–۷)، یک سطح گاؤسی بستهٔ فرضی را پیرامون نقطه‌ای به فاصلهٔ r از q به دور q در نظر گرفتیم. سپس مجموع مقدارهای $\vec{E}.d\vec{A}$ را روی کل سطح گاؤسی با انتگرالگیری به دست آوردیم. برای آنکه این انتگرالگیری تا آنجا

که ممکن است ساده باشد، یک سطح گاؤسی کروی را (مشابه با تقارن کروی میدان الکتریکی) برگزیدیم. این انتخاب از سه نظر ساده کننده بود: (۱) حاصلضرب نقطه‌ای $\vec{E}.d\vec{A}$ ساده می‌شد، زیرا در تمام نقطه‌های روی سطح گاؤسی زاویهٔ میان $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ برابر با صفر است، و از این رو در تمام نقطه‌ها $\vec{E}.d\vec{A} = E\,dA$. (۲) بزرگی میدان الکتریکی E در تمام نقطه‌های روی سطح گاؤسی کروی یکسان است؛ بنابراین، E در انتگرالگیری مقدار ثابتی بود و می‌توانستیم آن را از زیر علامت انتگرال بیرون بیاوریم. (۳) نتیجه، یک انتگرالگیری بسیار ساده بود - جمع مساحتهای دیفرانسیلی کره - که بی‌درنگ می‌توانستیم آن را به صورت $4\pi r^2$ بنویسیم.

توجه کنید که قانون گاؤس صرفنظر از آنکه شکل سطح گاؤسی که به دور بار q_{enc} انتخاب می‌کنیم چه باشد، برقرار است. با این حال، اگر، مثلاً ، یک سطح گاؤسی مکعبی را برگزیده بودیم، سه مورد ساده کننده از بین می‌رفت و

انتگرالگیری $\vec{E}.d\vec{A}$ روی سطح مکعبی بسیار مشکل می‌شد. منظور این است که انتخاب سطح گاؤسی باید به گونه‌ای باشد که انتگرالگیری در قانون گاؤس به ساده‌ترین شکل درآید.

رسانای باردار منزوی

قانون گاؤس به ما در اثبات قضیهٔ مهمی دربارهٔ رساناها کمک می‌کند:

☞ اگر یک بار اضافی روی رسانایی منزوی قرار داده شود، آن مقدار بار به طور کامل روی سطح رسانا حرکت خواهد کرد. هیچ گونه بار اضافی در داخل جسم رسانا وجود نخواهد داشت.

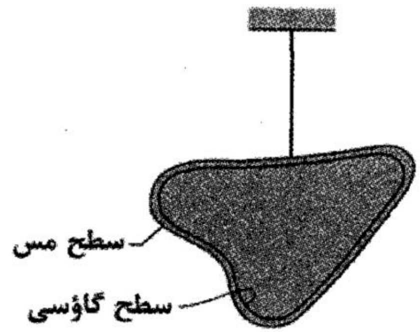
با توجه به اینکه بارهای هم‌علامت، یکدیگر را می‌رانند، این نتیجه منطقی به نظر می‌رسد. می‌توان چنین تصور کرد که با حرکت بارهای اضافه شده به سطح، این بارها تا جایی که بتوانند از هم دور می‌شوند. برای تأیید این موضوع از قانون گاؤس بهره می‌گیریم.

شکل ۱۹–۹ الف، مقطعی از یک قطعهٔ مسی منزوی را نشان می‌دهد که دارای بار اضافی q است و از نخی عایق آویزان شده است. یک سطح گاؤسی را درست از داخل سطح واقعی رسانا می‌گذرانیم.

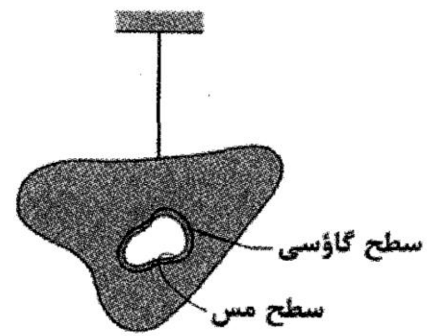
میدان الکتریکی داخل این رسانا باید صفر باشد. اگر این طور نباشد، این میدان نیروهایی را بر الکترونهای (آزاد) رسانش، که همواره در رسانا وجود دارند، وارد می‌کند و بنابراین، همواره جریانی درون رسانا وجود خواهد داشت. (یعنی، بار در داخل رسانا، از جایی به جایی دیگر حرکت می‌کند.) معلوم است که در یک رسانای منزوی چنین جریانهای دائمی وجود ندارد، و بنابراین، میدان الکتریکی داخلی برابر با صفر است.

اگر $\vec{E}$ در هر جایی داخل رسانای مسی صفر باشد، باید برای تمام نقطه‌های روی سطح گاؤسی هم صفر باشد؛ زیرا هر قدر هم این سطح به سطح رسانا نزدیک باشد، باز هم یقیناً در داخل رسانا واقع است. این بدان معنی است که شاری که از سطح گاؤسی می‌گذرد باید صفر باشد. در نتیجه، چون بارهای

اضافی داخل سطح گاؤسی نیستند، پس باید بیرون این سطح باشند و این به معنی آن است که باید روی سطح واقعی رسانا قرار بگیرند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۹–۹ (الف) یک قطعهٔ مسی با بار q از نخی عایق آویزان است. یک سطح گاؤسی در داخل فلز، درست زیر سطح واقعی، رسم شده است. (ب) اکنون در داخل قطعهٔ مسی، کاواکی وجود دارد. یک سطح گاؤسی در داخل فلز، نزدیک به سطح کاواک قرار دارد.

رسانای منزوی با کاواک

شکل ۱۹-۹ ب همان رسانای آویخته را نشان می‌دهد، با این تفاوت که اکنون کاواکی به طور کامل درون آن قرار دارد. شاید این منطقی باشد که فرض کنیم وقتی بخشی از یک مادهٔ خنثی از نظر الکتریکی را برای ساختن یک کاواک جدا کنیم، توزیع بار یا نقش میدان الکتریکی موجود در شکل ۱۹-۹ الف تغییر نمی‌کند. دوباره باید برای اثبات کمّی به قانون گاؤس برگردیم.

یک سطح گاؤسی به دور کاواک، نزدیک به سطح آن ولی داخل جسم رسانا، رسم می‌کنیم. چون داخل رسانا $\vec{E} = 0$ است، هیچ شاری نمی‌تواند از میان این سطح گاؤسی جدید بگذرد. بنابراین، از قانون گاؤس نتیجه می‌گیریم که این سطح نمی‌تواند بار خالصی را در بر گیرد. در نتیجه، هیچ بار خالصی روی دیواره‌های کاواک وجود ندارد؛ همهٔ بارهای اضافی، مثل شکل ۱۹-۹ الف، روی سطح خارجی رسانا باقی می‌مانند.

رسانا برداشته می‌شود

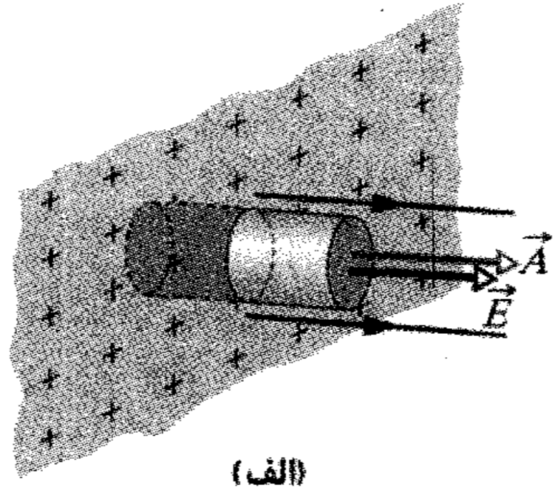
فرض کنید، بتوان به طریقی بارهای اضافی روی رسانا را مثلاً با قرار دادن آنها روی یک پوشش پلاستیکی نازک «جدا کرد» و رسانا را به طور کامل برداشت. انجام این کار، معادل این است که کاواک شکل ۱۹-۹ ب را تا حدی که تمام رسانا حذف شود و فقط بارها باقی بمانند بزرگ کنیم. در این صورت، میدان الکتریکی به هیچ وجه تغییر نمی‌کند؛ میدان در داخل پوستهٔ نازکی از بارها صفر است و برای تمام نقطه‌های خارجی نیز بدون تغییر می‌ماند. این امر نشان می‌دهد که میدان الکتریکی توسط بار ایجاد می‌شود، نه رسانا. رسانا فقط مسیر اولیه‌ای را برای آنکه بارها مکانهای خود را اشغال کنند، فراهم می‌آورد.

میدان الکتریکی خارجی

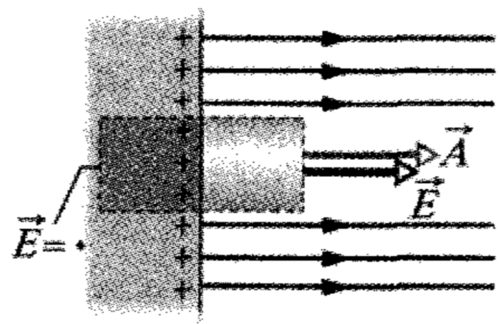
دیدیم که بار الکتریکی اضافی روی یک رسانای منزوی به طـور کامل به سطح رسانا منتقل می‌شود. با این حال اگر رسانا کـروی

نباشد، بار به طور یکنواخت توزیع نمی‌شود. بـه عبـارت دیگـر، چگالی بار سطحی σ (بار در یکای سطح) روی سـطح رسـانای غیر کروی متغیر است. به طور کلـی، ایـن تغییـر، تعیـین میـدان الکتریکی ناشی از بارهای سطحی را بسیار دشوار می‌کند.

با این حال، میدان الکتریکی درسـت در بیـرون سـطح یـک رسانا به سادگی با استفاده از قانون گاؤس تعیین می‌شـود. بـرای این منظور، بخشی از سطح را که به قدر کافی کوچک اسـت در نظر می‌گیریم تا بتوانیم از هر خمیـدگی چشمپوشـی کنـیم و آن بخش را تخت فرض کنیم. حال یک سـطح گاؤسـی اسـتوانه‌ای باریک را مانند شکل ۱۹-۱۰ در این مقطع در نظر می‌گیریم؛ یک سرِ این استوانه به طور کامل درون رسانا، و سرِ دیگر آن به طور کامـل در بیـرون رسـانا قـرا دارد و اسـتوانه عمـود بـر سـطح رساناست.



(الف)



(ب)

شکل ۱۹–۱۰ (الف) نمای کلی و (ب) نمای جانبی بخش کوچکی از یک رسانای منزوی بزرگ با بار مثبت اضافی روی سطح آن. یک سطح گاؤسی استوانه‌ای (بسته) که به طور عمود در رسانا فرو رفته است مقداری بار در بر دارد. خطهای میدان الکتریکی از قاعدهٔ خارجی این استوانه می‌گذرند، ولی از قاعدهٔ داخلی آن عبور نمی‌کنند. مساحت قاعدهٔ خارجی A و بردار سطح آن $\vec{A}$ است.

میدان الکتریکی $\vec{E}$ روی سطح رسانا و درست بیرون آن نیز باید بر این سطح عمود باشد. اگر چنین نباشد، آنگاه این میدان باید روی سطح رسانا مؤلفه‌ای داشته باشد و به بارهای سطحی نیرو وارد کند، و بدین ترتیب آنها را حرکت دهد. ولی، چنین حرکتی فرض اساسی ما دربارهٔ تعادل الکتروستاتیکی را بر هم می‌زند. بنابراین، $\vec{E}$ عمود بر سطح رساناست.

اکنون شارهای عبوری از این سطح گاؤسی را جمع می‌کنیم. چون میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است، هیچ شاری از آن سری که در داخل رساناست عبور نمی‌کند. همچنین هیچ شاری از سطح خمیدهٔ استوانه نمی‌گذرد، زیرا هیچ گونه میدان الکتریکی در بخش داخلی آن (در رسانا) وجود ندارد و میدان الکتریکی در بخش خارجی آن موازی با بخش خمیدهٔ این سطح گاؤسی است. تنها شار عبور از این سطح گاؤسی مربوط به سرِ

خارجی آن می‌شود، که در آنجا $\vec{E}$ عمود بر صفحهٔ قاعده است. فرض می‌کنیم که مساحت قاعدهٔ A به قدر کافی کوچک است تا بزرگی میدان E روی این قاعده ثابت باشد. آنگاه، شار عبوری از این قاعده برابر با EA است، و این همان شار خالص Φ عبـوری از سطح گاؤسی است.

بار q_{enc} که توسط سطح گاؤسی محصور شده اسـت، روی سطح رسانا به مساحت A قرار دارد. اگر σ بـار در یکـای سـطح باشد، آنگاه q_{enc} برابر با σA است. وقتی σA را به جای q_{enc} و EA را به جای Φ قرار دهیم، قانون گاؤس (معادلهٔ ۱۹–۶) چنـین می‌شود

$$\varepsilon_\circ EA = \sigma A$$

و از آنجا، داریم

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_\circ} \qquad \text{(سطح رسانا)} \qquad (۱۹\text{–}۱۱)$$

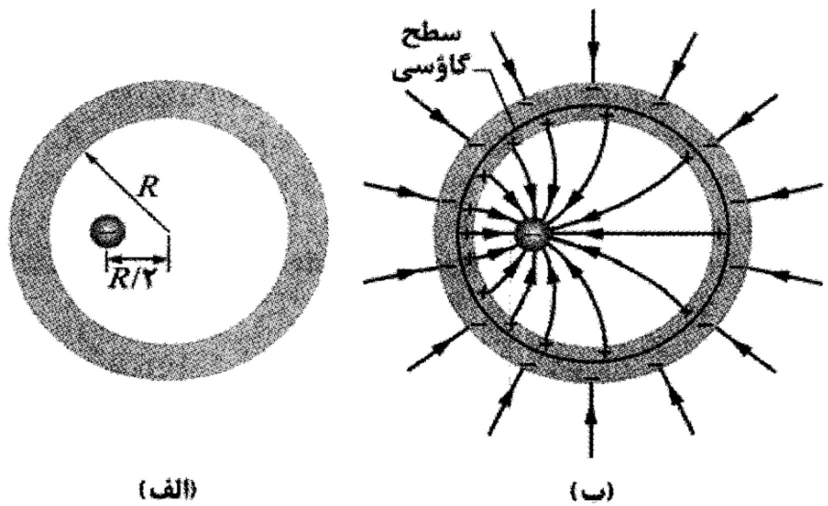
بنابراین، بزرگی میدان الکتریکی درست در بیرون یک رسانا متناسب با چگالی بار سطحی روی رساناست. اگر بار روی رسانا مثبت باشد، میدان الکتریکی مانند شکل ۱۹-۱۰ به طرف بیرون رساناست. اگر بار منفی باشد، میدان به طرف داخل رساناست.

خطهای میدان در شکل ۱۹-۱۰ باید در جایی از محیط پیرامون به بارهای منفی ختم شوند. اگر این بارها را به رسانا نزدیک کنیم، در هر نقطه از سطح رسانا چگالی بار و در نتیجه بزرگی میدان الکتریکی تغییر می‌کند. با این حال، رابطهٔ میان σ و E باز هم به صورت معادلهٔ ۱۹-۱۱ است.

مسئلهٔ نمونهٔ ۱۹-۵

شکل ۱۹-۱۱ الف سطح مقطعی از یک پوستهٔ فلزی کروی با شعاع داخلی R را نشان می‌دهد. بار نقطه‌ای $-5/0\,\mu C$ در فاصلهٔ $R/2$ از مرکز پوسته قرار گرفته است. اگر پوسته از لحاظ الکتریکی خنثی باشد، بارهای (القا شده) روی سطحهای داخلی و خارجی آن چقدر است؟ آیا این بارها به طور یکنواخت توزیع شده‌اند؟ نقش میدان در داخل و خارج این پوسته چگونه است؟

نکته‌های کلیدی شکل ۱۹-۱۱ ب مقطع یک سطح گاؤسی کروی را داخل فلز، درست بیرون دیوارهٔ داخلی پوسته نشان می‌دهد. میدان الکتریکی باید در داخل فلز (و در نتیجه روی سطح گاؤسی داخل فلز) صفر باشد. این بدان معنی است که شار الکتریکی عبوری از سطح گاؤسی نیز **باید صفر باشد. آنگاه** قانون گاؤس بیان می‌دارد که بار *خالص* محصور شده توسط سطح گاؤسی نیز باید صفر باشد.



شکل ۱۹-۱۱ (الف) یک بار نقطه‌ای منفی داخل یک پوستهٔ فلزی کروی که از لحاظ الکتریکی خنثی است، قرار دارد. (ب) در نتیجه، بار مثبت به طور نایکنواخت روی دیوارهٔ داخل پوسته، و به همان مقدار بار منفی به طور یکنواخت روی دیوارهٔ خارجی توزیع می‌شود.

خطهای میدان در داخل و خارج پوسته، به طـور تقریبـی در شکل ۱۹-۱۱ ب نشان داده شده‌اند. تمام خطهای میدان، پوســته و بار نقطه‌ای را به طور عمود قطع مـی‌کننـد. در داخـل پوســته، خطهای میدان به دلیل نایکنواختی توزیع بار مثبت، به یک طرف متمایل شده‌اند. نقش خطهای میدان در خارج پوسته همان نقشی است که گویی بار نقطه‌ای در مرکـز قـرار دارد و پوســته حـذف شده است. در واقع، بدون توجه به آنکه بـار نقطـه‌ای در کجـای داخل پوسته واقع شده، این گفته صحیح است.

کاربرد قانون گاوس – تقارن استوانه ای

شکل ۱۹-۱۲ بخشی از یک میلهٔ پلاستیکی استوانه‌ای به طول نامتناهی، با چگالی بار خطی مثبت یکنواخت λ را نشان می‌دهد. می‌خواهیم عبارتی برای بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ به فاصلهٔ r از محور میله به دست آوریم.