

$$u = \sqrt{\frac{c^2}{4A}} \quad \text{و} \quad A \text{ ستار}$$

ذره حرکتی دوره‌ای اجرا می‌کند که بسامد آن از دامنه نوسان مستقل است؛ برخلاف آونگ ساده که بسامدش به دامنه بستگی دارد. حرکت دوره‌ای مورد بحث کنونی را با دوره تناوب ثابت می‌گویند. (البته، نوسانگر هماهنگ خطی، تابع قانون هوك، با دوره تناوب ثابت است.)

کریستین هویگنس، فیزیکدان و ریاضیدان هلندی در ارتباط با تلاشهایی که در جهت بهبود دقت ساعت‌های آونگی به جا آورد، این نکته را کشف کرد. او نظریه گسترش خمهای مرکزی را کشف کرد و پی برد که گسترش خم مرکزی بر سیکلوئید نیز خود يك سیکلوئید است. بدینسان با فراهم آمدن «عوارض» سیکلوئیدی برای آونگ، حرکت گوی آونگ باید روی مسیر سیکلوئیدی انجام گیرد؛ بدین ترتیب زمان تناوب نسبت به دامنه مستقل است. این اختراع، هر چند که نبوغ آمیز بود، هرگز کاربرد عملی وسیعی نیافت.

مسائل

۱۰۴ برای، هریک از توابع انرژی پتانسیل زیر، نیرو را پیدا کنید:

$$V = cxyz + C \quad (\text{الف})$$

$$V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + C \quad (\text{ب})$$

$$V = ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \quad (\text{ج})$$

$$V = cr^n \quad (\text{د}) \text{ در مختصات کروی.}$$

۲۰۴ از طریق یافتن تاو، تعیین کنید که کدامیک از نیروهای زیر پایسته‌اند:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{x} + j\mathbf{y} + k\mathbf{z} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{F} = i\mathbf{y} - j\mathbf{x} + k\mathbf{z}^2 \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{F} = i\mathbf{y} + j\mathbf{x} + k\mathbf{z}^2 \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{F} = -kr^{-n}\mathbf{e}_r \quad (\text{د}) \text{ در مختصات کروی.}$$

۳۰۴ مقدار ثابت c را چنان بیابید که هریک از نیروهای زیر پایسته باشند:

$$\mathbf{F} = ixy + jcx^2 + k\mathbf{z}^3 \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{F} = i(z/y) + cj(xz/y^2) + k(x/y) \quad (\text{ب})$$

۴۰۴ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر تابع انرژی پتانسیل $V(x, y, z) = \alpha x + \beta y^2 + \gamma z^3$

در سه بعد حرکت می‌کند، سرعت در هنگام عبور از مبدأ v_0 است.

(الف) وقتی از نقطه $(1, 1, 1)$ می‌گذرد سرعتش چقدر است؟

(ب) اگر نقطه $(1, 1, 1)$ نقطه برگشت حرکت $(v = 0)$ باشد، v چقدر است؟

(ج) معادلات دیفرانسیل مؤلفه‌ای حرکت ذره چگونه‌اند؟

(یادآوری: لازم نیست در این مسئله معادلات دیفرانسیل را حل کنید.)

۵۰۴ دو تابع نیروی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{F} = i\mathbf{x} + j\mathbf{y} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{F} = i\mathbf{y} - j\mathbf{x} \quad (\text{ب})$$

با نشان دادن این مطلب که انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ برای (الف) مستقل از مسیر انتگرال گیری است ولی برای (ب) چنین نیست، تحقیق کنید که (الف) پایسته و (ب) ناپایسته است، دو مسیر انتگرال گیری بگیرید که نقطه شروع آنها مبدأ $(0, 0)$ و نقطه ختمشان $(1, 1)$ باشد. برای يك مسیر خط $x = y$ را بگیرید. برای مسیر دیگر از مبدأ روی محور x تا نقطه $(1, 0)$ و بعد خط $x = 1$ تا نقطه $(1, 1)$ را انتخاب کنید.

۶۰۴ نشان دهید تغییرات گرانی با ارتفاع را می توان به طور تقریبی از تابع انرژی پتانسیل زیر محاسبه کرد

$$V = mgz \left(1 - \frac{z}{r_e} \right)$$

که در آن r_e شعاع زمین است. نیرویی را که پتانسیل بالا ناشی می شود بیابید. از این رو معادلات دیفرانسیل مؤلفه ای حرکت پرتابه ای را که تحت تأثیر آن قرار دارد، پیدا کنید. اگر مؤلفه قائم سرعت اولیه v_{0z} باشد، پرتابه تا چه ارتفاعی بالا می رود؟ (با مثال ۳۰۲ مقایسه کنید.)

۲۰۴ ذرات گِل از محیط چرخ غلتانی پرتاب می شوند. اگر سرعت رو به جلو چرخ v_0 و شعاع چرخ b باشد، نشان دهید که بالاترین ارتفاع از سطح زمین که ذره گِل می تواند تا آنجا برود، برابر است با

$$b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

در چه نقطه ای روی چرخ این ذره گِل از چرخ غلتان جدا می شود؟ (توجه کنید: لازم است فرض کنید که $v_0^2 \geq bg$ باشد.)

۸۰۴ تفنگی در پایین تپه ای به زاویه شیب ثابت φ قرار داده می شود. نشان دهید که بردگلوله آن که روی شیب تپه از پایین به بالا را اندازه گیری می شود، برابر است با

$$\frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \varphi)}{g \cos^2 \varphi}$$

که α زاویه بلندی تفنگ است. همچنین نشان دهید که مقدار بیشینه برد روی شیب تپه برابر است با

$$\frac{v_0^2}{g(1 + \sin \varphi)}$$

۹۰۴ صورت مؤلفه ای معادلات دیفرانسیل حرکت يك پرتابه را بنویسید اگر مقاومت هوا یا مجذور سرعت متناسب باشد. آیا این معادلات مجزا می شوند؟ نشان دهید که مؤلفه های

x و y سرعت به صورت زیر بیان می شوند

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t} \quad \dot{y} = \dot{y}_0 e^{-\gamma t}$$

که γ فاصله ای است که پرتابه در طول مسیر حرکت می پیماید، و $\gamma = c\tau/m$.
 ۱۵۰۴ مراحل عملیاتی را که به معادلات (۲۲۰۴) و (۲۲۰۴ الف) (مربوط به برد افقی يك پرتابه در معرض مقاومت پس کشی خطی هوا) منجر می شوند، انجام دهید.
 ۱۱۰۴ شرایط اولیه نوسانگر هماهنگ دو بعدی به قرار زیرند

$$t = 0, x = A, y = \frac{1}{2}A, \dot{x} = 0, \dot{y} = \frac{1}{2}\omega A$$

که ω بسامد زاویه ای است. x و y را به صورت تابعی از t بیابید. نشان دهید که حرکت کاملاً در داخل مستطیلی به ابعاد $\frac{1}{2}A$ و $\frac{1}{2}A$ انجام می گیرد. زاویه میل $\frac{1}{2}\pi$ مسیر بیضوی را نسبت به محور x پیدا کنید. شکل مسیر را رسم کنید.
 ۱۲۰۴ گوی سربی کوچکی به جرم m توسط شش فنر سبک آویخته نگه داشته شده است (در شکل ۵۰۴). نسبت ثابت سفتی فنرها عبارت است از: $1:4:9$ ، به طوری که تابع انرژی پتانسیل را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

در زمان $t = 0$ گلوله را در جهت $(1, 1, 1)$ هل و در مبدأ به آن سرعت v_0 می دهند. اگر $k = \pi^2 m$ ، مقدار عددی x ، y ، و z را به صورت توابعی از زمان t پیدا کنید. آیا گوی همواره مسیرش را مجدداً می پیماید؟ اگر چنین است، به ازای چه مقدار t ذره برای بار اول به مبدأئی با همان سرعت که در $t = 0$ داشت، مراجعت می کند.
 ۱۳۰۴ استنتاج معادله (۲۵۰۴) را کامل کنید.

۱۴۰۴ اتمی در شبکه بلوری مکعبی ساده قرار گرفته است. اگر انرژی پتانسیل برهم کنش بین هر دو اتم به شکل $c r^{-\alpha}$ باشد، که c و α ثابت اند و r فاصله بین دو اتم است، نشان دهید که انرژی کل برهم کنش يك اتم معین با شش اتم مجاورش تقریباً برابر است با انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ در سه بعد

$$V \cong A + B(x^2 + y^2 + z^2)$$

که A و B ثابت اند. [یادآودی: شش اتم مجاور پابرجا هستند و در نقاط $(\pm d, 0, 0)$ ، $(0, \pm d, 0)$ ، و $(0, 0, \pm d)$ قرار گرفته اند، و جابه جایی (x, y, z) يك اتم معین از حال تعادل $(0, 0, 0)$ در مقایسه با d کوچک است. در این صورت $V = \sum c r_i^{-\alpha}$ ، که $r_i = [(d-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ و روابط مشابه برای $r_2, r_3, \dots, r_6$ فرمول تقریبی در پیوست د را ملاحظه کنید.]

۱۵۰۴ الکترونی در میدان نیرویی متشکل از میدان الکتریکی یکنواخت E و میدان مغناطیسی

$\mathbf{B}$ عمود بر $\mathbf{E}$ ، حرکت می‌کند. بگیرید: $\mathbf{E} = \mathbf{j}E$ و $\mathbf{B} = \mathbf{k}B$ ، مکان اولیه الکترون را در مبدأ با سرعت اولیه $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i}v_0$ در جهت x انتخاب کنید. حرکت حاصل الکترون را بیابید. نشان دهید که مسیر سیکلوئیدی به معادله زیر است

$$x = a \sin \omega t + b t$$

$$y = a(1 - \cos \omega t)$$

$$z = 0$$

از حرکت سیکلوئیدی الکترونها در مگنترون بهره می‌گیرند، مگنترون لامپی الکترونی است که برای ایجاد امواج رادیویی با بسامد بالا از آن استفاده می‌شود.

۱۶۰۴ ذره‌ای روی کره صافی به شعاع b در فاصله $b/2$ از صفحه مرکزی قرار داده شده است. هنگامی که ذره به پایین کره می‌لغزد، در چه نقطه‌ای از آن جدا می‌شود؟

۱۷۰۴ دانه تسبیحی روی سیم سخت صافی که به شکل حلقه دایره‌ای به شعاع b خم شده است، می‌لغزد. اگر صفحه حلقه قائم باشد، و اگر دانه تسبیح در نقطه‌ای هم سطح با مرکز حلقه از حال سکون شروع به حرکت کند، سرعت دانه تسبیح را در پایینترین نقطه حلقه و واکنش سیم روی دانه تسبیح را در این نقطه به دست آورید.

۱۸۰۴ نشان دهید که زمان تناوب ذره لغزان، در تحت سیکلوئیدی مثال ۱۵۰۴، برابر است با $\frac{4\pi}{3} \left(\frac{A}{g} \right)^{1/2}$.