۱ ـ الف) تکانه‌ی زاویه ای $\vec{L}$ با رابطه‌ی $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=m\vec{r}\times\vec{v}$ بیان می‌شود که در آن $\vec{p}$ تکانه‌ی خطی است. با در نظر گرفتن رابطه‌ی بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای $\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$ ، نشان دهید:

$$\vec{L}=mr^2\left[\vec{w}-\hat{r}\left(\hat{r}.\vec{w}\right)\right],$$

که $\hat{r}$ بردار یکه در جهت $\vec{r}$ است.

ب) انرژی جنبشی هر ذره با رابطه‌ی $T=\frac{1}{2}mv^2$ بیان می‌شود. نشان دهید برای حرکت چرخشی:

$$T=\frac{1}{2}m\left[r^2w^2-\left(\vec{r}.\vec{w}\right)^2\right].$$

(می‌بایست روابطی که برای اثبات قسمت الف و ب استفاده می‌کنید، اثبات شوند.)

۲ ـ الف) نشان دهید $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}.\vec{\nabla}\vec{A}-\vec{\nabla}.\vec{A}\vec{B}+\vec{\nabla}.\vec{B}\vec{A}-\vec{A}.\vec{\nabla}\vec{B}$

ب) اگر بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}(r)=\frac{1}{r}\hat{k}$ باشد، $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$ را محاسبه کنید.

۳ ـ با کمک قضیه‌ی گاوس نشان دهید:

الف) $\frac{1}{3}\int_S\vec{r}.d\vec{\sigma}=V$ ، که در آن V حجمی است که توسط سطح بسته‌ی S محاط شده است.

ب) اگر $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ باشد، نشان دهید برای سطح بسته‌ی S داریم: $\int_S\vec{B}.d\vec{\sigma}=0$.

۴ ـ الف) بردارهای یکه‌ی دستگاه استوانه‌ای دوار $(\hat{k},\hat{\varphi},\hat{\rho})$ را بر حسب مولفه‌های دکارتی تجزیه کنید. حال، بردارهای یکه‌ی دکارتی $(\hat{k},\hat{j},\hat{i})$ را بر حسب مولفه‌های استوانه‌ای دوار تجزیه کنید.

ب) نیرویی با رابطه‌ی

$$\vec{F}=-\hat{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}+\hat{j}\,\frac{x}{x^2+y^2},$$

توصیف می‌شود.

با کمک قسمت الف، $\vec{F}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسید و $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

۵ ـ ماتریس زیر را قطري کرده و ویژه مقادیر و ویژه بردارهای متعامد و به‌هنجار آن را به دست آورید. با کمک ویژه بردارها، ماتریس تبدیلِ قطری کردن را تشکیل دهید و برای اطمینان از درستی پاسخ های خود، بررسی کنید که آیا این ماتریسِ تبدیل، ماتریس A را قطری می کند یا خیر.

$$A\equiv\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$