



# فصل ۱۹ - قانون گاوس

- ۱- مقدمه
- ۲- شار
- ۳- شار میدان الکتریکی
- ۴- قانون گاوس
- ۵- قانون گاوس و قانون کولن
- ۶- رسانای باردار منزوی
- ۷- کاربرد قانون گاوس - تقارن استوانه ای
- ۸- کاربرد قانون گاوس - تقارن صفحه ای
- ۹- کاربرد قانون گاوس - تقارن کروی

# قانون گاوس

قانون گاوس، شار خالص  $\Phi$  میدان الکتریکی عبوری از یک سطح بسته (یک سطح گاوسی) را به بار خالص  $q_{enc}$  که توسط این سطح محصور شده است، مربوط می‌کند. این قانون حاکی از آن است که

$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc} \quad (\text{قانون گاوس}) \quad (6-19)$$

با قرار دادن معادله ۱۹-۴، تعریف شار، قانون گاوس را می‌توان چنین نوشت

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \quad (\text{قانون گاوس}) \quad (7-19)$$

معادله‌های ۱۹-۶ و ۱۹-۷ تنها وقتی برقرارند که بار خالص در خلأ یا (آنچه که برای اغلب موارد عملی یکسان است) در هوا قرار داشته باشد. در فصل ۲۱، قانون گاوس را اصلاح می‌کنیم تا شامل حالت‌هایی که در آنها موادی از قبیل میکا، روغن، یا شیشه وجود دارد نیز بشود.

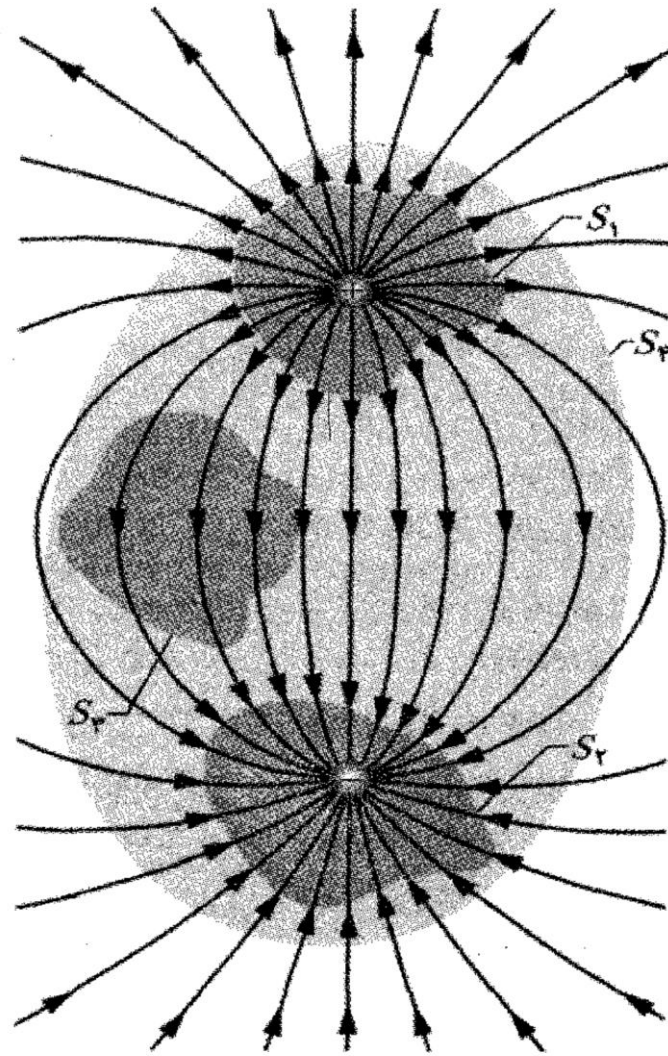
در معادله‌های ۱۹-۶ و ۱۹-۷، بار خالص  $q_{enc}$  جمع جبری تمام بارهای مثبت و منفی محصور شده است، و می‌تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد. چون علامت بار چیزهایی را جمع به شار خالص عبوری از سطح گاوسی به دست می‌دهد، به جای آنکه صرفاً از بزرگی بار محصور شده استفاده کنیم، علامت بار را نیز وارد می‌کنیم: اگر  $q_{enc}$  مثبت باشد، شار خالص به طرف بیرون، و اگر  $q_{enc}$  منفی باشد، شار خالص به طرف درون است.

بار الکتریکی بیرون از سطح، بدون توجه به میزان بزرگی یا میزان نزدیکی آن به سطح، در جمله  $q_{enc}$  در قانون گاوس وارد نمی‌شود. شکل یا محل دقیق بارها در داخل سطح گاوسی نیز اهمیت ندارد؛ تنها چیزهایی که در سمت راست معادله‌های ۱۹-۶ و ۱۹-۷ اهمیت دارند، بزرگی و علامت بار خالص محصور شده است. ولی، کمیت  $\vec{E}$  در سمت چپ معادله ۱۹-۷، میدان الکتریکی ناشی از تمام بارها، چه در داخل و چه در خارج سطح گاوسی است. این ممکن است متناقض به نظر برسد، ولی آنچه

را که از مسئله نمونه ۱۹-۱ آموختیم، به خاطر داشته باشید: میدان الکتریکی ناشی از یک بار در بیرون سطح گاوسی هیچ سهمی در شار خالص عبوری از آن سطح ندارد، زیرا خطهای میدان ناشی از بار که وارد این سطح می‌شوند برابر با تعداد خطهای میدانی است که از آن خارج می‌شوند.

حال این نقطه نظرها را برای شکل ۱۹-۶ به کار می‌گیریم که دو بار نقطه‌ای، با بزرگی یکسان ولی علامت مخالف، و خطهای میدانی که میدانهای الکتریکی ناشی از این بارها را در فضای اطراف توصیف می‌کند، نشان می‌دهد. مقطع چهار سطح گاوسی نیز نشان داده شده است. هر یک را به نوبت بررسی می‌کنیم.

**سطح  $S_1$ .** جهت میدان الکتریکی برای تمام نقطه‌های روی این سطح به طرف بیرون است. بنابراین، شار میدان الکتریکی عبوری از این سطح مثبت، و همان گونه که از قانون گاوس برمی‌آید، بار خالص داخل این سطح نیز مثبت است (یعنی، در معادله ۱۹-۶، اگر  $\Phi$  مثبت باشد،  $q_{enc}$  نیز مثبت است).



شکل ۱۹-۶ دو بار نقطه‌ای، با بزرگی یکسان ولی علامت مخالف، و خطهای میدانی که میدان الکتریکی خالص آنها را نمایش می‌دهد. مقطع چهار سطح گاوسی، نشان داده شده است. سطح  $S_1$  بار مثبت و سطح  $S_2$  بار منفی در بر دارد. سطح  $S_3$  هیچ باری در بر ندارد. سطح  $S_4$  هر دو بار را در بر دارد و بنابراین بار خالصی ندارد.

**سطح  $S_2$**  . جهت میدان الکتریکی برای تمام نقطه‌های روی این سطح به طرف درون است. بنابراین، شار میدان الکتریکی منفی، و همان‌گونه که از قانون گاوس بر می‌آید، بار محصور شده نیز منفی است.

**سطح  $S_3$**  . این سطح هیچ باری را محصور نمی‌کند و بنابراین،  $q_{enc} = 0$  است. قانون گاوس (معادله ۱۹-۶) ایجاب می‌کند که شار خالص میدان الکتریکی عبوری از این سطح برابر با صفر باشد. این نتیجه‌ای معقول است، زیرا تمام خطهای میدان به طور کامل از این سطح می‌گذرند، از بالای آن وارد و از پایین آن خارج می‌شوند.

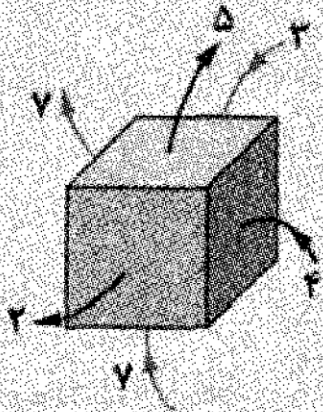
**سطح  $S_4$**  . این سطح هیچ بار خالصی را محصور نمی‌کند، زیرا بزرگی بارهای مثبت و منفی محصور شده برابر است. قانون گاوس حاکی از آن است که شار خالص میدان الکتریکی عبوری از این سطح باید برابر با صفر باشد. این نتیجه‌ای معقول است، زیرا تعداد خطهای میدانی که از سطح  $S_4$  خارج می‌شوند برابر تعداد خطهایی است که به آن وارد می‌شوند.

اگر بار بسیار بزرگ  $Q$  را به سطح  $S_4$  در شکل ۱۹-۶ نزدیک کنیم چه روی می‌دهد؟ نقش خطهای میدان به یقین تغییر می‌کند، ولی شار خالص مربوط به هر یک از چهار سطح گاوسی تغییری نمی‌کند. این موضوع قابل درک است، زیرا خطهای میدان وابسته به اضافه شدن بار  $Q$  به طور کامل از میان هر چهار سطح گاوسی می‌گذرند، بی‌آنکه سهمی در شار خالص عبوری از هر یک داشته باشند. چون  $Q$  در بیرون هر چهار سطح گاوسی در نظر گرفته شده قرار دارد، مقدار  $Q$  به هیچ عنوان در قانون گاوس وارد نمی‌شود.

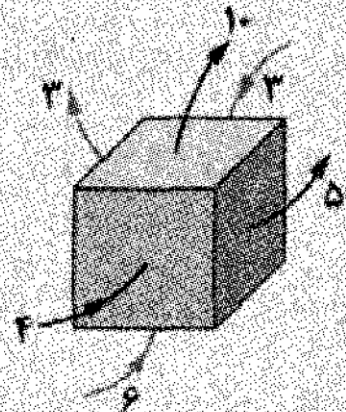




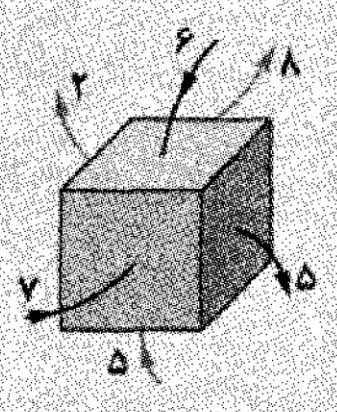
✓ نکته واریسی ۲ شکل زیر، سه وضعیت را نشان می‌دهد که در آنها یک مکعب گاوسی در میدان الکتریکی قرار دارد. پیکانها و عددها، جهت‌های خطهای میدان و بزرگیهای شار عبوری (بر حسب  $N.m^2/C$ ) از شش وجه هر مکعب را نشان می‌دهد. (پیکانهای کم رنگتر مربوط به وجه‌های ناپیدا است.) مکعب در کدام حالت یک بار خالص مثبت، (ب) یک بار خالص منفی، و (پ) بار خالص صفر را در بر دارد؟



(۱)



(۲)

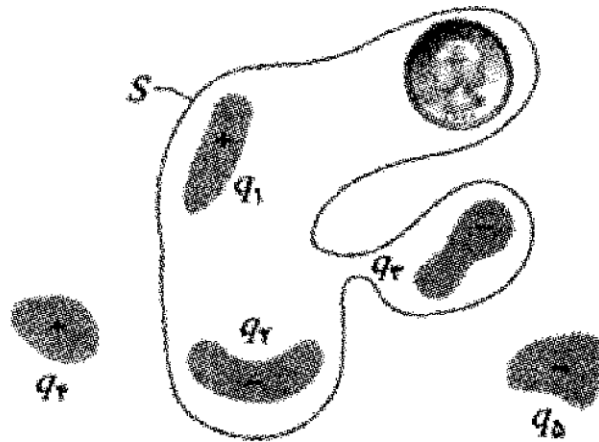


(۳)

۲- (الف) ۲؛ (ب) ۳؛ (پ) ۱،

## مسئله نمونه ۱۹-۳

شکل ۱۹-۷، پنج تکه پلاستیک باردار و یک سکه خنثی از لحاظ الکتریکی را نشان می‌دهد. مقطع سطح گاوسی  $S$  در شکل نشان داده شده است. اگر  $q_1 = q_4 = -3/1 \text{ nC}$ ،  $q_2 = q_5 = -5/9 \text{ nC}$  و  $q_3 = -3/1 \text{ nC}$  باشد، شار الکتریکی خالصی که از این سطح می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۱۹-۷ پنج جسم پلاستیکی، هر یک با بار الکتریکی و یک سکه، که هیچ بار خالصی ندارد. مقطع سطح گاوسی که سه جسم پلاستیکی و سکه را در بر گرفته، نشان داده شده است.

## مسئله نمونه ۱۹-۴ مهارت خود را تقویت کنید

بار خالص محصور در مکعب گاوسی مسئله نمونه ۱۹-۲ و شکل ۱۹-۵ چقدر است؟

**نکته کلیدی** بار خالص احاطه شده توسط یک سطح مسدود (آرمانی یا ریاضی) از طریق قانون گاوس با معادله ۱۹-۶ ( $q_{enc} = \epsilon_0 \phi$ ) به شار الکتریکی کل مربوط می شود.

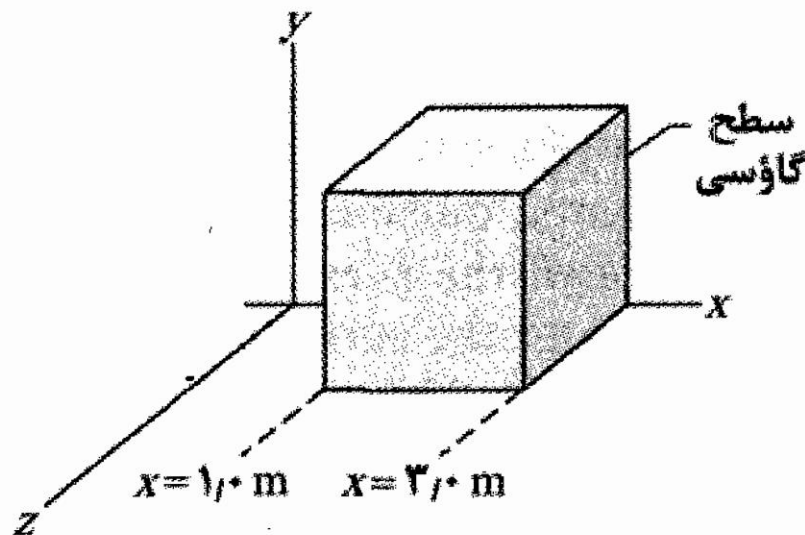
(پاسخ)

$$\begin{aligned} q_{enc} &= \epsilon_0 \phi = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N.m}^2) / (24 \text{ N.m}^2 / \text{C}) \\ &= 2/1 \times 10^{-10} \text{ C} \end{aligned}$$

بنابراین، مکعب محتوی بار خالص مثبت است.

## مسئله نمونه ۱۹-۲ مهارت خود را تقویت کنید

یک میدان الکتریکی نایکنواخت که با  $\vec{E} = 3/0x\hat{i} + 4/0z\hat{j}$  داده شده است از مکعب گاوسی نشان داده شده در شکل ۱۹-۵ می‌گذرد. ( $E$  بر حسب نیوتون بر کولن و  $x$  بر حسب متر است). شار الکتریکی عبوری از وجه سمت راست، وجه سمت چپ، و وجه بالایی چقدر است؟



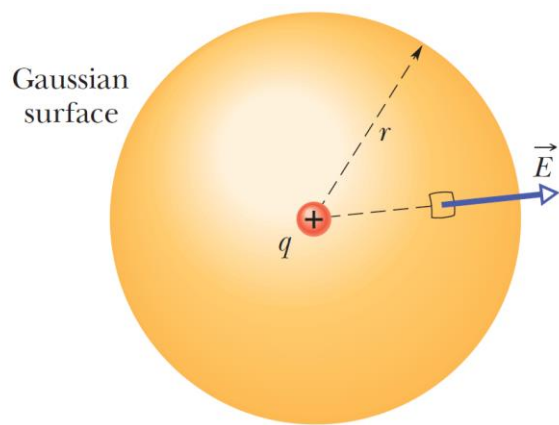
شکل ۱۹-۵ یک مکعب گاوسی با یک ضلع واقع بر محور  $x$  که در یک میدان الکتریکی نایکنواخت قرار دارد.

## قانون گاوس و قانون کولن

چون قانون گاوس و قانون کولن روشهای متفاوتی برای توصیف رابطه میان بار الکتریکی و میدان الکتریکی در حالت‌های ایستا هستند، باید بتوانیم هر یک را از دیگری به دست آوریم. در اینجا قانون کولن را از قانون گاوس، با توجه به برخی از ملاحظات تقارنی به دست می‌آوریم.

شکل ۸-۱۹ یک بار نقطه‌ای مثبت  $q$  را نشان می‌دهد که به دور آن یک سطح گاوسی کروی هم‌مرکز به شعاع  $r$  رسم شده است. این سطح را به مساحت‌های دیفرانسیلی  $dA$  تقسیم می‌کنیم. بنا بر تعریف، بردار سطح  $d\vec{A}$  در هر نقطه بر این سطح عمود و جهت آن از سطح به طرف بیرون است. از تقارن شکل درمی‌یابیم که در هر نقطه، میدان الکتریکی  $\vec{E}$  نیز بر سطح عمود و جهت آن به طرف بیرون است. بنابراین، چون زاویه  $\theta$  میان  $\vec{E}$  و  $d\vec{A}$  برابر صفر است، معادله ۷-۱۹ را می‌توانیم به صورت زیر برای قانون گاوس بازنویسی کنیم

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \oint E dA = q_{\text{enc}} \quad (8-19)$$



شکل ۱۹-۸ یک سطح گاوسی کروی به مرکز بار نقطه‌ای  $q$ .

که در اینجا  $q_{enc} = q$  است. اگر چه  $E$  به طور شعاعی با فاصله از  $q$  تغییر می‌کند، با این حال مقدار آن در هر نقطه روی سطح کروی یکسان است. چون انتگرال در معادله ۱۹-۸ روی کل سطح گرفته می‌شود،  $E$  در انتگرالگیری مقداری ثابت است و می‌توانیم آن را از زیر علامت انتگرال بیرون بیاوریم. از آنجا خواهیم داشت

$$\epsilon_0 E \oint dA = q \quad (9-19)$$

حال انتگرال صرفاً جمع همه مساحت‌های دیفرانسیلی  $dA$  روی کره است و بنابراین، درست برابر با مساحت این سطح، یعنی  $4\pi r^2$ ، است. با قرار دادن این، خواهیم داشت



$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

یا

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (19-10)$$

که این دقیقاً معادله ۱۹-۳ است که آن را با استفاده از قانون کولن به دست آوردیم.

✓ نکته واریسی ۳ شار خالص معین  $\Phi_i$  از یک کره گاوسی به شعاع  $r$  که یک ذره باردار منزوی را در بر گرفته است، عبور می کند. فرض کنید این سطح گاوسی به (الف) یک کره گاوسی بزرگتر، (ب) یک مکعب گاوسی با طول ضلعی برابر  $r$ ، و (پ) یک مکعب گاوسی با طول ضلعی برابر با  $2r$  تغییر کند. در هر حالت، آیا شار خالصی که از سطح گاوسی جدید می گذرد، بزرگتر، کوچکتر، یا برابر  $\Phi_i$  است؟ چرا؟

# تدبیرهای حل مسئله

## تدبیر ۱: انتخاب سطح گاوسی

چون به دست آوردن معادله ۱۹-۱۰ با استفاده از قانون گاوس تمرینی برای به دست آوردن میدانهای الکتریکی ناشی از سایر پیکربندیهای بار است، مرحله‌هایی را که طی کردیم مرور می‌کنیم.

با بار نقطه‌ای مثبت معین  $q$  شروع کردیم؛ می‌دانیم که خطهای میدان الکتریکی با یک نقش متقارن کروی به طور شعاعی از  $q$  به طرف بیرون است.

برای یافتن بزرگی  $E$  میدان الکتریکی در فاصله  $r$  با استفاده از قانون گاوس (معادله ۱۹-۷)، یک سطح گاوسی بسته فرضی را پیرامون نقطه‌ای به فاصله  $r$  از  $q$  به دور  $q$  در نظر گرفتیم. سپس مجموع مقادارهای  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  را روی کل سطح گاوسی با انتگرالگیری به دست آوردیم. برای آنکه این انتگرالگیری تا آنجا



که ممکن است ساده باشد، یک سطح گاوسی کروی را (مشابه با تقارن کروی میدان الکتریکی) برگزیدیم. این انتخاب از سه نظر ساده کننده بود: (۱) حاصلضرب نقطه‌ای  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  ساده می‌شد، زیرا در تمام نقطه‌های روی سطح گاوسی زاویه میان  $\vec{E}$  و  $d\vec{A}$  برابر با صفر است، و از این رو در تمام نقطه‌ها  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ . (۲) بزرگی میدان الکتریکی  $E$  در تمام نقطه‌های روی سطح گاوسی کروی یکسان است؛ بنابراین،  $E$  در انتگرالگیری مقدار ثابتی بود و می‌توانستیم آن را از زیر علامت انتگرال بیرون بیاوریم. (۳) نتیجه، یک انتگرالگیری بسیار ساده بود - جمع مساحت‌های دیفرانسیلی کره - که بی‌درنگ می‌توانستیم آن را به صورت  $4\pi r^2$  بنویسیم.

توجه کنید که قانون گاوس صرفنظر از آنکه شکل سطح گاوسی که به دور بار  $q_{\text{enc}}$  انتخاب می‌کنیم چه باشد، برقرار است. با این حال، اگر، مثلاً، یک سطح گاوسی مکعبی را برگزیده بودیم، سه مورد ساده کننده از بین می‌رفت و

انتگرالگیری  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  روی سطح مکعبی بسیار مشکل می‌شود. منظور این است که انتخاب سطح گاوسی باید به گونه‌ای باشد که انتگرالگیری در قانون گاوس به ساده‌ترین شکل درآید.

## رسانای باردار منزوی

قانون گاوس به ما در اثبات قضیه مهمی دربارهٔ رساناها کمک می‌کند:

اگر یک بار اضافی روی رسانایی منزوی قرار داده شود، آن مقدار بار به طور کامل روی سطح رسانا حرکت خواهد کرد. هیچ گونه بار اضافی در داخل جسم رسانا وجود نخواهد داشت.

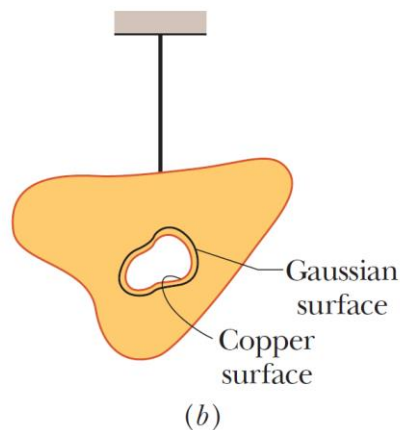
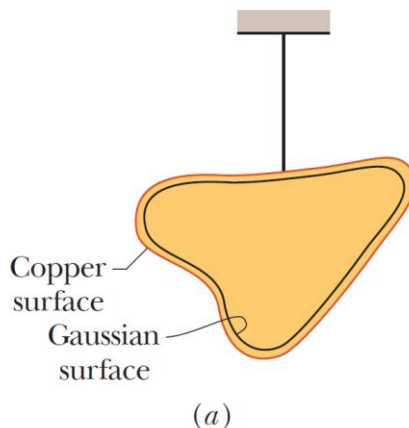
با توجه به اینکه بارهای هم‌علامت، یکدیگر را می‌رانند، این نتیجه منطقی به نظر می‌رسد. می‌توان چنین تصور کرد که با حرکت بارهای اضافه شده به سطح، این بارها تا جایی که بتوانند از هم دور می‌شوند. برای تأیید این موضوع از قانون گاوس بهره می‌گیریم.

شکل ۱۹-۹ الف، مقطعی از یک قطعه مسی منزوی را نشان می‌دهد که دارای بار اضافی  $q$  است و از نخی عایق آویزان شده است. یک سطح گاوسی را درست از داخل سطح واقعی رسانا می‌گذرانیم.

میدان الکتریکی داخل این رسانا باید صفر باشد. اگر این طور نباشد، این میدان نیروهایی را بر الکترونهای (آزاد) رسانش، که همواره در رسانا وجود دارند، وارد می‌کند و بنابراین، همواره جریانی درون رسانا وجود خواهد داشت. (یعنی، بار در داخل رسانا، از جایی به جایی دیگر حرکت می‌کند.) معلوم است که در یک رسانای منزوی چنین جریانه‌های دائمی وجود ندارد، و بنابراین، میدان الکتریکی داخلی برابر با صفر است.

اگر  $\vec{E}$  در هر جایی داخل رسانای مسی صفر باشد، باید برای تمام نقطه‌های روی سطح گاوسی هم صفر باشد؛ زیرا هر قدر هم این سطح به سطح رسانا نزدیک باشد، باز هم یقیناً در داخل رسانا واقع است. این بدان معنی است که شاری که از سطح گاوسی می‌گذرد باید صفر باشد. در نتیجه، چون بارهای

اضافی داخل سطح گاوسی نیستند، پس باید بیرون این سطح باشند و این به معنی آن است که باید روی سطح واقعی رسانا قرار بگیرند.



شکل ۹-۱۹ (الف) یک قطعه مسی با بار  $q$  از نخ عایق آویزان است. یک سطح گاوسی در داخل فلز، درست زیر سطح واقعی، رسم شده است. (ب) اکنون در داخل قطعه مسی، کاواکی وجود دارد. یک سطح گاوسی در داخل فلز، نزدیک به سطح کاواک قرار دارد.

## رسانای منزوی با کاواک

شکل ۹-۱۹ ب همان رسانای آویخته را نشان می‌دهد، با این تفاوت که اکنون کاواکی به طور کامل درون آن قرار دارد. شاید این منطقی باشد که فرض کنیم وقتی بخشی از یک ماده خنثی از نظر الکتریکی را برای ساختن یک کاواک جدا کنیم، توزیع بار یا نقش میدان الکتریکی موجود در شکل ۹-۱۹ الف تغییر نمی‌کند. دوباره باید برای اثبات کمی به قانون گاوس برگردیم.

یک سطح گاوسی به دور کاواک، نزدیک به سطح آن ولی داخل جسم رسانا، رسم می‌کنیم. چون داخل رسانا  $\vec{E} = 0$  است، هیچ شاری نمی‌تواند از میان این سطح گاوسی جدید بگذرد. بنابراین، از قانون گاوس نتیجه می‌گیریم که این سطح نمی‌تواند بار خالصی را در بر گیرد. در نتیجه، هیچ بار خالصی روی دیواره‌های کاواک وجود ندارد؛ همه بارهای اضافی، مثل شکل ۹-۱۹ الف، روی سطح خارجی رسانا باقی می‌مانند.