فصل ۴

تانسور

۱.۴ کلاف دوگان

همهٔ ساختارهایی که در این فصل بر کلافهای برداری صورت می‌پذیرد، یک وجه مشترک دارند. در هر کدام، هر یک از تارهای $\pi^{-1}(p)$ را به فضای برداری دیگر تعویض می‌کنیم و سپس همه این فضاهای برداری جدید را به گونه‌ای با هم جور می‌کنیم که یک کلاف برداری بر روی همان فضای پایه قبلی تشکیل دهند. ساده ترین حالت هنگامی است که هر یک از تارهای V کلاف را با دوگانش V^* عوض کنیم. یادآور می‌شویم که V^* فضای برداری همه توابع خطی به شکل $\lambda : V \to \mathbb{R}$ است. اگر $f : V \to W$ تبدیل خطی باشد آنگاه تبدیل خطی $f^* : W^* \to V^*$ با ضابطه $f^*(\lambda)(v) := \lambda(f(v))$ می‌توان تعریف نمود. روشن است که اگر $\mathrm{Id}_V : V \to V$ همانی باشد، آنگاه Id_V^* همان V^* است و اگر $g : U \to V$ آنگاه $(f\circ g)^* = g^*\circ f^*$. این احکام ساده نشان می‌دهند که اگر $f : V \to W$ ایزومورفیسم باشد، آنگاه f^* نیز هست. زیرا $(f^{-1}\circ f)^* = \mathrm{Id}_V^*$ و $(f\circ f^{-1})^* = \mathrm{Id}_W^*$.

چنانچه V با بعد متناهی باشد، بعد V^* و V برابرند. در واقع، اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، آنگاه عناصر $v_i^* \in V^*$ با تعریف $v_i^*(v_j) = \delta_j^i$ پایه‌ای برای V^* تشکیل می‌دهند. تابع خطی v_i^* به کل مجموعهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ بستگی دارد، نه فقط به v_i تنها؛ و ایزومورفیسم از V به V^* که از فرستادن v_i به v_i^* حاصل می‌شود، از انتخاب پایه مستقل نیست (کافی است تأثیر تغییر v_1 به $2v_1$ را در نظر بگیرید). از سوی دیگر اگر $v \in V$، بی هیچ پروایی می‌توانیم $v^{**} \in V^{**} := (V^*)^*$ را به صورت زیر تعریف

کنیم:

$$v^{**}(\lambda) := \lambda(v) \qquad \text{به ازای هر } \lambda \in V^* \text{ ای}$$

اگر به ازاء هر $\lambda \in V^*$ ای $V^{**}(\lambda) = 0$ آنگاه به ازاء هر $\lambda \in V^*$ ای $\lambda(v) = 0$ که از آن نتیجه می‌گیریم $v = 0$ بنابراین، نگاشت $v^{**} \leftarrow v$ یزومورفیسمی از V به V^{**} است. این نگاشت را ایزومورفیسم طبیعی از V به V^{**} می‌نامیم (مساله ٦ استفاده از صفت طبیعی را روشن می‌سازد. یک دلیل آن این است که عملا هیچ ایزومورفیسم طبیعی از V به وجود ندارد.

حال فرض کنیم $\xi : E \to B$ کلافی برداری است. گیریم $E' := \bigcup_{p\in B}\{\pi^{-1}\}^*$ و نگاشت $\xi' : E' \to B$ را طوری تعریف کنیم که $\{\pi^{-1}\}^*$ را به p بنگارد. اگر $U \subset B$ و $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ بدیهی سازی موضعی باشد، آنگاه نگاشتی به شکل

$$t' : \pi'^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^n)^*$$

بطور طبیعی می‌توان تعریف نمود: چون تحدید نگاشت t به هر تار $\pi^{-1}(p)$ ایزومورفیسم است، ایزومورفیسمی به شکل

$$(t_p^*)^{-1} : \{\pi^{-1}(p)\}^* \to \{p\} \times (\mathbb{R}^n)^*$$

می‌توانیم تعریف کنیم. به این ترتیب، با خواستن اینکه همه چنین t' هایی بدیهی سازی موضعی باشند، می‌توانیم $\pi' : E' \to B$ را به کلافی برداری تبدیل کنیم: کلاف دوگان ξ^* کلاف ξ (در ابتدا لازم است یک بار برای همه تارهای ایزومورفیسمی از $(\mathbb{R}^n)^*$ به $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم.)

ابتدا، چنین به نظر می‌رسد که $\xi \simeq \xi^*$ زیرا هر $\pi^{-1}(p)$ ای با $\pi^{-1}(p)$ ایزومورف است. البته، این تا حدودی نیز درست است، زیرا هر دو فضای برداری با یک بعد هستند. فقدان ایزومورفیسم طبیعی از V به V^* مانع می‌شود تا به راحتی بتوانیم هم ارزی بین ξ و ξ^* تعریف کنیم. در حقیقت، همان طور که بعداً خواهیم دید، در غالب حالات ξ^* با ξ هم ارز است؛ خواننده خود می‌تواند در این مورد تفکر کند. در مقابل کلاف $\xi^{**} := (\xi^*)^*$ همواره با ξ هم ارز است. با تصویر کردن تار V در p از ξ به تار V^{**} در p از ξ^{**} به ایزومورفیسم طبیعی دست می‌یابیم. چنانچه طریق ساختن ξ^* از ξ را بیاد بیاوریم، پی می‌بریم که این نگاشت عملاً یک هم ارزی است.

حتی اگر بتوان ξ را به شکل هندسی تجسم نمود (نظیر وقتی که ξ با TM برابر است)، بندرت می‌توان تجسمی هندسی از ξ^* بدست داد. بلکه، فقط ξ^* بر ξ عمل

کند: اگر s برشی از ξ و σ برشی از ξ^* باشد، آنگاه تابی از B به $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $p \to \omega(p)(s(p))$ می‌توان تعریف نمود. زیرا $s(p) \in \pi^{-1}(p)$ و $\sigma(p) \in \pi'^{-1}(p) = \pi^{-1}(p)^*$. این تابع را به سادگی با $\sigma(s)$ نمایش می‌دهیم.

وقتی این ساخت در مورد کلاف مماس TM به ء انجام می‌شود، کلاف حاصل را با نماد T^*M نشان داده و به آن کلاف کنتاژانت M می‌گوئیم. تار T^*M روی p درست $(M_p)^*$ است. کلاف کتانژانت T^*M نیز شبیه TM یک کلاف برداری هموار است: زیرا C^∞–مرتبط بودن دو بدیهی سازی موضعی x^* و y_* برای TM، درست به معنی حکم شابه در خصوص x'_* و y'_* است (در حقیقت، $(y'_* \circ (x'_*) = y_* \circ (x_*)-^{-1}$). بنابراین برشهایی پیوسته و یا برشهای هموار از T^*M را می‌توانیم تعریف کنیم.

اگر ω یک برش هموار از T^*M و X میدان برداری هموار بر M باشد، آنگاه $\omega(X)$ تابع هموار $p \Rightarrow \omega(p)(X(p))$ است.

۲.۴ دیفرانسیل یک تابع

اگر $f : M \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد، برش هموار df از T^*M را به صورت

$$\forall\ X \in T_pM \quad : \quad df(p)(X) := X(f)$$

تعریف می‌کنیم. این برش را دیفرانسیل f می‌نامیم. بخصوص، فرض کنید که X با $\frac{dc}{dt}\Big|_{t_\circ}$ برابر باشد، که $c(t_\circ) = p$. یادآور می‌شویم که

$$\frac{dc}{dt}|_{t_\circ} = c_*\Big(\frac{d}{dt}|_{t_\circ}\Big)$$

این بدان معنی است که

$$\begin{aligned} df\Big(\frac{dc}{dt}_{t_\circ}\Big) &= c_*\Big(\frac{d}{dt}|_{t_\circ}\Big)(f) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t_\circ}(f \circ c) \\ &= (f \circ c)'(t_\circ) \ \text{یا}\ \frac{d(f(c(t)))}{dt}\Big|_{t_\circ} \end{aligned}$$

این معادله را به شکل جمع و جور زیر می‌توان نوشت:

$$df(\frac{dc}{dt}) = \frac{d(f(c(t)))}{dt}$$

اگر (x,U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه هر یک از dx^i ها یک برش از T^*M روی U هستند. با اعمال این تعریف، ملاحظه می‌کنیم که

$$dx^i(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big)=\delta^i_j$$

بنابراین، $dx^1(p)$، . . . و $dx^n(p)$ پایه‌ای برای T^*_pM تشکیل می‌دهند که دوگان پایهٔ $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p$، . . . و $\frac{\partial}{\partial^n}\Big|_p$ برای T_pM می‌باشد. این بدان معنی است که هر برش ω را به صورتی یکتا بر U به صورت

$$\omega(p)=\sum_{i=1}^n\omega_i(p)dx^i(p)$$

می‌توان نوشت، که ω_i ها توابعی بخصوص بر U هستند. برش ω وقتی و تنها وقتی پیوسته است که همهٔ توابع ω^i پیوسته باشند. حکم مشابهی برای C^∞ داریم. همچنین، اگر جمع برشها و ضرب تابع در برش را به شکل بدیهی تعریف کنیم (یعنی، جمع و ضرب اسکالر نقطه به نقطه) می‌توانیم بنویسیم

$$\omega=\sum_{i=1}^n\omega_i dx^i$$

برش df نیز باید چنین نمایش داشته باشد. در واقع، فرمول کلاسیک مشروح در زیر را ادامه داریم:

۱.۲.۴ قضیه. اگر (x,U) دستگاهی مختصاتی و f تابعی هموار باشد، آنگاه بر U داریم

$$df=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

اثبات: اگر $X_p\in M_p$ به شکل $X_p=\sum_{i=1}^n a^i\partial/\partial x^i|_p$ باشد، آنگاه $a^i=X_p(x^i)=dx^i(p)(X_p)$. بنابراین

$$df(p)(X_p)=X_p(f)=\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i(p)(X_p)$$

و برهان تمام است. $\square$

۳.۴ معادل کلاسیک برای اصطلاحات نوین

متخصصان هندسه دیفرانسیل کلاسیک (و یا آنالیزدانان کلاسیک) ذز استفاده از اصطلاح تغییر بینهایت کوچک sx^i مختصات x^i آنگونه که لایبنیتز گفته، تردیدی نمی‌کنند. کسی نمی‌خواهد بگوید که این اصطلاح بی معنی است، چرا که احکام درستی از تقسیم این کمیاب بینهایت کوچک (البته به شرطی که درست بکار آیند) بدست می آید. عملاً روشن شده بود که نزدیک راه برای توصیف تغییر بینهایت کوچک، مشخص کردن جهتی است که این تغییر در آن راستا صورت می‌پذیرد؛ یعنی، بردار مماس.

چون فرض می‌شود df میزان تغغیرات بینهایت کوچک f نسبت به یک تغییر بینهایت کوچک در متغیرش است، پس باید df تابعی از این تغییر باشد، که این به معنی این است که df تابعی از بردارهای مماس می‌باشد. بنابراین خود dx^i ها به صورت تابع مسخ می‌شوند، و لذا روشن است که آنها را باید از بردارهای مماس $\partial/\partial x^i$ تمیز داد. چنانچه این ثوصیفات را بپذیریم، موضوع تعریف جدید، عملاً به معنی ایجاد تطابق بین اصطلاحات قدیم و جدید است. کوتاه سخن اینکه، همهٔ مفاهیم کلاسیک که در آنها از کمیات بینهایت کوچک بهره گرفته می‌شود، قابل بیان به صورت توابه بربردارهای مماس هستند، نظیر df، مگر آنهایی که به صورت خارج قسمت بینهایت کوچکها مطرح می‌شوند، که به صورت بردارهای مماس تعبیر می‌گردد، نظیر dc/dt.

چنانچه کتب کلاسیک را ورق بزنیم و آنها را از دیدگاه جدید بررسی کنیم، عملاً خواهیم دید که اغلب دیدگاهی جدید کمی و یا قسمتی در کارهای هندسه دانان قدیمی نهفته است. فی‌المثل، مفهوم دیفرانسیل df را به دو صورت کلاسیک و مدرن در جدول کرده‌ایم؛

صورت کلاسیک	صورت نوین
گیریم f تابعی از $x^1,\cdots,x^n$ مانند $f = f(x^{-1},\cdots x^n)$ است.	گیریم f تابعی بر M و x دستگاهی مختصاتی بر M است (بنابراین، به ازاء تابعی $\bar f$ بر $\mathbb{R}^n$، یعنی $\bar f = f\circ x^{-1}$ داریم $f = \bar f\circ x$).

صورت کلاسیک

گیریم x^i ها توابعی از t مانند $\mathrm{h}x^i = x^i(t)$اند. در این صورت f تابعی از t می‌شود: $f(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$. اکنون داریم

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

(نمادگذاری ای که در آن c در نظر گرفته نمی‌شود، هنوز هم مورد استفادهٔ فیزیک‌دانان است.)

صورت نوین

گیریم $c:\mathbb{R}\to M$ یک منحنی است. در این صورت $f\circ c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، که

$$(f\circ c)(t) = f(x^1\circ c(t), \cdots, x^n\circ c(t))$$

به این ترتیب، داریم

$$(f\circ c)'(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i\bar{f}(x(c(t))).(x^i\circ c)'(t)$$
$$= \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)).(x^i\circ c)'(t)$$

یا

$$\frac{d(f(c(t)))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)).\frac{dx^i(c(t))}{dt}$$

صورت کلاسیک

با ضرب در dt، داریم

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

(فایدهٔ این نمادگذاری در آن است که با تقسیم طرفین به dt) باز هم یک حکم درست نتیجه می‌شود، و به چگونگی توابع $x^i(t)$ بستگی ندارد. این ساده‌ترین روش برای توصیف این مطلب است که df تابعی از بردارهای مماس است.

صورت نوین

نتیجتاً

$$df\left(\frac{dc}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(c(t)) \bullet dx^i\left(\frac{dc}{dt}\right)$$

چون هر بردار مماس در $c(t)$ به شکل $\frac{dc}{dt}$ است. بنابراین

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i$$

بعداً، در مرحله‌ای که به آماده سازی مقدمات لازم برای مطالعهٔ کارگیری گاوس و نیز ریمان مبادرت می‌کنیم، بطور پیوسته همهٔ آنچه را که قبلاً ساخته‌ایم به صورت کلاسیک ترجمه می‌کنیم. در این بین مشاهده می‌گردد که این کار کمی مشکلند از ترجمهٔ اصل مقاله که زبان آلمانی است، می‌باشد،

یادآور می‌شویم که اگر $f : M \to N$ هموار باشد، آنگاه به ازاء هر $p\in M$ ای

یک نگاشت خطی به شکل $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ و در مجموع یک نگاشت به شکل $f_* : TM \to TN$ داریم، چون $f_{*p} : T_pM \Rightarrow T_{f(p)}N$ نگاشتی خطی بین فضاهای برداری است، نگاشتی به شکل $T_{f(p)}N^* \to T_pM^*$ قابل ساخت است که آنرا با نماد f_{*p}^* نشان می‌دهیم، ولی بهتر است آنرا به شکل ساده‌تر

$$f_p^* : T_{f(p)}^*N \to T_p^*M$$

نشان دهیم. توجه شود که از تجمع نگاشتهای f_p^*، نگاشت کلانی از T^*N به T^*M بدست نمی‌آید؛ در واقع، امکان دارو یک $q \in N$ ای به ازاء بیش از یک $p_i \in M$ به شکل $f(pi)$ باشد، و هیچ دلیلی وجود ندارد که $(f_*)_{px}$ و $(f_*)_{pz}$ یکی باشند. از سوی دیگر، با کلاف کتانژانت کاری می‌توان کرد که با کلاف مماس ممکن نیست فرض کنیم ω برشی از T^*N است. در این صورت، برشی η از T^*M به صورت زیر می‌توان تعریف نمود:

$$\eta(p) := \omega(f(p)) \circ f_{*p}$$

به عبارت دیگر

$$\eta(p)(X_p) = \omega(f(p))(f_{*p}X_p) \qquad (X_p \in T_pM)$$

(این نمادگذاری پیچیده، ایدهٔ ساده‌ای دارد: برای اینکه η بر برداری تأثیر کند، باید آن بردار را توسط f_* به N منتقل کرد و سپس ω را روی آن تاثیر داد.) برش اخیر η را با نماد $f^*\omega$ نشان می‌دهیم.

با این حال، هیچ روش مشابهی برای منتقل کردن میدان برداری X بر M به میدان برداری بر N وجود ندارد.

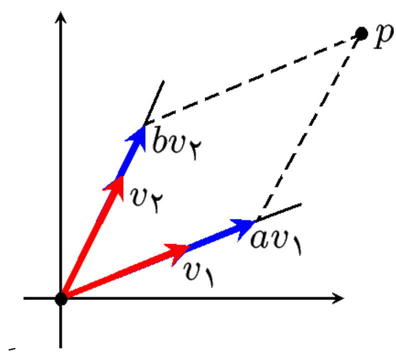
با توجه به تعاریف مذکور، در کل می‌توان گفت که هر نگاشت $f : M \to N$ نگاشتی f_* با f بین کلافهای مماس و نگاشتی f^* با جهت مخالف بین کلافهای کتانژانت تولید می‌کند. امروز به نگاشتهایی که همجهت هستند کواریان و آنهایی که با جهت عکس هستند را کنتراواریان می‌نامند. اطلاعاتی کلاسیک وجود دارد که تا حدودی بر عکس اصطلاح ما است: میدان برداری را کیدان برداری کنتراواریان و برشهای T_M^* را میدان برداری کواریان می‌نامند. با این حال معلوم نسیت چطور این اصطلاح درگذر زمان بر عکس شده است براحتی به خاطر سپرد که نوع میدانهای برداری کواریان است، و نوع کنتراوایان آنهایی است که از نظر منطقی با جهت بر عکس هستند.

منطق وضح این اصطلاح کلاسیک را با در نظر گرفتن دستگاههایی مختصاتی خطی x بر $\mathbb{R}^n$ که تبدیلات خطی‌اند، می‌توان توضیح داد، در این حالت، اگر $x(v_i) = e_i$،

آنگاه

$$x(a^1 v_1 + \cdots + a^n v_n) = (a^1, \cdots, a^n)$$

و لذا دستگاهی مختصاتی x چیزی جز یک دستگاه مختصات دکارتی اریب نیست. اگر x' دستگاهی مختصاتی دیگری باشد آنگاه $x'^j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x^i$ به ازاء $a_{ij} \in \mathbb{R}$ هایی بخصوص.



شکل ۱.۴

به وضوح $a_{ij} = \partial x'^j / \partial x^i$، و بنابراین

$$x'^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} x^i \qquad (1.4)$$

این مطالب را مستقیماً از این مطلب که ماتریس $(\partial x'^j / \partial x^i)$ ثابت است و با $D(x' \circ x^{-1})$ یکسان می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت. با مقایسهٔ (؟؟) و فرمول

$$dx'^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i} dx^i \qquad (2.4)$$

از قضیه ۱، ملاحظه می‌کنیم که دیفرانسیلهای dx^i درست به همان صورتی تغییر می‌کنند که x^i تغییر می‌کنند و بر این اساس آنها را کواریان می‌نامیدند. نتیجتاً، هر ترکیب به شکل

$$\omega'_j = \sum_{i=1}^n \omega i \frac{\partial x^i}{\partial x'_j}$$

از طرف دیگر، اگر دو عبارت همسان برای یک میدان برداری داشته باشیم

$$X = \sum_{i=1}^{n} ai \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} a'^i \frac{\partial}{\partial x' i}$$

آنگاه توابع a'^j در رابطهٔ

$$a'^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial x' j}{\partial x^i}$$

صدق می‌کنند. میدانهای برداری کواریان و کنتراواریان، به عبارت دیگر، برشهای بترتیب TM و T^*M را تانسور (میدان تانسوری) کواریان و کنتراواریان از مرتبهٔ یک نیز می‌نامند. برای فهم این اصطلاح به کمی جبر نیاز است.

۴.۴ توابع چند خطی

اگر V_1، . . . و V_m فضای برداری باشند. تابع $T : V_1 \times \cdots \times V_m \to \mathbb{R}$ را در صورتی چند خطی گوئیم که به ازاء هر انتخاب v_1، v_{k-1}، v_{k+1}، . . . و v_m ای نگاشت $v \to T(v_1, \cdots, v_{k-1}, v, v_{k+1} \cdots v_m)$ خطی باشد. به وضوح، مجموعهٔ همهٔ چنین T هایی، فضای برداری است. اگر $V_1, \cdots, V_m = V$، این فضای برداری را با نماد $\mathcal{T}^m(V)$ نشان می‌دهیم. توجه شود که $\mathcal{T}^1(V) = V^*$. اگر $f : V \to W$ تبدیلی خطی باشد. در این صورت، تبدیلی خطی $f^* : \mathcal{T}^m(W) \to \mathcal{T}^m(V)$ وجود دارد که کاملاً شبیه حالت $m = 1$ قابل تعریف است:

$$f^*T(v_1, \cdots, v_m) = T(f(v_1), \cdots, f(v_m))$$

اگر $T \in \mathcal{T}^k(V)$ و $S \in \mathcal{T}^l(V)$، آنگاه حاصلضرب تانسوری $T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ را

$$T \oplus S(v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, v_{k+\ell}) = T(v_1, \cdots, v_k).S(v_{k+1}, \cdots, u_{k+\ell})$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که $S \oplus T$ و $T \oplus S$ متفاوتند. از سوی دیگر $(S \oplus T) \oplus U = S \oplus (T \oplus U)$ و لذا امکان تعریف حاصلضربهای تانسوری $n-$تایی وجود دارد. این ضرب تانسوری بطور خودکار، چند خطی است، زیرا مثلاً $(S_1 + S_2) \oplus T = S_1 \oplus T + S_2 \oplus T$ و ... به ویژه، اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V و $\{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$ پایهٔ دوگان برای $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ باشد، آنگاه عناصر

$$v_{i_1}^* \oplus \cdots \oplus v_{i_k}^* \quad 1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n$$

به وضوح، پایه‌ای برای $\mathcal{T}^k(V)$ تشکیل می‌دهند. و لذا بعد این فضا n^k است.

از این ساخت جبری جدید می‌توان استفاده نمود و از هر کلاف برداری $\xi = \pi : E \to B$، کلاف برداری جدیدی را تولید نمود. فرض کنیم

$$E' = \bigcup_{p\in B} \mathcal{T}^k(\pi^{-1}(p))$$

و $\pi' : E' \to B$ کل فضای $\mathcal{T}^k(\pi^{-1}(p))$ را به p بنگارد. اگر $U \subseteq B$ و $t : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ بدیهی سازی برای ξ باشد. در این صورت ایزومورفیسمهای $t_p : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$ باعث تعریف ایزومورفیسمهای

$$(t_p^*)^{-1} : \mathcal{T}^k(\pi^{-1}(p)) \to \{p\} \times \mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n)$$

می‌شوند. اگر ایزومورفیسم $\mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{nk}$ را یک بار برای همیشه انتخاب کنیم، از تجع نگاشتهای $(t_p^*)^{-1}$ به نگاشتی به شکل $t' : \pi'^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{nk}$ می‌رسیم. با در نظر گرفتن همهٔ جنین t' هایی به عنوان بدیهی سازی موضعی $\pi' : E' \to B$، به یک کلاف برداری $\mathcal{T}^k(\xi)$ دست می‌یابیم. کلاف ξ^* حالت خاص $k = 1$ است.

۵.۴ تانسور کواریان و کنترا واریان

در حالتی که $\xi = TM$، کلاف $\mathcal{T}^k(TM)$ را کلاف تانسورهای کواریان از مرتبهٔ k می‌نامیم، و برشهای آن را میدان تانسوری کواریان مرتبهٔ k ام می‌نامیم. اگر (x, U) دستگاهی مختصاتی باشد، آنگاه

$$dx^1(p), \cdots, dx^n(p)$$

پایه‌ای برای $(M_p)^*$ است و حاصلضربهای تانسوری k–تایی

$$dx^{i_1}(p) \oplus \cdots \oplus dx^{i_k}(p) \in \mathcal{T}^k(T_pM) \quad 1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq n$$

پایه‌ای برای $\mathcal{T}^k(T_pM)$ تشکیل می‌دهند. در نتیجه، هر میدان تانسوری کواریان A از مرتبهٔ k ام بر $\cup$ را به صورت

$$A(p) = \sum_{i_1, \cdots, i_k} A_{i_1, \cdots i_k}(p) dx^{i_1}(p) \oplus \cdots \oplus dx^{i_k}(p) \qquad (p \in U)$$

و یا به شکل ساده‌تر، به صورت

$$A=\sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i_1,\cdots i_k} \quad dx^{i_1}\oplus\cdots\oplus dx^{i_k}$$

می‌توان نوشت، که در عبارت اخیر $dx^{i_1}\oplus\cdots\oplus dx^{i_k}$ برشی از $\mathcal{T}^k(TM)$ است. همچنین، اگر

$$A=\sum_{i_1,\cdots,i_k} A'_{i_1,\cdots i_k} dx'^{i_1}\oplus\cdots\oplus dx'^{i_k}$$

آنگاه

$$A'_{\alpha_1,\cdots\alpha_k}=\sum_{i_1,\cdots,i_k} A_{i,\cdots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x'^{\alpha_k}}$$

در این مجموع، حاصلضربی از توابع معمولی ظاهر شده است. برای اثبات آن کافی است از عبارت (۲.۴) در صفحهٔ ۱۰۱ و خواص $\oplus$ استفاده شود.) برش A پیوسته یا هموار است اگر و فقط اگر کلیهٔ تواتبع $A_{i_1,\cdots,i_k}$ پیوسته یا هموار باشند.

هر میدان تانسوری کواریان A از مرتبهٔ k ام را به صورت عملگری $\bar{A}$ بر k میدان برداری $X_k,\cdots,X_k$ می‌توان در نظر گرفت، که تابع به شکل

$$\bar{A}(X_1,\cdots,X_k)(p)=A(p)(X_1(p),\cdots,X_k(p))$$

را تولید می‌کند: $\bar{A}:\mathcal{X}(M)^k\to c^\infty(M,\mathbb{R})$. توجه شود که $\bar{A}$ بر مجموعهٔ $k-$تایی‌های از میدانهای برداری هموار $\mathcal{X}(M)^k$، چند خطی است؛ به این معنی که

$$\begin{aligned}\bar{A}(X_1,\cdots,X_i+X'_i,\cdots,X_k)&=\\&=\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k)+\bar{A}(X_1,\cdots,X'_i,\cdots,X_K)\\\bar{A}(X_1,\cdots,aX_i,\cdots,X_k)&=a\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_k)\end{aligned}$$

بعلاوه، چون $\bar{A}$ نقطه به نقطه تعریف می‌شود، عملاً با ضرایب از توابع هموار $\mathcal{F}$ خطی است. یعنی، اگر f هموار باشد، در این صورت

$$\bar{A}(X_1,\cdots,fX_i,\cdots X_k)=f\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots X_k)$$

زیرا، به ازاء هر p ای

$$\begin{aligned}\bar{A}(X_1,\cdots,fX_i,\cdots,X_k)(p)&=A(p)(X_1(p),\cdots,f(p)X_i(p),\cdots X_k(p))\\&=f(p)A(p)(X_1(p),\cdots,X_i(p),\cdots,X_k(p))\\&=f(p).\bar{A}(X_1,\cdots,X_i,\cdots X_k)(p)\end{aligned}$$

بالاخره، آمادهٔ طرح قضه‌ای دیگر هستیم، که بعداً به دفعات موزد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.۵.۴ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{V}=\mathcal{X}(M)$ و $\mathcal{F}=C^\infty(M,\mathbb{R})$. اگر $\mathcal{A}:\mathcal{V}\times\cdots\times\mathcal{V}\to\mathcal{F}$ تابعی $\mathcal{F}-$خطی باشد، آنگاه میدان برداری منحصر بفرد A ای وجود دارد که $\mathcal{A}=\bar{A}$.

اثبات: ابتدا توجه کنید که اگر $v\in T_pM$ یک بردار مماس دلخواه باشد، آنگاه میدان برداری $X\in\mathcal{V}$ ای وجود دارد که $X(p)=v$. در واقع، اگر (x,U) دستگاهی مختصاتی باشد و $v=\sum_{i=1}^n a^i\partial/\partial^i|_p$، آنگاه می‌توانیم تعریف کنیم

$$X=\begin{cases} f\displaystyle\sum_{i=1}^n a^i\frac{\partial}{\partial x^i} & \text{بر } U\\ 0 & \text{در خارج } U\end{cases}$$

که هر یک از a^i ها تابعی ثابت در نظر گرفته شوند، و f تابعی هموار با $f(p)=1$ و $\mathrm{Supp}(f)\subseteq U$ است. حال اگر $v_1,\cdots v_k\in T_pM$ به میدانهای برداری $X_1,\cdots,X_k\in TM$ توسیع یابند، آنگاه روشن است که کافی است تعریف کنیم

$$A(p)(v_1,\cdots,v_k):=A(X_1,\cdots,X_k)(p)$$

اکنون تنها مساله ممکن، اثبات خوشتعریفی A است: اگر به ازاء هر i ای $X_i(p)=Y_i(p)$، ادعا می‌کنیم که

$$\mathcal{A}(X_1,\cdots,X_k)(p)=\mathcal{A}(Y_1,\cdots,Y_k)(p)$$

برای سادگی حالت $k=1$ را در نظر می‌گیریم (حالت کلی کاملاً مشابه است). این جکم که از $X(p)=Y(p)$ نتیجه می‌شود $\mathcal{A}(X)(p)=\mathcal{A}(y)(p)$ را دو مرحله ثابت می‌کنیم.

(۱) ابتدا فرض کنیم X و Y در یک همسایگی از p برابرند. گیریم f تابعی هموار با $f(p)$ و $\mathrm{Supp}(f)\subseteq U$ در این صورت $fX=fY$ و بنابراین

$$f\mathcal{A}(X)=\mathcal{A}(fX)=\mathcal{A}(fY)=f\mathcal{A}(Y)$$

که اگر در p مقداریابی شود، داریم $\mathcal{A}(X)(p)=\mathcal{A}(Y)(p)$.

(۲) روشن است که برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم که اگر $X(p)=0$ آنگاه $\mathcal{A}(X)(p)=0$. گیریم (x,U) دستگاهی مختصاتی گرد p است، و لذا در همسایگی

U می‌توانیم بنویسیم $X = \sum_{i=1}^{n} b^i \partial/\partial x^i$ که همهٔ $b^i(p)$ ها صفرند. اگر g در یک همسایگی از p مانند V برابر یک باشد و $\mathrm{Supp}(g) \subseteq U$، آنگاه

$$Y = g \sum_{n}^{i=1} b^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} b^i g \frac{\partial}{\partial x^i}$$

میدانی برداری است که بر کل M تعریف شده، هموار است و بر V با X برابر است. در نتیجه بنا به قسمت (۱) داریم $\mathcal{A}(X)(p) = A(y)(p)$. اکنون چون $b^i(p) = 0$، داریم

$$\mathcal{A}(Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} b^i(p) \bullet \mathcal{A}(g \frac{\partial}{\partial x^i})(p) = 0$$

و لذا حکم ثابت شد. □

نظر به قضیهٔ ۲، عملاً بین میدان برداری تانسوری A و عملگر $\bar{A}$ تفاوتی قایل نمی‌شویم، و از نماد $\bar{A}$ اصلاً استفاده نمی‌کنیم.

توجه کنید که قضیهٔ ۲ در حالت خاص $k = 1$ قابل عمل است. یعنی در مورد کلاف کتانژانت $T^1(TM) = T^*M$: هر تابعی $\mathcal{X}(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ که $C^\infty(M, \mathbb{R})-$خطی باشد، از یک میدان برداری کواریان ω حاصل شده است. درست شبیه میدانهای برداری کواریان، هر نگاشت هموار $f : M \to N$ نگاشتی f^* را القاء می‌کند که میدانهای تانسوری کواریان A مرتبهٔ k ام بر N را به میدانهای تانسوری کواریان f^*A مرتبهٔ k ام بر M تبدیل می‌کند:

$$f^*A(p)(X_{1p}, \cdots, X_{kp}) := A(f(p))(f_*X_{1p}, \cdots, f_*X_{kp})$$

بعلاوه، اگر A و B میدانهای تانسوری از مرتبهٔ بترتیب k و ℓ باشد، آنگاه میدان تانسوری کواریان جدید $A \oplus B$ از مرتبهٔ $k + \ell$ می‌توانیم تعریف کنیم: $(A \oplus B)(p) := A(p) \oplus B(p)$ که بر $(T_pM)^{k+\ell}$ عمل کند.

با اینکه میدانهای تانسوری کواریان عملاً همهٔ نیازهای ما را فراهم می‌سازد، تنها به خاطر تکمیل طرح کلی بحث میدانهای تانسوری کنتراواریان را نیز تعریف می‌کنیم. یادآور می‌شویم که هر میدان برداری کنتراواریان، برشی X از TM است. پس به ازاء هر p ای $X_p \in T_pM$. حال هر عضو v از فضای برداری دلخواه V را به عنوان نگاشتنی خطی $v : V^* \to \mathbb{R}$ می‌توان در نظر گرفت، کافی است $v(\lambda)$ را به صورت $\lambda(v)$ تعریف کنیم. میدان تانسوری کنتراواریان مرتبهٔ k ام دقیقاً عبارت است از برشی از کلاف $T^k(T^*M)$. بنابراین، هر $A(p)$ یک تابع $k-$ خطی بر T_pM^* است. اگر از

$\mathcal{T}_k(V)$ برای مجموعهٔ همهٔ توابع $k-$خطی بر V^* استفاده کنیم، از نماد $\mathcal{T}_k(TM)$ بجای $\mathcal{T}^k(T^*M)$ می‌توان استفاده کرد. دذ مختصات موضعی می‌توان نوشت

$$A(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A^{j_1,\cdots j_k}(p)\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \oplus\cdots\oplus \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p$$

(خاطر نشان می‌کنیم که $\partial/\partial x^i|_p$ بر T_pM^* عمل کند)، یا بطور خلاصه

$$A(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A^{j_1,\cdots j_k}(p)\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \oplus\cdots\oplus \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p$$

اگر عبارت دیگری، برای A داشته باشیم

$$A(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A'^{j_1,\cdots j_k}(p)\frac{\partial}{\partial x'^{j_1}}\Big|_p \oplus\cdots \frac{\partial}{\partial x'^{j_k}}\Big|_p$$

در این صورت به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$A'^{\beta_1\cdots\beta_k}(p) = \sum_{j_1,\cdots,j_k} A^{j_1,\cdots j_k}\frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \oplus\cdots\oplus \frac{\partial x'^{\beta_k}}{\partial x^{j_k}}$$

هر میدان برداری تانسوری کنتراواریان A مرتبهٔ k را به صورت عملگر $\bar{A}$ می‌توان در نظر گرفت که بر k تا میدان برداری کواریان $\omega_1,\cdots,\omega_k$ عمل کند و تابعی را نتیجه می‌دهد:

$$\bar{A}(\omega_1,\cdots,\omega_k)(p) = A(p)(\omega_1(p),\cdots,\omega_k(p))$$

بطور طبیعی، قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۲ وجود دارد، که به همان طریق نیز اثبات می‌گردد، و بر اساس آن استفاده از نماد $\bar{A}$ مجاز است؛ و به این ترتیب هر میدان تانسوری کنتراواریان از مرتبهٔ k را با عملگری بر k میدان برداری کواریان می‌توان یکی گرفت، که بر مدول توابع هموار $\mathcal{F}$ خطی است.

۶.۴ تانسور مرکب و انقباض