

به دست می آید

$$v_t = \frac{mg}{c_1} = \frac{0.52 \times 10^{-9} \times 9.8}{1.55 \times 10^{-8}} \text{ m/s} = 0.33 \text{ m/s}$$

که زمان مشخصه عبارت است از

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{0.33 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.034 \text{ s}$$

درمورد توپ بسکتبال ضریب مقاومت پس کشی عبارت است از:

$$c_2 = 0.22 D^2 = 0.22 \times (0.25)^2 = 0.0138 \text{ N s}^2/\text{m}^2$$

به این شرح خواهد بود

$$v_t = \left(\frac{mg}{c_2} \right)^{1/2} = \left(\frac{0.6 \times 9.8}{0.0138} \right)^{1/2} \text{ m/s} = 2.06 \text{ m/s}$$

و زمان مشخصه عبارت است از

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{2.06 \text{ m/s}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.21 \text{ s}$$

بنابراین قطره باران در مدتی کمتر از یک ثانیه پس از لحظه شروع به سقوط از حالت سکون، عملاً به سرعت نهایی خود می رسد، در صورتی که توپ بسکتبال برای اینکه به یک درصد سرعت نهایی خود برسد، چندین ثانیه طول می کشد.^۱

مسائل

۱.۳ سرعت $\dot{x}$ و مکان x را به صورت تابعی از زمان t برای ذره ای به جرم m ، که از حالت سکون در $x=0$ و $t=0$ شروع به حرکت می کند بیابید. این ذره تحت تأثیر تابع نیروهای زیر است

$$F_x = F_0 + ct \quad (\text{الف})$$

$$F_x = F_0 \sin ct \quad (\text{ب})$$

$$F_x = F_0 e^{ct} \quad (\text{ج})$$

که F_0 و c ثابتهای مثبتی اند.

۲.۳ سرعت $\dot{x}$ را به صورت تابعی از جا به جایی، x ، ذره ای به جرم m که از حال سکون در $x=0$ شروع به حرکت می کند، و تابع نیروهای زیر بر آن وارد می آیند، بیابید

۱. برای اطلاع بیشتر درباره مقاومت پس کشی آئرو دینامیکی، مقاله زیر

G. Frohlich in *Am.J. Phys.*, 52, 325 (1984)

و مراجع مفصل ذکر شده در آنجا را ببینید.

الف) $F_x = F_0 + cx$

ب) $F_x = F_0 e^{-cx}$

ج) $F_x = F_0 \cos cx$

که F_0 و c ثابتهای مثبتی اند.

۳.۴ تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ را برای هر نیرو در مسئله ۲.۲ به دست آورید.

۴.۴ معلوم شده است که سرعت یک ذره در حرکت راستخط طبق معادله

$$\dot{x} = bx^{-3}$$

بر حسب جابه جایی x تغییر می کند، که b ثابتی مثبت است؛ نیروی وارد بر هر ذره را

به صورت تابعی از x به دست آورید (دانه مایی: $F = m\ddot{x} = m\dot{x} d\dot{x}/dx$).

۵.۴ با نشان دادن آنکه x به ازای مقادیر بزرگ t به طور نامتناهی بزرگ می شود، جزء آخر مثال ۸.۲ را کامل کنید.

۶.۴ اتومبیلی به جرم m ابتدا در حالت سکون است. در زمان $t = 0$ یک نیروی محرک

ثابت F_0 به سمت جلو بر آن وارد می آید. بعد از گذشت زمان t_1 ، ناگهان نیرو دو برابر

می شود و به مقدار $2F_0$ می رسد و بعداً در همین مقدار ثابت باقی می ماند. نشان دهید که کل

مسافت پیموده شده در مدت زمان $t = 2t_1$ عبارت است از $(5/2)F_0 t_1^2/m$.

۷.۴ مسئله بالا را برای حالتی که از $t = t_1$ تا $t = 2t_1$ نیرو همان مقدار ثابت F_0 را داشته

ولی بعد به جای اینکه دو برابر شود، به طور خطی با زمان افزایش یابد (آهنگ افزایش

شتاب ثابت باشد) به نحوی که در زمان $t = 2t_1$ مقدار نیرو $2F_0$ شود، حل کنید. در این

حالت نشان دهید که کل مسافت پیموده شده در زمان $t = 2t_1$ برابر $(13/6)F_0 t_1^2/m$ است.

۸.۴ قطعه چوبی با سرعت اولیه v_0 به بالاسوی یک سطح شیبدار پرتاب می شود. اگر زاویه

شیب سطح 30° و ضریب اصطکاک لغزشی $\mu = 0.1$ باشد، زمان کل برای مراجعت این

قطعه چوب به نقطه پرتاب را بیابید.

۹.۴ یک قطعه فلز به جرم m روی سطح افقی که باروغن غلیظی آغشته شده می لغزد، به طریقی

که براین قطعه فلز در هنگام حرکت مقاومت چسبنده ای وارد می آید، که به صورت زیر

با توان سه دوم سرعت تغییر می کند

$$F(v) = -cv^{3/2}$$

اگر سرعت اولیه قطعه فلز در $x = 0$ برابر v_0 باشد، نشان دهید که این قطعه نمی تواند

فاصله ای بیش از $2mv_0^{1/2}/c$ را پیماید.

۱۰.۴ تفنگی مستقیماً به طرف بالا شلیک می شود. با فرض آنکه مقاومت پس کشی هوا

بر علیه گلوله به صورت توان دوم سرعت تغییر کند، نشان دهید که تغییرات سرعت با ارتفاع

طبق معادلات زیر صورت می گیرد

$$v^2 = Ae^{-2kx} - \frac{g}{k} \quad (\text{حرکت بالاسو})$$

$$v^2 = \frac{g}{k} - Be^{2kx} \quad (\text{حرکت پایین سو})$$

که در آن A و B ثابتهای انتگرال گیری اند، g شتاب گرانی است، و $k = c_2/m$ که c_2 ضریب مقاومت پس کشی و m جرم گلوله است. (یادآوری: x به بالاسو مثبت اندازه گیری می شود، و نیروی گرانشی را ثابت می گیریم.)

۱۱.۲ با بهره گیری از نتایج بالا، نشان دهید که وقتی گلوله هنگام مراجعت با زمین برخورد می کند، سرعت آن عبارت است از

$$\frac{v_0 v_i}{(v_0^2 + v_i^2)^{1/2}}$$

که در آن v_0 سرعت اولیه بالاسو است و

$$v_i = (mg/c_2)^{1/2} = (g/k)^{1/2} = \text{سرعت نهایی}$$

(با این نتیجه امکان پیدا می کنیم که کسری از انرژی جنبشی اولیه را که در هوا به صورت اصطکاک تلف می شود، بیاوریم.)

۱۲.۲ ذره ای به جرم m در فاصله b از یک مبدأ ثابت نیرو از حالت سکون رها می شود؛ این نیرو ذره را بر طبق قانون عکس مجذور جذب می کند

$$F(x) = -kx^{-2}$$

نشان دهید که زمان لازم برای آنکه ذره به مبدأ برسد، عبارت است از

$$\pi \left(\frac{mb^3}{8k} \right)^{1/2}$$

۱۳.۲ نشان دهید که سرعت نهایی جسمی که در حال سقوط باشد، از رابطه زیر به دست می آید

$$v_i = [(mg/c_2) + (c_1/2c_2)^2]^{1/2} - (c_1/2c_2)$$

در صورتی که جمله های خطی و درجه دوم هر دو در نیروی پس کشی منظور شده باشند.

۱۴.۲ با بهره گیری از نتیجه بالا سرعت نهایی یک حباب صابون به جرم 10^{-7} kg و قطر 10^{-2} m را محاسبه کنید. این مقدار را با مقداری مقایسه کنید که از به کار بردن معادله (۲۹.۲) به دست می آید.

۱۵.۲ فرض کنید: نیروی وارد بر یک ذره عبارت است از حاصلضرب تابعی از مسافت و تابعی از سرعت $F(x, v) = f(x)g(v)$. نشان دهید که معادله دیفرانسیل حرکت را می توان به کمک انتگرال گیری حل کرد. اگر نیرو عبارت باشد از حاصلضرب تابعی از

مسافت و تابعی از زمان، آیا می توان معادله حرکت را از طریق انتگرال گیری ساده حل کرد؟ آیا می توان معادله را حل کرد هرگاه نیرو حاصلضرب تابعی از زمان و تابعی از سرعت باشد؟

۱۶.۲ نیروی وارد بر ذره ای به جرم m از رابطه زیر به دست می آید

$$F = kvx$$

که در آن k ثابت مثبت است. این ذره با سرعت v_0 در زمان $t = 0$ از مبدأ می گذرد. x را به صورت تابعی از t به دست آورید.