

دانشگاه سیستان و بلوچستان
دانشکده مهندسی - گروه مهندسی شیمی

جزوه درس کنترل فرایند ۱

دکتر جعفر صادقی

بهار ۱۳۸۸

هر گونه کپی برداری ممنوع است

کنترل فرایند ۱

تعداد واحد: ۳

نوع واحد: نظری

پیشنیاز: عملیات واحد ۱ و یا همزمان

سرفصل درس

یادآوری تبدیل لاپلاس، عکس تبدیل لاپلاس، خواص تبدیل‌ها، نمایش سیستم با تابع تبدیل و نمودار جعبه‌ای، نمونه سیستم‌های درجه اول، خطی کردن، سیستم‌های درجه اول بصورت سری، سیستم‌های درجه دوم، تأخیر انتقالی، مشخصه‌های پاسخ بر حسب زمان، اجزاء یک سیستم کنترل با مدار پسخور، مکانیزم کنترل کننده‌ها، شیر کنترل، تابع تبدیل حلقه بسته، مشخصه‌های پاسخ گذرا، بررسی پایداری به روش روث (*Routh*)، بررسی سیستم‌های کنترل به روش مکان هندسی ریشه‌ها، مشخصه‌های پاسخ فرکانسی به روش *Bode* در بررسی و طرح سیستم‌های کنترل، بررسی پایداری به روش نایکوئیست.

گزیده مراجع:

- ۱- کاک ناور و کاپل، «کنترل فرایندها»، ترجمه ایرج گودرزینیا، چاپ هفتم، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۵.
- ۲- منوچهر نیک آذر، «مبانی کنترل فرایند در مهندسی شیمی»، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۶.
- ۳- مهدی رفیع زاده، «دینامیک و کنترل فرایندها»، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۸.
- ۴- استفانوپولوس، «کنترل فرایندهای شیمیایی»، ترجمه ایرج ناصر، انتشارات نص، ۱۳۸۱.
- ۵- اوگاتا، «مهندسی کنترل»، ترجمه قدرت الله سپیدنام، انتشارات باغانی، ۱۳۸۷.
- ۶- لویین، «مدلسازی، شبیه سازی و کنترل فرایندها در مهندسی شیمی»، ترجمه محمدتقی صادقی، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۵.

میان ترم:

ارزش: ۳۵٪ نمره نهایی، تا انتهای فصل پنجم جزوه حاضر و یا معادل آن از کتب مرجع
زمان: دو هفته پس از اتمام سرفصل مربوطه.

پایان ترم:

ارزش: ۵۵٪ نمره نهایی، مباحث باقیمانده از سرفصل مصوب.
تکالیف کلاسی: ۱۰٪ نمره نهایی.

حضور کلیه دانشجویان در کلیه کلاسها اجباری است.

مسئولیت عدم حضور بموقع در کلاس متوجه شخص دانشجو خواهد بود.



۱ مقدمه

امروزه سیستم‌های کنترل خودکار چنان با زندگی ما عجین شده‌اند که در بسیاری از موارد، وجود آن را در یک وسیله برتری به حساب آورده و برایش هزینه بیشتری می‌پردازیم. این سیستم‌ها تنوع بسیار گسترده‌ای دارند: از سادگی و پیش پا افتادگی یک فلاش تانک توالی تا پیچیدگی انژکتور الکترونیکی یک خودرو. بعنوان نمونه، در خودروهای سواری حداقل به تعداد بیش از انگشتان یک دست سیستم کنترل کامپیوتری (ریزپردازنده) وجود دارد که برای ما و از طرف ما واردی از موتور گرفته تا جابجایی، جذب شوک و تکان‌های شدید، ترمزها، انتشار آلاینده‌ها، درجه حرارت و ... را کنترل می‌کنند. علاوه بر این، در هر وسیله الکترونیکی حتما یک ریزپردازنده برای کنترل فعالیت آن می‌توان یافت.

کنترل‌کننده‌ها در کارخانه‌های فراوری و فرایندی نیز نقش بسیار مهمی در عملکرد و پایداری واحدهای مختلف آن دارند از مواردی ساده مثل پر شدن یک تانک تا فرایندهای پیچیده جداسازی و راکتورهای شیمیایی. بعنوان نمونه بیوراکتور شکل ۱-۱ را در نظر بگیرید:

برای اینکه مشخص شود که بیوراکتور در وضعیت مناسبی کار می‌کند موارد زیر باید به دقت تحت کنترل قرار گیرند:

- دما، pH، اکسیژن محلول، ارتفاع مایع، دبی خوراک و سرعت همزن؛
- Biomass و غلظت مواد شیمیایی خاص در مایع و یا گاز؛
- ارتفاع کف درون راکتور بجهت مطمئن بودن از اینکه زیاد نباشد؛
- دبی و فشار بخار مراحل استریلیزه کردن.

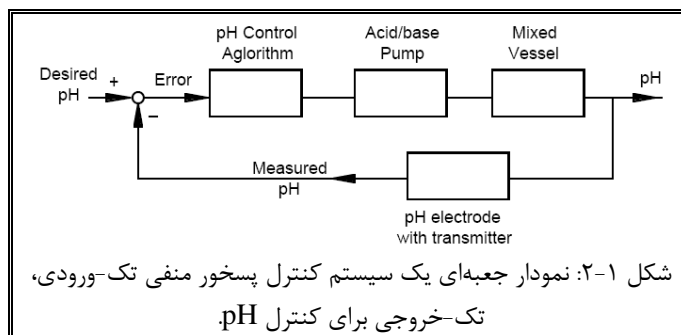
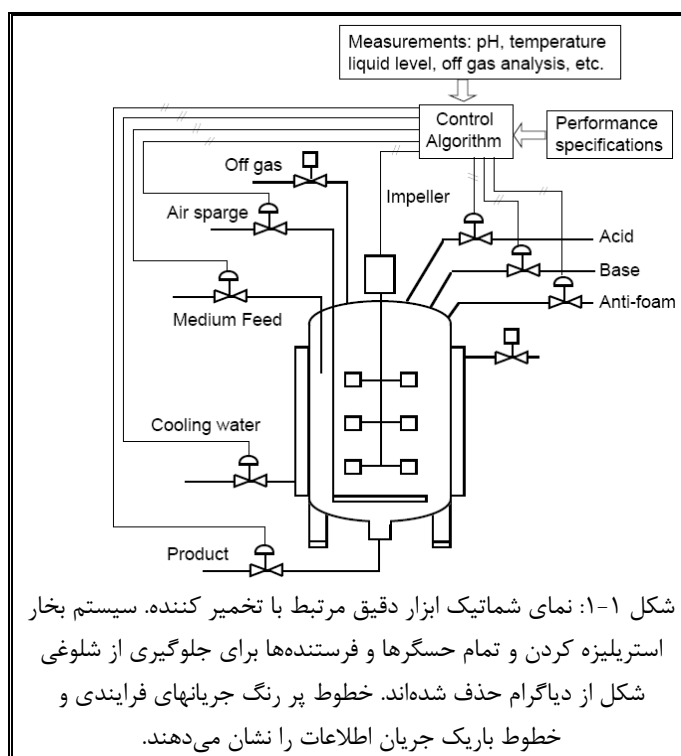
توجه شود که دیاگرام شکل ۱-۱ بسیار ناقص می‌باشد زیرا اگر تمامی اطلاعات لازم برای کنترل به آن اضافه گردد ممکن است دیگر در دیاگرام فرایند بیوراکتور قابل تشخیص و شناسایی نباشد.

بدنبال نشان دادن چهره ترسناکی از کنترل و ترساندن شما نیستیم ولی این همان موضوعی است که کنترل را مهیج کرده و به یک چالش تبدیل می‌کند.

برای آنکه همه مشخصات مربوط به محصولات (کمیت‌ها) دارای مقدار مشخصی بوده و محصولات دارای کیفیت مناسبی باشند، باید اطمینان حاصل شود که بیوراکتور در شرایط مطلوب کار می‌کند. برای روشن شدن مطلب، pH راکتور را در نظر بگیرید. در مباحث محاسباتی علم کنترل جهت شفاف سازی بهتر مسئله از نمودار جعبه‌ای^۱ همانند شکل ۱-۲ استفاده می‌شود. ما در آینده یاد خواهیم گرفت که چگونه از ریاضیات برای توصیف بلوک‌ها استفاده کنیم (پس عجله نکنید لطفا). در حال حاضر ما بیشتر روی اصطلاحات معمول در کنترل تکیه می‌کنیم.

چنانچه pH بعنوان متغیر کنترل شونده^۲ در نظر گرفته

شود، یک الکترو^۳ pH برای اندازه‌گیری مقدار آن و یک فرستنده^۳ جهت ارسال این مقدار به کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرد. این کنترل‌کننده می‌تواند یک جعبه سیاه (دستگاهی که از درون آن بی اطلاع هستیم) و یا یک کامپیوتر باشد. کنترل‌کننده مقدار متغیر کنترل شونده (pH) را گرفته و با مقدار مطلوب که مقدار مقرر^۴ و یا مرجع^۵ نامیده می‌شود مقایسه می‌نماید. اگر این مقادیر





مساوی نباشند بدین معناست که در سیستم کنترل خطا^۶ وجود دارد و کنترل کننده باید تنظیمات مناسبی را با تغییر محرک^۷ (دبی پمپ اسید و باز) اعمال کند. این تنظیمات بر مبنای محاسباتی انجام می‌گیرد که به آنها الگوریتم کنترل^۸ و یا ساده‌تر قوانین کنترل می‌گویند. مقدار خطا در نقطه جمع کننده^۹ از تفاضل مقدار مقرر (مقدار مطلوب pH) و مقدار اندازه‌گیری شده (مقدار pH اندازه‌گیری شده) بدست می‌آید. بدلیل نحوه محاسبه خطا، این مکانیزم کنترل مکانیزم پسخور منفی^{۱۰} نامیده می‌شود.

این سناریوی ساده کنترل pH، همان سیستم کنترل تک-ورودی، تک-خروجی^{۱۱} (SISO) می‌باشد؛ ورودی به این سیستم مقدار مطلوب pH و خروجی آن مقدار pH راکتور است. این مکانیزم ساده کنترل، حلقه بسته^{۱۲} نامیده می‌شود. سیستم کنترل تک حلقه این حقیقت که دینامیک بیوراکتور شامل روابط پیچیده بین متغیرهای مختلف است را در نظر نمی‌گیرد. اگر دیدگاهی جامع‌تر مدنظر باشد، باید یک سیستم چند-ورودی، چند-خروجی^{۱۳} (MIMO) یا چند متغیره^{۱۴} در نظر گرفته شود. در تمام مواقعی که از واژه سیستم^{۱۵} استفاده می‌کنیم، منظور مجموعه‌ای است که ما را قادر به کنترل متغیر کنترل شونده (pH) می‌سازد؛ شامل فرایند^{۱۶} (که در اینجا منظور بیوراکتور است)، کنترل کننده^{۱۷}، و دیگر اجزاء ابزار دقیق مثل حسگرها^{۱۸}، فرستنده‌ها، و محرک‌ها (مانند شیرهای کنترل، پمپ‌ها و ...).

هنگام تغییر شرایط عملیاتی، بعنوان مثال شرایط خاص داده شده برای pH بیوراکتور، باید مقدار مقرر برای متغیر مذکور دنبال گردد که همان کنترل سروو^{۱۹} است. pH ممکن است توسط اغتشاشات^{۲۰} خارجی (که بار ناخواسته^{۲۱} نیز نامیده می‌شود) تغییر نماید. به عمل حذف اثرات اغتشاشات روی متغیر کنترل شونده (pH)، مسئله تنظیم^{۲۲} گفته می‌شود. از آنجا که پیاده سازی نامناسب عملیات کنترلی می‌تواند منجر به ناپایداری شود، لذا عجیب نخواهد بود که مهمترین دغدغه در طراحی سیستم کنترل، پایداری^{۲۳} آن باشد. علاوه بر پایداری، سیستم کنترل باید در مقابل تغییرات پارامترهای فرایند مقاوم^{۲۴} هم باشد.

سوالی که پیش می‌آید این است که چه مواردی هنگام طراحی سیستم کنترل لازم است مد نظر باشد. خوب، در اولین قدم لازم است نقش متغیرهای مختلف مشخص شود. مثلاً اینکه قرار است چه چیزی کنترل شود، چه چیزی برای این منظور باید تغییر داده شود، منشأ اغتشاشات کجاست و غیره. پس از آن باید اهداف و مشخصات طراحی بیان گردند. هنگام تبیین و کمی سازی پاسخ مناسب برای سیستم کنترل، بین کنترل سروو و مسئله تنظیم قطعاً تفاوت‌هایی وجود دارد که باید در نظر گرفته شوند. برای رسیدن به این اهداف، انتخاب کنترل کننده و استراتژی مناسب برای کنترل ضروری است. بعلاوه برای بکارگیری استراتژی کنترل، انتخاب حسگر، فرستنده و محرک مناسب نیز لازم است. بعد از انجام همه این مراحل، تنها مسئله باقیمانده نحوه تنظیم کنترل کننده است.

روند طراحی بستگی زیادی به مدل دینامیکی فرایندی دارد که باید کنترل شود. در سیستم‌های پیشرفته‌تر که کنترل بر مبنای مدل^{۲۵} انجام می‌شود، رفتار کنترل کننده کاملاً به مدل بستگی دارد. در شرایطی که مدلی مناسب وجود نداشته باشد، تحلیل بر مبنای مدل تقریبی فرایند انجام خواهد شد که اساس رشته‌ای به نام « تخمین پارامترها و شناسایی سیستم » می‌باشد. بینش و درک فیزیکی بدست آمده هنگام مدلسازی برای حل مسئله کنترل بسیار ارزشمند خواهد بود.

در نظر داشته باشید که در این درس، هنگام بحث در مورد مدلسازی دینامیکی، مباحث مقدماتی معادلات قانون بقای جرم و انرژی و مومنتم تکرار نخواهند شد. تمام فرایندهایی که در بحث کنترل مطرح خواهند شد مثل بیوراکتور، برج تقطیر، جریان داخل یک لوله، تانک گرمکن و غیره، همان فرایندهایی هستند که در دیگر مباحث مهندسی آموزش داده می‌شوند. معادلات مدل شامل موازنه‌های جرم، انرژی و مومنتم می‌باشد. در دستگاه‌های مکانیکی تعادل نیرو و در مهندسی برق، آنالیز شبکه برای این منظور در نظر گرفته می‌شود. تفاوت دیدگاه کنترلی و دیدگاهی که در دیگر دروس قبلاً به آن پرداخته شده است (و توجه نمایید که کاملاً جدید است!)، طبیعت گذرای مسائل کنترل است. از این رو، در معادلات موازنه‌ای (مدل) جملاتی شامل مشتق زمان (انباشتگی) نیز وجود دارد.

سوال بعدی آن است که ابزارهای ریاضی لازم برای استفاده در تحلیل کنترل کدام است. در کنترل کلاسیک تحلیل‌ها بر مبنای معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت - که خطی غیر متغیر با زمان^{۲۶} (LTI) نامیده می‌شود- انجام می‌شود. این مدل‌ها مدل‌های پارامتر-متمرکز^{۲۷} نامیده می‌شوند که در آنها تغییرات فقط نسبت به زمان محاسبه می‌گردد و نه نسبت به مکان. چنانچه در مدلی تغییرات علاوه بر زمان در مکان هم اتفاق بیفتد مدل با معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیان می‌شود که مدل پارامتر-گسترده^{۲۸} نامیده می‌شود. برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مدل، تبدیل لاپلاس^{۲۹} استفاده می‌گردد و با بازآرایی مجدد معادلات جبری حاصله تابع تبدیل^{۳۰} بدست می‌آید. توابع تبدیل بصورت گرافیکی در نمودار جعبه‌ای (همانند شکل ۱-۲) نمایش داده می‌شود. تقریباً در محث کنترل کمتر اتفاق می‌افتد که معادلات در حوزه زمان حل شوند و اکثر تحلیل‌ها بر مبنای ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل مدل - که قطب^{۳۱} نامیده می‌شود- شکل می‌گیرد.



در اینجا لازم است نکته‌ای تذکر داده شود: تحلیل کنترل بخصوص هنگامی که مباحث پایداری و پاسخ فرکانسی مطرح شوند، نیاز به ریاضی بسیار قوی دارد. بهمین دلیل این مباحث در پایان آورده شده‌اند. بدون دانستن ریاضی فهم کنترل بسیار مشکل است و اگر کسی مدعی شود کنترل می‌داند در حالی که ریاضی را خوب نمی‌فهمد، گفتارش بیشتر شبیه یک لطیفه خواهد بود.

در انتها هم ذکر چند مطلب که در مباحث پیشرفته‌تر کنترل معمولاً مطرح است خالی از لطف نیست. فرایندهای خاصی وجود دارند که در آنها امکان جمع آوری داده‌ها بصورت پیوسته وجود نداشته و داده‌ها در بازه‌های زمانی مشخصی بدست می‌آیند (مانند تیتراسیون در مباحث شیمیایی)؛ به این سیستم‌ها، سیستم‌های **نمونه برداری**^{۳۲} گویند. تحلیل و اعمال سیستم کنترل توسط کامپیوتر وارد محدوده جدیدی از مباحث کنترلی می‌گردد که کنترل **گسسته**^{۳۳} یا **دیجیتال**^{۳۴} نامیده می‌شود. تکنیکهای ریاضی در این نوع سیستم‌های کنترل، معادلات اختلافی و **تبدیل**^{۳۵} بوده که بترتیب جایگزین معادلات دیفرانسیل و تبدیل لاپلاس برای تحلیل سیستم‌ها می‌گردد. علاوه بر این، کنترل **چند متغیره**^{۳۶} و **فضای حالت**^{۳۷} بعنوان جایگزین روشهای کنترل کلاسیک بصورت خلاصه در کنترل ۲ بحث خواهد شد. کنترل پیشرفته هم شامل کنترل بهینه^{۳۸}، کنترل غیرخطی^{۳۹}، کنترل تطبیقی^{۴۰}، کنترل تصادفی^{۴۱} و کنترل منطق فازی^{۴۲} می‌باشد، که در مقاطع تحصیلات تکمیلی بیشتر به آنها می‌پردازند. همان طور که می‌بینید برای متبحر و متخصص شدن در کنترل راه زیادی در پیش است و لازم است اعتماد به نفس خود را بهر جهت از دست ندهید. هر چند در نگاه اول به نظر می‌رسد کنترل کلاسیک در دنیای کنترل بسیار پیش پا افتاده باشد، اما این همان دری است که باید از آن وارد شد و آرام آرام خزش به سمت کنترل پیشرفته را آغاز کرد (یادتان باشد که همیشه کارهای بزرگ با قدمهای اولیه کوچک آغاز می‌شوند!).



-
- ¹ Block Diagram
 - ² Controlled Variable
 - ³ Transmitter
 - ⁴ Set-Point
 - ⁵ Reference
 - ⁶ Error
 - ⁷ Actuator
 - ⁸ Control Algorithm
 - ⁹ Summing Point
 - ¹⁰ Negative Feedback
 - ¹¹ Single-Input Single-Output
 - ¹² Closed-loop
 - ¹³ Multi-Input Multi-Output
 - ¹⁴ Multivariable
 - ¹⁵ System
 - ¹⁶ Process or Plant
 - ¹⁷ Controller
 - ¹⁸ Sensors
 - ¹⁹ Servo
 - ²⁰ Disturbances
 - ²¹ Loads
 - ²² Regulatory
 - ²³ Stability
 - ²⁴ Robust
 - ²⁵ Model-based
 - ²⁶ Linear Time Invariant
 - ²⁷ Lumped-Parameters
 - ²⁸ Distributed-Parameters
 - ²⁹ Laplace Transform
 - ³⁰ Transfer Function
 - ³¹ Pole
 - ³² Sampled-data
 - ³³ Discrete-Time
 - ³⁴ Digital
 - ³⁵ z-Transform
 - ³⁶ Multivariable
 - ³⁷ State Space
 - ³⁸ Optimal Control
 - ³⁹ Nonlinear Control
 - ⁴⁰ Adaptive Control
 - ⁴¹ Stochastic Control
 - ⁴² Fuzzy Logic Control



۲ مقدمات ریاضی

کنترل کلاسیک فرایند بر مبنای معادلات دیفرانسیل معمولی و تکنیک تبدیل لاپلاس بنا نهاده می‌شود. تبدیل لاپلاس بدون شک در درس معادلات دیفرانسیل بررسی شده‌است ولی یادآوری آن خالی از لطف نیست چرا که عدم استفاده از این روشها براحتی باعث فراموشی آنها می‌شود. در اینجا فقط مباحثی یادآوری خواهد شد که برای حل مسائل کنترل نیاز است و از بقیه مراحل و روشهای ذکر شده در درس معادلات صرف نظر می‌شود. برای آن دسته از مباحث مورد نیاز که گفتن آنها اولویت این درس نیست به کتب مرجع و جزوات اساتید مربوطه مراجعه کنید.

عمده مباحث این فصل:

- خواص تبدیل لاپلاس و تبدیل چند تابع معمول مورد استفاده در کنترل. برای انجام **تبدیل معکوس**^۱ به جدول تبدیل لاپلاس این توابع نیاز است.
- برای استفاده از جدول تبدیل لاپلاس برای تبدیل معکوس، لازم است که توابع تبدیل به عوامل کوچکتر که در جدول تبدیل لاپلاس وجود دارد شکسته شود. به این عوامل **کسرهای جزئی**^۲ گفته می‌شود. تابع معکوس در حوزه زمان مجموع تبدیل معکوس تمامی عوامل بدست آمده خواهد بود زیرا تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی می‌باشد.
- مشخصات پاسخ زمانی یک مدل از روی **قطب**^۳های آن - که همان ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه هستند - بدست می‌آید. این مشخصات از ورودی مستقل بوده و بعنوان نکته‌ای کلیدی قبل از ورود به تحلیل کنترل باید مد نظر قرار گیرد.
- بعد از مبحث تبدیل لاپلاس، یک معادله دیفرانسیل متشکل از متغیرهای انحرافی بعنوان یک مدل ورودی - خروجی بوسیله **تابع تبدیل**^۴ نشان داده خواهد شد. ارتباط علی بین توابع تبدیل بوسیله **نمودار جعبه‌ای** نمایش داده می‌شود.
- علاوه بر توابع تبدیل، بطور گسترده‌ای از بهره حالت یکنواخت و ثابت زمانی در تحلیل‌ها استفاده خواهد شد.
- از آنجا که تبدیل لاپلاس فقط برای سیستم‌های خطی کاربرد دارد، **خطی سازی**^۵ معادلات غیر خطی قبل از ادامه تحلیل کنترل ضروری است. رویه خطی سازی بر مبنای استفاده از بسط تیلور مرتبه اول توابع می‌باشد.

۱-۲ یک مدل معادله دیفرانسیل ساده

ابتدا دلیل حل معادلات دیفرانسیل (آنطور که در تحلیل کنترل منحصر استفاده می‌گردد) گفته می‌شود. برای شروع بحث، موازنه جرم در یک تانک کاملاً مخلوط که با معادله‌ای بصورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$\tau \frac{dC}{dt} = C_{in} - C, \quad C(0) = C_0$$

که در آن C غلظت یک جزء در تانک، C_{in} غلظت آن جزء در جریان ورودی، C_0 غلظت اولیه آن جزء، و τ زمان پر شدن تانک می‌باشد. در مسائل کنترل کلاسیک، این معادله بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau \frac{dC}{dt} + C = C_{in} \quad (1-2)$$

علاوه بر این، با تعریف **متغیرهای انحرافی**^۶ $\bar{C} = C - C_0$ و $\bar{C}_{in} = C_{in} - C_0$ (که مقدار انحراف از مقادیر اولیه در $t = 0$ را نشان می‌دهند):



$$\tau \frac{d\bar{C}}{dt} + \bar{C} = \bar{C}_{in} \quad , \quad \bar{C}(0) = 0 \quad (2-2)$$

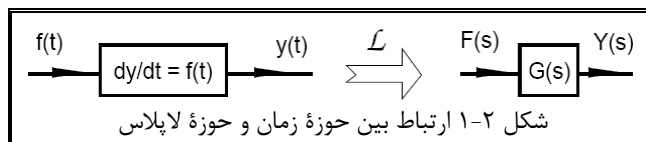
دقت کنید که این معادله دارای مقدار اولیه صفر است. حل این معادله در حوزه زمان بصورت زیر است:

$$\bar{C}(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t \bar{C}_{in}(z) e^{-(t-z)/\tau} dz \quad (3-2)$$

اگر \bar{C}_{in} صفر باشد، جواب این معادله جواب بدیهی $\bar{C} = 0$ خواهد بود. از معادله (۲-۲) براحتی این جواب قابل حصول است. برای وضعیتی که بخواهیم \bar{C} غیر صفر باشد و یا C از شرایط اولیه C_0 منحرف گردد، \bar{C}_{in} باید غیر صفر و یا عبارت دیگر C_{in} باید متفاوت از C_0 باشد. سمت راست معادله (۲-۲)، در واژه‌نامه معادلات دیفرانسیل، تابع محرک و در واژه‌نامه کنترلی ورودی نامیده می‌شود. مقدار \bar{C}_{in} نه تنها غیر صفر است بلکه در بسیاری از موارد تابعی از زمان است که بصورت $\bar{C}_{in} = \bar{C}_{in}(t)$ نوشته می‌شود. سواى تأثیر پذیری \bar{C} از \bar{C}_{in} ، ترم نمایی در (۳-۲) که از سمت چپ معادله (۲-۲) بدست می‌آید، باعث تابعیت \bar{C} از زمان است. در حقیقت، همانطور که می‌دانید، از سمت چپ معادله (۲-۲)، معادله مشخصه (یا چند جمله‌ای مشخصه) بدست می‌آید. بارها استفاده از معادله مشخصه در این درس تکرار خواهد شد لذا اگر با این مفاهیم مشکل دارید نگران نباشید چرا که در آینده بیشتر به این موضوع خواهیم پرداخت. استفاده از این مثال فقط جهت شروع بحث است. در درس معادلات دیفرانسیل یاد گرفته‌ایم که یک معادله دیفرانسیل خطی را به یک معادله جبری در حوزه لاپلاس تبدیل کرده، بر حسب متغیر تبدیل شده، s ، حل کرده و سرانجام با تبدیل معکوس حل حوزه زمان را بدست آوریم.

در کنترل کلاسیک، تبدیل لاپلاس بطور وسیع در تحلیل دینامیک سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. نکته کلیدی در این تحلیل پیشگویی پاسخ زمانی بدون استفاده از تبدیل معکوس است. خواهیم دید که مشخصات پاسخ به ریشه‌های معادله مشخصه بستگی دارد. این حقیقت مبنای تحلیل‌های کنترل کلاسیک است. بنابر این مرور تبدیل لاپلاس برای فهم بهتر کنترل مفید خواهد بود. هدف این بخش، متبحر شدن در آن دسته از تکنیک‌های ریاضی است که ما را قادر سازد از آنها در تحلیل مسائل کنترل استفاده کنیم.

۲-۲ تبدیل لاپلاس



در ابتدا چند مورد از استفاده‌های تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل بررسی می‌شود (شکل ۱-۲). می‌دانیم که پس از فرمول بندی مدل بصورت یک معادله دیفرانسیل خطی یا خطی شده، $dy/dt = f(t)$ ، می‌توان آنرا برای بدست

آوردن $y(t)$ حل کرد. بعنوان جایگزین، می‌توان معادله دیفرانسیل را تبدیل به یک مسئله جبری کرده (که بصورت $G(s)$ در حوزه لاپلاس تعریف می‌شود) و سپس برای $Y(s)$ حل کرد. پس از آن، حل حوزه زمان $y(t)$ با استفاده از تبدیل معکوس بدست می‌آید که بندرت در تحلیل کنترل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آنچه قابل بحث (و البته درست) است این است که تابع حوزه لاپلاس $Y(s)$ باید همان اطلاعات $y(t)$ را داشته باشد. مشابه تابع $G(s)$ اطلاعات دینامیکی مشابه تابع دیفرانسیل اولیه دارد. اگر شرایط اولیه صفر باشند، تابع $G(s)$ به شکلی ساده بیان خواهد شد. این یکی از دلایلی است که در مسائل کنترل از متغیرهای انحرافی استفاده می‌شود. اکنون آماده‌ایم که تعاریفی را مرور کنیم. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4-2)$$

که در آن s متغیر تبدیل است. جهت تکمیل تعریف، تبدیل معکوس بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (5-2)$$



\mathcal{L} طوری تعریف می‌شود که انتگرال داده شده همگرا شود. اما در مباحث کنترل به هیچ عنوان از این تعریف برای تبدیل معکوس استفاده نمی‌شود. روش معکوس گیری کاملاً ساده است. از آنجا که هر تابعی تبدیل منحصر بفردی دارد و تناظر یک به یک بین تابع و تبدیل لاپلاس آن وجود دارد، جدولی از تبدیل لاپلاس توابع شناخته شده ساخته می‌شود و از این جدول برای تبدیل معکوس نیز استفاده می‌گردد.

یک خاصیت مهم تبدیل لاپلاس خطی بودن آن است که آثار همه ترمها با هم جمع می‌شود (اصل بر هم نهی):

$$L\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aL\{f_1(t)\} + bL\{f_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (6-2)$$

نکته:

دلیل بسیار مهمی که موجب می‌شود از روش تجزیه کسرها و استفاده از جدول تبدیل لاپلاس بتوان برای تبدیل معکوس استفاده کرد، خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس است. علاوه بر این همان دلیلی است که می‌توان سیستم‌های پیچیده‌تر خطی را تحلیل نمود. گرچه با کلمات نمی‌توان این خاصیت را بصورت صریح بیان کرد، در کنترل کلاسیک قویاً به آن اعتماد می‌کنند.

در اینجا تبدیل لاپلاس چند تابع معمول - که در مسائل کنترل متناوباً استفاده می‌شود - بررسی خواهد شد. همه توابع محتمل بررسی نخواهند شد چرا که می‌توان در صورت لزوم آنها را در کتب مرجع یافت. اگر تبدیل لاپلاس توابع زیر بدون استفاده از جدول تبدیل لاپلاس بدست آمده و برای مواردی نظیر کسرهای جزئی و خطی سازی یک تابع استفاده شوند، برای درک آنها بسیار مفید خواهد بود.

۱- تابع ثابت

$$f(t) = a \rightarrow F(s) = \frac{a}{s} \quad (7-2)$$

اثبات:

$$L\{a\} = a \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{a}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{a}{s} [0 - 1] = \frac{a}{s}$$

۲- تابع شیب

$$f(t) = at, \quad a = \text{const.}, \quad t \geq 0 \rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2} \quad (8-2)$$

اثبات:

$$L\{at\} = a \int_0^{\infty} te^{-st} dt = a \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] = \frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{a}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{s^2}$$

۳- تابع نمایی

$$f(t) = e^{-at}, \quad a > 0, \quad t \geq 0 \rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a} \quad (9-2)$$

اثبات:

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$



۴- توابع سینوسی

$$f(t) = \sin \omega t \rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (10-2)$$

$$f(t) = \cos \omega t \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (11-2)$$

اثبات:

$$L\{e^{j\omega t}\} = \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt = -\frac{1}{s-j\omega} e^{-(s-j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L\{e^{j\omega t}\} = L\{\cos \omega t + j \sin \omega t\} = L\{\cos \omega t\} + jL\{\sin \omega t\}$$

$$\rightarrow L\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

۵- توابع با کاهش نمایی (انتقال تبدیل)

$$L\{f(t)\} = F(s) \rightarrow L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a), \quad a > 0, \quad t \geq 0 \quad (12-2)$$

اثبات:

$$L\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $e^{-at} \sin \omega t$ را بدست آورید.

حل:

$$\left. \begin{aligned} f(t) = \sin \omega t &\rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ L\{e^{-at} f(t)\} &= F(s+a) \end{aligned} \right\} \rightarrow L\{e^{-at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

۶- مشتقات توابع

$$L\{f(t)\} = F(s) \rightarrow L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \quad (13-2)$$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (14-2)$$

اثبات: استفاده از انتگرال جزء به جزء

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0) + sF(s)$$

$$L\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = L\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right\} = sL\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} - f^{(1)}(0) = s[sF(s) - f(0)] - f^{(1)}(0)$$

$$L\left\{\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right\} = s^2 F(s) - s f(0) - f^{(1)}(0)$$

با ادامه روند فرمول (۱۴-۲) بدست می آید.



۷- انتگرال تابع

$$L\{f(t)\} = F(s) \rightarrow L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad (15-2)$$

اثبات:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow f(t) = \frac{dg(t)}{dt} \rightarrow F(s) = sL\{g(t)\} - g(0)$$

$$g(0) = 0 \rightarrow L\{g(t)\} = \frac{1}{s} F(s) \rightarrow L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

۸- مشتقات تبدیل

$$F(s) = L\{f(t)\} \rightarrow -\frac{dF(s)}{ds} = L\{tf(t)\} \quad (16-2)$$

$$F(s) = L\{f(t)\} \rightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = L\{t^n f(t)\} \quad (17-2)$$

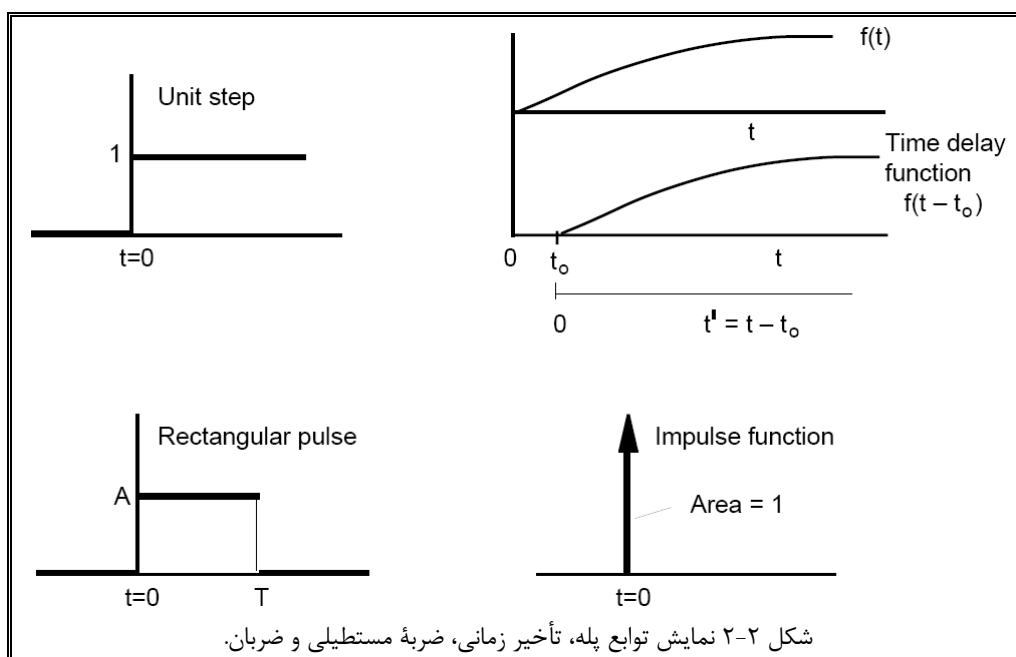
اثبات:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \left[\frac{d}{ds} e^{-st} \right] dt = \int_0^\infty f(t) [-te^{-st}] dt = -\int_0^\infty [tf(t)] e^{-st} dt = -L\{tf(t)\}$$

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \left[\frac{d^n}{ds^n} e^{-st} \right] dt = \int_0^\infty f(t) [(-t)^n e^{-st}] dt = (-1)^n \int_0^\infty [t^n f(t)] e^{-st} dt$$

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n L\{t^n f(t)\}$$

۲-۳ تبدیل لاپلاس توابع معمول در کنترل



در این مبحث تبدیل لاپلاس توابع پله^۷، تأخیر زمانی^۸، ضربه مستطیلی^۹ و ضربان^{۱۰} (شکل ۲-۲) را بدست می‌آوریم.



۱- تابع پله

$$f(t) = Au(t) \rightarrow F(s) = \frac{A}{s} \quad (18-2)$$

ابتدا لازم است تابع پله واحد و تبدیل لاپلاس آن بدست آید:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$L\{u(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

با استفاده از نتایج پله واحد، تبدیل لاپلاس هر تابع پله ای بدست می آید.

$$f(t) = Au(t) \rightarrow L\{f(t)\} = AL\{u(t)\} = \frac{A}{s}$$

تبدیل لاپلاس یک تابع پله با تبدیل لاپلاس عدد ثابت (۷-۲) برابر است. هنگام گرفتن تبدیل معکوس از $\frac{A}{s}$ در مباحث کنترلی از تابع پله استفاده می شود.

۲- تابع تأخیر زمانی

$$L\{f(t)\} = F(s) \rightarrow L\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} F(s) \quad (19-2)$$

اثبات: به این تابع همچنین زمان مرده، تأخیر انتقالی، انتقال تابع و یا تابع جابجا شده گفته می شود. این تابع به گونه ای تعریف می شود که تابع اولیه $f(t)$ به اندازه t_0 در زمان منتقل می شود و مستقل از اینکه $f(t)$ چه باشد مقدار تابع تأخیر برای $t < t_0$ صفر قرار داده می شود. تابع تأخیر را می توان بفرم زیر نیز نوشت:

$$f(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ f(t-t_0) & t > t_0 \end{cases} = f(t-t_0)u(t-t_0)$$

شکل جدید که در سمت راست معرفی شده است نمایش بهتری برای تابع $f(t-t_0)$ است که در $t < t_0$ صفر است. با گرفتن تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt$$

و نهایتاً با تغییر متغیر $t' = t - t_0$:

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t')e^{-s(t_0+t')} dt' = e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(t')e^{-st'} dt' = e^{-st_0} F(s)$$

۳- تابع ضربه مستطیلی

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \rightarrow F(s) = \frac{A}{s}(1 - e^{-sT}) \quad (20-2)$$

اثبات: با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = A \int_0^T e^{-st} dt = -\frac{A}{s} e^{-st} \Big|_0^T = \frac{A}{s} [1 - e^{-sT}]$$

و یا با استفاده از این حقیقت که یک تابع ضربه مستطیلی را می توان از تفریق یک تابع پله با تأخیر انتقالی T از یک تابع پله بدست آورد:



$$L\{f(t)\} = L\{Au(t) - Au(t-T)\} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s} e^{-sT} = \frac{A}{s} [1 - e^{-sT}]$$

مساحت زیر منحنی این ضربه مستطیلی برابر است با:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = A \int_{0^+}^{T^-} dt = At \Big|_0^T = AT$$

۴- تابع ضربان

$$L\{\delta(t)\} = 1, \quad L\{A\delta(t)\} = A \quad (21-2)$$

اثبات: قبل از بدست آوردن تبدیل لاپلاس این تابع لازم است تبدیل لاپلاس یک ضربه مستطیلی که سطح زیر منحنی آن برابر واحد است را بدست آوریم. گفتیم که برای یک ضربه مستطیلی $S = AT$ و چنانچه بخواهیم $S = 1$ پس باید $A = 1/T$ و در نتیجه:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \rightarrow F(s) = \frac{1}{sT} (1 - e^{-sT})$$

چنانچه حد این تابع را وقتی $T \rightarrow 0$ میل کند را بیابیم خواهیم داشت:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} f_1(t) \rightarrow L\{\delta(t)\} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{sT} [1 - e^{-sT}] = 1$$

این تابع، تابع دیراک^{۱۱} (یا ساده تر دلتا) نامیده می شود. اگر یک سطل مایع سریعاً در یک تانک بزرگ ریخته شود تابع مربوطه دلتا خواهد بود. سطح زیر منحنی این تابع برابر واحد است و بنابر این می توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

علاوه بر این، تابع دلتا دارای خاصیت انتگرالی مفیدی است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (22-2)$$

۴-۲ قضایای مقدار اولیه و نهایی

در اینجا دو قضیه را مطرح می کنیم که در صورت داشتن تبدیل لاپلاس هر تابعی، بدون نیاز به معکوس گیری می توان مقادیر حدی آن تابع در $t = 0$ و $t \rightarrow \infty$ را بدست آورد. در مباحث کنترل، قضیه مقدار نهایی خیلی مورد استفاده است در حالی که از قضیه مقدار اولیه کمتر استفاده می شود. این بدان دلیل است که در اکثر مسائل کنترل بدلیل استفاده از متغیرهای انحرافی، مقادیر اولیه توابع پاسخ اکثراً برابر صفر است.

قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] = f(0) \quad (23-2)$$

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (24-2)$$

قضیه مقدار نهایی در صورتی قابل اعمال است که این مقدار وجود داشته باشد. اثبات این قضایا بسیار ساده است. تعریف تبدیل لاپلاس مشتق تابع را در نظر بگیرید.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \left[\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = f(t) \Big|_0^{\infty} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \right] - f(0)$$



$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \left[\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right] dt = 0$$

از طرفی $L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$ ، بنابر این:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] - f(0) = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \right] - f(0) \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] - f(0) = 0 \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] = f(0)$$

مثال ۲-۱: تبدیل لاپلاس تابعی بصورت $F(s) = \frac{6(s-2)(s+2)}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$ داده شده است. مقدار نهایی این تابع چقدر است؟

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{6(s-2)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{6(-2)(2)}{(1)(3)(4)} = -2$$

مثال ۲-۲: اگر تبدیل لاپلاس تابعی $F(s) = \frac{1}{s-2}$ باشد، مقدار نهایی این را بیابید.

همانطور که دیده می شود $f(t) = e^{2t}$. حد نهایی این تابع وجود ندارد بنابر این نمی توان قضیه مقدار نهایی را اعمال نمود. اگر اصرار به استفاده از قضیه مقدار نهایی باشد، مقدار صفر بدست خواهد آمد که کاملاً بی معنی خواهد بود.

مثال ۲-۳: تابع تبدیل $F(s) = \frac{6(s^2-2)}{s(s^3+s^2-4s-4)}$ را در نظر بگیرید. مقدار نهایی $f(t)$ چقدر است؟

یک مسئله غلط انداز دیگر! اگر چشم بسته قضیه مقدار نهایی را استفاده کنید مقدار ۳ بدست می آید اما اساساً بی معنی است!

$$s^3 + s^2 - 4s - 4 = s^2(s+1) - 4(s+1) = (s^2-4)(s+1) = (s+2)(s-2)(s+1)$$

ریشه های این معادله -۲، ۲ و -۱ می باشد. بنابر این $f(t)$ دارای ترم e^{2t} می باشد که با افزایش زمان نامحدود خواهد شد.

در ادامه مبحث یاد خواهیم گرفت که چگونه ترمهای نمایی زمان از ریشه های چند جمله ای مخرج بدست می آید. عجالتاً از این مثال ها می توان دریافت که برای داشتن یک مقدار نهایی با معنی (برای تابع دارای کران محدود) ریشه های مخرج باید دارای قسمت حقیقی منفی باشند. این اصل، مبنای بحث پایداری است که در آینده به آن خواهیم پرداخت.

۲-۵ بسط کسره های جزئی

از آنجا که برای گرفتن تبدیل معکوس از جدول تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم، باید مهارت کاهش توابع پیچیده به توابع موجود در جدول را داشته باشیم. بعبارت دیگر، ما باید قادر باشیم نسبت دو چند جمله ای از s را به کسره های جزئی ساده تر «بشکنیم». چنانچه مرتبه چند جمله ای مخرج، $P(s)$ ، از مرتبه چند جمله ای صورت، $Q(s)$ ، در معادله (۲-۲۵) بالاتر باشد (که در فرایندهای طبیعی صادق است) می توان آن را بفرم زیر نوشت (کسره های جزئی):

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\alpha_1}{s+a_1} + \frac{\alpha_2}{s+a_2} + \dots + \frac{\alpha_i}{s+a_i} + \dots + \frac{\alpha_n}{s+a_n} \quad (2-25)$$

در اینجا چند جمله ای $P(s)$ از درجه n بوده و a_i ها مقادیر ریشه های معادله $P(s) = 0$ هستند. با معکوس گیری خواهیم داشت:



$$L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\alpha_1}{s+a_1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\alpha_2}{s+a_2}\right\} + \dots + L^{-1}\left\{\frac{\alpha_i}{s+a_i}\right\} + \dots + L^{-1}\left\{\frac{\alpha_n}{s+a_n}\right\} \quad (2-26)$$

این روش به دلیل اینکه تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است ما را به جواب مطلوب خواهد رساند. حال سوال این است که چگونه باید کسرهای جزئی معادله (2-25) را بدست آورد؟ یکی از روش‌های معمول که روشی کاملاً صریح جبری است، بسط هوی‌ساید^{۱۲} نامیده می‌شود. سه حالت برای ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج ممکن است اتفاق بیفتد: (۱) ریشه‌های حقیقی و مجزا، (۲) ریشه‌های مزدوج مختلط و (۳) ریشه‌های تکراری (چندگانه). در یک مسئله ممکن است ترکیبی از این حالتها برای ریشه‌ها اتفاق بیفتد. بنابراین این لازم است که هر سه حالت بررسی شود.

۲-۵-۱ حالت اول: $P(s)$ ریشه‌های حقیقی و مجزا دارد:

$$\text{مثال ۲-۴: تابع } f(t) \text{ را بیابید اگر } F(s) = \frac{6(s^2 - 2)}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

از مثال ۲-۳ ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج (مقادیری که بعداً قطب نامیده می‌شوند) عبارتند از -1 ، -2 و 2 . می‌توان $F(s)$ را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{6(s^2 - 2)}{s^3 + s^2 - 4s - 4} = \frac{6(s^2 - 2)}{(s+1)(s+2)(s-2)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+2} + \frac{\alpha_3}{s-2}$$

بسط هوی‌ساید بصورت زیر است. اگر هر دو طرف معادله فوق در $(s+1)$ ضرب شود، خواهیم داشت:

$$\frac{6(s^2 - 2)}{(s+2)(s-2)} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s+2}(s+1) + \frac{\alpha_3}{s-2}(s+1)$$

رابطه فوق باید به ازای تمام مقادیر s برقرار باشد، از جمله به ازای $s = -1$:

$$\left. \frac{6(s^2 - 2)}{(s+2)(s-2)} \right|_{s=-1} = 2 = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s+2}(s+1) + \frac{\alpha_3}{s-2}(s+1) \rightarrow \alpha_1 = 2$$

مشابه می‌توان $F(s)$ را در $(s+2)$ و $(s-2)$ ضرب کرده و نوشت:

$$\alpha_2 = \left. \frac{6(s^2 - 2)}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=2} = 1 \quad \text{و} \quad \alpha_3 = \left. \frac{6(s^2 - 2)}{(s+1)(s-2)} \right|_{s=-2} = 3$$

بنابراین، $F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-2}$ و با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس:

$$f(t) = [2e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{2t}]u(t)$$

می‌توان برای این منظور از کامپیوتر هم استفاده کرد. هنگام استفاده از نرم‌افزار Matlab[®] باید دقت شود که نتایج بخوبی تفسیر شوند. کامپیوتر فقط موقعی خوب است که بدانیم چه می‌خواهیم انجام دهیم. در اینجا فقط دستورات کامپیوتری درج می‌گردند. فقط کافیست فرمان زیر در برنامه Matlab اجرا شود:

[alpha, a, k] = residue([6 0 -12], [1 1 -4 -4])

$$\text{مثال ۲-۵: تابع } f(t) \text{ را بیابید اگر } F(s) = \frac{6s}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

مجدداً، بسط بصورت زیر است:

$$\frac{6s}{(s+1)(s+2)(s-2)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+2} + \frac{\alpha_3}{s-2}$$



یک بار دیگر، برای محاسبه ضرایب هر کسر سمت راست، سمت چپ معادله بالا در مخرج کسر مزبور ضرب شده و مقدار تابع بدست آمده در ریشه مخرج آن کسر، ضرایب صورت را خواهد داد:

$$\alpha_1 = \left. \frac{6s}{(s+2)(s-2)} \right|_{s=-1} = 2, \quad \alpha_2 = \left. \frac{6s}{(s+1)(s-2)} \right|_{s=-2} = -3, \quad \alpha_3 = \left. \frac{6s}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=2} = 1$$

تابع در حوزه زمان عبارتست از:

$$f(t) = [2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{2t}]u(t)$$

در مقایسه با مثال قبل می‌توان گفت که توابع نمایی وابسته به زمان برای هر دو تابع بدست آمده در این مثالها شبیه به هم است. تنها ضرایب (مانده‌ها) با هم متفاوتند.

فرمان نرم‌افزار Matlab بصورت زیر است:

```
[alpha, a, k] = residue([6 0], [1 1 -4 -4])
```

مثال ۲-۶: تابع $f(t)$ را بیابید اگر $F(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

ضرایب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_1 = \left. \frac{6}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = 3, \quad \alpha_2 = \left. \frac{6}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = -6, \quad \alpha_3 = \left. \frac{6}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-3} = 3$$

و در نتیجه:

$$f(t) = [3e^{-t} - 6e^{-2t} + 3e^{-3t}]u(t)$$

جملات e^{-t} و e^{-2t} از e^{-t} سریعتر میرا می‌شوند. e^{-t} و بعبارت دیگر قطب $s = -1$ ماندگارتر است.

این نتایج توسط فرمان‌های Matlab بصورت زیر تایید می‌شوند:

```
p = poly([-1 -2 -3]);
[alpha, a, k] = residue(6, p)
```

نکته:

(۱) تابعیت زمانی حل دامنه زمان بطور کامل به ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج (که از آنها به **قطب‌ها** یاد خواهد

شد) بستگی دارد. چند جمله‌ای صورت فقط روی ضرایب α_i تأثیر دارد. به همین دلیل است که تمامی ارزیابی

کیفی مشخصات پاسخ دینامیکی بطور کامل به قطب‌های چند جمله‌ای مشخصه بستگی دارد.

(۲) قطب‌هایی که به مبدا صفحه مختلط نزدیکترند دارای توابع نمایی متناظری هستند که دیرتر میرا می‌شوند.

این قطب‌ها ماندگارترند.

(۳) تعمیم یافته بسط هوی‌ساید برای بدست آوردن ضرایب α_i بفرم زیر است اما در نظر داشته باشید که

استفاده از آن بسادگی مثال‌هایی است که قبلا حل کردیم:

$$\alpha_i = (s + a_i) \left. \frac{Q(s)}{P(s)} \right|_{s=-a_i} = \left. \frac{Q(s)}{P'(s)} \right|_{s=-a_i}$$

✍️ ۲-۵-۲ حالت دوم: $P(s)$ ریشه‌های مزدوج مختلط دارد:

مثال ۲-۷: تابع $f(t)$ را بیابید اگر $F(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+13}$



ابتدا روشی نه چندان دلچسب را بررسی می‌کنیم که بهتر بتوانیم نتایج حاصل از Matlab را درک کنیم. در حالتی که بخواهیم این معکوس گیری را با دست انجام دهیم روشی که در مثال ۲-۸ شرح داده می‌شود بهتر خواهد بود. ریشه‌های چند جمله‌ای $s^2 + 4s + 13$ برابر است با $z \pm 2 - 3j$ و در نتیجه:

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2 + 4s + 13} = \frac{s+5}{[s - (-2+3j)][s - (-2-3j)]} = \frac{\alpha}{s - (-2+3j)} + \frac{\alpha^*}{s - (-2-3j)}$$

که با اعمال بسط هوی‌ساید می‌توانیم مقدار α را بدست آوریم:

$$\alpha = \frac{s+5}{s - (-2-3j)} \Big|_{s=-2+3j} = \frac{-2+3j+5}{-2+3j - (-2-3j)} = \frac{3(1+j)}{6j} = \frac{1}{2}(1+j)$$

و مزدوج مختلط آن:

$$\alpha^* = \frac{1}{2}(1-j)$$

و تبدیل معکوس آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f(t) = \left[\frac{1}{2}(1-j)e^{(-2+3j)t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{(-2-3j)t} \right] u(t) = e^{-2t} \left[\frac{1}{2}(1-j)e^{j3t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{-j3t} \right] u(t)$$

$$\rightarrow f(t) = e^{-2t} \left[\frac{e^{j3t} + e^{-j3t}}{2} + \frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{2j} \right] u(t) = e^{-2t} [\cos 3t + \sin 3t] u(t)$$

که بصورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$f(t) = \sqrt{2}e^{-2t} \sin(3t + \phi) u(t) \quad , \quad \phi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

فرمان Matlab برای این مثال بدین صورت نگاشته می‌شود:

```
[alpha, a, k] = residue([1 5], [1 4 13])
```

نکته:

- مجدداً، تابعیت زمانی $f(t)$ فقط تحت تأثیر ریشه‌های $P(s)$ قرار دارد. برای یک قطب در حالت عمومی $a \pm jb$ ، تابع حوزه زمان شامل جملات e^{-at} و $(\alpha \cos bt + \beta \sin bt)$ خواهد بود. چند جمله‌ای صورت فقط بر ضرایب ثابت موثر است.
- بندرت از فرم $(\alpha \cos bt + \beta \sin bt)$ استفاده می‌شود. در عوض، از ساختار تأخیر فاز ذکر شده در پایان مثال ۲-۷ استفاده می‌کنند.

مثال ۲-۸: مثال ۲-۷ را با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس بدست آورید.

در عمل برای جفت ریشه‌های مختلط مزدوج کمتر از بسط کسرهای جزئی استفاده می‌گردد. در عوض، با تغییر ساختار چند جمله‌ای $P(s)$ با کامل کردن مربع‌ها می‌توان نوشت:

$$s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 3^2$$

و بنابر این:

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2 + 4s + 13} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2} + \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس:

$$f(t) = [e^{-2t} \cos 3t + e^{-2t} \sin 3t] u(t)$$

که با اندکی تغییرات به نتایج مشابه مثال ۲-۷ می‌انجامد. در مقایسه با کاری که هنگام استفاده از بسط کسرهای جزئی لازم است، این مثال همچنین پیشنهاد می‌کند که ریشه‌های مزدوج مختلط بهتر است بصورت یک جمله مرتبه دوم در نظر گرفته شود.



۲-۵-۳ حالت سوم: $P(s)$ دارای ریشه تکراری است

مثال ۲-۹: تابع $f(t)$ را بیابید اگر $F(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

چند جمله‌ای $P(s)$ دارای ریشه غیر تکراری ۲- و ریشه تکراری ۱- است که سه مرتبه تکرار شده است. برای آنکه صورت کسره‌ای جزئی یک ضریب ثابت باشد، کسره‌های جزئی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2}$$

محاسبه α_4 و α_3 مطابق همان روش ریشه‌های غیر تکراری است:

$$\alpha_3 = \left. \frac{2}{(s+2)} \right|_{s=-1} = 2, \quad \alpha_4 = \left. \frac{2}{(s+1)^2} \right|_{s=-2} = -2$$

مشکل محاسبه α_1 و α_2 است. چنانچه $F(s)$ را در $(s+1)$ یا $(s+1)^2$ ضرب کنیم امکان قرار دادن $s = -1$ وجود ندارد. چنانچه $F(s)$ را در $(s+1)^2$ ضرب شود:

$$(s+1)^2 F(s) = \frac{2}{(s+2)} = \alpha_1(s+1)^2 + \alpha_2(s+1) + \alpha_3 + \frac{\alpha_4}{s+2}(s+1)^2$$

و از دو طرف نسبت به s مشتق بگیریم:

$$\frac{-2}{(s+2)^2} = 2\alpha_1(s+1) + \alpha_2 + 0 + \alpha_4 \Gamma(s)(s+1)^2$$

در مورد مشتق کسر جزئی چهارم (شامل α_4) مطمئن هستیم (؟) که ترم $(s+1)^2$ در آن ضرب خواهد شد که در $s = -1$ مقدار کسر مربوطه صفر خواهد شد. پس با قرار دادن $s = -1$ مقدار $\alpha_2 = -2$ بدست خواهد آمد. برای محاسبه α_1 مجدداً مشتق گیری را ادامه می‌دهیم:

$$\frac{4}{(s+2)^2} = 2\alpha_1 + 0 + 0 + \alpha_4 \Lambda(s)(s+1)$$

که البته مقدار $\alpha_1 = 2$ خواهد بود اگر $s = -1$. پس تجزیه تابع تبدیل بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+2}$$

و معکوس گیری منجر خواهد شد به:

$$f(t) = 2 \left[\left(1 - t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t} + e^{-2t} \right] u(t)$$

این نتایج توسط فرمان‌های Matlab بصورت زیر تایید می‌شوند:

```
p = poly([-1 -1 -1 -2]);
[alpha,a,k] = residue(2,p)
```

نکته:

در حالت کلی، تبدیل معکوس ریشه‌های تکراری بصورت زیر است:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\alpha_1}{s+a} + \frac{\alpha_2}{(s+a)^2} + \frac{\alpha_3}{(s+a)^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s+a)^n} \right\} = \left[\alpha_1 + \alpha_2 t + \frac{\alpha_3}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha_n}{(n-1)!} t^{n-1} \right] e^{-at} u(t)$$

تابع نمایی بر مبنای ریشه $s = -a$ است اما پاسخ واقعی این قطب بدلیل وجود جمله‌ی $(\alpha_n t + \dots)$ کندتر است.



۲-۶ تابع تبدیل، قطب و صفر

حالا که قادر به استفاده از تبدیل لاپلاس هستیم به مثال دینامیکی تانک مخلوط شده می‌پردازیم. تبدیل لاپلاس معادله (۲-۲) با شرایط اولیه صفر $\bar{C}(s) = \bar{C}_{in}(s) / (\tau s + 1)$ است که با تغییر در نحوه نگارش خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{C}(s)}{\bar{C}_{in}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} = G(s) \quad (27-2)$$

سمت راست معادله فوق که بعنوان $G(s)$ معرفی شده است، تابع تبدیل خوانده می‌شود. ارتباط تبدیل لاپلاس خروجی با تبدیل لاپلاس ورودی و یا عبارت دیگر ارتباط خروجی با ورودی را نشان می‌دهد. یاد آوری می‌شود که از متغیرهای انحرافی استفاده گردیده است. ورودی تغییر در غلظت جریان ورودی، $\bar{C}_{in}(t)$ ، و خروجی یا پاسخ، مقدار تغییر غلظت تانک، $\bar{C}(t)$ ، است.

مثال ۲-۱۰: پاسخ حوزه زمان $\bar{C}(t)$ در معادله (۲۷-۲) را بدست آورید چنانچه تغییر غلظت جریان ورودی الف) تابع پله واحد و ب) تابع ضربان باشد.

الف) اگر تغییر پله در غلظت جریان ورودی اتفاق بیفتد، $\bar{C}_{in}(t) = u(t)$ و $\bar{C}_{in}(s) = \frac{1}{s}$ با جایگذاری در (۲۷-۲) خواهیم داشت:

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{-\tau}{\tau s + 1}$$

بعد از گرفتن تبدیل معکوس با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت $\bar{C}(t) = [1 - e^{-t/\tau}]u(t)$. تغییرات غلظت تانک نهایتاً با تغییر غلظت جریان ورودی برابر خواهد شد.

ب) اگر تغییر ضربان در غلظت جریان ورودی اتفاق بیفتد، $\bar{C}_{in}(t) = \delta(t)$ و $\bar{C}_{in}(s) = 1$ با جایگذاری در (۲۷-۲) خواهیم داشت:

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

و پاسخ زمانی غلظت تانک برابر $\bar{C}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$ خواهد بود. اثر ضربان نهایتاً میرا شده و حذف خواهد شد.

در نظر داشته باشید که نتایج این مثال می‌تواند از حل حوزه زمان گفته شده در معادله (۳-۲) نیز بدست آید.

نکته کلیدی در این مثال این است که صرف نظر از ورودی، حل حوزه زمان شامل تابع $e^{-t/\tau}$ است که وابسته به ریشه چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل است.

خواص دینامیکی اصلی و ذاتی یک مدل در چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل نهفته است. عبارت بهتر، رفتار دینامیکی به ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه مرتبط است. در معادله (۲۷-۲)، معادله مشخصه $\tau s + 1 = 0$ است که ریشه آن $-1/\tau$ است. این بدان معنی است که بدون دانستن $\bar{C}_{in}(t)$ و بدون حل واقعی $\bar{C}(t)$ ، می‌توان استنباط نمود که $\bar{C}(t)$ باید شامل $e^{-t/\tau}$ باشد. به ریشه $-1/\tau$ قطب تابع تبدیل $G(s)$ گفته می‌شود.

اجازه دهید مسئله را اکنون کلی‌تر بررسی کنیم. برای یک معادله دیفرانسیل معمولی

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \quad (28-2)$$

با $n > m$ و شرایط اولیه صفر ($y^{(n)} = y^{(n-1)} = \dots = y^{(1)} = y = 0$) در $t = 0$ ، تابع تبدیل بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (29-2)$$



در حالت کلی تابع تبدیل بصورت نسبت دو چند جمله‌ای از s نوشته می‌شود. هنگام صحبت از مشخصات ریاضی، این چند جمله‌ای‌ها بصورت $P(s)$ و $Q(s)$ نوشته می‌شوند در حالی که هنگام تمرکز بر مسائل کنترل و یا توابع تبدیل از $Y(s)$ و $X(s)$ (خروجی و ورودی) استفاده می‌شود. در فرایندهای واقعی، مرتبه چند جمله‌ای‌ها بصورت $m < n$ است.

می‌دانیم که $G(s)$ حاوی همان اطلاعاتی از رفتار دینامیکی مدل است که توسط معادلات دیفرانسیل نشان داده می‌شود. همچنین می‌دانیم که مخرج $G(s)$ همان چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل است. ریشه‌های معادله مشخصه، $P(s) = 0$ ، که با p_1, p_2, \dots, p_n نمایش داده می‌شوند، قطب‌های $G(s)$ هستند. وقتی که قطب‌ها حقیقی و منفی باشند می‌توان از نماد ثابت زمانی برای قطب‌ها استفاده نمود:

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1}, p_2 = -\frac{1}{\tau_2}, \dots, p_n = -\frac{1}{\tau_n}$$

قطب‌ها کیفیت رفتار دینامیکی معادله دیفرانسیل مدل را به نمایش می‌گذارند. عبارت‌های "ریشه‌های معادله مشخصه" و "قطب‌های تابع تبدیل" در بسیاری موارد بجای هم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

برای یک تابع تبدیل عمومی همانطور که در (۲۹-۲) نشان داده شده است، ریشه‌های معادله $Q(s) = 0$ که با نمادهای z_1, z_2, \dots, z_m نمایش داده می‌شوند، صفرهای تابع تبدیل نام دارند. در حالت استفاده از نماد ثابت زمانی (برای صفرهای حقیقی):

$$z_1 = -\frac{1}{\tau_a}, z_2 = -\frac{1}{\tau_b}, \dots, z_m = -\frac{1}{\tau_m}$$

پیکره بندی قطب-صفر^{۱۳} تابع تبدیل (۲۹-۲) را اکنون می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \left(\frac{b_m}{a_n} \right) \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (30-2)$$

اگر تمام ریشه‌های دو چند جمله‌ای حقیقی باشند، تابع تبدیل (۲۹-۲) در پیکره بندی ثابت زمانی^{۱۴} به صورت زیر در می‌آید:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \left(\frac{b_o}{a_o} \right) \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_n s + 1)} \quad (31-2)$$

همانطور که در آینده خواهیم دید معادلات (۳۰-۲) و (۳۱-۲) آنچنان که نشان می‌دهند ترسناک و دیر فهم نیستند. این پیکره بندی‌ها تکیه‌گاه اصلی تحلیل‌های کنترل کلاسیک هستند.

بهره‌ حالت یکنواخت^{۱۵} کمیت مهم دیگری است که در اینجا معرفی می‌شود. بر اساس مدل عمومی که دارای معادله دیفرانسیل (۲۸-۲) و تابع تبدیل (۲۹-۲) است، بهره‌ حالت یکنواخت بصورت **تغییر نهایی** در $y(t)$ به ازای **تغییر یک واحد در ورودی** $x(t)$ ، تعریف می‌گردد. بنابر این یک راه ساده برای دست آوردن بهره‌ حالت یکنواخت اعمال یک ورودی پله واحد در $x(t)$ و یا $X(s) = 1/s$ و محاسبه مقدار نهایی $y(t)$ است.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)X(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[sG(s) \frac{1}{s} \right] = \frac{b_o}{a_o} \quad (32-2)$$

عبارت دیگر، بهره‌ حالت یکنواخت نسبت دو عدد ثابت در تابع تبدیل است. این بهره فقط در توابع تبدیل تعریف می‌شود. یک راه ساده برای محاسبه بهره‌ حالت یکنواخت، همانطور که از معادلات (۳۱-۲) و (۳۲-۲) پیداست، نوشتن تابع تبدیل بصورت پیکره بندی ثابت زمانی آن است.

نکته:

- ۱) در بحث قطب‌های $G(s)$ در معادله (۲۹-۲)، قطب‌ها اصلاً به ورودی $x(t)$ مربوط نمی‌باشد. البته پاسخ $y(t)$ علاوه بر $G(s)$ به $x(t)$ و یا $X(s)$ نیز وابسته است.
- ۲) از مثالهای بسط کسرهای جزئی به خاطر بیاورید که ریشه‌های چند جمله‌ای $Q(s)$ در صورت، و یا صفرها،



فقط روی ضرایب حل $y(t)$ تأثیر می‌گذارد ولی بر روی توابع نمایی زمانی تأثیری ندارد. به همین دلیل است که در بحث‌های کیفی پاسخ، تأکید بر روی قطب‌ها است.

(۳) برای آنکه تابع حوزه زمان $y(t)$ ، که از چند جمله نمایی تشکیل شده است، با افزایش زمان میرا شود، تمام قطب‌های تابع تبدیل باید دارای قسمت حقیقی منفی باشند. (این نکته به مفهوم پایداری برمی‌گردد که در محل خویش بحث خواهد شد.)

۷-۲ خلاصه مشخصات قطب‌ها

تا اینجا اکثر مطالب گفته شده در حد مصداقی با ذکر مثالهایی در هر مورد بوده است. برای آنکه با مشخصات قطب‌ها بطور کلی آشنا شویم لازم است نتایج بدست آمده را با نمادهای کلی‌تر نشان دهیم. فرض کنید چند جمله‌ای مشخصه را داشته باشیم، با پیدا کردن ریشه‌ها و تکمیل بسط کسرهای جزئی، با یک یا چند مورد از موارد ذیل برخورد می‌کنیم:

الف) قطب‌های حقیقی، منفرد

جمله‌ای بفرم $\frac{C_i}{s-p_i}$ که قطب p_i یک عدد حقیقی است، منجر به تابع $C_i e^{p_i t}$ می‌شود. اغلب با قطب‌های حقیقی منفی مانند $p_i = -a_i$ روبرو هستیم که تابع زمانی متناظر $C_i e^{-a_i t}$ می‌باشد.

ب) قطب حقیقی، تکراری، m مرتبه تکرار شده

جملاتی به فرم

$$\left[\frac{C_{i,1}}{s-p_i} + \frac{C_{i,2}}{(s-p_i)^2} + \frac{C_{i,3}}{(s-p_i)^3} + \dots + \frac{C_{i,m}}{(s-p_i)^m} \right]$$

با ریشه p_i که m مرتبه تکرار شده است متناظر با تابع زمانی

$$\left[C_{i,1} + C_{i,2}t + \frac{C_{i,3}}{2!}t^2 + \dots + \frac{C_{i,m}}{(m-1)!}t^{m-1} \right] e^{p_i t} u(t)$$

است. وقتی p_i منفی باشد، میرایی زمانی جواب بدلیل وجود جمله داخل پرانتز در مقایسه با ریشه غیر تکراری کندتر است. این همان دلیلی است که گفته می‌شود پاسخ مدلهای دارای ریشه‌های تکراری (مثل تانکهای سری که در فصلهای بعد بحث خواهد شد) کندتر است.

ج) قطب‌های مزدوج مختلط

جملاتی بفرم $\frac{C_i}{s-p_i} + \frac{C_i^*}{s-p_i^*}$ که در آنها $p_i = \alpha + j\beta$ و $p_i^* = \alpha - j\beta$ قطب‌های مختلط هستند، دارای تابع حوزه زمان

متناظر $C_i e^{p_i t} + C_i^* e^{p_i^* t}$ است که تقریباً هیچوقت بدین شکل استفاده نمی‌شود. در عوض، با تغییر آرایش آن به فرم $Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$ نوشته می‌شود که A مقداری ثابت و ϕ تأخیر فاز است.

نوشتن بسط کسرهای جزئی برای قطب‌های مختلط کاری پر زحمت است. با قطب‌های مزدوج مختلط، در اغلب موارد دو جمله با هم ادغام شده و بصورت یک جمله مرتبه دوم نوشته می‌شود. با نمادهایی که در فصل بعد معرفی می‌گردند، جمله مرتبه دوم به صورت

$$\frac{as+b}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$



(که در آن ζ ضریب میرایی خوانده می‌شود) نگاشته می‌شود. اگر $0 < \zeta < 1$ ، مخرج عبارت فوق دارای ریشه‌های مختلط خواهد بود. در این حالت قطب‌های p_i و p_i^* بفرم ذیل بدست می‌آیند:

$$p_i, p_i^* = -\frac{\zeta}{\tau} \pm j \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}, \quad 0 < \zeta < 1$$

که تابع متناظر زمانی پس از تجدید آرایش بصورت زیر خواهد بود:

$$Ae^{-\zeta t/\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} t + \phi\right)$$

مجدداً، A مقداری ثابت و ϕ تأخیر فاز است.

د) قطب‌های روی محور موهومی (موهومی خالص)

اگر قسمت حقیقی قطب مختلط صفر باشد، $p_i, p_i^* = \pm j\omega$. پاسخ زمانی متناظر سینوسی خالص با فرکانس ω خواهد بود. چنانچه مقدار قطب صفر باشد، آن قطب در مبدا واقع بوده و متناظر یک انتگرال گیر، $1/s$ می‌باشد. در حوزه زمان با یک مقدار ثابت و یا یک تابع پله متناظر خواهد شد.

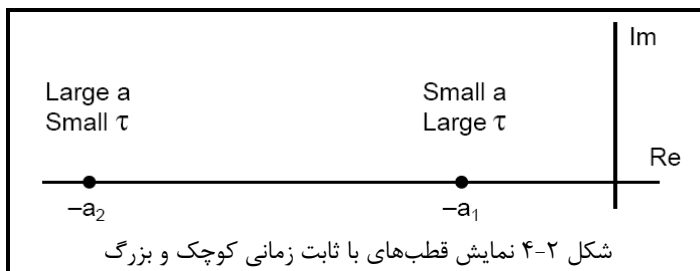
ه) قطب دارای قسمت حقیقی غیرصفر

اگر قطبی دارای قسمت حقیقی منفی باشد، گفته می‌شود که در قسمت چپ محور موهومی^{۱۶} (LHP) واقع است. برعکس، اگر قطبی دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، در قسمت راست محور موهومی^{۱۷} (RHP) بوده و تابع زمانی متناظر قطعاً ناپایدار خواهد بود.

و) سایر موارد:

و-۱) قطب‌های فراگیر

فهم و توانایی شناسایی قطب‌های فراگیر در صورت وجود، اهمیت بسیار زیادی دارد. این مهارت بعداً در مبحث کاهش مرتبه مدل استفاده خواهد شد. به این نکته قبلاً در مثال ۶-۲ اشاره شده بود. دو قطب همانطور که در شکل ۴-۲ نشان داده شده است، را در نظر بگیرید $0 < a_1 < a_2$.



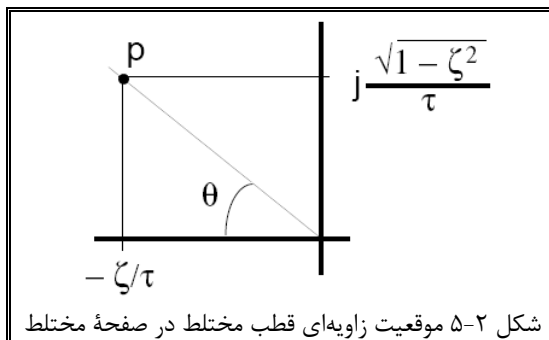
شکل ۴-۲ نمایش قطب‌های با ثابت زمانی کوچک و بزرگ

$$Y(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \dots = \frac{c_1}{s+a_1} + \frac{c_2}{s+a_2} + \dots = \frac{c_1/p_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{c_2/p_2}{\tau_2 s + 1} + \dots$$

جملات حوزه زمان متناظر عبارتند از:

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots = c_1 e^{-a_1 t} + c_2 e^{-a_2 t} + \dots = c_1 e^{-t/\tau_1} + c_2 e^{-t/\tau_2} + \dots$$

با افزایش زمان، جمله متناظر با τ_2 (و یا a_2) سریعتر میرا می‌شود. جمله با ثابت زمانی بزرگتر τ_1 بعنوان قطب ماندگار در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵-۲ موقعیت زاویه‌ای قطب مختلط در صفحه مختلط

و-۲) ضریب میرایی

برای یک قطب مختلط نسبت میرایی ($0 < \zeta < 1$) با زاویه قطب مزبور با محور حقیقی ارتباط مستقیم دارد (شکل ۵-۲). با در نظر گرفتن مقادیر مطلق ابعاد مثلث، خواهیم داشت:



$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right] \quad (33-2)$$

و یا ساده‌تر:

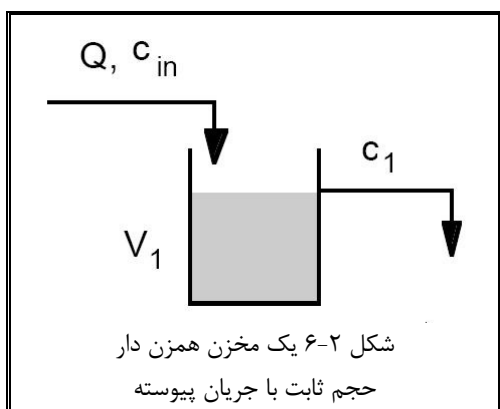
$$\theta = \cos^{-1} \zeta \quad (34-2)$$

معادله (۳۴-۲) در مبحث مکان هندسی ریشه‌ها هنگام طراحی کنترل کننده استفاده می‌شود.

۲-۸ دو مثال مدل گذرا

در اینجا دو مثال برای مرور چگونگی ارتباط بین متغیرهای انحرافی و حقیقی بررسی می‌شود و تمامی مراحل تا رسیدن به جواب، مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲-۸-۱ یک مثال پاسخ گذرا



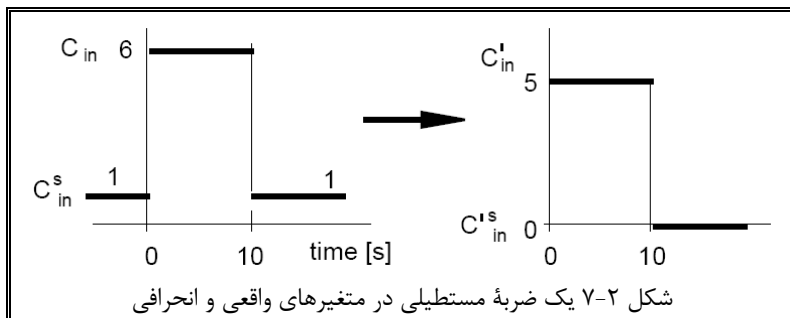
بطور معمول برای آزمایش اختلاط در تانک‌های همزن دار جریان پیوسته (شکل ۲-۶) از تزریق نوعی از ردیاب خنثی، مثلاً رنگ، استفاده می‌شود تا نحوه اختلاط در آنها مشاهده گردد. ردیاب بصورت کاملاً تحت کنترل اضافه شده، خروجی ثبت شده و نحوه تغییر غلظت ردیاب با زمان تحلیل می‌شود. در مهندسی واکنش شیمیایی این عمل همه کاری است که برای مطالعه توزیع زمان اقامت انجام می‌گیرد.

در این مثال، جریان ورودی $Q = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$ که شامل ماده‌ای خنثی با

غلظت $C_{in} = 1 \text{ gmol/m}^3$ به تانک همزن دار با حجم $V_1 = 4 \text{ m}^3$ وارد می‌شود. برای آزمایش اختلاط، بصورت کاملاً هدفمند، دکمه

افزایش ردیاب در جریان ورودی را به مدت 10 s فشرده نگاه می‌داریم.

این کار غلظت ردیاب در جریان ورودی را به مدت 10 s به 6 gmol/m^3 افزایش می‌دهد بدون آنکه کل جریان ورودی تغییر کند. این اثر ورودی یک ضربه مستطیلی است (شکل ۲-۷).



الف) پاسخ ضربه مستطیلی خروجی چیست؟

ب) اگر همه ردیاب اضافی به جای تزریق در 10 s بناگاه ریخته شود، پاسخ ضریب چه خواهد بود؟ معادله مدل یک تانک همزده جریان پیوسته بدون واکنش شیمیایی بصورت زیر است:

$$V_1 \frac{dC_1}{dt} = Q(C_{in} - C_1)$$

با تقسیم طرفین معادله بر Q :

$$\tau_1 \frac{dC_1}{dt} = C_{in} - C_1, \quad \tau_1 = \frac{V_1}{Q} = \frac{4 \text{ m}^3}{0,02 \text{ m}^3/\text{s}} = 200 \text{ s} \quad (35-2)$$

شرایط اولیه برابر است با $C_1(0) = C_1^s$ که C_1^s مقدار حل پایا می‌باشد. غلظت جریان ورودی تابعی از زمان است، $C_{in} = C_{in}(t)$ ، و مقدار ورودی خواهد بود. در اینجا نتایج تحلیلی نمایش داده خواهد شد.

معادله (۳۵-۲) در شرایط حالت پایا:



$$o = C_{in}^s - C_1^s \quad (36-2)$$

همانطور که در بخش ۲-۱ پیشنهاد شد، با تعریف متغیرهای انحرافی:

$$\bar{C}_{in} = C_{in} - C_{in}^s, \quad \bar{C}_1 = C_1 - C_1^s$$

و با ترکیب معادلات (۳۵-۲) و (۳۶-۲) خواهیم داشت:

$$\tau_1 \frac{d\bar{C}_1}{dt} = \bar{C}_{in} - \bar{C}_1$$

که شرایط اولیه آن $\bar{C}_1(o) = o$ با آرایش مجدد این معادله

$$\tau_1 \frac{d\bar{C}_1}{dt} + \bar{C}_1 = \bar{C}_{in} \quad (37-2)$$

مجدداً تأکید می‌کنیم که \bar{C}_{in} ورودی (تابع محرک) است. با گرفتن تبدیل لاپلاس تابع تبدیل (۳۷-۲) بفرم زیر است:

$$\frac{\bar{C}_1(s)}{\bar{C}_{in}(s)} = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \quad (38-2)$$

در اینجا تابع تبدیل تغییرات غلظت در جریان ورودی را به تغییر غلظت تانک مرتبط می‌کند. این فرم مناسبی است که به ازاء سناریوهای مختلف ورودی، خروجی را می‌توان بدست آورد.

اکنون باید همه قطعات جورچین این مسئله کنار هم قرار گیرد. قبل از شروع حل باید مقادیر حالت پایا جایگزین شوند:

$$C_{in}^s = C_1^s = 1 \quad (39-2)$$

الف) بنابر این ضربه مستطیلی یک آشفتگی در غلظت جریان ورودی است:

$$\bar{C}_{in} = \begin{cases} o & t < o \\ \delta & o < t < 1o \\ o & t > 1o \end{cases}$$

ورودی می‌تواند اجمالاً بفرم

$$\bar{C}_{in} = \delta [u(t) - u(t-1o)]$$

نوشته شود که با اعمال آن به معادله (۳۷-۲) می‌توان پاسخ را بدست آورد. علاوه بر این می‌توان از تبدیل لاپلاس آن استفاده نمود:

$$\bar{C}_{in}(s) = \frac{\delta}{s} [1 - e^{-1os}]$$

و با جایگزین کردن در معادله (۳۸-۲) خواهیم داشت:

$$\bar{C}_1(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \frac{\delta}{s} [1 - e^{-1os}] \quad (40-2)$$

برای معکوس گیری از (۴۰-۲) بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\bar{C}_1(s) = \delta \bar{C}_1^*(s) [1 - e^{-1os}] \quad , \quad \bar{C}_1^*(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \frac{1}{s}$$

از مثال ۲-۱۰ برای ورودی پله واحد داریم:

$$\bar{C}_1^*(s) = [1 - e^{-t/\tau_1}] u(t)$$

و در نتیجه:

$$\bar{C}_1(t) = \delta [\bar{C}_1^*(t) - \bar{C}_1^*(t-1o)] \rightarrow \bar{C}_1(t) = \delta [1 - e^{-t/\tau_1}] u(t) - \delta [1 - e^{-(t-1o)/\tau_1}] u(t-1o)$$

مهمترین تابعیت زمانی، e^{-t/τ_1} ، از قطب تابع تبدیل در (۳۸-۲) بدست می‌آید. این پاسخ را می‌توان به دو بازه زمانی تقسیم کرد:



$$\bar{C}_1(t) = \begin{cases} \Delta [1 - e^{-t/\tau_1}] & t < 10 \\ \Delta [e^{10/\tau_1} - 1] e^{-t/\tau_1} & t > 10 \end{cases}$$

پاسخ واقعی را می توان نوشت:

$$C_1(t) = \begin{cases} 1 + \Delta [1 - e^{-t/\tau_1}] & t < 10 \\ 1 + \Delta [e^{10/\tau_1} - 1] e^{-t/\tau_1} & t > 10 \end{cases}$$

ب) ورودی ضربان با "شدت" ضربه مستطیلی پیش گفته معادل تزریق یک باره تمام ردیاب است. پس لازم است ابتدا مقدار ردیاب تزریق شده بدست آید.

$$\Delta \left[\frac{gmol}{m^3} \right] \circlearrowleft \circlearrowright \left[\frac{m^3}{s} \right] 10 [s] = 1 gmol$$

این مقدار باید برابر مقدار ردیاب بوسیله ورودی ضربان باشد. پس

$$\circlearrowleft \circlearrowright \bar{C}_{in} = \delta(t) \rightarrow \bar{C}_{in} = \Delta \circ \delta(t) \rightarrow \bar{C}_{in}(s) = \Delta \circ$$

و برای این ورودی، معادله (۲-۳۸) بسادگی نتیجه می دهد:

$$\bar{C}_1(s) = \frac{\Delta \circ}{\tau_1 s + 1} \quad (۲-۴۱)$$

و پس از تبدیل معکوس، پاسخ برابر است با

$$\bar{C}_1(t) = \frac{\Delta \circ}{\tau_1} e^{-t/\tau_1}$$

و پاسخ واقعی:

$$C_1(t) = 1 + \frac{\Delta \circ}{\tau_1} e^{-t/\tau_1}$$

حال سوال بعدی این است که اگر جریان خروجی از تانک اول به تانک دومی با حجم $V_2 = 3 m^3$ وارد شود (شکل ۲-۸)، پاسخ زمانی تانک دوم چه خواهد بود؟ در تانک دوم با نوشتن رابطه موازنه جرم

$$\tau_2 \frac{dC_2}{dt} = C_1 - C_2, \quad \tau_2 = \frac{V_2}{Q} = \frac{3 m^3}{\circlearrowleft \circlearrowright m^3/s} = 15 \circ s$$

و یا

$$\tau_2 \frac{dC_2}{dt} + C_2 = C_1$$

که C_1 و C_2 بترتیب غلظت های ردیاب در تانک های اول و دوم هستند. مشابه معادله (۲-۳۷) برای تانک اول، برای تانک دوم:

$$\tau_2 \frac{d\bar{C}_2}{dt} + \bar{C}_2 = \bar{C}_1 \quad (۲-۴۳)$$

و با استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$\frac{\bar{C}_2(s)}{\bar{C}_1(s)} = \frac{1}{\tau_2 s + 1} \quad (۲-۴۴)$$

برای ورودی تانک اول چنانچه از ضربه مستطیلی استفاده شود، با جایگزینی پاسخ (۲-۴۰) در (۲-۴۴) خواهیم داشت:

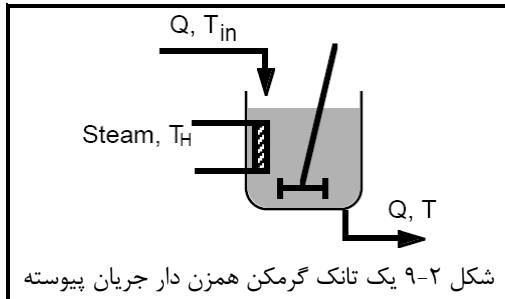
$$\bar{C}_2(s) = \frac{\Delta [1 - e^{-10s}]}{s(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)}$$



و چنانچه ورودی برای تانک اول ضربان باشد، با جایگذاری پاسخ ضربان (۲-۴۱) در (۲-۴۴):

$$\bar{C}_r(s) = \frac{\omega_0}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

بدست آوردن پاسخ زمانی این دو ورودی (هر چند خسته کننده است ولی برای تمرین بد نیست!) به خواننده واگذار می‌شود.



۲-۸-۲ یک تانک گرمکن همزن دار

کنترل درجه حرارت در یک تانک همزن دار یک مثال متعارف است (شکل ۲-۹). در طی مباحث کنترل بارها به این مثال اشاره خواهد شد. عجلتاً، برای این فرایند معادله پایه مدل را نوشته و با استفاده از آن توابع تبدیل را مرور می‌کنیم.

موازنه انرژی با نمادهای استاندارد در انتقال حرارت بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho C_p V \frac{dT}{dt} = \rho C_p Q (T_i - T) + UA (T_H - T) \quad (۲-۴۵)$$

که در آن U ضریب کلی انتقال حرارت، A سطح انتقال حرارت، ρ جرم مخصوص سیال، C_p ظرفیت حرارتی، و V حجم تانک است. دمای جریان ورودی $T_i = T_i(t)$ و دمای کوئل بخار $T_H = T_H(t)$ توابعی از زمان هستند و از قبل دانسته فرض می‌شوند. شرایط اولیه $T(0) = T^s$ همان مقدار حالت پایا است.

قبل از ادامه بحث لازم است یادآوری شود که آنچه در ادامه می‌آید چیزی جز همین موازنه انرژی نیست ولی با جبری متفاوت. در ابتدا معادله (۲-۴۵) با تقسیم طرفین بر $\rho C_p Q$ بازآرایی می‌شود:

$$\left(\frac{V}{Q}\right) \frac{dT}{dt} = (T_i - T) + \left(\frac{UA}{\rho C_p Q}\right) (T_H - T)$$

قدم بعدی تعریف $\tau = V/Q$ و $\kappa = UA/\rho C_p Q$ است که با باز نویسی منجر به معادله زیر می‌شود:

$$\tau \frac{dT}{dt} + (1 + \kappa)T = T_i + \kappa T_H \quad (۲-۴۶)$$

در حالت پایا

$$(1 + \kappa)T^s = T_i^s + \kappa T_H^s \quad (۲-۴۷)$$

با تعریف متغیرهای انحرافی داریم:

$$\bar{T} = T - T^s, \quad \bar{T}_i = T_i - T_i^s, \quad \bar{T}_H = T_H - T_H^s$$

و در نتیجه $\frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{d(T - T^s)}{dt} = \frac{dT}{dt}$. تفریق معادله (۲-۴۷) از معادله گذرا در (۲-۴۶) نتیجه خواهد داد که:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} + (1 + \kappa)(T - T^s) = (T_i - T_i^s) + \kappa(T_H - T_H^s)$$

و با استفاده از نماد متغیرهای انحرافی

$$\tau \frac{d\bar{T}}{dt} + (1 + \kappa)\bar{T} = \bar{T}_i + \kappa\bar{T}_H \quad (۲-۴۸)$$

شرایط اولیه در معادله (۲-۴۸) برای درجه حرارت تانک صفر می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌گردد، معادله (۲-۴۸) و (۲-۴۶) دقیقاً مثل هم هستند. این برای تمام معادلات دیفرانسیل خطی صادق است. پس از درک مراحل رسیدن از (۲-۴۶) به (۲-۴۸) می‌توانید از مراحل میانی پرهیز کنید.



از اینجا به بعد، ما نماد بار (خط بالای نماد متغیرهای انحرافی) را در تبدیل لاپلاس متغیرهای انحرافی حذف خواهیم کرد. این کار مشکلی در مراحل حل مسئله ایجاد نخواهد نمود. با تقسیم طرفین بر τ و یک بازآرایی دیگر:

$$\frac{dT}{dt} + aT = K_i T_i + K_H T_H, \quad a = \frac{(1+K)}{\tau}, \quad K_i = \frac{1}{\tau}, \quad K_H = \frac{K}{\tau} \quad (۴۸-۲ \text{ الف})$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس خواهیم داشت:

$$sT(s) + aT(s) = K_i T_i(s) + K_H T_H(s)$$

و معادله (۴۸-۲ الف) خواهد شد:

$$T(s) = \left(\frac{K_i}{s+a} \right) T_i(s) + \left(\frac{K_H}{s+a} \right) T_H(s) = G_d(s) T_i(s) + G_p(s) T_H(s) \quad (۴۹-۲ \text{ الف})$$

که در آن

$$G_d(s) = \frac{K_i}{s+a}, \quad G_p(s) = \frac{K_H}{s+a}$$

لازم بذکر نیست که $G_d(s)$ و $G_p(s)$ توابع تبدیل در پیکره بندی قطب-صفر می‌باشند. یک با دیگر (!) تأکید می‌شود که با متغیرهای انحرافی کار می‌کنیم. تفسیر آن: تغییر در دمای جریان ورودی و دمای کویل بخار منجر به تغییر در دمای تانک می‌شود. اثر هر ورودی بر روی فرایند با تابع تبدیل مربوطه بدست می‌آید و اثر کلی حاصل جمع اثرات خواهد بود.

آیا می‌توان فرمهای دیگری از موازنه حرارت در این مثال نوشت؟ بله! چنانچه طرفین معادله (۴۸-۲) بر $(1+K)$ تقسیم گردد

$$\tau_p \frac{dT}{dt} + T = K_d T_i + K_p T_H, \quad \tau_p = \frac{\tau}{(1+K)}, \quad K_d = \frac{1}{(1+K)}, \quad K_p = \frac{K}{(1+K)} \quad (۴۸-۲ \text{ ب})$$

بعد از گرفتن تبدیل لاپلاس معادله مدل بفرم زیر نوشته می‌شود:

$$T(s) = G_d(s) T_i(s) + G_p(s) T_H(s), \quad G_d(s) = \frac{K_d}{\tau_p s + 1}, \quad G_p(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad (۴۹-۲ \text{ ب})$$

که مشابه (۴۹-۲ الف) می‌باشد با این تفاوت که توابع تبدیل در پیکره بندی ثابت زمانی نوشته شده‌اند. در این آرایش، τ_p ثابت زمانی و K_d و K_p بهره حالت یکنواخت هستند. مخرج هر دو تابع تبدیل مثل هم هستند که ضرایب آن همان ضرایب سمت چپ معادله موازنه انرژی است.

یک حالت ساده را در نظر بگیرید. اگر دمای جریان ورودی در مقدار حالت پایا ثابت نگه‌داشته شود، مقدار متغیر انحرافی آن (بدون بار) برابر است با

$$T_i(t) = 0 \rightarrow T_i(s) = 0$$

حال می‌خواهیم بدانیم اگر دمای کویل بخار ناگهان 10°C از مقدار حالت پایا افزایش یابد، دمای تانک چه تغییری می‌کند؟ این تغییر در متغیرهای انحرافی برابر است با

$$T_H(t) = Mu(t), \quad M = 10 \rightarrow T_H(s) = \frac{M}{s}$$

با جایگذاری $T_H(s)$ و $T_i(s)$ در (۴۹-۲ ب)

$$T(s) = \left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1} \right) \frac{M}{s} \quad (۵۰-۲)$$

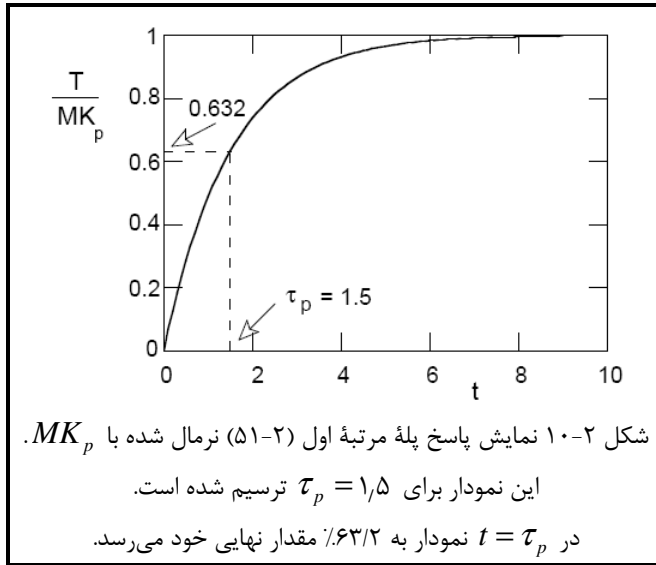
و استفاده از بسط کسرهای جزئی

$$T(s) = MK_p \left[\frac{1}{s} - \frac{\tau_p}{\tau_p s + 1} \right]$$



با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس و گرفتن تبدیل معکوس

$$T(t) = MK_p \left[1 - e^{-t/\tau_p} \right] u(t) \quad (51-2)$$



شکل پاسخ پله این سیستم مرتبه اول، همانطور که در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده‌است، را به خاطر بسپارید. با افزایش زمان، جمله‌نمایی زمان میرا شده و دما به مقدار جدید MK_p می‌رسد. همچنین در شکل یک مشخصه مهم سیستم مرتبه اول نشان داده شده است که می‌گوید: پس از گذشت $t = \tau_p$ ، پاسخ نرمال شده، T/MK_p ، $63/2\%$ است.

با این عملیات متوجه فواید استفاده از پیکره بندی‌های مختلف تابع تبدیل می‌شویم. با استفاده از پیکره بندی قطب-صفر، محل قطبها مشخص می‌شود در حالی که با پیکره بندی ثابت زمانی، بهره حالت یکنواخت و ثابت زمانی آسان‌تر بدست می‌آید. مهم است که بدانیم چگونه کیفیت پاسخ دینامیکی را از روی محل قرار گرفتن قطبها در صفحه مختلط تفسیر کنیم و تعبیر فیزیکی پاسخ را با استفاده از کمیت‌هایی نظیر بهره حالت یکنواخت و ثابت زمانی توضیح دهیم.

۹-۲ خطی سازی معادلات غیر خطی

از آنجا که تبدیل لاپلاس فقط می‌تواند به معادلات دیفرانسیل خطی اعمال شود، معادلات غیر خطی باید "تصحیح" شوند. هدف از اعمال کنترل آن است که کار کردن پیوسته یک فرایند در شرایطی معین را تضمین کند (در حالت پایا). در اکثر مواقع، اگر کنترل خوبی داشته باشیم، سیستم فقط اندکی آشفتگی از حالت پایا خواهد داشت بطوری که دینامیک برگشت به حالت پایا یک میرایی ساده خواهد بود (که یک فرایند خطی است). این حقیقت، اساس تئوری کنترل کلاسیک است.

تمام کاری که باید انجام گیرد بسط تیلور مرتبه اول حول نقطه حالت پایا و فرمول کردن مجدد بر مبنای متغیرهای انحرافی است. با یک مثال ساده این روش نمایش داده خواهد شد. برای تانکی با سطح مقطع ثابت، A ، که تحت نیروی جاذبه تخلیه می‌شود ($Q_{out} = \beta h^{3/2}$)، معادله دیفرانسیل ارتباط ارتفاع مایع داخل تانک، h ، و دبی ورودی به تانک، Q_{in} ، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad \xrightarrow[Q_{out} = \beta h^{3/2}]{V = Ah} \quad A \frac{dh}{dt} = Q_{in} - \beta h^{3/2} \quad (52-2)$$

شرایط اولیه برابر است با $h(0) = h_s$ یا همان مقدار حالت پایا. دبی جریان ورودی تابعی از دما بوده ($Q_{in} = Q_{in}(t)$) و دبی جریان خروجی هم تابعی غیر خطی از ارتفاع مایع درون تانک است ($Q_{out} = \beta h^{3/2}$). سطح مقطع تانک، A ، و ضریب β مقادیر ثابتی هستند.

با بسط جمله غیر خطی حول مقدار حالت پایای سطح مایع، h_s ، خواهیم داشت:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_{in} - \beta \left[h_s^{3/2} + \frac{1}{2} h_s^{-1/2} (h - h_s) \right] \quad (53-2)$$

در حالت پایا، معادله (۵۲-۲) بصورت زیر است:

$$0 = Q_{in}^s - \beta h_s^{3/2} \quad (54-2)$$

که h_s مقدار حالت پایا و Q_{in}^s مقداری است که شرایط حالت پایا را نگه می‌دارد. حاصل تفریق دو معادله (۵۳-۲) و (۵۴-۲) برابر است با:



$$A \frac{d\bar{h}}{dt} = \bar{Q}_{in} - \frac{\beta}{\gamma h_s^{\gamma}} \bar{h} \quad , \quad \bar{Q}_{in} = Q_{in} - Q_{in}^s \quad , \quad \bar{h} = h - h_s \quad (55-2)$$

بعبارت دیگر:

$$A \frac{d\bar{h}}{dt} + \frac{\beta}{\gamma h_s^{\gamma}} \bar{h} = \bar{Q}_{in} \quad (56-2)$$

با شرایط اولیه $\bar{h}(0) = 0$.

توجه به این نکته مهم است که شرایط اولیه در (۵۲-۲) برابر h_s ، مقدار حالت پایای اولیه، باشد. در غیر اینصورت، شاهد شرایط اولیه صفر در معادله (۵۶-۲) نخواهیم بود. از طرف دیگر بدلیل شرایط اولیه صفر، تابع محرک \bar{Q}_{in} باید محدود بماند تا پاسخی قابل قبول داشته باشیم. اگر برای شرایط اولیه متفاوت این عملیات را بشمار تکرار کنیم، سمت چپ معادله (۵۶-۲) به چند جمله‌ای مشخصه واقعی (که دینامیک سیستم را توصیف می‌کند) نزدیک خواهد شد. پاسخ دینامیکی به دینامیک سیستم و ورودی (که در سمت راست معادله مزبور قرار می‌گیرد) بستگی خواهد داشت.

نکته:

- ۱) همیشه ابتدا خطی کنید سپس متغیرهای انحرافی را بنویسید.
- ۲) پس از بسط تیلور مرتبه اول، معادله خطی شده است. تمام مراحل بعدی عملیات پاکسازی جبری است تا جملات شرایط حالت پایا حذف شده و معادله با متغیرهای انحرافی که مقدار اولیه صفر دارند تعریف گردد.

اکنون عمومی تر به مسئله نگاه می‌کنیم. یک معادله دیفرانسیل معمولی را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy}{dt} = f(y; \mathbf{u}) \quad , \quad y(0) = y_s \quad (57-2)$$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ شامل تمام پارامترهای دیگری بجز y است که با زمان متغیرند. اگر $f(y, \mathbf{u})$ غیر خطی باشد، با بسط تیلور آن حول شرایط اولیه داریم:

$$\frac{dy}{dt} \approx f(y_s; \mathbf{u}_s) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y_s; \mathbf{u}_s} (y - y_s) + \left[\nabla^T f \right]_{y_s; \mathbf{u}_s} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \quad (58-2)$$

شرایط حالت پایا (۵۷-۲) خواهد شد: $\left[\nabla f \right]_{y_s; \mathbf{u}_s}$ یک بردار ستونی از مشتقات جزئی تابع نسبت به عناصر \mathbf{u} است، $\partial f / \partial u_i$ ، که در y_s و \mathbf{u}_s محاسبه می‌شود. در

$$0 = f(y_s; \mathbf{u}_s) \quad (59-2)$$

حل حالت پایا و \mathbf{u}_s مقادیر پارامترهایی است که برای نگه داشتن حالت پایا نیاز است. تفریق (۵۹-۲) از (۵۸-۲) معادله خطی شده با شرایط اولیه صفر را نتیجه خواهد داد:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \left[-\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y_s; \mathbf{u}_s} \bar{y} = \left[\nabla^T f \right]_{y_s; \mathbf{u}_s} \bar{\mathbf{u}} \quad , \quad \bar{y} = y - y_s \quad , \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s \quad (60-2)$$

در داخل پرانتزها مقادیر در حالت پایا قرار می‌گیرند. پس از خطی سازی، این مقادیر فقط ضرایب ثابتی خواهند بود که از جایگذاری عددی بدست می‌آیند.



مثال ۱۱-۲: معادله دیفرانسیل غلظت در یک تانک همزن دار: $V \frac{dC(t)}{dt} = Q_{in}(t)[C_{in}(t) - C(t)]$ را خطی کنید. دبی جریان ورودی و غلظت آن متغیر با زمان است. اگر متغیرهای زیر تعریف شود:

$$y = C(t) \quad , \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} Q_{in}(t) \\ C_{in}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad f(y; \mathbf{u}) = Q_{in}(t)[C_{in}(t) - C(t)]$$

و مشتقات مربوطه گرفته شود:

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y_s, \mathbf{u}_s} = Q_{in}^s \quad , \quad [\nabla^T f]_{y_s, \mathbf{u}_s} = [C_{in}^s - C^s \quad Q_{in}^s] = [0 \quad Q_{in}^s]$$

با جایگذاری در (۶۰-۲) داریم:

$$V \frac{d\bar{C}}{dt} + [Q_{in}^s] \bar{C} = [C_{in}^s - C^s] \bar{Q}_{in} + [Q_{in}^s] \bar{C}_{in} = [Q_{in}^s] \bar{C}_{in}$$

فرمول اخیر نحوه تغییر غلظت تانک با تغییرات دبی جریان ورودی و غلظت آن را نشان می‌دهد که شرایط اولیه صفر دارد، $\bar{C}(0) = 0$. با گرفتن تبدیل لاپلاس تابع تبدیل زیر بدست خواهد آمد:

$$\tau \frac{d\bar{C}}{dt} + \bar{C} = \bar{C}_{in} \quad \rightarrow \quad \frac{C(s)}{C_{in}(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad , \quad \tau = \frac{V}{Q_{in}^s}$$

مثال ۱۲-۲: معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = -xy - \beta y^\gamma - \gamma^{y-1}$ را خطی کنید.

اگر متغیرهای زیر تعریف شود:

$$\mathbf{u} = [x] \quad , \quad f(y; \mathbf{u}) = -xy - \beta y^\gamma - \gamma^{y-1}$$

و مشتقات مربوطه گرفته شود:

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{y_s, \mathbf{u}_s} = x_s + \gamma \beta y_s + (\ln \gamma) \gamma^{y_s-1} \quad , \quad [\nabla^T f]_{y_s, \mathbf{u}_s} = [-y_s]$$

با جایگذاری در (۶۰-۲) داریم:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + [x_s + \gamma \beta y_s + (\ln \gamma) \gamma^{y_s-1}] \bar{y} = [-y_s] \bar{x}$$

مثال ۱۳-۲: شکل خطی سرعت واکنش $r_A = -k(T)C_A = -k_0 e^{-E/RT} C_A$ را در صورتی که دما T و غلظت C_A متغیر با زمان باشند، بدست آورید.

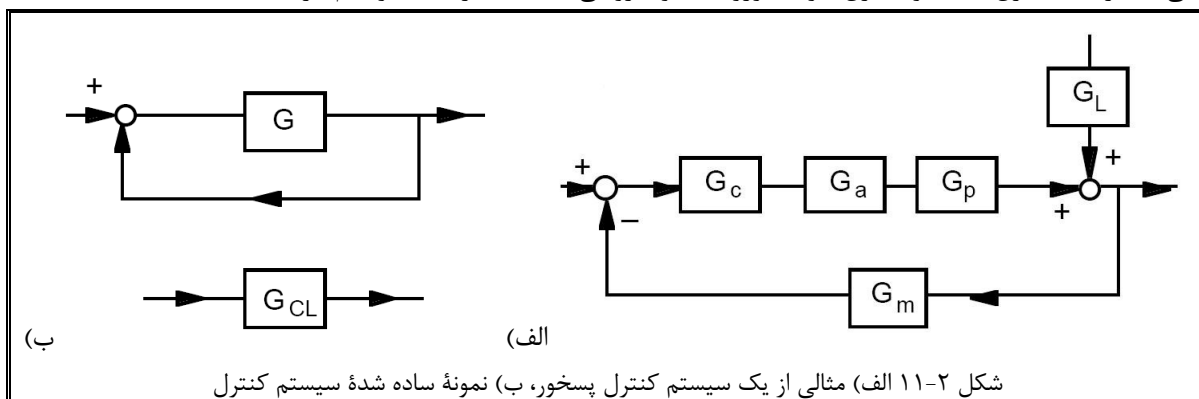
$$r_A \approx -k_0 \left[e^{-E/RT_s} C_A^s + e^{-E/RT_s} (C_A - C_A^s) + \left(\frac{E}{RT_s^2} \right) e^{-E/RT_s} C_A^s (T - T_s) \right]$$

با متغیرهای انحرافی تقریب خطی برابر خواهد بود با:

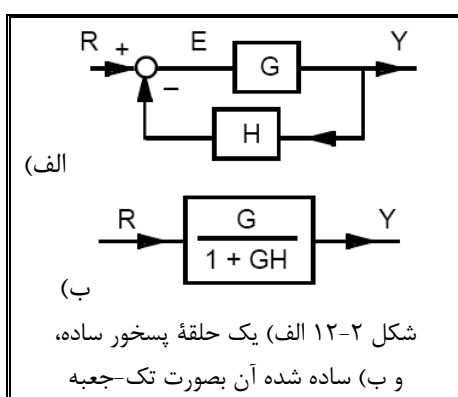
$$r_A = r_A^s \left[1 + \frac{1}{C_A^s} e^{-E/RT_s} \bar{C}_A + \left(\frac{E}{RT_s^2} \right) \bar{T} \right] \quad , \quad r_A^s = -k_0 e^{-E/RT_s} C_A^s$$



برای نمایش ارتباط علل و معلول‌ها از نمودارهای جعبه‌ای استفاده می‌شود. جعبه‌ها برای نمایش تابع تبدیل و خطوط برای انتقال اطلاعات یکطرفه بکار می‌روند. این روش مناسبی برای مجسم سازی روابط بین اجزاء مختلف می‌باشد. در آینده ما از آنها به منظور شناسایی متغیرهای کنترل کننده و کنترل شونده، ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده زیادی خواهیم کرد.



نمودارها و شبکه‌های جعبه‌ای بسیاری از سیستم‌های کنترلی پیچیده به نظر می‌رسند. ساده‌ترین سیستم کنترل چیزی شبیه شکل ۲-۱۱ الف است، در حالی که بسیاری از تئوریهای کنترل بر مبنای یک ساختار ساده حلقه-بسته و یا تک-جعبه است (شکل ۲-۱۱ ب).



بنابر این نحوه خواندن نمودار جعبه‌ای و ساده سازی آن به کوچکترین اندازه ممکن را باید فراگیریم. اینکه چگونه نمودارهای جعبه‌ای به سیستم‌های واقعی مرتبط می‌شوند، را در آینده فرا خواهید گرفت. در ابتدا چند عملیات جبری را انجام و آن را بصورت گرافیکی نمایش می‌دهیم. مهم است که بدانیم تمام عملیات ساده سازی (شماتیکی) نمودارهای جعبه‌ای نتیجه اعمال عملیات جبری بر روی توابع تبدیل است. بنابر این وقتی نتوانستید بخشی از این عملیات را به خاطر بیابورید/از عملیات جبری واقعی استفاده کنید.

بین تمام عملیات گفته شده، مهمترین آنها ساده کردن یک حلقه پسخور است. در اینجا ساده سازی آن و عملیات جبری مربوطه را مشاهده می‌کنید. برای یک سیستم پسخور منفی (شکل ۲-۱۲) داریم:

$$E = R - HY \quad (۲-۶۱)$$

و

$$Y = GE \quad (۲-۶۲)$$

با جایگذاری (۲-۶۱) در (۲-۶۲) داریم:

$$Y = G[R - HY]$$

که با تغییر آرایش متغیرها برای یک حلقه پسخور منفی به معادله زیر تبدیل می‌گردد:

$$\frac{Y}{R} = \frac{G}{1 + GH} \quad (۲-۶۳)$$

سمت راست معادله (۲-۶۳) تابع تبدیل حلقه بسته نامیده می‌شود.

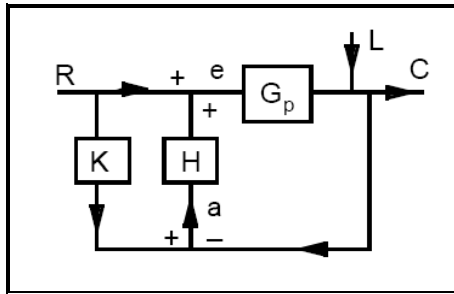
نکته:

نتیجه مهم مشاهده شده از ساده سازی این است که وقتی یک حلقه پسخور منفی «بسته می‌شود»، صورت تابع تبدیل حلقه بسته حاصلضرب تمام توابع تبدیل مسیر پیشخور خواهد بود. مخرج تابع تبدیل حلقه بسته (که همان چند جمله‌ای حلقه بسته هم می‌باشد) برابر است با: ۱ بعلاوه حاصلضرب تمام توابع تبدیل داخل حلقه (که شامل مسیرهای پیشخور و پسخور است). علامت مخرج در پسخور مثبت، منفی خواهد بود.



جهت روشن شدن بهتر موضوع چند مثال آورده می‌شود که در آنها بر نوشتن روابط جبری مربوطه تأکید شده است.

مثال ۲-۱۴: تابع تبدیل حلقه بسته C/R و L/R را برای سیستم داده شده بدست آورید.



در نمودار جعبه‌ای داده شده دو نقطه جمع کننده وجود دارد که خروجی از آنها را e و a می‌نامیم. برای نقطه جمع کننده زیر H داریم:

$$a = KR - C$$

برای نقطه جمع کننده بالای H و جایگذاری a خواهیم داشت:

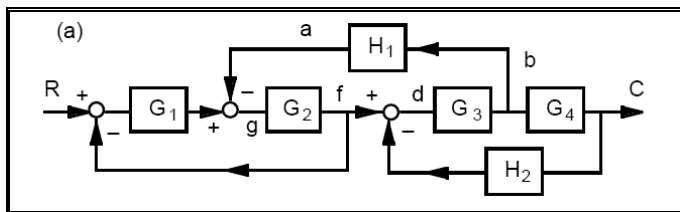
$$e = R + Ha = R + H(KR - C)$$

برای خروجی C و جایگذاری e :

$$C = L + G_p e = L + G_p (R + HKR - HC)$$

بازآرایی رابطه اخیر برای C منتج خواهد شد به:

$$C = \left[\frac{1}{1 + G_p H} \right] L + \left[\frac{G_p (1 + HK)}{1 + G_p H} \right] R$$



مثال ۲-۱۵: تابع تبدیل حلقه بسته C/R برای سیستمی با سه حلقه که همپوشانی دارند را بدست آورید:

کلید حل این مسئله ابتدائاً «باز کردن» همپوشانی حلقه‌ها است. برای تشخیص بهتر چند موقعیت در نمودار با a ، b ، d ، f و g در نظر می‌گیریم.

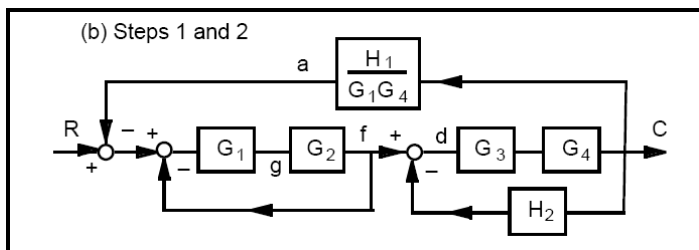
مرحله اول: انتقال نقطه انشعاب به سمت راست G_f است. برای این منظور می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} a &= H_1 b \\ C &= G_f b \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \left[\frac{H_1}{G_f} \right] C$$

بعبارت دیگر، برای انتقال نقطه انشعاب به پشت جعبه G_f ، شاخه دیگر باید بر G_f تقسیم شود.

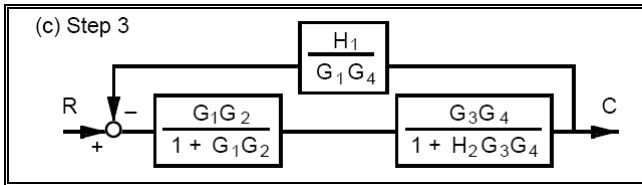
مرحله دوم: انتقال نقطه جمع کننده به سمت چپ G_1 است. برای این منظور:

$$g = G_1 (R - f) - a = G_1 \left[R - f - \left(\frac{H_1}{G_f G_1} \right) C \right] = G_1 \left[R - \left(\frac{H_1}{G_f G_1} \right) C - f \right]$$



که مفهوم آن این است که برای انتقال نقطه جمع کننده به قبل از جعبه G_1 ، شاخه دیگر باید بر G_1 تقسیم شود. با این کار نمودار جعبه‌ای شامل دو حلقه داخلی و یک حلقه بیرونی خواهد بود و دیگر همپوشانی بین حلقه‌ها وجود ندارد.

مرحله سوم: بدلیل عدم همپوشانی حلقه‌ها، بسادگی دو حلقه داخلی به تنها دو جعبه تبدیل می‌شوند.

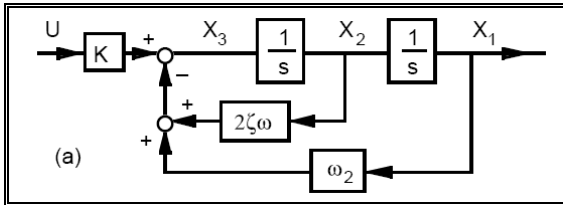


و نهایتاً حلقه بیرونی ساده شده و بصورت زیر درآید:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 + G_3 G_4 H_2) + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$

مثال ۲-۱۶: تابع تبدیل حلقه بسته X_1/U را در نمودار

جعبه‌ای داده شده بدست آورید.



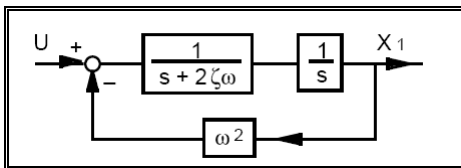
مشابه قبل، با نوشتن روابط جبری حول جمع کننده برای X_3 و دو معادله حول انتگرال گیرها $1/s$ برای X_1 و X_2 و حذف X_3 و X_2 به نتایج دلخواه خواهیم رسید.

هرچند، با شناسایی دو حلقه و استفاده از تابع تبدیل حلقه بسته خیلی

سریعتر می‌توان نتیجه را بدست آورد. ابتدا حلقه داخلی «بسته» می‌شود تا به شکل

روبرو برسیم و سپس با «بستن» حلقه بدست آمده خواهیم داشت:

$$\frac{X_1}{U} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$





-
- ¹ Inverse transform
 - ² Partial fraction
 - ³ Pole
 - ⁴ Transfer function
 - ⁵ Linearize
 - ⁶ Deviation variables
 - ⁷ Step
 - ⁸ Time delay
 - ⁹ Rectangular pulse
 - ¹⁰ Impulse
 - ¹¹ Dirac
 - ¹² Heaviside expansion
 - ¹³ Pole-zero form
 - ¹⁴ Time constant form
 - ¹⁵ Steady-state gain
 - ¹⁶ Left-hand plane
 - ¹⁷ Right-hand plane



۳ پاسخ دینامیکی

اکنون می‌خواهیم جواب حوزه‌ی زمان معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و دوم را بدست آوریم. هدف ما تمرین تبدیل معکوس نیست بلکه مقایسه‌ی این جواب و تابع تبدیل به ما در یادگیری رفتار فرایند کمک می‌کند. آنچه بدنبال آن هستیم تبیین ارتباط بین موقعیت قطب‌ها و مشخصات دینامیکی است. همچنین می‌خواهیم ببینیم که پارامترهای مختلف چگونه بر جواب حوزه‌ی زمان تأثیر می‌گذارند. این نتایج در تحلیل سیستم کنترل و مفهوم پارامترهای مدل مفیدند. در پایان این فصل، زمان مرده^۱، مدل‌های کاهش یافته^۲، و اثر صفرها توضیح داده خواهد شد.

عمده مباحث این فصل:

- حتی وقتی که از تحلیل حوزه‌ی زمان^۳ صحبت می‌کنیم، هنوز با تبدیل لاپلاس کار می‌کنیم. در کنترل کلاسیک حوزه‌ی زمان و حوزه‌ی لاپلاس لاینفک هستند.
- هنگام بررسی ارتباط حوزه‌ی زمان و حوزه‌ی لاپلاس، معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و دوم بحث خواهند شد چرا که ما با سیستم‌های خطی^۴ و یا خطی شده^۵ کار می‌کنیم. سیستم‌های خطی براحتی توسط بسط کسرهای جزئی^۶ به جملات مرتبه‌ی اول «می‌شکنند». جملات دارای ریشه مختلط مزدوج با هم ترکیب می‌شوند تا یک جمله مرتبه دوم ایجاد شود.
- ریشه‌های تکراری (فرایندهای چند ظرفیتی^۷) به پاسخ کند منجر می‌شوند. نمونه‌ای از این فرایندها تانک‌های سری هستند.
- مدل‌های مرتبه بالاتر را می‌توان بصورت تقریبی توسط مدل‌های کاهش یافته نمایش داد. این تکنیک بر مبنای شناسایی قطب‌های فراگیر^۸ صورت می‌گیرد. این روند بعداً در تنظیم تجربی کنترل کننده استفاده می‌گردد.
- در کنترل کلاسیک، زمان مرده بصورت متفاوتی استفاده می‌گردد. ما تقریب Pade را برای این منظور استفاده خواهیم کرد.

بد نیست کمی مرور کنیم: بخاطر آوردید که تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است. اثرات ورودی‌های منفرد با هم جمع می‌گردد تا خروجی بدست آید. بعبارت دیگر، مشاهده‌ی یک تغییر در خروجی حاصل اثرات همه‌ی ورودی‌هاست. در مثال تانک گرمکن همزن دار در بخش ۲-۸-۲ داشتیم:

$$T(s) = G_d(s)T_i(s) + G_p(s)T_H(s)$$

تحلیل تغییر در درجه حرارت تانک بعنوان نتیجه‌ی تغییرات درجه حرارت جریان ورودی و یا درجه حرارت کویل بخار، بدون انجام تبدیل معکوس انجام می‌شود. آنچه مهم است اینکه ما حل تحلیلی حوزه‌ی زمان $T(t)$ را نداشته و براحتی در مورد زمان نمی‌توان تفکر نمود.

این مثال را در شکل کلی‌تر در نظر بگیرید. یک معادله دیفرانسیل درجه‌ی n با دو تابع محرک^۹، $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ، را در نظر بگیرید:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) \quad (1-3)$$

که در آن y متغیر انحرافی^{۱۰} خروجی است بنابر این، دارای شرایط اولیه صفر است:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (2-3)$$

تبدیل لاپلاس معادله (۱-۳) منتج می‌شود به:

$$Y(s) = G_1(s)X_1(s) + G_2(s)X_2(s) \quad (3-3)$$



که

$$G_1(s) = \frac{b_1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad G_2(s) = \frac{b_2}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4-3)$$

دو تابع تبدیل برای دو ورودی $X_1(s)$ و $X_2(s)$ است.

دقت کنید (مجددا!) که چند جمله‌ای مشخصه مخرج هر دو تابع تبدیل یکسان است. ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه (قطب‌ها) مستقل از ورودی هستند زیرا از یک معادله دیفرانسیل (یک سیستم یا فرایند) ناشی می‌شوند. قطب‌ها بطور کلی اطلاعاتی از شکل شماتیک حل حوزه زمان، $y(t)$ ، را در اختیار ما می‌گذارند. و آخرین یادآوری: سوای اینکه درجه n در معادله (۴-۳) چقدر بزرگ باشد، همیشه با استفاده از کسرهای جزئی قابل تفکیک به جملات مرتبه اول و دوم می‌باشد.

۳-۱- مدل‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

این بخش به خواص رفتاری مدل‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول اختصاص دارد. مثال‌های تانک مخلوط کن و تانک گرمکن در فصل ۲ نمونه‌هایی از این نوع مدل‌ها هستند. علاوه بر این، مدل‌های یاد شده ممکن است تعریف یک فرایند یا یک سیستم کنترل باشد. آنچه در ادامه می‌آید، سوای اینکه چه مفهوم فیزیکی دارد، مادامی که با یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول توصیف گردد، صادق خواهد بود.

معمولاً سعی بر این است که خصوصیات شناسایی شوند که مشخصه مدل هستند. اگر از مثال‌های بخش ۲-۸ بعنوان راهنما استفاده شود، یک مدل مرتبه اول با متغیرهای انحرافی و بصورت تک ورودی با ضرایب ثابت a_1 ، a_0 و b در حالت کلی بصورت زیر است:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bx(t), \quad a_1 \neq 0, \quad y(0) = 0 \quad (5-3)$$

همانند مثال ۲-۲، این مدل می‌تواند بصورت زیر بازآرایی شود:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Kx(t) \quad (6-3)$$

که τ ثابت زمانی و K بهره حالت یکنواخت است.

در مواقعی که منظور مدلسازی یک فرایند است، از زیرنویس p برای پارامترها استفاده خواهد شد. بعبارت دیگر در بحث و تحلیل کنترل، $\tau = \tau_p$ ثابت زمانی فرایند و $K = K_p$ بهره حالت یکنواخت فرایند خواهند بود. برای جلوگیری از سردرگمی از زیرنویس‌های دیگری برای سیستم استفاده خواهیم کرد. تبدیل لاپلاس معادله (۶-۳) بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (7-3)$$

که $G(s)$ نشانگر تابع تبدیل است که یک قطب حقیقی در $-1/\tau$ دارد. (این قطب چه مفهوم فیزیکی دارد؟ اگر نمی‌دانید به مثال ۱۰-۲ مراجعه کنید.)

۳-۱-۱ پاسخ پله یک مدل مرتبه اول

ورودی پله $x(t) = Mu(t)$ و یا $X(s) = M/s$ را در نظر بگیرید. پاسخ برابر است با:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{M}{s} = MK \left[\frac{1}{s} + \frac{-1}{s + 1/\tau} \right] \quad (8-3)$$

که تبدیل معکوس پاسخ زمانی زیر را خواهد داد:

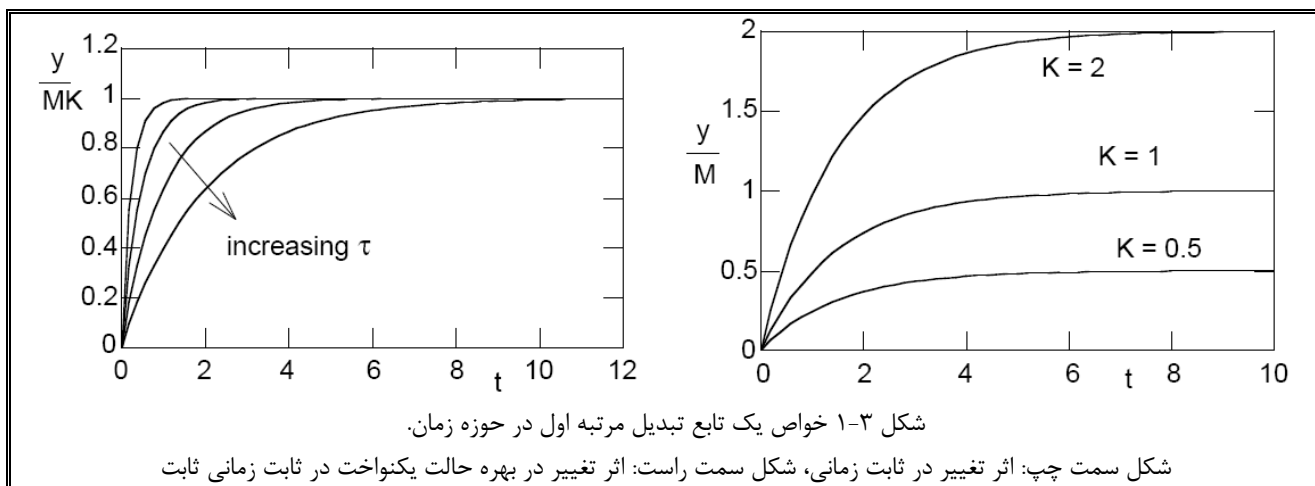


$$y(t) = MK(1 - e^{-t/\tau})u(t) \quad (9-3)$$

این پاسخ در شکل ۲-۱۰ قبلاً ترسیم شده است. پاسخ از صفر شروع شده و با میرا شدن جمله نمایی زمان به سمت مقدار حالت پایایی MK حرکت می‌کند. فرایندی با این خاصیت خود-تنظیم^{۱۱} خوانده می‌شود. هر چه ثابت زمانی بزرگتر شود، پاسخ کندتر خواهد بود (شکل ۱-۳ سمت چپ).

نتایج بدست آمده توسط قضیه مقدار نهایی مجدداً می‌تواند امتحان شود:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{K}{\tau s + 1} \frac{M}{s} \right] = MK$$



در دامنه ورودی ثابت M ، تغییر بهره^{۱۲} حالت یکنواخت K باعث تغییر در مقدار نهایی خواهد شد (شکل ۱-۳ سمت راست). در نتیجه، بهره^{۱۳} حالت یکنواخت بعنوان نسبت تغییر خروجی به تغییر واحد ورودی، y/M ، می‌باشد. در حقیقت مقدار K بدین صورت اندازه گیری می‌شود. هر چه قدر مقدار بهره^{۱۴} حالت یکنواخت بیشتر باشد، حساسیت خروجی به تغییر در ورودی بیشتر است. همانطور که در شکل ۲-۱۰ خاطر نشان شده است، در $t = \tau$ پاسخ $y(t) = 0.632MK$ خواهد بود. ثابت زمانی هم اغلب، با استفاده از این نتیجه، از اطلاعات آزمایشگاهی بدست می‌آید.

۳-۱-۲-۳ قلم پاسخ ضربان یک مدل مرتبه اول

ورودی ضربان $x(t) = M\delta(t)$ و یا $X(s) = M$ را در نظر بگیرید. پاسخ برابر است با:

$$Y(s) = \frac{MK}{\tau s + 1} \quad (10-3)$$

که پاسخ زمانی همانطور که در مثال ۲-۱۰ نشان داده شده بصورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = \frac{MK}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \quad (11-3)$$

که نشان می‌دهد در لحظه $t = 0$ خروجی بطور ناگهانی به MK/τ افزایش یافته و سپس به صورت نمایی به صفر میرا می‌شود.

۳-۱-۳ قلم فرایند انتگرال گیر

وقتی در معادله دیفرانسیل (۵-۳) مقدار ضریب $a_0 = 0$ باشد،

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{b}{a_1} \right) x(t) = K_I x(t) \quad , \quad K_I = \frac{b}{a_1} \quad (12-3)$$

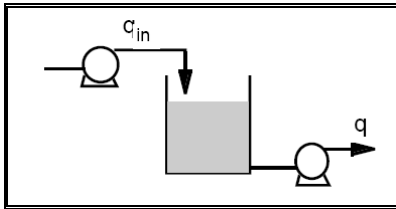


$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{K_I}{s} \quad (۱۳-۳)$$

در اینجا قطب تابع تبدیل $G(s)$ در مبدأ واقع است یعنی $s = 0$. حل (۱۲-۳) بلافاصله با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس بصورت زیر است:

$$y(t) = K_I \int_0^t x(t) dt \quad (۱۴-۳)$$

این گونه فرایندها و توابع تبدیل متناظر آنها، فرایندهای انتگرال گیر^{۱۲} (یا ظرفیت و یا غیر خود-تنظیم) نامیده می‌شوند. ما تانک‌های پر شونده و خازن‌های در حال شارژ را فرایندهای انتگرال گیر می‌دانیم. می‌توان نشان داد که پاسخ پله اینگونه فرایندها، برابر یک شیب یکنواخت است که همواره با افزایش زمان افزایش می‌یابد. چنانچه به این فرایندها ورودی ضربه اعمال شود، دیگر به حالت پایای اولیه برنگشته و تمام مقدار ورودی اعمال شده را در خود نگه می‌دارند.



مثال ۳-۱: نشان دهید که تانک ذخیره با پمپ در ورودی و خروجی یک فرایند انتگرال گیر است.

با فرض دانسیته ثابت، موازنه جرم یک تانک همزن دار جریان پیوسته بسادگی بفرم زیر نوشته می‌شود:

$$A \frac{dh}{dt} = q_{in} - q, \quad h(0) = h_s$$

A سطح مقطع تانک و h ارتفاع مایع داخل آن است. دبی جریان‌های ورودی و خروجی، q_{in} و q بترتیب، بوسیله پمپ‌ها تنظیم می‌شوند و تابعی از زمان بوده ولی تابع ارتفاع مایع داخل تانک نیستند. در شرایط حالت پایا، دبی جریان‌ها باید مساوی باشد. با تعریف متغیرهای انحرافی بصورت: $\bar{h} = h - h_s$, $\bar{q}_{in} = q_{in} - q_s$ و $\bar{q} = q - q_s$ موازنه جرم بفرم زیر خواهد بود:

$$A \frac{d\bar{h}}{dt} = \bar{q}_{in} - \bar{q}, \quad \bar{h}(0) = 0$$

که حل عمومی آن برابر است با:

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{A} \int_0^t (\bar{q}_{in} - \bar{q}) dt$$

که نشان می‌دهد که تغییرات ارتفاع مایع در تانک یک انتگرال ساده از اختلاف تغییرات دبی ورودی و خروجی است. در حوزه تبدیل لاپلاس، معادله دیفرانسیل به رابطه زیر می‌انجامد:

$$H(s) = \frac{1}{A} \frac{Q_{in}(s) - Q(s)}{s}$$

مشخصه منحصر بفرد تابع تبدیل داشتن قطب در مبدأ است. از آنجا که تغییر پله خواه در \bar{q}_{in} یا \bar{q} منجر به پاسخ شیب در \bar{h} می‌شود، بهره حالت یکنواخت وجود ندارد.

برای آنکه ببینیم چطور یک تانک شبیه یک خازن عمل می‌کند، در نظر بگیرید که دبی جریان ورودی ثابت بوده و فقط پمپی با دبی متغیر در خروجی داشته باشیم. تابع تبدیل بصورت زیر خواهد بود:

$$H(s) = \frac{-Q(s)}{As}$$

اگر بهره دلیل جریان پمپ کم شود ارتفاع مایع در تانک افزایش خواهد یافت تا سر ریز شود. مشابهاً، اگر سرعت پمپ افزایش یابد، تانک کاملاً تخلیه شده و در هر صورت به شرایط حالت پایا نخواهد رسید.

۲-۳ مدل‌های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم



تا بحال مثالی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خصوصا آنهایی که رفتار نوسانی بروز می‌دهند نداشته‌ایم. یکی از دلایل را می‌توان در نوع رفتار فرایندها جستجو کرد که معمولا رفتاری خود-تنظیم دارند. یک رفتار نوسانی معمولا حاصل استفاده از کنترل کننده است، و آن را در مباحث کنترلی مشاهده خواهیم کرد. در بحث حاضر چند تعریف مهم را ارائه خواهیم داد. مدلی که به معادله درجه دوم منجر می‌شود

$$a_r \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bx(t) \quad , \quad a_r \neq 0 \quad , \quad y'(0) = y(0) = 0 \quad (15-3)$$

معمولا بصورت زیر بازآرایی می‌شود

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = Kx(t) \quad , \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 x(t) \quad (16-3)$$

که

$$\tau^2 = \frac{a_r}{a_0} \quad , \quad 2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad , \quad \omega_n = \frac{1}{\tau}$$

توابع تبدیل متناظر (۱۶-۳) عبارتند از:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (17-3)$$

نمادها عبارتند از

τ : دوره تناوب طبیعی نوسان^{۱۳}

ω_n : فرکانس طبیعی^{۱۴} (کم میرا)

ζ : ضریب میرایی^{۱۵} (علاوه بر این نسبت میرایی^{۱۶} و فاکتور میرایی^{۱۷} هم نامیده می‌شود)

K : بهره حالت یکنواخت^{۱۸}

چند جمله‌ای مشخصه عبارتست از:

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = (s - p_1)(s - p_2) \quad (18-3)$$

که قطب‌ها عبارتند از:

$$p_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad (19-3)$$

برای یک فرایند (یا سیستم) پایدار^{۱۹}، از آنجا که $\tau > 0$ است (در غیر اینصورت از نظر فیزیکی بی‌معنی است)، باید $\zeta > 0$ باشد. علاوه بر این، محل قطب‌ها در صفحه مختلط و به تبع آن پاسخ زمانی، بسته به مقدار ζ دارای چهار حالت متفاوت خواهد بود: این حالات عبارتند از:

دو قطب حقیقی منفرد. در اینجا چند جمله‌ای مشخصه بصورت جملاتی از ثوابت زمانی τ_1 و τ_2 بصورت زیر است:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (20-3) \quad \begin{array}{l} \zeta > 1 \\ \text{پرمیرا}^{20} \end{array}$$

قطب‌های حقیقی یاد شده در $-1/\tau_1$ و $-1/\tau_2$ است.

دو قطب تکراری در $-1/\tau$. دوره تناوب طبیعی τ می‌تواند بعنوان «ثابت زمانی» در نظر گرفته شود زیرا در جمله‌نمایی حضور دارد. در حقیقت، همانطور که در مثال ۲-۹ بررسی شده است، پاسخ زمانی بصورت تمام و کمال نمایی نیست. این مسئله در حل زمانی (۳-۲۲) نیز تأیید شده است.

$\zeta = 1$
میرای بحرانی^{۲۱}



دو قطب مختلط مزدوج. همچنین می‌نویسیم: $\sqrt{\zeta^2 - 1} = z\sqrt{1 - \zeta^2}$. مهم است بدانیم که نماد τ در اینجا ثابت زمانی نیست. قسمت حقیقی قطب در $(-3-19)$ برابر $-\zeta/\tau$ است و نمایانگر نحوه میرایی جمله‌نمایی در $(3-23)$ است. از این رو ثابت زمانی برابر است با τ/ζ .

$0 < \zeta < 1$
کم میرا^{۲۲}

دو قطب مزدوج موهومی خالص با فرکانس $\omega_n = 1/\tau$. این معادل نوسانی غیر میرا بوده که به ω_n فرکانس طبیعی گفته می‌شود.

$\zeta = 0$
نوسان دائم^{۲۳}

۳-۲-۱ پاسخ پله حوزه زمان

ورودی پله $x(t) = Mu(t)$ و یا $X(s) = M/s$ را که به یک سیستم مرتبه دوم در حالت‌های مختلف ζ اعمال می‌شود، در نظر بگیرید. برای حالت‌های متفاوت می‌توان پاسخ خروجی $y(t)$ را بدست آورد. بندرت از این نتایج استفاده می‌شود و فقط بعنوان مرجع بیان شده‌اند. برای حالت کم میرا، در بخش بعد جهت خصوصیات مشخصه از پاسخ حوزه زمان استفاده خواهد شد.

پاسخ در مقایسه با دو حالت میرای بحرانی و کم میرا کندتر است:

$$y(t) = MK \left[1 - e^{-\zeta t/\tau} \left(\cosh \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} t + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} t \right) \right] \quad (21-3) \quad \zeta > 1$$

پرمیرا

این نحوه نگارش بیش از اندازه پیچیده است. می‌توانید بسادگی از جملات نمایی $e^{-t/\tau}$ و $e^{-t/\tau}$ استفاده کنید.

پاسخ آن سریعترین پاسخ غیر نوسانی است.

$$y(t) = MK \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] u(t) \quad (22-3) \quad \zeta = 1$$

میرای
بحرانی

پاسخ در ابتدا سریع بوده و از مقدار نهایی فراتر می‌رود. سپس با نوسان به مقدار نهایی میرا می‌شود. هر چه ζ کوچکتر باشد، نوسانات بیشتر بوده و بیشتر در سیستم می‌ماند.

$$y(t) = MK \left[1 - e^{-\zeta t/\tau} \left(\cos \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau} t \right) \right] \quad (23-3) \quad 0 \leq \zeta < 1$$

کم میرا

این معادله با بازآرایی به معادله زیر منجر می‌شود:

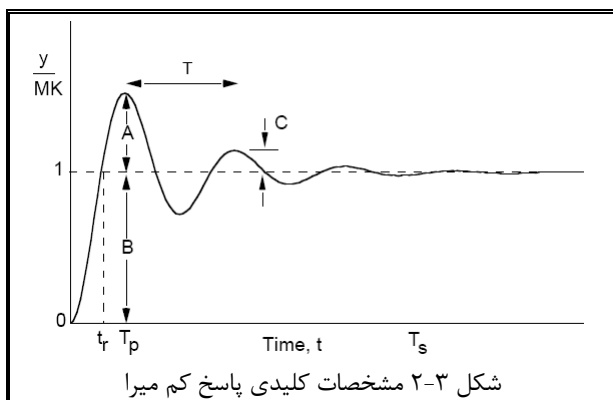
$$y(t) = MK \left[1 - \frac{e^{-\zeta t/\tau}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau} t + \phi \right) \right], \quad \phi = \cos^{-1} \zeta \quad (23-3) \quad \text{الف}$$

۳-۲-۲ خصوصیات حوزه زمان پاسخ پله کم میرا

از پاسخ پله کم میرا ($0 \leq \zeta < 1$)، خصوصیات مشخصه رفتاری مشخص شده در شکل ۳-۲ بدست می‌آید. از دو جهت این مشخصات مفیدند: (۱) برای بدست آوردن دوره تناوب طبیعی و ضریب میرایی از روی داده‌های تجربی، (۲) طراحی مشخصات رفتاری دینامیکی سیستم کنترل.

فرارفت^{۲۴}:

با مقادیر A و B مشخص شده در شکل ۳-۲:





$$\frac{A}{B} = OS = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (24-3)$$

ما در اینجا فقط اولین فرارفت یا بیشینه در پاسخ را محاسبه می‌کنیم. با کاهش ζ فرارفت افزایش پیدا می‌کند. با رسیدن ζ به یک، فرارفت صفر خواهد شد.

زمان رسیدن به حداکثر مقدار پاسخ (زمان اوج^{۲۵}) برابر است با:

$$T_p = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (25-3)$$

زمان اوج با کاهش ζ کوچکتر می‌شود و برای $\zeta \geq 1$ بی‌معنی است. زمان خیز^{۲۶} (زمانی که برای اولین بار پاسخ به مقدار نهایی می‌رسد) را همچنین می‌توان بصورت زیر محاسبه نمود:

$$t_r = \frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \cos^{-1}\zeta) = \frac{(\pi - \cos^{-1}\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (26-3)$$

فرکانس (یا دوره تناوب نوسان)

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \xrightarrow{T = \frac{2\pi}{\omega}} T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (27-3)$$

توجه شود که $T = 2T_p$ و واحد فرکانس رادیان بر واحد زمان است.

زمان نشست^{۲۷}

قسمت حقیقی یک قطب مختلط در (۱۹-۳) برابر $-\zeta/\tau$ است بدین مفهوم که تابع نمایی $e^{-\zeta t/\tau}$ در (۲۳-۳) نوسانات را وادار به میرا شدن به سمت صفر می‌کند. اگر با تابع تبدیل مرتبه اول مقایسه کنیم، دیده می‌شود که به جای ثابت زمانی τ/ζ قرار گرفته است. از این رو به τ/ζ ثابت زمانی تابع تبدیل مرتبه دوم کم میرا گفته می‌شود. می‌دانیم پس از گذشت سه ثابت زمانی پاسخ سیستم مرتبه اول به ۹۵٪ و پس از چهار ثابت زمانی به ۹۸٪ مقدار نهایی می‌رسد. پس برای نشست بین $\pm 5\%$ مقدار نهایی، زمان لازم برابر است با:

$$T_s = \frac{3\tau}{\zeta} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (28-3 \text{ الف})$$

و برای انتخاب زمان نشست $\pm 2\%$ گذشتن زمانی برابر چهار ثابت زمانی لازم است یعنی:

$$T_s = \frac{4\tau}{\zeta} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (28-3 \text{ ب})$$

نسبت فروکش^{۲۸}

$$\frac{C}{A} = DR = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = (OS)^2 \quad (29-3)$$

نسبت فروکش مربع مقدار فرارفت است که هر دو کمیت فقط تابعی از ζ هستند. تعاریف C و A در شکل ۲-۳ داده شده‌اند.



۳-۳ فرایندهای همراه با تأخیر زمانی

تعداد زیادی از فرایندهای شیمی-فیزیکی شامل تأخیر زمانی بین ورودی و خروجی هستند. این تأخیر ممکن است بدلیل کندی یک حسگر برای عکس العمل و یا ناشی از حرکت سیالات از درون لوله‌ها باشد. یک **تأخیر زمانی**^{۲۹} ممکن است **زمان مرده**^{۳۰} و یا **تأخیر انتقالی**^{۳۱} نیز خوانده شود. در طراحی کنترل کننده، خروجی فرایند دارای تأخیر بسیاری از اطلاعات فعلی را بروز نمی‌دهد و کنترل آن را با مشکل مواجه می‌کند.

با مراجعه به (۲-۱۸) درمی‌یابیم که تأخیر زمانی دارای تابع تبدیل نمایی است. برای نمونه، مدل‌های مرتبه اول و دوم با تأخیر زمانی بصورت زیر هستند:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1}, \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

بسیاری از تئوری‌ها در کنترل کلاسیک طوری طراحی شده‌اند که فقط با چند جمله‌ای‌های s کار می‌کنند. بنابر این لازم است به گونه‌ای راهی برای کار کردن با توابع نمایی پیدا شود.

برای اعمال تأخیر زمانی در بررسی‌های کنترلی، از بسط تیلور^{۳۲} آن استفاده نمی‌شود بلکه از روشی استفاده می‌گردد که اصطلاحاً **تقریب Pade** گفته می‌شود. این تقریب از نسبتی از دو چند جمله‌ای برای این منظور استفاده می‌کند. ابتدا ترم نمایی تأخیر بصورت

$$e^{-t_d s} = \frac{e^{-(t_d/2)s}}{e^{(t_d/2)s}}$$

تقریب، تقریب مرتبه اول (۱/۱) است:

$$e^{-t_d s} \approx \frac{e^{-\left(\frac{t_d}{2}\right)s} \left(1 - \frac{t_d}{2}s\right)}{e^{\left(\frac{t_d}{2}\right)s} \left(1 + \frac{t_d}{2}s\right)} \quad (30-3)$$

این تعریف اهداف چندی را پوشش می‌دهد. جمله مخرج دارای یک قطب منفی در سمت چپ محور موهومی است که با تأثیر بر چند جمله‌ای مشخصه بر دینامیک تأثیر می‌گذارد. صورت یک صفر مثبت معرفی می‌کند که در سمت راست محور موهومی واقع است و ناپایداری سیستم کنترل در بهره‌های بالا رانشان می‌دهد (در مبحث پایداری مفصل در مورد آن بحث خواهیم کرد). دست آخر اینکه این تقریب از بسط مرتبه اول تیلور بمراتب دقیق‌تر است.

تقریب‌های مرتبه بالاتر هم وجود دارد. برای مثال تقریب مرتبه دو (۲/۲):

$$e^{-t_d s} \approx \frac{e^{-\left(\frac{t_d}{2}\right)s} (1 - \frac{t_d}{2}s + \frac{t_d^2}{6}s^2)}{e^{\left(\frac{t_d}{2}\right)s} (1 + \frac{t_d}{2}s + \frac{t_d^2}{6}s^2)} \quad (31-3)$$

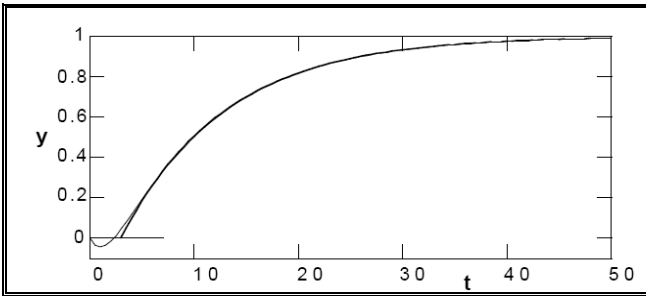
تذکر دوباره اینکه این فرم دو قطب در سمت چپ و حداقل یک صفر در سمت راست صفحه مختلط اضافه می‌کند. در اینجا، مهمترین خواسته مرور خواص تقریب Pade است که با استفاده از شبیه سازی عددی انجام خواهد شد.

مثال ۳-۲: با استفاده از تقریب مرتبه اول Pade، پاسخ پله فرایند مرتبه اول همراه با تأخیر زیر را رسم نمایید:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{e^{-3s}}{10s + 1}$$

با استفاده از (۳۰-۳)، می‌توان یک نمودار با تقریب زیر بدست آورد:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-1.5s + 1}{(10s + 1)(1.5s + 1)}$$



نتیجه، نموداری با خط باریک در شکل روبروست. به پاسخ معکوس در $t=0$ توجه کنید. این رفتار یک تقریب Pade مرتبه اول است و گریز ناپذیر. با انتخاب تقریب Pade مرتبه دو نتایج بهبود خواهند داشت. (بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.)
در مقایسه با تابع تبدیل اولیه (خط پررنگ)، تقریب تابع تأخیر در زمان‌های بزرگ قابل قبول است.

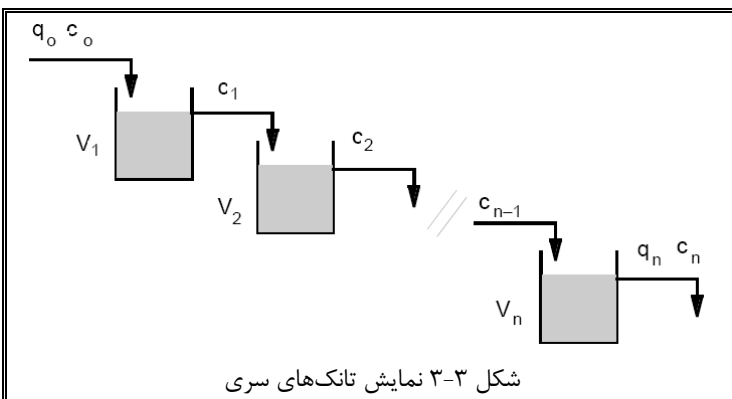
برای ساختن منحنی پررنگ نتایج بدست آمده از تابع تبدیل بدون تأخیر به اندازه سه واحد در زمان جابجا شده است ($t_d = 3$).
فرمان‌های Matlab بصورت زیر است:

```
td=3;
P1=tf([-td/2 1],[td/2 1]); %First order Padé approximation
t=0:0.5:50;
taup=10;
G1=tf(1,[taup 1]);
y1=step(G1*P1,t); %y1 is first order with Padé approximation of dead time
y2=step(G1,t);
t2=t+td; %Shift the time axis for the actual time delay function
plot(t,y1,'--', t2,y2);
```

وقت آن است که چند فرایند مرتبه بالاتر^{۳۳} و پیچیده بررسی شوند. باید بخاطر آوریم که تمام سیستم‌های خطی و یا خطی شده مراتب بالاتر قابل شکستن به واحدهای کوچکتر مرتبه اول و دوم هستند. دیگر فرایندهای «پیچیده» در حالی که کاملاً خطی باشند، نظیر تانک‌های تداخلی، فقط به صورت مسائلی ریاضی در مبحث معادلات دیفرانسیل دوتایی (فضای حالت^{۳۴}) تبدیل می‌گردند. بخش بعد به این فرایندها می‌پردازد (در کنترل ۲ بحث خواهد شد).

۳-۴ فرایندهای مرتبه بالاتر و تقریب‌ها

فرایندهای مرحله‌ای در مهندسی شیمی (مانند برج تقطیر، راکتورهای پشت سر هم و غیره) منجر به مدل‌های مرتبه بالاتر می‌گردد. مدل‌های مرتبه بالا از پشت سر هم قرارگرفتن عناصر مرتبه اول بوجود می‌آیند. در این مبحث برای به نمایش در آوردن پاسخ منتج، که کندتر است، از محاسبات عددی (در اینجا از نرم‌افزار Matlab) استفاده می‌گردد تا نتایج حاصل در مثال ۲-۹ تأیید گردد. تقریب



پاسخ توابع تبدیل مرتبه بالا با توابع تبدیل مرتبه پایین‌تر همراه با تأخیر در ادامه خواهد آمد. مثالی از دو تانک تداخلی در نهایت بحث می‌شود.

۳-۴-۱ تانک‌های سری ساده

یک سری از مخازن کاملاً مخلوط که دبی جریان و حجم تک تک آنها ثابت است را مطابق شکل ۳-۳ در نظر بگیرید. موازنه جرمی دو تانک اول (بعنوان نمونه) همانطور که در بخش ۲-۸-۱ گفته شد بصورت زیر است:

$$\tau_1 \frac{dc_1}{dt} = c_0 - c_1, \quad \tau_1 = \frac{V_1}{q_0} \quad (32-3)$$

$$\tau_r \frac{dc_r}{dt} = c_1 - c_r, \quad \tau_r = \frac{V_r}{q_0} \quad (33-3)$$



مجدداً با مراجعه به بخش ۲-۸-۱، تبدیل لاپلاس موازنه جرم با متغیرهای انحرافی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{\tau_1 s + 1}, \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{\tau_2 s + 1} \quad (34-3)$$

اثر تغییر $C_0(t)$ در غلظت خروجی مخزن دوم توسط رابطه زیر ارزیابی می‌شود:

$$\frac{C_2}{C_0} = \frac{C_2}{C_1} \frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)} \quad (35-3)$$

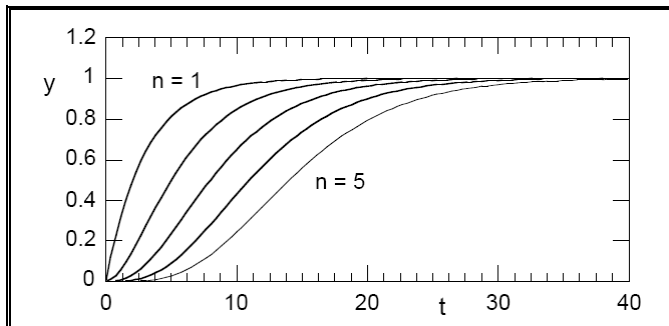
واضح است که برای پاسخ تانک n ام به تغییر در $C_0(t)$ خواهیم داشت:

$$\frac{C_n}{C_0} = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_n s + 1)} \quad (36-3)$$

در این مثال بهره‌ر حالت یکنواخت یک است که کاملاً واضح است. اگر تغییری در غلظت رنگ جریان ورودی روی دهد، نهایتاً همه تانک‌ها همان غلظت رنگ را خواهند داشت. بعلاوه، هر چه تانک بیشتری در مسیر بصورت سری باشد، زمان بیشتری طول خواهد کشید تا تانک آخر تغییرات اعمال شده در تانک اول را «ببیند». ما می‌گوییم هر چه تعداد تانک‌های سری بیشتر باشد پاسخ فرایند کلی کندتر خواهد بود. فرایندهایی که حاصل ضرب چند فرایند مرتبه اول هستند را چندطرفیتی نیز می‌گویند. سر انجام، اگر همه تانک‌ها دارای حجم یکسانی باشند، $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_n = \tau$ و معادله (۳۶-۳) می‌شود:

$$\frac{C_n}{C_0} = \frac{1}{(\tau s + 1)^n} \quad (37-3)$$

این سناریو در عمل کمتر اتفاق می‌افتد ولی برای کتاب مرجع دانشجویی مثال خوبی است.



مثال ۳-۳: از معادله (۳۷-۳) استفاده کنید و نشان دهید که پاسخ پله $C_n(t)$ کند و کندتر می‌شود وقتی n از ۱ تا ۵ تغییر می‌کند.

استفاده از Matlab برای حل این مسئله بسیار ساده است. فرمان‌های زیر شکل روبرو را می‌سازند:

```
tau=3; %Just an arbitrary time constant
G=tf(1,[tau 1]);
```

```
step(G); %First order function unit step response
hold
step(G*G); %Second order response
step(G*G*G); %Third order response
step(G*G*G*G); %Fourth order response
step(G*G*G*G*G); %Fifth order response
```

واضح است که هر چه n افزایش پیدا می‌کند، همانطور که در مثال ۲-۹ هم نشان داده شد، پاسخ کندتر می‌شود. اگر از داده‌ها در زمان‌های اولیه صرف نظر شود، پاسخ می‌تواند با یک تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر تقریب زده شود. بخش بعدی این موضوع را از لحاظ تئوریک بحث می‌کند.

۳-۴-۲ تقریب با توابع تبدیل مرتبه پایین‌تر همراه تأخیر زمانی

در ادامه مثال ۳-۳ و با استفاده از نتایج مثال ۲-۶ و توضیحاتی که در مورد قطب‌های فراگیر در بخش ۲-۷ داده شد، می‌خواهیم بدانیم چگونه می‌توان توابع تبدیل را تقریب زد.



فرض کنید تابع تبدیلی داریم که قبلاً به کسرهای جزئی تبدیل شده است. چنانچه ثابت زمانی یکی از این کسرها با ثوابت زمانی بقیه تفاوت فاحشی داشته باشد، می‌توان از اثرات کسرهایی با ثابت زمانی کم در پاسخ صرف نظر کرد و فقط کسر مربوط به ثابت زمانی بزرگ را بعنوان قطب فراگیر مورد بررسی قرار داد. این عمل همان تقریب **مدل کاهش یافته** است. با استفاده از نتایجی که در مثال ۳-۳ بدست آوردیم، نیاز به افزودن یک تأخیر نیز احساس می‌شود. غایت استفاده از این روش «یک تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر» خواهد بود که لزوماً همیشه پاسخگو نخواهد بود. اما این تمام کاری است که ما هنگام تنظیم کنترل کننده بروش تجربی استفاده خواهیم کرد.

یک تابع تبدیل مرتبه دو همراه با تأخیر غالباً تخمین بهتری بوده و می‌توانیم سریعاً یک تقریب از تابع تبدیل فرایند داشته باشیم. برای این منظور فرض کنید که یک فرایند مرتبه n را بتوانیم n فرایند مرتبه اول سری با ثابت زمانی $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ در نظر بگیریم. همچنین فرض کنید که دو ثابت زمانی اول یعنی τ_1 و τ_2 فراگیر باشند، ما تقریب فرایند را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$G(s) \approx \frac{Ke^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad t_d = \sum_{k=3}^n \tau_k \quad (3-38)$$

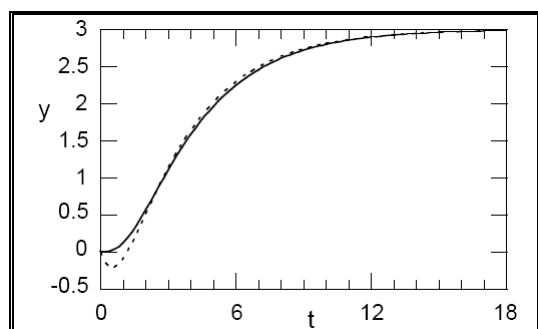
مقدار تأخیر مجموع بقیه ثابت زمانی‌ها خواهد بود. این ایده برای تقریب با تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر نیز می‌تواند استفاده شود.

مثال ۳-۴: ساده‌ترین تقریب مرتبه پایین‌تر تابع تبدیل زیر را بدست آورید.

$$\frac{Y}{X} = \frac{3}{(0.1s+1)(0.5s+1)(s+1)(3s+1)}$$

در این مثال قطب فراگیر $-1/3$ است که متناظر با بزرگترین ثابت زمانی یعنی 3 می‌باشد. از اینرو، تقریب تابع تبدیل فرایند را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{Y}{X} = \frac{3e^{-1/6s}}{(3s+1)}$$

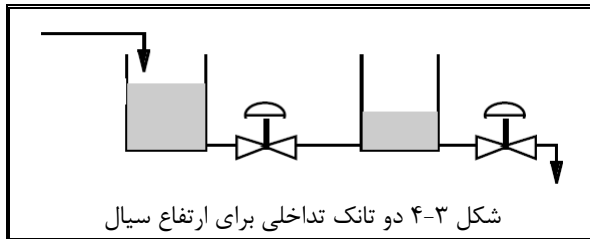


مقدار $1/6$ حاصل جمع 0.1 و 0.5 و 1 است. پاسخ پله تابع تبدیل اصلی (خط پر رنگ) و تقریب مرتبه اول همراه با تأخیر (نقطه چین) در شکل ترسیم شده است. پاسخ مرتبه اول همراه با تأخیر بوسیله تقریب Pade رسم شده است. با این حال، برای زمان‌های طولانی، تقریب قابل قبول است. این نشان می‌دهد که قطب $-1/3$ فراگیر است.

فرمان‌های Matlab برای رسم نمودار به قرار زیر است:

```
p2=conv([1 1],[3 1]);
p4=conv( conv(p2,[0.5 1]), [0.1 1] );
G4=tf(3,p4); %The original full order function
t=0:0.2:18;
y4=step(G4,t); %Unit step response
td=1+0.1+0.5; %Approximate dead time
P1=tf([-td/2 1],[td/2 1]);
G1=tf(3,[3 1]);
y1=step(P1*G1,t);
plot(t,y1,t,y4)
```

اگر بخواهیم فرمول (۳-۳۸) را استفاده کنیم، باید تابع تبدیل واقعی را با یک تابع تبدیل مرتبه دوم همراه با تأخیر تقریب بزنیم که در اینصورت ثوابت زمانی برابر 1 و 3 و تأخیر برابر 0.6 خواهد بود. مشابهاً آنرا رسم کرده و نشان دهید که این تقریب دقیق‌تر است.



برای تکمیل بحث، معادلات موازنه را برای حالتی که دو معادله دیفرانسیل با هم درگیر می‌شوند را توضیح می‌دهیم. مثال معمول این حالت دو تانک به هم پیوسته هستند که یک شیر بین آنها قرار دارد (شکل ۳-۴). بنابر این جریان بین دو تانک به اختلاف ارتفاع مایع در تانک‌ها بستگی دارد. وقتی دانسیته ثابت باشد، برای تانک اول موازنه جرم بصورت زیر است:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_0 - \left(\frac{h_1 - h_r}{R_1} \right) \quad (39-3)$$

و برای تانک دوم:

$$A_r \frac{dh_r}{dt} = \left(\frac{h_1 - h_r}{R_1} \right) - \frac{h_r}{R_r} \quad (40-3)$$

در اینجا، جریان‌ها از درون شیرها با مقاومت ثابت R_1 و R_r مدل شده‌اند. با اندک تغییراتی در معادلات و بدلیل آنکه معادلات خطی هستند، براحتی با متغیرهای انحرافی (بدون استفاده از خط در بالای متغیر) بصورت زیر نوشته خواهند شد:

$$\tau_1 \frac{dh_1}{dt} = -h_1 + h_r + R_1 q_0, \quad h_1(0) = 0 \quad (41-3)$$

$$\tau_r \frac{dh_r}{dt} = \frac{R_r}{R_1} h_1 - \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) h_r, \quad h_r(0) = 0 \quad (42-3)$$

که در آنها $\tau_1 = A_1 R_1$ و $\tau_r = A_r R_r$. با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادلات:

$$(\tau_1 s + 1) H_1 - H_r = R_1 q_0 \quad (43-3)$$

$$\left[\tau_r s + 1 + \frac{R_r}{R_1} \right] H_r - \frac{R_r}{R_1} H_1 = 0 \quad (44-3)$$

توابع تبدیل بین ارتفاع تانک‌ها و دبی جریان ورودی، از حل توأم معادلات (۴۳-۳) و (۴۴-۳) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{H_1}{Q_0} = \frac{R_1 (\tau_r s + 1) + R_r}{p(s)}, \quad \frac{H_r}{Q_0} = \frac{R_r}{p(s)} \quad (45-3)$$

که چند جمله‌ای مشخصه آنها عبارتست از:

$$p(s) = \tau_1 \tau_r s^2 + (\tau_1 + \tau_r + A_1 R_r) s + 1 \quad (46-3)$$

۳-۵ اثر صفرها در پاسخ زمانی

ذات دینامیک با قطب‌ها مدیریت می‌شود اما صفرها نقش برجسته‌ای در تغییر ضرایب پاسخ زمانی دارند که می‌توانند مشخصات پاسخ را پالایش کنند. این همان نکته‌ای است که تلاش کردیم در مثال‌های بخش ۲-۵ به آن بپردازیم. دو مثال از اثرات صفرها عبارتند از: عناصر پیش‌فاز/پس‌فاز و مجموع دو تابع تبدیل موازی.

۳-۵-۱ عناصر پیش‌فاز/پس‌فاز^{۳۶}

عناصر پیش‌فاز/پس‌فاز توابعی هستند که از حاصلضرب یک پیش‌فاز مرتبه اول در یک پس‌فاز مرتبه اول بدست می‌آیند:



$$\frac{Y}{X} = \frac{\tau_z s + 1}{\tau s + 1} \quad (47-3)$$

مجبوریم تا فصل مربوط به کنترل کننده صبر کنیم تا بگوییم این مبنای کنترل کننده مشتقی است و زودتر از فصل پاسخ فرکانسی نمی‌توان قدردان جملات پیش‌فاز و یا پس‌فاز آن بود. در حال حاضر مروری سریع داریم بر پاسخ زمانی آن. وقتی ورودی به این عنصر پله واحد باشد یا $X = 1/s$ ، بعد از بسط کسرها جزئی خواهیم داشت:

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{s} - \frac{\tau_z - \tau}{\tau s + 1} \quad (48-3)$$

و با تبدیل معکوس از جدول تبدیل لاپلاس:

$$y(t) = \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_z}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] u(t) \quad (49-3)$$

در این پاسخ چندین مورد جالب است که باید مورد توجه قرار گیرد:

۱. تابع نمایی زمان فقط به τ وابسته است. عبارت دیگر

قطب تابع تبدیل $-1/\tau$ می‌باشد.

۲. با استفاده از معادله (۴۹-۳)، پاسخ زمانی واقعی به این

بستگی دارد که $\tau < \tau_z$ ، $\tau > \tau_z$ ، یا $\tau < 0$ (شکل ۵-۳).

۳. وقتی $\tau = \tau_z$ ، پاسخ زمانی فقط یک خط افقی است و

متناظر با $x(t) = u(t)$. از معادله (۴۷-۳) این بسادگی مشهود است که در این حالت $Y = X$ وقتی یک صفر برابر یک قطب شود اصطلاحاً گفته می‌شود که حذف قطب با صفر اتفاق افتاده است.

۴. مقدار خروجی $y(t)$ در زمان صفر، صفر نیست. این

تعجب برانگیز است که چطور امکان دارد که پاسخ معادله دیفرانسیلی با شرایط اولیه صفر، در لحظه صفر

مقداری غیر صفر باشد. این بدان دلیل است که در اینجا علاوه بر ورودی، نرخ تغییرات آن نیز بر پاسخ زمانی موثر است. پاسخ بهتری برای این مورد را می‌توان در مباحث فضای حالت جستجو کرد.

۳-۵-۲ توابع تبدیل موازی ^{۳۷}

پیشامدهایی اتفاق می‌افتند وقتی که فرایندهای پیچیده دارای دو تابع تبدیل رقیب (مخالف هم) باشند و ثابت زمانی آنها متفاوت باشد. یک مثال اینگونه فرایندها، افزایش دمای ورودی یک راکتور کاتالیستی لوله‌ای است که در آن واکنش گرمازا اتفاق می‌افتد. ابتدای افزایش درجه حرارت ورودی باعث می‌شود که مواد اولیه در ورودی کاهش یابند و درجه حرارت خروجی کمی کاهش می‌یابد. سپس در اثر افزایش زمان و افزایش نرخ واکنش درجه حرارت افزایش پیدا می‌کند.

برای مدل کردن این دینامیک غیرخطی و پیچیده، به موازنه جرم و انرژی نیاز است. در کنترل کلاسیک، معادلات حاصل با فرم خطی شده جایگزین می‌گردند تا تابع تبدیل حاصل مجموع دو تابع تبدیل موازی باشد:

$$\frac{Y}{X} = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \quad (50-3)$$

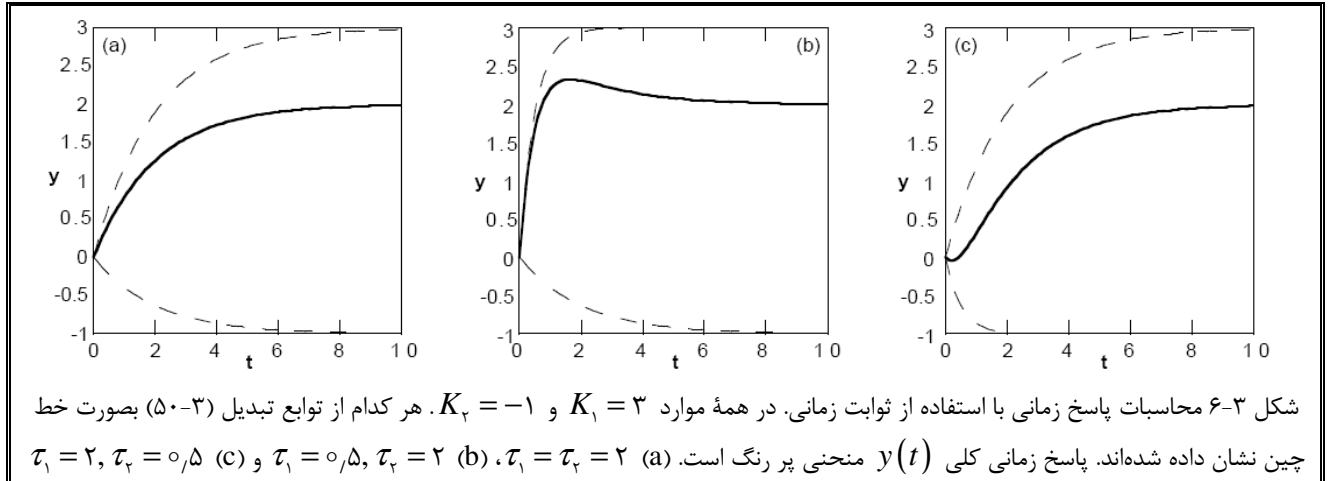
با ترکیب دو تابع تبدیل خواهیم داشت:



$$\frac{Y}{X} = \frac{K(\tau_z s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad K = K_1 + K_2, \quad \tau_z = \frac{K_1 \tau_2 + K_2 \tau_1}{K_1 + K_2} \quad (51-3)$$

طی شرایطی که دو تابع تبدیل اثر معکوس داشته باشند، باید بهره حالت یکنواخت یکی از آنها منفی باشد. در مثال زیر فرض می‌کنیم $K_2 < 0$.

بر مبنای معادله (51-3) پاسخ زمانی $y(t)$ باید کاملاً پرمیرا باشد. اما این لزوماً در اینجا صحیح نیست بخصوص وقتی که صفر مثبت (یا $\tau_z < 0$) داشته باشیم. با عملیات جبری می‌توان نشان داد که در چه شرایطی از K_i و τ_i چه صفری $(-1/\tau_z)$ و یا چه پاسخی خواهیم داشت. هر چند در اینجا قصد نداریم این کار را انجام دهیم. نکته کلیدی که در اینجا استفاده می‌کنیم اصل برهم نهی در مدل‌های خطی است. با این کار تصویری کلی از پاسخ زمانی بر مبنای (50-3) خواهیم ساخت.



شکل ۳-۶ محاسبات پاسخ زمانی با استفاده از ثوابت زمانی. در همه موارد $K_1 = 3$ و $K_2 = -1$. هر کدام از توابع تبدیل (50-3) بصورت خط چین نشان داده شده‌اند. پاسخ زمانی کلی $y(t)$ منحنی پر رنگ است. (a) $\tau_1 = \tau_2 = 2$, (b) $\tau_1 = 0.5, \tau_2 = 2$ و (c) $\tau_1 = 2, \tau_2 = 0.5$.

محاسبات عددی در شکل ۳-۶ نشان داده شده است. ورودی یک تابع پله واحد، $X = 1/s$ ، و دو بهره حالت یکنواخت $K_1 = 3$ و $K_2 = -1$ بطوریکه $|K_2| < |K_1|$. سه حالت در نظر می‌گیریم: (۱) τ_1 تقریباً برابر τ_2 است، (۲) $\tau_1 < \tau_2$ و (۳) $\tau_1 > \tau_2$. پاسخ کلی در حالت (۱) پرمیراست، اما در حالت (۲) فرارفت دارد و در حالت (۳) پاسخ معکوس اولیه. در نظر داشته باشید که بهره کلی هر سه حالت فوق $K = 2$ است.



- ¹ Dead time
- ² Reduced-order models
- ³ Time domain
- ⁴ Linear
- ⁵ Linearised
- ⁶ Partial fraction expansion
- ⁷ Multi-capacity
- ⁸ Dominant poles
- ⁹ Force function
- ¹⁰ Deviation variable
- ¹¹ Self-regulating
- ¹² Integrator
- ¹³ Natural period of oscillation
- ¹⁴ Natural frequency
- ¹⁵ Damping coefficient
- ¹⁶ Damping ratio
- ¹⁷ Damping factor
- ¹⁸ Steady-state gain
- ¹⁹ Stable
- ²⁰ Over-damped
- ²¹ Critically damped
- ²² Under-damped
- ²³ Permanent oscillation
- ²⁴ Overshoot
- ²⁵ Peak time
- ²⁶ Rise time
- ²⁷ Settling time
- ²⁸ Decay ratio
- ²⁹ Time lag
- ³⁰ Dead time
- ³¹ Transportation lag
- ³² Taylor expansion
- ³³ Higher order
- ³⁴ State space
- ³⁵ Interacting series tank
- ³⁶ Lead-lag
- ³⁷ Parallel transfer function



۴ نمایش فضای حالت^۱

با بررسی مسائل پیچیده‌تر محدودیت‌های نمایش تابع تبدیلی کاملاً نمایان می‌گردد. برای سیستم‌های پیچیده با چندین ورودی و خروجی، ماتریس‌های توابع تبدیل خیلی بد فرم و بی‌ریخت می‌شوند. روش انتخابی در کنترل مدرن «فضای حالت» است که متغیرهای حالت^۲ در حوزه زمان نمایش داده شده و معادلات مدل بصورت ماتریسی خواهند بود. نوشتن معادلات مدل به این صورت، بسادگی اجازه استفاده از تئوری‌های معادلات دیفرانسیل و جبر خطی را به ما خواهد داد. اشتباه بزرگی است اگر کسی بدون داشتن پس زمینه‌ای مطمئن در این تئوری‌ها اقدام به استفاده از کنترل مدرن بنماید. بهمین دلیل، تبحر در زمینه‌های ریاضی و کنترل بصورت همزمان لازم است. در ابتدا بدلیل عدم وجود یک چارچوب ریاضی مشخص، برای روشن شدن مطلب مثال‌های متعددی را مرور خواهیم کرد. کنترل فضای حالت پس از مطالعه تابع تبدیل حلقه بسته سیستم‌های کنترل پسخور کلاسیک در فصل ۹ بحث خواهد شد.

عمده مباحث این فصل:

- چگونگی نوشتن یک مدل در فضای حالت.
- فهم چگونگی ارتباط نمایش فضای حالت با نمایش تابع تبدیل.

۴-۱ مدل‌های فضای حالت

اکنون که شما احساس خوبی نسبت به توابع تبدیل دارید، قصد ما این است که بحث را کاملاً عوض کنیم. لازم به یاد آوری است که در این فصل ما هنوز هم با مدل‌های معادلات دیفرانسیل خطی شده کار خواهیم کرد. موقعی که مدل دارای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا و یا چندین معادله دیفرانسیل باشد، همیشه می‌توان آن را بصورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نوشت. برای نمایش در این حالت از متغیرهای تیره (Bold) استفاده خواهد شد. نحوه بدست آوردن آن‌ها را نیز در مثال‌های مطرح شده خواهیم آموخت. در مدل‌های فضای حالت، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بصورت استاندارد بفرم زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1-4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (2-4)$$

که \mathbf{x} بردار متغیرهای حالت، \mathbf{u} بردار ورودی و \mathbf{y} بردار خروجی است. مشتق نسبت به زمان با گذاشتن نقطه بر بالای \mathbf{x} نمایش داده شده است. بعلاوه، \mathbf{A} ماتریس فرایند، \mathbf{B} ماتریس ورودی، \mathbf{C} ماتریس خروجی، و \mathbf{D} ماتریس اثر مستقیم ورودی در خروجی است. معدود فرایندها و یا سیستم‌هایی وجود دارند که ورودی تأثیر مستقیمی در خروجی دارد. بنابر این معمولاً \mathbf{D} صفر است. هنگام توصیف یک مدل تک-ورودی تک-خروجی، \mathbf{u} ، y و D اسکالر خواهند بود. برای راحتی نمایش، از همان \mathbf{B} و \mathbf{C} استفاده خواهیم کرد، اما در نظر داشته باشید که در این مورد، \mathbf{B} یک بردار ستونی و \mathbf{C} یک بردار سطری است. اگر مرتبه \mathbf{x} برابر n باشد، \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{C} بترتیب $(n \times n)$ ، $(n \times 1)$ و $(1 \times n)$ خواهند بود.

تفکر پشت بیان مدل بصورت آنچه در معادلات (۱-۴) و (۲-۴) بیان شده است، استفاده از تئوری‌های سیستم خطی است. علاوه بر این، سیستم‌های پیچیده با این روش بصورت موثرتری تحلیل می‌گردند. روش منحصر بفردی برای تعریف متغیرهای حالت وجود ندارد. آنچه خواهیم گفت یک مورد از بی‌نهایت روش ممکن است.

مثال ۴-۱: نمایش فضای حالت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم که قبلاً در معادله (۳-۱۶) بیان شد، را بدست آورید:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = Ku(t)$$

چشم بسته می‌توان گفت که تابع تبدیل این معادله با شرایط اولیه صفر برابر است با:



$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

اکنون بصورتی دیگر مسئله را در نظر می‌گیریم. ابتدا، معادله دیفرانسیل را بصورت زیر بازنویسی کنید:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = Ku(t)$$

و متغیرهای حالت زیر را تعریف کنید:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$

با این تعاریف یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو بصورت زوج معادله دیفرانسیل مرتبه اول قابل بیان خواهد بود. با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{dx_2}{dt} = -2\zeta\omega_n x_2 - \omega_n^2 x_1 + Ku(t)$$

با قرار دادن نتایج بصورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

و برای خروجی:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

زیرا x_1 همان متغیر خروجی است. مقایسه نتایج بدست آمده با معادلات (۴-۱) و (۴-۲) نشان می‌دهد که:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

برای بدست آوردن مقادیر ویژه \mathbf{A} ، معادله مشخصه آن باید حل شود:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda(\lambda + 2\zeta\omega_n) + \omega_n^2 = 0$$

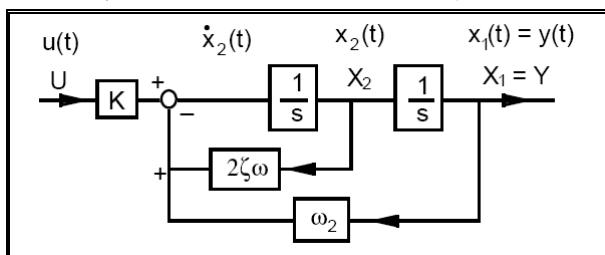
می‌توان از تابع `tf2ss()` در نرم‌افزار Matlab استفاده نمود تا تابع تبدیل داده شده به فرم فضای حالت نوشته شود:

```
z=0.5; wn=1.5; % Pick two sample numbers for • and •
p=[1 2*z*wn wn*wn];
[a,b,c,d]=tf2ss(wn*wn,p)
```

نتایج حاصل از این کد نویسی با آنچه ما بدست آوردیم کاملاً متفاوت است. این بدان دلیل است که همانطور که قبلاً هم گفتیم نمایش‌های متعددی از فضای حالت وجود دارد که همگی نتایج یکسانی دارند.

یک مشاهده مهم و فوری: چند جمله‌ای مشخصه ماتریس \mathbf{A} کاملاً با چند جمله‌ای مشخصه تابع تبدیل است. نیاز به گفتن نیست که مقادیر ویژه \mathbf{A} همان قطب‌های تابع تبدیل است. این تأکید مجددی است بر این که تکنیک‌های ریاضی گفته شده اطلاعات مشابهی را فراهم می‌نمایند. اگر جبر خطی را بیاد داشته باشید هرگز متعجب نخواهید شد.

مثال ۴-۲: نمودار جعبه‌ای نمایش فضای حالت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم که در مثال قبل بدست آمد، را رسم کنید.



نتیجه را می‌توانید در شکل روبرو ببینید. فهم این نمودار بسیار ساده خواهد بود اگر بدانیم که تابع تبدیل یک انتگرال‌گیر $1/s$ است. بنابراین این مشتق مرتبه دوم قبل از دو مرحله انتگرال‌گیری خواهد بود. اطلاعات حول نقطه جمع کننده هم همان جملات تشکیل دهنده معادله دیفرانسیل است. تابع تبدیل حاصله همانست که از روش تبدیل لاپلاس بدست می‌آید. ساده کردن این تابع تبدیل هم قبلاً در مثال ۲-۱۶ انجام شده است.



مثال ۳-۴: در این مثال، معادله دیفرانسیلی با ورودی پیچیده‌تری را در نظر می‌گیریم. نمایش فضای حالت معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 0.4 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + 3u, \quad y(0) = y'(0) = 0, u(0) = 0$$

تابع تبدیل این معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$\frac{Y}{U} = \frac{s+3}{s^2 + 0.4s + 1}$$

روشی که در اینجا استفاده خواهیم کرد بیشتر برای بتصویر کشیدن روند حل مسئله است و بدنبال عمومیت بخشیدن به آن نیستیم. متغیر X_1 بین Y و U را در نظر بگیرید بطوریکه:

$$\frac{Y}{U} = \frac{X_1}{U} \frac{Y}{X_1} = \left(\frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} \right) (s+3)$$

قسمت اول X_1/U مسئله‌ای ساده است که قبلاً هم حل شده است.

$$\frac{X_1}{U} = \left(\frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} \right)$$

که تابع تبدیل معادله دیفرانسیل زیر است:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 0.4 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = u$$

با استفاده از نتایج مثال ۱-۴ و تعریف $x_2 = dx_1/dt$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

برای قسمت دوم $Y/X_1 = (s+3)$ و اینکه تابع تبدیل معادله دیفرانسیل $y = \frac{dx_1}{dt} + 3x_1 = x_2 + 3x_1$ ، خواهیم داشت:

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

که شبیه معادله (۲-۴) است.

فرمان‌های Matlab برای این مثال بصورت زیر است:

```
q=[1 3];
p=[1 0.4 1];
roots(p)
[a,b,c,d]=tf2ss(q,p)
eig(a)
```

توضیحات داده شده در پایان مثال ۱-۴ در اینجا هم باید یادآوری گردد. نتایج در صورتی صحیح است که ریشه‌های چند جمله‌ای p و مقادیر ویژه ماتریس a باید برابر باشند (که در اینجا برای هر دو $-0.2 \pm 0.98j$). با عملیات معکوس هم می‌توان نتایج را چک کرد:

```
[q2,p2]=ss2tf(a,b,c,d,1)
```

مقادیر ضرایب چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج تابع تبدیل اولیه را باید در $q2$ و $p2$ یافت.

مثال ۴-۴: نمایش فضای حالت تابع تبدیل پیش‌فاز/پس‌فاز زیر را بدست آورید:

$$\frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s+3}$$

با استفاده از توضیح مثال ۳-۴ داریم:

$$\frac{Y}{U} = \frac{X}{U} \frac{Y}{X} = \left(\frac{1}{s+3} \right) (s+2)$$

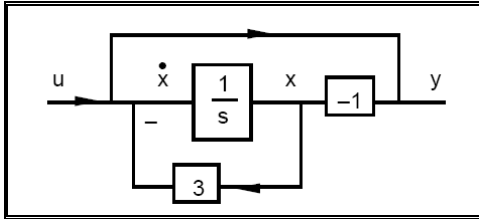


از $X/U = 1/(s+3)$ خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dt} = -3x + u$$

و از $Y/X = (s+2)$ داریم:

$$y = \frac{dx}{dt} + 2x \rightarrow y = (-3x + u) + 2x = -x + u$$



بنابر این تمام ضرایب در معادلات (۱-۴) و (۲-۴) اسکالر بوده و برابرند با: $A = -3$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 1$. معادلات بدست آمده در نمودار جعبه‌ای شکل روبرو به نمایش در آمده‌اند.

توجه کنید که ضریب D غیر صفر است بدین مفهوم که در عناصر

پیش‌فاز/پس‌فاز ورودی اثر آبی بر خروجی دارد. به همین دلیل علی‌رغم اینکه متغیر حالت x مقدار اولیه صفر دارد، بدین معنی نیست که خروجی y هم مقدار اولیه صفر دارد. این تحلیل معمای پاسخ پرشی (مثبت و یا منفی) این تابع تبدیل در معادله (۳-۴۹) را توضیح می‌دهد.

برای آنکه از نرم‌افزار Matlab استفاده کنید، فرمان زیر را اجرا نمایید:

```
[a,b,c,d]=tf2ss([1 2], [1 3])
```

در دو مثال بعدی نشان خواهیم داد که چگونه مدل‌های فضای حالت می‌توانند مسائل چند-ورودی چند-خروجی (MIMO) را تحلیل نمایند. با مثالی نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان اطلاعات یک نمودار جعبه‌ای را به مدل فضای حالت برگرداند. علاوه بر این، تحلیل مسائل پیچیده با Matlab را خواهیم آموخت.

مثال ۴-۵: نمایش فضای حالت دو راکتور CSTR سری را بدست آورید. فرض کنید که واکنش در هر دو راکتور از مرتبه اول است. حجم راکتورها ثابت بوده اما دبی حجمی ورودی و غلظت ورودی توابعی از زمان هستند. این مثال را آوردم تا نشان دهیم که چگونه مدل‌های پیچیده توسط نمایش فضای حالت قابل تحلیل هستند. ابتدا، موازنه جرمی جزء A در راکتورهای شماره ۱ و ۲ را می‌نویسیم:

$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = q(c_0 - c_1) - V_1 k_1 c_1$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = q(c_1 - c_2) - V_2 k_2 c_2$$

از آنجا که q و c_0 توابع ورودی هستند، معادلات خطی شده در حالت انحرافی با شرایط اولیه صفر برابرند با:

$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = q_s c_0 + (c_{0,s} - c_{1,s}) q - (q_s + V_1 k_1) c_1$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = q_s c_1 + (c_{1,s} - c_{2,s}) q - (q_s + V_2 k_2) c_2$$

مراحل حذف شده همان مراحل هستند که در مثال ۲-۱۱ مرور شدند. با تقسیم معادلات بر حجم هر راکتور و تعریف زمان اقامت $\tau_1 = V_1/q_s$ و $\tau_2 = V_2/q_s$ خواهیم داشت:

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{1}{\tau_1} c_0 + \left(\frac{c_{0,s} - c_{1,s}}{V_1} \right) q - \left(\frac{1}{\tau_1} + k_1 \right) c_1$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{\tau_2} c_1 + \left(\frac{c_{1,s} - c_{2,s}}{V_2} \right) q - \left(\frac{1}{\tau_2} + k_2 \right) c_2$$

تا اینجا، تمامی مراحل شبیه آن چیزهایی است که در فصل دوم یاد گرفتیم. در حقیقت، حالا می‌توانیم با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادلات، توابع تبدیل آنها را بدست آوریم. اما در مدل‌های فضای حالت، ما باید دو معادله دیفرانسیل خطی شده را بصورت ماتریسی نمایش دهیم. مشابه معادله (۴-۱) داریم:



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_1} + k_1\right) & 0 \\ \frac{1}{\tau_r} & -\left(\frac{1}{\tau_r} + k_r\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_1} & \left(\frac{c_{0s} - c_{1s}}{V_1}\right) \\ 0 & \left(\frac{c_{1s} - c_{rs}}{V_r}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ q \end{bmatrix}$$

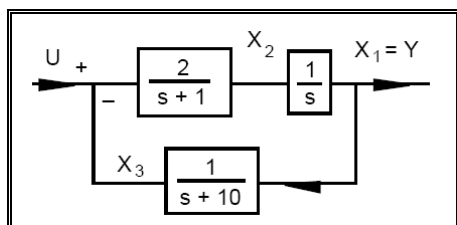
خروجی y در معادله (۴-۲) در صورتی که دو خروجی تعریف شود، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_r \end{bmatrix}$$

در حالتی که یکی از خروجی‌ها مد نظر باشد، معمولا c_r برای کنترل انتخاب می‌گردد و لذا خروجی بصورت زیر تعریف خواهد شد:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_r \end{bmatrix}$$

که c_r تنها خروجی خواهد بود.



مثال ۴-۶: تابع تبدیل Y/U و مدل فضای حالت متناظر نمودار جعبه‌ای روبرو

را بیابید.

از مبحث ساده سازی نمودارهای جعبه‌ای در فصل ۲ به خاطر دارید که:

$$\frac{Y}{U} = \frac{\frac{2}{s(s+1)}}{1 + \frac{2}{s(s+1)(s+10)}}$$

و یا ساده‌تر:

$$\frac{Y}{U} = \frac{2(s+10)}{s^3 + 11s^2 + 10s + 2}$$

این تابع تبدیل دارای قطب‌هایی در $-0,29$ ، $-0,69$ و $-10,02$ دارد. (از Matlab برای بدست آوردن قطب‌ها استفاده شده است).

برای بدست آوردن نمایش فضای حالت، یک راه مصور، مشخص کردن نقاطی بر روی نمودار جعبه‌ای است که بتوان آنها را متغیر حالت در نظر گرفت و توابع تبدیل ارتباط آنها با هم را نوشت. در این مثال، با توجه به نمودار داده شده:

$$\frac{X_1}{X_r} = \frac{1}{s}, \quad \frac{X_r}{U - X_r} = \frac{2}{s+1}, \quad \frac{X_r}{X_1} = \frac{1}{s+10}, \quad Y = X_1$$

با بازآرایی هر یک از سه تابع تبدیل و نوشتن معادله حوزه زمان آن داریم:

$$sX_1 = X_r \quad \rightarrow \quad \frac{dx_1}{dt} = x_r$$

$$sX_r = -X_r - 2X_r + 2U \quad \rightarrow \quad \frac{dx_r}{dt} = -x_r - 2x_r + 2u$$

$$sX_r = -10X_r + X_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_r}{dt} = -10x_r + x_1$$

ادامه آن دیگر بدیهی است. معادلات دیفرانسیل بدست آمده را بصورت ماتریسی نمایش می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \\ x_r \end{bmatrix}$$



با امتحان کردن مقادیر ویژه ماتریس \mathbf{A} در Matlab خواهید دید که برابر هستند با $0.29 - j0.69$ و $0.29 + j0.69$. این مقادیر دقیقاً با قطب‌های حلقه بسته برابرند. یک یادآوری مهم: معادله نمایش فضای حالت بدست آمده دارای شرایط اولیه صفر است، $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. این نتیجه منطقی بدست آوردن نمایش فضای حالت از تابع تبدیل است. در غیر اینصورت، معادله (۴-۱) قابل اعمال نخواهد بود.

۴-۲ ارتباط با مدل‌های تابع تبدیل

از مثال قبل دیده می‌شود که چرا ابزارهای ریاضی اولیه در کنترل مدرن بر مبنای تئوری‌های سیستم خطی^۳ و تحلیل حوزه زمان هستند. قسمتی از گیجی در یادگیری این تکنیک‌های پیشرفته‌تر آنست که ارتباط اصلی بین آنها و تبدیل لاپلاس برقرار نیست و نیاز به ارتباط دادن این دو بهم احساس می‌شود. در قسمت روشن مسئله، اگر بتوانیم مدل فضای حالت را به شکل تابع تبدیل درآوریم، خواهیم توانست از تکنیک‌های کنترل کلاسیک استفاده کنیم. دو مثال در فصل ۹ چگونگی استفاده همزمان تکنیک‌های کنترل کلاسیک و فضای حالت را به تصویر می‌کشند. تبدیل لاپلاس معادله ماتریسی در (۴-۱) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (۳-۴)$$

که $\mathbf{X}(s)$ بردار تبدیل لاپلاس تک تک عناصر متغیر حالت $\mathbf{x}(t)$ می‌باشد. \mathbf{X} با استفاده از معادله (۳-۴) بصورت صریح بدست می‌آید:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) = \Phi(s)\mathbf{B}U(s) \quad (۴-۴)$$

که

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (۵-۴)$$

ماتریس حل نامیده می‌شود. بطور کلی‌تر، به تبدیل معکوس ماتریس حل^۴، ماتریس گذرای حالت^۵ (یا ماتریس بنیادی^۶) گفته می‌شود:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} \quad (۶-۴)$$

جهت جلوگیری از اشتباه یادآوری می‌شود که برای تابع زمانی و تبدیل لاپلاس آن از نمادهای یکسان Φ ولی با تابعیت s و t بسته به نوع تابع استفاده گردیده است.

با قرار دادن $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{X}(s)$ از معادله (۴-۴)، برای خروجی $Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)$ داریم:

$$Y(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}U(s) \quad (۷-۴)$$

در حالتی که U و Y اسکالر هستند، $\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}$ هم اسکالر خواهد بود. در حقیقت، اگر بخواهیم بین معادله (۷-۴) و آنچه در فصل دوم یاد گرفتیم ارتباط برقرار کنیم، $\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}$ همان تابع تبدیل منحصر بفرد ما خواهد بود. معادله (۷-۴) را می‌توان بصورت زیر هم نوشت:

$$Y(s) = G_p(s)U(s) \quad (الف ۷-۴)$$

که در آن:

$$G_p(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} \quad (۸-۴)$$



می‌توان مشاهده کرد که چگونه ماتریس گذرای حالت $\Phi(s)$ چگونه بین ماتریس‌های C و B قرار می‌گیرد تا تابع تبدیل را بسازد. ممکن است تعجب کنید که چگونه این تابع تبدیل با ماتریس A در ارتباط است. با استفاده از جبر خطی، ماتریس $\Phi(s)$ در معادله (۵-۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (۵-۴ \text{ الف})$$

با جایگزینی این فرم در معادله (۸-۴) داریم:

$$G_p(s) = \frac{C[\text{adj}(sI - A)]B}{\det(sI - A)} \quad (۸-۴ \text{ الف})$$

چند جمله‌ای مشخصه صریحا برابر است با:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (۹-۴)$$

این همان نتیجه‌ای است که قبلا بصورت کاملا ابتدایی در مثال ۴-۱ به آن رسیده بودیم. مجددا، قطب‌های G_p برابر مقادیر ویژه ماتریس A است.

مثال ۴-۷: نتایج این بخش را با مقادیر عددی مثال ۴-۵ بتصویر می‌کشیم. دو راکتور CSTR سری را با $V_1 = 1 m^3$ ، $V_2 = 2 m^3$ ، $k_1 = 1 \text{ min}^{-1}$ ، $k_2 = 2 \text{ min}^{-1}$ ، در نظر بگیرید که در شرایط حالت پایا، $\tau_1 = 0.25 \text{ min}$ ، $\tau_2 = 0.5 \text{ min}$ و غلظت ورودی $c_{0s} = 1 \text{ kmol/m}^3$ است. توابع تبدیل و ماتریس گذرای حالت وقتی هر دو متغیر c_0 و q ورودی باشند، را بدست آورید. با نوشتن معادلات بدست آمده در مثال ۴-۵ در حالت پایا داریم:

$$c_{1s} = \frac{c_{0s}}{1 + k_1 \tau_1} = \frac{1}{1 + 1 \times 0.25} = 0.8, \quad c_{2s} = \frac{c_{1s}}{1 + k_2 \tau_2} = \frac{0.8}{1 + 2 \times 0.5} = 0.4$$

بعلاوه برای مقادیر دیگر خواهیم داشت: $1/\tau_1 = 4 \text{ min}^{-1}$ ، $1/\tau_2 = 2 \text{ min}^{-1}$ ، $(1/\tau_1 + k_1) = 5 \text{ min}^{-1}$ ، $(1/\tau_2 + k_2) = 4 \text{ min}^{-1}$ ، $(c_{0s} - c_{1s})/V_1 = 0.2 \text{ kmol/m}^3$ و $(c_{1s} - c_{2s})/V_2 = 0.2 \text{ kmol/m}^3$. با جایگذاری این مقادیر عددی در روابط مربوطه در مثال ۴-۵ و گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات حاصله، خواهیم داشت:

$$C_1(s) = \frac{4}{s+5} C_0(s) + \frac{0.2}{s+5} Q(s)$$

$$C_2(s) = \frac{2}{s+4} C_1(s) + \frac{0.2}{s+4} Q(s)$$

با جایگزینی $C_1(s)$ از معادله اول در معادله دوم:

$$C_2(s) = \frac{8}{(s+4)(s+5)} C_0(s) + \frac{0.2(s+7)}{(s+4)(s+5)} Q(s)$$

معادلات بدست آمده بالا توابع تبدیلی هستند که تغییرات غلظت درون راکتورها هنگام تغییر دبی جریان q و غلظت ورودی c_0 نشان می‌دهند.

جایگذاری مقادیر عددی در نمایش فضای حالت مثال ۴-۵ دستگاه معادلات دینامیکی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ q \end{bmatrix}$$

با ماتریس A مدل، داریم:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:



$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+5)(s+4)} \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix}$$

ماتریس گذرای حالت را می توان نوشت:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 2(e^{-4t} - e^{-5t}) & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

چنانچه فرض کنیم که هر دو غلظت C_1 و C_2 خروجی مدل باشند، تابع تبدیل (۷-۴) بصورت ماتریسی در خواهد آمد:

$$\mathbf{G}_p(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} = \frac{1}{(s+5)(s+4)} \begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

که \mathbf{C} برابر است با ماتریسی یکه 2×2 و به همین دلیل حذف گردیده است. با تعریف ورودی $\mathbf{U}(s) = [C_0(s) \quad Q(s)]^T$

معادله (۶-۴) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{1}{(s+5)(s+4)} \begin{bmatrix} 4(s+4) & 0.2(s+4) \\ 8 & 0.2(s+5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0(s) \\ Q(s) \end{bmatrix}$$

و بفرم ساده تر:

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(s+5)} & \frac{0.2}{(s+5)} \\ \frac{8}{(s+5)(s+4)} & \frac{0.2(s+5)}{(s+5)(s+4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0(s) \\ Q(s) \end{bmatrix}$$

که برابر است با آنچه قبلا در همین مثال بدست آوردیم. حالتی که فقط یک خروجی داشته باشیم را بعدا (در مثال ۷-۴ الف) مفصل تر بررسی خواهیم کرد.

مثال ۷-۴ الف: مثال ۷-۴ را با استفاده از نرم افزار Matlab تکرار کنید.

اگر معادلات مثال ۷-۴ را درک کرده باشید، می توانید آنها را با Matlab بصورت زیر شبیه سازی کنید.

```
t1=0.25; t2=0.5; % Define the variables
k1=1; k2=2;
V1=1; V2=2;
cos=1;

% Calculate the steady state values.
c1s=cos/(1+k1*t1); % 0.8
c2s=c1s/(1+k2*t2); % 0.4

% Coefficients of A and B
a11=-(1/t1+k1); % -5
a12=0;
a21=1/t2;
a22=-(1/t2+k2); % -4
b11=1/t1;
b12=(cos-c1s)/V1; % 0.2
b21=0;
b22=(c1s-c2s)/V2; % 0.2

% Finally build A and B
a=[a11 a12; a21 a22]; % [-5 0; 2 4]
b=[b11 b12; b21 b22]; % [4 0.2; 0 0.2]
eig(a) % Check that they are -4, -5

c=[1 0; 0 1]; % Define C such that both C1 and C2 are outputs
d=[0 0; 0 0];
```



وقتی که تمام ماتریس‌های ضرایب تعریف شد، می‌توان آن را به صورت تابع تبدیل نوشت. تابع $(ss2tf)$ فقط برای یک ورودی کار می‌کند. بنابر این برای اولین متغیر ورودی C_0 ، از فرمان‌های زیر استفاده می‌کنیم:

```
% MATLAB returns, for input no. 1
[q1,p]=ss2tf(a,b,c,d,1) % q1=[0 4 16; 0 0 8]
% p=[1 9 20] = (s+4)(s+5)
```

بردار p محاسبه شده مشخصا همان چند جمله‌ای مشخصه است. ماتریس $q1$ دقیقا ستون اول ماتریس تابع تبدیلی است که در مثال قبلی بدست آوردیم که همان عناصری هستند که اثرات تغییر C_0 را بر C_1 و C_2 توصیف می‌کنند. مشابه، دومین ستون ماتریس تابع تبدیل که اثرات تغییر دومین ورودی یعنی Q را نشان می‌دهد، را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد:

```
[q2,p]=ss2tf(a,b,c,d,2) % q2=[0 .2 .8; 0 .2 1.4]
% The first term is 0.2(s+4) because
% MATLAB retains p=(s+4)(s+5)
```

اگر C_2 تنها متغیر خروجی باشد، C را مطابق با خروجی تعریف می‌کنیم، اما ماتریس‌های A و B بدون تغییر باقی می‌مانند. تأثیرات متناظر با تغییرات C_0 و Q بر روی C_2 را می‌توان با فرمان‌های زیر بدست آورد:

```
c=[0 1]; d=[0 0]; % C2 is the only output
[q21,p]=ss2tf(a,b,c,d,1) % Co as input; q21=[0 0 8]
[q22,p]=ss2tf(a,b,c,d,2) % Q as input; q22=[0 .2 1.4]
```

نتایج بدست آمده مشابه سطر دوم ماتریس تابع تبدیل مثال ۴-۷ است (همان دو عنصری که اثرات تغییرات C_0 و Q بر روی C_2 را نشان می‌دهد).

مشابه، اگر C_1 تنها متغیر خروجی باشد، در عوض باید از فرمان‌های زیر استفاده نمود:

```
c=[1 0]; d=[0 0]; % C1 is the only output
[q11,p]=ss2tf(a,b,c,d,1) % q11=[0 4 16]
[q12,p]=ss2tf(a,b,c,d,2) % q12=[0 .2 .8]
```

و نتایج تأیید صحت همان سطر اول ماتریس تابع تبدیل خواهد بود.

مثال ۴-۸: مدل یک ظرف تخمیری^۷ را بنویسید که شامل دو موازنه جرم است، یکی جرم باکتری^۸ (یا مخمر^۹)، C_1 ، و دیگری جرم گلوکز (یا بستر تخمیر^{۱۰})، C_2 . در حال حاضر مجبوریم از موازنه کلک صرف نظر کنیم. موازنه جرم باکتری (در فرمول زیر) دو جمله در سمت راست دارد، یکی رشد باکتری‌ها با استفاده از نرخ مخصوص رشد $\mu = \mu(C_2)$ و دیگری از دست رفتن باکتری‌ها بوسیله جریان خروجی Q که در نماد D (نرخ رقیق سازی^{۱۱}) مستتر است.

$$\frac{dC_1}{dt} = \mu C_1 - DC_1$$

نرخ مخصوص رشد و رقیق سازی بوسیله روابط زیر تعریف می‌گردند:

$$\mu = \mu(C_2) = \mu_m \frac{C_2}{K_m + C_2}, \quad D = \frac{Q}{V}$$

موازنه جرم گلوکز سه جمله در سمت راست دارد. جمله اول مقدار مصرف آن توسط باکتری‌هاست. جملات بعدی اختصاص به گلوکز موجود در جریان ورودی و خروجی دارد.

$$\frac{dC_2}{dt} = -\frac{\mu C_1}{Y} + D(C_{2,i} - C_2)$$

حداکثر نرخ رشد μ_m ، ثابت مونود^{۱۲} K_m ، و ضریب بازده باکتری Y همگی ثابت هستند. $C_{2,i}$ هم غلظت گلوکز در جریان ورودی است.

نرخ رقیق سازی D بستگی به دبی حجمی جریان Q و حجم V دارد و در حقیقت، عکس زمان پر شدن ظرف تخمیر است. در این مسئله، حجم ظرف تخمیر، V ، ثابت است اما دبی جریان، Q ، ممکن است تغییر کند. بنابر این، منطقی‌تر است که از D استفاده کنیم چون هم متناسب با Q است و هم ساده‌تر برای بیان کردن.

حال مسئله فرمول کردن این مدل تحت دو حالت تفضیلی است: (۱) وقتی که فقط نرخ رقیق سازی تغییر می‌کند، و (۲) وقتی که هم نرخ رقیق سازی و هم مقدار گلوکز در ورودی تغییر می‌کنند. همچنین تابع تبدیل مدل را در این دو حالت بدست آورید. در هر دو حالت، هم C_1 و هم C_2 خروجی هستند.

برای حل این مسئله، واضح است که باید ابتدا معادلات خطی شوند. در فرم برداری، مدل غیرخطی را می‌توان بصورت زیر نوشت:



$$\frac{dx}{dt} = f(x, D)$$

که $x = [C_1 \quad C_r]^T$ متغیر حالت و

$$f(x, D) = \begin{bmatrix} f_1(x, D) \\ f_r(x, D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mu(C_r) - D] C_1 \\ -\frac{\mu(C_r) C_1}{Y} + D(C_{r,i} - C_r) \end{bmatrix}$$

در ابتدا فرض می‌شود که گلوکز ورودی، $C_{r,i}$ ، مقدار ثابتی باشد (یعنی اغتشاشی در سیستم وجود ندارد) و فقط نرخ رقیق سازی، D ، تغییر می‌کند. در حالت پایای روابط بالا می‌توان مقادیر زیر را بدست آورد (البته بدون هیچ علامتی روی نمادها برای تفاوت قائل شدن با متغیر مربوطه در حالت کلی):

$$D = \mu \quad , \quad D(C_{r,i} - C_r) = \frac{\mu C_1}{Y} \quad \rightarrow \quad C_1 = Y(C_{r,i} - C_r)$$

اکنون حول نقطه حالت پایا دو معادله را خطی می‌کنیم. انتظار داریم که به روابط زیر برسیم (البته مجدداً بدون هیچ علامت مشخصه‌ای برای متغیرهای انحرافی و یادآوری این نکته که مشتقات پاره‌ای در شرایط پایا محاسبه گردیده‌اند):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial C_1} & \frac{\partial f_1}{\partial C_r} \\ \frac{\partial f_r}{\partial C_1} & \frac{\partial f_r}{\partial C_r} \end{bmatrix}_{S.S.} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D} \\ \frac{\partial f_r}{\partial D} \end{bmatrix}_{S.S.} D$$

با محاسبه مشتقات جزئی خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & C_r \mu' \\ -\frac{\mu}{Y} & -\frac{C_1}{Y} \mu' - \mu \end{bmatrix}_{S.S.} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_1 \\ \frac{C_1}{Y} \end{bmatrix}_{S.S.} D = \mathbf{Ax} + \mathbf{BD}$$

که μ' مشتق نرخ رشد مخصوص نسبت به بستر تخمیر C_r است:

$$\mu' = \frac{d\mu}{dC_r} = \mu_m \frac{K_m}{(K_m + C_r)^2}$$

تمام ضرایب \mathbf{A} و \mathbf{B} در شرایط حالت پایا محاسبه می‌گردند. گفتیم که در حالت پایا $\mu = D$ و در نتیجه اولین عنصر سطری و ستونی ماتریس \mathbf{A} صفر است.

برای تکمیل مدل فضای حالت، معادله خروجی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} = \mathbf{Cx}$$

که مشخصاً \mathbf{C} ماتریس یکه 2×2 می‌باشد.

اکنون، باید ببینیم با دو ورودی چه اتفاقی خواهد افتاد. در عمل، بسیار علاقمندیم که یک جریان بسیار غلیظ از گلوکز داشته باشیم که آن را بدون جریان اصلی شامل دیگر اجزاء تزریق کنیم. آنچه را که می‌توان به صورت دلخواه تغییر داد نرخ تزریق گلوکز است. فرض کنید که غلظت جریان گلوکز C_{rf} ثابت و نرخ تزریق آن q_f قابل تنظیم بوده و دیگر اجزاء موجود در خوراک با نرخ q_0 وارد ظرف تخمیر می‌گردد. غلظت موثر گلوکز در جریان ورودی برابر است با:

$$C_{r,i} = \frac{q_f C_{rf}}{q_f + q_0} = \frac{q_f C_{rf}}{Q}$$

که $Q = q_f + q_0$ کل دبی جریان ورودی بوده و نرخ رقیق سازی برابر است با:

$$D = \frac{Q}{V} = \frac{q_f + q_0}{V}$$

معادله عمومی مدل ظرف تخمیر را می‌توان بفرم زیر نوشت:



$$\frac{dx}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

که بردار متغیر حالت همان $\mathbf{x} = [C_1 \quad C_r]^T$ است اما ورودی بردار $\mathbf{u} = [D_o \quad D_f]^T$ است. در اینجا، $D_o = q_o/V$ و $D_f = q_f/V$ نرخ رقیق سازی متناظر با دو جریان ورودی هستند، بدین مفهوم که می توان دبی جریان های اصلی و تزریقی گلوکز را برای تغییر خروجی ها، به دلخواه تنظیم کرد. تابع f برابر است با:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mu(C_r) - (D_o + D_f)] C_1 \\ -\frac{\mu(C_r) C_1}{Y} + D_f C_{rf} - (D_o + D_f) C_r \end{bmatrix}$$

در حالت پایا:

$$\mu = (D_o + D_f) = D$$

$$C_1 = Y(C_{r,i}^* - C_r) \quad , \quad C_{r,i}^* = \frac{D_f C_{rf}}{D_o + D_f}$$

معادلات بدست آمده بصورت زیر خطی می شوند (بدون نماد مشخصه ای برای متغیرهای انحرافی):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \mu' \\ -\frac{\mu}{Y} \quad -\frac{C_1}{Y} \mu' - \mu \end{bmatrix}_{s.s.} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_1 & -C_1 \\ -C_r & -(C_{rf} - C_r) \end{bmatrix}_{s.s.} \begin{bmatrix} D_o \\ D_f \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

معادله خروجی همانند قبل تغییر نمی کند. تبدیل لاپلاس معادلات مدل و بازآرایی آن تابع تبدیل را بصورت زیر خواهد داد:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{1r} \\ G_{r1} & G_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_o \\ D_f \end{bmatrix}$$

که توابع تبدیل عبارتند از:

$$G_{11} = \frac{-\left[\frac{C_1}{Y}\right]_{s.s.} s - \left[C_1 \left(\frac{C_1 \mu'}{Y} + \mu\right) + C_1 \mu' C_r\right]_{s.s.}}{P(s)}$$

$$G_{1r} = \frac{-\left[\frac{C_1}{Y}\right]_{s.s.} s + \left[C_1 \mu' (C_{rf} - C_r) - C_1 \left(\frac{C_1 \mu'}{Y} + \mu\right)\right]_{s.s.}}{P(s)}$$

$$G_{r1} = \frac{-[C_r]_{s.s.} s + \left[\frac{C_1 \mu}{Y}\right]_{s.s.}}{P(s)}$$

$$G_{rr} = \frac{[C_{rf} - C_r]_{s.s.} s + \left[\frac{C_1 \mu}{Y}\right]_{s.s.}}{P(s)}$$

و چند جمله ای مشخصه عبارتست از:

$$P(s) = s^2 + \left[\frac{C_1 \mu'}{Y} + \mu\right]_{s.s.} s + \left[\frac{C_1 \mu \mu'}{Y}\right]_{s.s.}$$

با داشتن مقادیر عددی و محاسبه ضرایب معادلات و توابع تبدیل بالا، پی خواهیم برد که کار با فرم فضای حالت بمراتب راحت تر است.

مثال واقعی ما بصورت «رضایتبخشی» حل شد. ممکن است خیلی واضح نباشد اما تئوری سیستم خطی به ما در تحلیل مسائل پیچیده کمک می کند. باید اعتراف کنیم که نمایش فضای حالت هر کاری را که شما بتوانید تجسم کنید، می تواند انجام داده و حتی احساس سادگی بیشتری با استفاده از زبان نمایش فضای حالت خواهیم داشت.



۳-۴ خواص مدل‌های فضای حالت

این بخش شامل توضیحاتی مختصر در مورد بعضی از تبدیلات^{۱۳} و ماتریس گذرای حالت است. هدف خود در این بخش را بر مباحثی متمرکز خواهیم کرد که در مقدمات جبر خطی با آن برخورد می‌کنیم.

۳-۴-۱ حل حوزه زمان

معادله (۱-۴) که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است، را می‌توان حل کرد. بهمان صورتی که معادله (۳-۲) را بدست آوردیم، می‌توانیم با استفاده از تابع نمایی ماتریسی بعنوان فاکتور انتگرال، پاسخ حوزه زمان (۱-۴) را بصورت زیر بدست آوریم:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (10-4)$$

اولین جمله سمت راست تأثیر شرایط اولیه است، در حالیکه جمله دوم انتگرال کانولوشن^{۱۴} است که اثر ورودی $u(t)$ را محاسبه می‌کند.

نکته آنکه نمایش فضای حالت عمومی بوده و محدود به مسائل با شرایط اولیه صفر نمی‌شود. وقتی معادله (۱-۴) هموزن باشد $(\mathbf{B}u(t) = \mathbf{0})$ ، حل عبارتست از:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) \quad (11-4)$$

علاوه بر این معادله (۱-۴) را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس هم حل کرد. برای حل به این روش خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (12-4)$$

که $\Phi(t)$ ماتریس گذرای حالت است که توسط معادله (۶-۴) تعریف شده است. با مقایسه معادلات (۱۰-۴) و (۱۲-۴)، دیده می‌شود که:

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (13-4)$$

در مثال ۷-۴ نشان دادیم که چنانچه با مسئله‌ای ساده برخورد کنیم چگونه می‌توان ماتریس گذرای حالت را بدست آورد. برای مسائل پیچیده‌تر، تکنیک‌های عددی برای بدست آوردن $\Phi(t)$ و یا حتی تبدیل لاپلاس آن $\Phi(s)$ بکار گرفته می‌شوند که ما در اینجا از آنها صرف نظر می‌کنیم.

یک روش (البته ما این روش را استفاده نمی‌کنیم) اعمال بسط تیلور تابع نمایی \mathbf{A} و ارزیابی ماتریس گذرای حالت است:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 t^3 + \dots \quad (14-4)$$

بجای استفاده از سری بی‌نهایت، می‌توان بسطی از تابع نمایی با جملات محدود را نوشت. برای ماتریس \mathbf{A} که $n \times n$ است، داریم:

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \alpha_2(t) \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1} \quad (15-4)$$

چالش اصلی در اینجا محاسبه ضرایب $\alpha_i(t)$ است که ما از آن صرف نظر می‌کنیم.

۳-۴-۲ فرم کانونی کنترل پذیر^{۱۵}

گفتیم که نمایش فضای حالت منحصر بفردی برای یک سیستم وجود ندارد اما تعدادی از آنها «استاندارد» بوده که در مبحث کنترل استفاده می‌شوند. برای هر معادله حالت داده شده (در صورتی که شرایطی برقرار باشد)، امکان تبدیل آن بشکل این فرم‌های استاندارد وجود دارد. در این زیربخش دو فرم کانونی مهم را پوشش خواهیم داد.



یک ابزار از جبر خطی که باید با آن آشنا شویم، تبدیل همسان^{۱۶} است که به ما اجازه می‌دهد که یک ماتریس را به یک ماتریس دیگر تبدیل کنیم در حالیکه مقادیر ویژه آن تغییر نکند. اگر یک متغیر حالت \mathbf{x} و دیگری $\bar{\mathbf{x}}$ توسط یک تبدیل همسان بهم مربوط شوند، نمایش فضای حالت بوجود آمده توسط \mathbf{x} و $\bar{\mathbf{x}}$ معادل در نظر گرفته می‌شود. برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه n :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = u(t) \quad (16-4)$$

با تعریف:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y^{(1)}, \quad x_3 = y^{(2)}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)} \quad (17-4)$$

معادله دیفرانسیل (۱۶-۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - \dots - a_{n-1}x_n + u(t) \end{aligned} \quad (18-4)$$

با قرار دادن این دستگاه معادلات در فرم ماتریسی بشکل معادله (۱-۴) داریم:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (19-4)$$

و معادله خروجی معادل (۲-۴) برابر است با:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} = \mathbf{Cx} \quad (20-4)$$

سیستم معادلات (۱۹-۴) و (۲۰-۴) را **فرم کانونی کنترل پذیر** (یا فرم کانونی متغیر فاز^{۱۷}) گویند. همانطور که از اسم آن پیداست، این فرم برای تحلیل کنترل پذیری و طراحی سیستم کنترل بروش جابجایی قطب^{۱۸} استفاده می‌گردد (در فصل ۹ بیشتر بررسی خواهد شد).

بدلیل وجود صفر در روی قطر اصلی، بسادگی معادله مشخصه ماتریس \mathbf{A} ، که همان $|\mathbf{sI} - \mathbf{A}| = 0$ است بصورت زیر بدست می‌آید:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (21-4)$$

که با توجه به معادله (۱۶-۴) کاملاً واضح است. توجه کنید که ماتریس \mathbf{A} در معادله (۱۹-۴) شامل ضرایب چند جمله‌ای مشخصه است. ماتریس‌هایی به این صورت را همزاد^{۱۹} گویند. اگر از نرم‌افزار Matlab استفاده کنید، تابع canon ماتریس همزادی را بر می‌گرداند که ترانهاد ماتریس \mathbf{A} در (۱۹-۴) است. این فرم را فرم کانونی مشاهده پذیر^{۲۰} گویند.

۳-۳-۴ قتری^{۲۱}

در اینجا می‌خواهیم ماتریس سیستم \mathbf{A} را به ماتریس قتری^{۲۲} Λ که از مقادیر ویژه \mathbf{A} تشکیل شده است، تبدیل کنیم. بعبارت دیگر، معادلات دیفرانسیل بعد از تبدیل از هم جدا^{۲۳} خواهند شد.

برای یک دستگاه معادلات داده شده در (۱-۴) که \mathbf{A} دارای مقادیر ویژه حقیقی و منفرد است، ماتریس \mathbf{P} را می‌توان بگونه‌ای یافت که:



$$\bar{x} = P^{-1}x \leftrightarrow x = P\bar{x} \quad (22-4)$$

$$\dot{\bar{x}} = \Lambda \bar{x} + \bar{B}u \quad (23-4)$$

که در آن $\bar{B} = P^{-1}B$ و $\Lambda = P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری است که از مقادیر ویژه A تشکیل شده است. ماتریس تبدیل P هم از بردارهای ویژه A تشکیل می‌گردد. در کنترل معادله (۲۳-۴) را فرم کانونی قطری می‌گویند. اگر A دارای مقادیر ویژه تکراری باشد (ریشه‌های تکراری چند جمله‌ای مشخصه)، با استفاده از جبر خطی، نتیجه تبدیل فرم کانونی جردن^{۲۴} خواهد بود. بطور خلاصه، ماتریس تبدیل P نیاز به مجموعه بردارهای ویژه عمومی دارد و ماتریس تبدیل $J = P^{-1}AP$ شامل بلوک‌های جردن^{۲۵} برای ریشه تکراری خواهد بود. برای مثال اگر A دارای سه مقدار ویژه تکراری λ باشد، ماتریس تبدیل ممکن است بصورت زیر باشد:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad J_{11} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (24-4)$$

J_{22} ماتریس قطری متشکل از بقیه مقادیر ویژه غیر تکراری ماتریس A است. از آنجا که در فصل ۹ هم از این فرم استفاده نمی‌کنیم، جزئیات این روش را به درس کنترل پیشرفته موکول می‌کنیم.

مثال ۴-۹: برای مدلی با تابع تبدیل

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

بوسیله استفاده از Matlab فرم‌های کانونی مشاهده پذیر و قطری را بدست آورید.

فرمان‌ها عبارتست از:

```
G=zpk([], [-1 -2 -3], 1);
S=ss(G); % S is the state space system
canon(S) % Default is the diagonal form
canon(S, 'companion') % This is the observable companion
```

در اینجا از مباحث ریاضی پیچیده اجتناب کردیم.



-
- ¹ State Space representation
 - ² State variables
 - ³ Linear system theory
 - ⁴ Resolvent matrix
 - ⁵ State transition matrix
 - ⁶ Fundamental matrix
 - ⁷ Fermenter
 - ⁸ Cell mass
 - ⁹ Yeast
 - ¹⁰ Substrate
 - ¹¹ Dilution rate
 - ¹² Monode constant
 - ¹³ Transformation
 - ¹⁴ Convolution
 - ¹⁵ Controllable canonical form
 - ¹⁶ Similarity transformation
 - ¹⁷ Phase variable canonical form
 - ¹⁸ Pole-placement design
 - ¹⁹ Companion
 - ²⁰ Observable canonical form
 - ²¹ Diagonal canonical form
 - ²² Diagonal matrix
 - ²³ Decoupling
 - ²⁴ Jordan canonical form
 - ²⁵ Jordan blocks



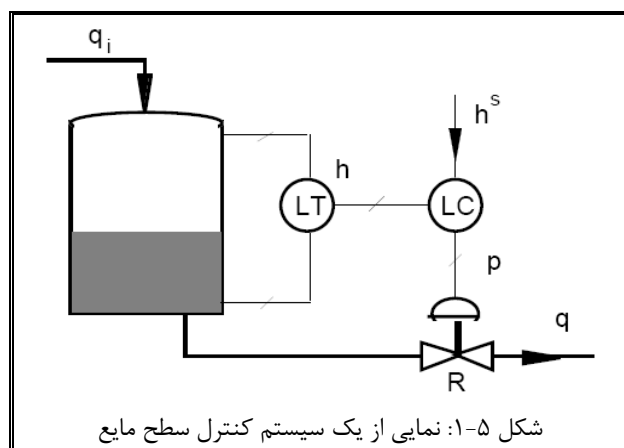
۵ تحلیل سیستم‌های کنترل تک-حلقه

پس از بررسی رفتار دینامیکی فرایندها، وقت آن است که مباحثی هم در مورد کنترل کننده‌ها گفته شود. در اینجا مقدمات بحث می‌گردد که تمرکز اولیه بر یادگیری طراحی و تنظیم کنترل کننده PID است. اما قبل از آن نیاز به دانستن نحوه طرح مسئله و بدست آوردن معادله مشخصه حلقه بسته می‌باشد.

عمده مباحث این فصل:

- معرفی سیستم پایه کنترل PID
- بدست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم و درک مشخصات آن

۵-۱ کنترل کننده PID



برای نمایش مفاهیم سیستم کنترل کلاسیک از یک کنترل کننده ساده سطح مایع استفاده می‌کنیم. در این مثال (شکل ۵-۱)، سطح مایع در داخل یک مخزن اندازه گیری شده و اطلاعات بدست آمده برای تنظیم نحوه باز شدن شیر خروجی بمنظور ثابت نگه داشتن سطح مایع در مقداری مشخص (مقدار مقرر یا مقدار مرجع) استفاده می‌گردد. در این مورد، سطح مایع هم متغیر اندازه‌گیری شده و هم متغیر کنترل شونده است (آنها در یک سیستم تک-ورودی تک-خروجی (SISO) برابرند). بر این مبنای، متغیر کنترل شونده در یک سیستم SISO همان متغیر خروجی هست. یک سیستم به فرایندی که قرار است کنترل شود بعلاوه کنترل کننده و ملحقات همراه آنها نظیر حسگرها و محرک‌ها، گفته می‌شود.

فرض کنید هدف نگه داشتن سطح مایع در مقدار مقرر، h^s ، باشد و تغییر ناگهانی در دبی جریان ورودی q_i (اغتشاش و یا بار ناخواسته) ارتفاع مایع، h ، را طوری افزایش دهد که انحرافی معادل $\bar{h} = h - h^s > 0$ در سطح مایع درون تانک داشته باشیم. این انحراف با باز کردن شیر خروجی (یا کاهش مقاومت «R» جریان خروجی) می‌تواند برطرف گردد. در اینجا، فرض کنید که کنترل کننده سطح علائمی مناسب به شیر بفرستد تا این کار را انجام دهد. منطقی خواهد بود اگر فرض شود که علامت فرستاده شده توسط کنترل کننده، $p(t)$ ، تابعی از مقدار انحراف باشد.

از انجائی که هدف سیستم کنترل، اعمال پسخور منفی است، تصمیم کنترلی لازم بر مبنای خطا که بصورت زیر تعریف می‌گردد، خواهد بود.

$$e(t) = h^s(t) - h(t)$$

که خطا با این تعریف مقدار انحراف با علامت منفی خواهد بود (شکل ۵-۲). خروجی کنترل کننده بصورت

$$p(t) = p^s + f(e(t)) = p^s + f(h^s(t) - h(t)) \quad (1-5)$$

است که f تابعی از خطا، $e(t)$ ، بوده و p^s علامت خروجی کنترل کننده در حالت پایا می‌باشد (وقتی که انحراف صفر است و یا $\bar{h} = 0$). وظیفه ما در اینجا تعیین توابع کنترلی مناسب و قابل قبول است - آنچه که قوانین کنترل نامیده می‌شود. توابع کنترل کننده‌های کلاسیک در زیر بخش‌های آتی توضیح داده خواهد شد، اما اگر خواننده مایل باشد بداند چگونه سیستم کنترل کنار هم چیده می‌شود، می‌تواند ابتدا بخش ۵-۲ را مطالعه نماید.

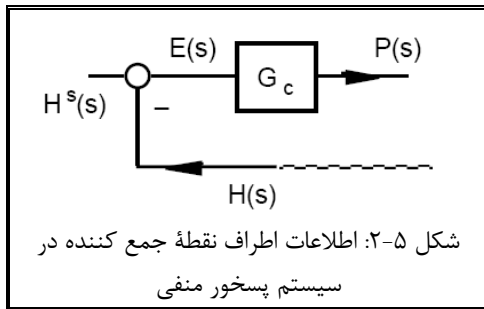


۱-۱-۵ کنترل تناسبی

ساده‌ترین تصور آن است که علائم جبرانی (همان خروجی کنترل کننده) متناسب با خطا، $e(t)$ ، باشد:

$$p(t) = p^s + K_c e(t) = p^s + K_c [h^s(t) - h(t)] \quad (2-5)$$

K_c بهره تناسبی کنترل کننده خوانده می‌شود. واضح است که K_c «حساسیت» کنترل کننده را تعیین می‌کند - میزان جبران مورد نیاز برای تغییر داده شده در خطا.



تمام کنترل کننده‌های موجود در بازار دارای بهره تناسبی مثبت هستند. بنابر این، بدلیل استفاده از پسخور منفی (شکل ۲-۵ را ببینید)، خروجی کنترل کننده در جهت خلاف متغیر کنترل شونده تغییر می‌کند. در مثال کنترل سطح مایع، اگر دبی جریان ورودی تغییر کند بطوری که مقدار h از مقدار h^s بیشتر گردد، $e < 0$ بوده و بناچار $p < p^s$ ؛ یعنی خروجی کنترل کننده کاهش می‌یابد. در این حالت، بدلیل نیاز به افزایش دبی جریان خروجی از تانک، باید شیر انتخاب یا خریداری شود که کاهش علائم روی آن بمعنای باز کردن شیر باشد (مقاومت در مقابل جریان کم شود). از لحاظ ریاضی، این شیر بهره حالت یکنواخت ($-K_p$) منفی باید داشته باشد.

حال اگر شیر کنترل موجود، بهره مثبت (افزایش علائم باعث باز شدن شیر شود) داشته باشد چه باید کرد؟ در این حالت، ما به کنترل کننده‌ای با بهره تناسبی منفی نیاز داریم. کنترل کننده‌های تجاری موجود دارای «کلیدی» جهت معکوس کردن علائم هستند. از نظر ریاضی، علامت جمله جبرانی کنترل کننده عوض می‌شود: $p(t) = p^s - K_c e$.

از تعریف یک مسئله کنترل نتیجه می‌شود که در $t = 0$ خطایی وجود ندارد، پس $e^s = 0$ و مقدار انحراف خطا برابر خود خطا خواهد بود:

$$\bar{e}(t) = e(t) - e^s = e(t)$$

با جایگذاری مقدار انحرافی خطا به جای خود خطا در معادله (۲-۵) و بازآرایی معادله، ارتباط بین متغیرهای انحرافی خطا و علائم کنترل بصورت زیر خواهد بود:

$$p(t) - p^s = K_c [e(t) - e^s] \rightarrow \bar{p}(t) = K_c \bar{e}(t)$$

و تابع تبدیل یک کنترل کننده تناسبی برابر است با:

$$G_c(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = K_c \quad (3-5)$$

عموماً، بهره تناسبی بدون بعد است (زیرا $p(t)$ و $e(t)$ هم بعد هستند). بسیاری از سازندگان کنترل کننده‌ها بجای بهره تناسبی از درصد باند تناسبی^۱ استفاده می‌کنند که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$PB = \frac{100}{K_c} \quad (2-5)$$

بهره تناسبی بالا معادل PB پایین و بهره تناسبی پایین معادل PB بالا خواهد بود. PB بعنوان محدوده‌ای است که اگر خطا در آن محدوده قرار بگیرد، خروجی کنترل کننده بین حداقل و حداکثر آن قرار می‌گیرد.

قبل از هرگونه تحلیل جدی، چند خصوصیت کیفی مربوط به هر نوع کنترل کننده بحث خواهد شد. این یک حسن کنترل کلاسیک است که می‌توان بسادگی از الگوریتم کنترلی تفسیر فیزیکی ارائه داد. تحلیل‌های بعدی مشاهدات کیفی را تأیید خواهند کرد.

مشخصات کیفی عمومی کنترل تناسبی



- انتظار می‌رود که کنترل کننده تناسبی پاسخ یک فرایند را بهبود داده و سرعت بیشتری ببخشد. کنترل کننده با K_c بزرگتر، سریعتر و حساستر نسبت به جبران خطای داده شده خواهد بود. اگر K_c خیلی بزرگ شود، انتظار می‌رود که سیستم کنترل بیش از حد واکنش نشان داده و به پاسخ نوسانی بیانجامد. در بدترین حالت امکان ناپایداری سیستم هم می‌رود!
- هر مکانیزم کنترل محدودیت‌هایی دارد. کنترل کننده (مثلا یک تقویت کننده)، دارای ولتاژ و یا جریان محدودی است، و یا شیر کنترل وقتی کاملا باز است بیش از مقداری خاص، دبی جریان را عبور نمی‌دهد. در این حدود گفته می‌شود سیستم کنترل اشباع^۲ شده است.
- انتظار می‌رود که یک کنترل کننده تناسبی دارای خطای ماندگار^۳ (افت کنترل^۴) باشد. تحلیل دقیق دلیل این رفتار را در بخش‌های بعدی خواهید دید. در اینجا با یک تحلیل بسیار ساده می‌توان گفت چرا. فرض کنید که مقدار مقرر به مقدار جدیدی تغییر یابد. قاعدتا باید علائم خروجی کنترل کننده، $p = p^s + K_c e$ ، از مقدار حالت پایای اولیه، p^s ، به مقدار حالت پایای جدید، p ، تغییر کند. برای آنکه p متفاوت از p^s باشد، باید مقدار نهایی خطا، e ، باید غیر صفر باشد.
- برای حل یک مسئله کنترل، ابتدا یک کنترل کننده تناسبی را در نظر بگیرید. اگر افت کنترل به اندازه کافی کوچک باشد (یا مهم نباشد) و پاسخ به اندازه کافی سریع، این ممکن است همه آن چیزی باشد که نیاز دارید (اتمام زودرس!). حتی در صورت عدم اقبال، این تحلیل به شما در مراحل بعدی کمک می‌کند.

۵-۱-۲ کنترل تناسبی-انتگرالی (PI)

برای حذف افت کنترل، عملگر انتگرال گیر در کنترل کننده را تعریف می‌کنیم. بعبارت دیگر، بر مبنای گذشته خطا، خروجی کنترل کننده بصورت زیر جبران می‌گردد:

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \bar{e}(t) dt \rightarrow \frac{P(s)}{E(s)} = \frac{1}{\tau_I s}$$

به τ_I ثابت زمانی انتگرال^۵ گفته می‌شود. در کنترل کننده‌های موجود در بازار معمولا $1/\tau_I$ استفاده می‌گردد که به آن نرخ بازنشانی^۶ (تکرار در دقیقه) نیز گفته می‌شود.

عملگر انتگرال تمامی مقادیر خطا از $t = 0$ تا زمان حاضر را با هم جمع می‌کند. بنابر این انتگرال خطا صفر نخواهد بود ولو اینکه مقدار لحظه‌ای خطا صفر باشد. بعلاوه، اگر مقدار خطا تغییر علامت داشته باشد، مقدار انتگرال خطا کم خواهد شد. بالنتیجه، عملگر انتگرال باعث می‌شود سیستم کنترل بیش از اندازه جبران شده و نوسانی گردد؛ بدین مفهوم که پاسخ سیستم کنترل حلقه بسته کم میرا خواهد گردید. اگر عملگر انتگرال از حدی بیشتر بزرگ شود، ممکن است سیستم کنترل ناپایدار گردد.

در عمل، تقریبا عملگر انتگرال هیچوقت به تنهایی استفاده نمی‌شود. معمول آنست که بصورت تناسبی-انتگرالی استفاده شود. معادله حوزه زمان و تابع تبدیل آن بفرم زیر خواهد بود:

$$\bar{p}(t) = K_c \left[\bar{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \bar{e}(t) dt \right] \rightarrow G_c(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = K_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} \right] \quad (5-5)$$

در عمل وقتی خطا در مدت زمانی معین حذف نشود، جمله انتگرال بزرگ می‌شود تا کنترل کننده اشباع شود - موقعیتی که به آن پایان انتگرال^۷ گفته می‌شود. این حالت ممکن است طی عملیات راه اندازی و یا تغییرات شدید در مقدار مقرر اتفاق بیفتد. در حالتی که بهره تناسبی هم کم باشد، این اتفاق احتمالا می‌افتد. بسیاری از کنترل کننده‌های صنعتی دارای «ضد-پایان انتگرال^۸» هستند که بطور موقت عملگر انتگرال در هنگام اشباع شدن خروجی متوقف می‌گردد.

در بحث محاسن اما، عملگر انتگرال باعث می‌شود که خطاهای کوچک تشخیص داده شوند و حذف گردند. برای آنکه مختصرا توضیح دهیم که چرا عملگر انتگرال باعث حذف افت کنترل می‌شود، به توضیحی که در مورد کنترل کننده تناسبی دادیم برمی‌گردیم. اگر هدف $e = 0$ در شرایط حالت پایای جدید باشد و مقدار خروجی کنترل کننده باید از p^s به p برسد، باید در کنترل کننده جمله‌ای غیر صفر داشته باشیم. در اینجا با عملگر انتگرال در معادله (۵-۵) این مقدار تأمین شده است. این بدان معنی است که با افزایش زمان مقدار انتگرال غیر صفر بوده و به خطای حالت پایای جدید اجازه می‌دهد که صفر شود.



مشخصات کیفی عمومی کنترل PI

- PI می‌تواند افت کنترل را حذف کند. اگر در طراحی انجام شده میزان افت کنترل زیاد باشد، باید از کنترل کننده PI استفاده گردد.
- حذف افت کنترل معمولاً با هزینه نوسانی شدن بیشتر پاسخ سیستم کنترل همراه است. پاسخ نوسانی ممکن است زمان خیز کوچکی داشته باشد، اما جریمه آن فرارفت بزرگ و زمان نشست طولانی است.
- بدلیل رفتار ذاتی کم میرا، در مورد انتخاب بهره تناسبی باید دقت کافی مبذول نمود. در حقیقت، معمولاً با افزایش عملگر انتگرال به کنترل کننده، باید بهره تناسبی آنرا کاهش داد.

۳-۱-۵ کنترل تناسبی-مشتقی (PD)

وقتی که دمای راکتوری با نرخ $100^\circ C/s$ یا $1^\circ C/s$ تغییر می‌کند، ما باید بطور متفاوتی به آن پاسخ دهیم. ما بطریقی می‌خواهیم خطا را «پیش بینی» کرده و تصحیحات را متناسباً انجام دهیم. بر خلاف کنترل‌های تناسبی و انتگرالی که بر مبنای خطا در حال و گذشته هستند، کنترل کننده مشتق‌گیر بر مبنای چگونگی تغییر خطا با زمان است. می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{p}(t) = \tau_D \frac{d\bar{e}(t)}{dt} \rightarrow \frac{P(s)}{E(s)} = \tau_D s$$

که τ_D ثابت زمانی مشتق^۱ است.

در اینجا وقتی که خطا مقدار ثابتی بماند (حتی غیر صفر)، خروجی کنترل کننده صفر است. بدلیل تناسب با نرخ تغییرات، پاسخ کنترل کننده به نویز بسیار حساس است. اگر تغییر ناگهانی در خطا اتفاق بیفتد، خصوصاً وقتی که مقدار مقرر بطور ناگهانی تغییر می‌کند، پاسخ کنترل کننده بطور غیر قابل باوری بزرگ است - آنچه که در عمل پس زدن مشتق^۱ نامیده می‌شود.

عملگر مشتقی هم مشابه عملگر انتگرالی تقریباً هیچوقت به تنهایی استفاده نمی‌شود. ساده‌ترین شکل استفاده از آن بصورت کنترل تناسبی-مشتقی (PD) است. معادله حوزه زمان و تابع تبدیل یک کنترل کننده PD «ایده‌آل» بفرم زیر است:

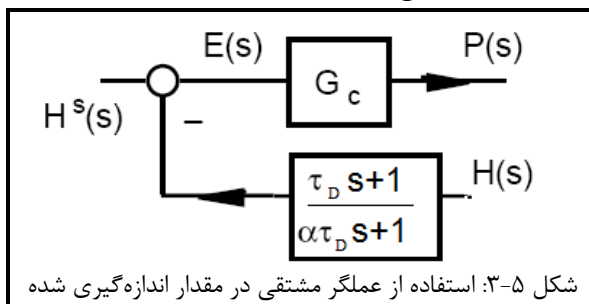
$$\bar{p}(t) = K_c \left[\bar{e}(t) + \tau_D \frac{d\bar{e}(t)}{dt} \right] \rightarrow G_c(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = K_c [1 + \tau_D s] \quad (۶-۵)$$

در عمل، ساخت وسیله‌ای (خواه نیوماتیک یا مدار الکتریکی) که عمل مشتقی ایده‌آل را انجام دهد ممکن نیست. کنترل کننده‌های PD موجود در بازار (حقیقی!) بصورت عناصر پیش‌فاز/پس‌فاز طرح می‌شوند:

$$G_c(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = K_c \left[\frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right] \quad (۶-۵)$$

که α عددی کوچک است، به عنوان نمونه $0.7 \leq \alpha \leq 0.5$.

در نتیجه، یک قطب با مقدار حقیقی بسیار بزرگ (در مقایسه با صفر) به تابع تبدیل مشتق افزوده شده است. بعدها، پس از یاد گرفتن مکان هندسی ریشه‌ها و تحلیل پاسخ فرکانسی، توضیحات بیشتری در مورد این حالت کسری خواهیم داد. اینکه چرا به این کسر عنصر پیش‌فاز/پس‌فاز می‌گوئیم. خواهیم دید که این استراتژی جالبی است که بر PD ایده‌آل ترجیح دارد.



برای کاهش اثر پس زدن مشتق (ضربه ناگهانی در پاسخ به تغییرات مقدار مقرر)، عمل مشتق می‌تواند بر مبنای نرخ تغییر متغیر کنترل شونده (اندازه گیری شده) باشد تا نرخ تغییر در خطا. یک کاربرد محتمل این فرم در شکل ۳-۵ دیده می‌شود. با این روش، عملگر مشتق تغییرات مقدار مقرر را در نظر نگرفته و فقط تلاش می‌کند که مقدار اندازه گیری شده را ثابت نگه دارد.

خصوصیات کیفی عمومی کنترل مشتقی

- کنترل PD برای سیستم‌هایی تأخیر زیاد دارند و یا نویزی هستند مناسب نیست.



- علامت نرخ تغییرات خطا می‌تواند بر خلاف جملات تناسبی و یا انتگرالی باشد. بنابر این اضافه کردن عملگر مشتق به کنترل PI ممکن است بر خلاف جبرانسازی بیش از حد آن عمل کند. کنترل PD ممکن است پاسخ سیستم را با کاهش نوسانات و فرارفت بهبود ببخشد. (محاسبات دقیق‌تر در آینده نشان خواهد داد که مسئله پیچیده‌تر از این جمله ساده است.)
- اگر کنترل تناسبی بخوبی کار نکند (افت کنترل قابل قبولی نداشته باشد)، ممکن است از PD استفاده شود و مشابهها اگر PI بیش از حد کند و یا نوسانی باشد، ممکن است PID بجای PI توصیه گردد. عملگر پایدار کننده اضافی (مشتق گیر) اجازه استفاده از بهره‌های تناسبی بالاتر را می‌دهد که نتیجه آن پاسخ تندتر سیستم خواهد بود.

۵-۱-۴ کنترل تناسبی-انتگرالی-مشتقی (PID)

نهایتاً، با قرار دادن هر سه جزء کنار هم یک کنترل کننده PID (سه عملگر) بوجود خواهد آمد. معادله حوزه زمان و تابع تبدیل یک کنترل کننده PID «ایده‌آل» بفرم زیر است:

$$\bar{p}(t) = K_c \left[\bar{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t \bar{e}(t) dt + \tau_D \frac{d\bar{e}(t)}{dt} \right] \quad (۸-۵)$$

$$G_c(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right] = K_c \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s}$$

علاوه بر این با ضرب کردن بهره تناسبی در پُرانتز، بهره‌های انتگرالی و مشتقی بدست می‌آیند:

$$G_c(s) = K_c + \frac{K_I}{s} + K_D s, \quad K_I = \frac{K_c}{\tau_I}, \quad K_D = K_c \tau_D \quad (۸-۵)$$

بدلیل داشتن چند جمله‌ای با درجه بالاتر در صورت، کنترل کننده PID «ایده‌آل» در عمل قابل ساختن نیست. اما بدلیل ساده بودن جبری این ساختار و مهمتر اینکه دید خوبی به ما می‌دهد، از آن استفاده می‌کنیم. این جمله را در مورد کنترل کننده PD نیز می‌توان استفاده کرد.

در واقعیت، سازندگان مختلف، کنترل کننده PID «ایده‌آل» را بصور مختلف می‌سازند. یک امکان تغییر عملگر مشتق است بدین صورت که:

$$G_c(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} + \frac{\tau_D s}{\alpha \tau_D s + 1} \right] = K_c \left[\frac{(\alpha + 1) \tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} + \frac{1}{\tau_I s} \right] \quad (۹-۵ الف)$$

اجرای دیگری که برای PID واقعی وجود دارد استفاده از مشتق بصورت سری با PI است:

$$G_c(s) = K_c \left[1 + \frac{1}{\tau_I s} \right] \left[\frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right] = K_c \left[\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right] \left[\frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right] \quad (۹-۵ ب)$$

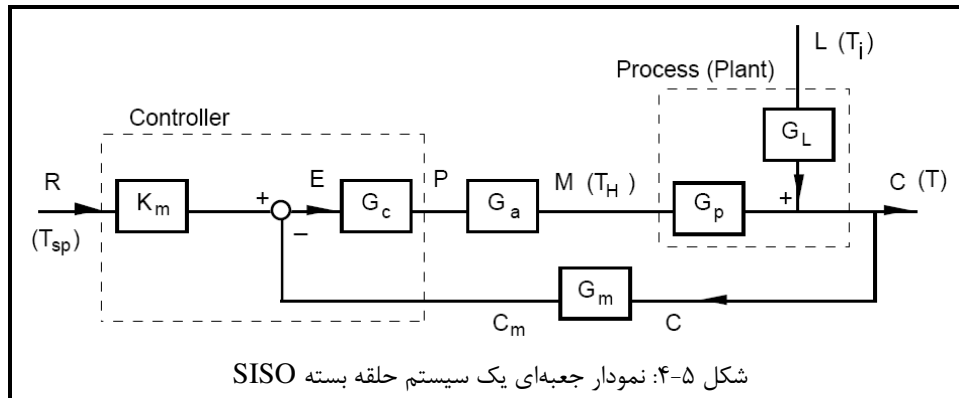
این ترکیب همچنین PID تداخلی یا PID سری نامیده می‌شود. برای حذف پس زدن مشتق، عنصر پیش‌فاز/پس‌فاز در حلقه پسخور بر روی متغیر اندازه‌گیری شده (کنترل شده) بسته می‌شود.

۵-۲ تابع تبدیل حلقه بسته

ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته برای یک سیستم SISO کاملاً عمومی را بدست می‌آوریم. سپس، جعبه به جعبه درون نمودار جعبه‌ای رفته و اطلاعاتی که برای سنتز و طراحی یک سیستم کنترل لازم را استخراج می‌کنیم. یکی از مهمترین جزئیات، واحدهای (ابعاد) خواص فیزیکی است.



۵-۲-۱ تابع تبدیل حلقه بسته و چند جمله‌ای مشخصه



مجدداً تانک گرمکن همزن دار را در نظر بگیرید، این بار در حالت حلقه بسته (شکل ۴-۵). درجه حرارت تانک می‌تواند از متغیرهایی نظیر درجه حرارت جریان ورودی، درجه حرارت کویل بخار و یا دبی جریان ورودی تأثیر بپذیرد. با برگشت به فصل دوم، توابع تبدیل برای

درجه حرارت جریان ورودی و کویل بخار را بدست آوریم. در حوزه تبدیل لاپلاس، تغییر در درجه حرارت تانک بوسیله معادله (۲-۴۹) (ب) بصورت زیر است:

$$T(s) = G_L(s)T_i(s) + G_p(s)T_H(s) \quad (۵-۱۰)$$

این همان مدل فرایند است. در مورد لفظ بکار رفته برای «ورودی» دقت کنید. درجه حرارت جریان ورودی و کویل بخار هر دو ورودی به فرایند هستند، اما لزوماً هر دو ورودی به سیستم نیستند. یکی از آنها متغیر کنترل کننده سیستم است.

در یک سیستم SISO، ما فقط می‌توانیم یک متغیر کنترل کننده داشته باشیم، لذا باید تصمیم بگیریم که کدامیک؟ از آنجا که هدف کنترل درجه حرارت تانک است، معقول است که درجه حرارت کویل بخار، T_H ، برای این منظور در نظر گرفته شود تا درجه حرارت جریان ورودی. ما می‌توانیم از راه ادراک شهودی فیزیکی به این تصمیم برسیم، و یا بر مبنای این حقیقت (که در فصل دوم گفتیم) که درجه حرارت کویل بخار بهره فرایندی بزرگتری دارد. بنابر این برای این سیستم کنترل، T_H بعنوان متغیر کنترل کننده M در نظر گرفته می‌شود که توسط تابع محرک G_a و علائم کنترلی P مدیریت می‌گردد. درجه حرارت تانک، T ، خروجی سیستم (متغیر کنترل شونده C) است. ورودی سیستم مقدار مقرر، T_{sp} ، (یا مرجع R) - همان درجه حرارت مطلوب حالت پایا - می‌باشد.

دیگر ورودی‌هایی که بر پاسخ حلقه بسته تأثیر دارند، به عنوان بار ناخواسته (اغتشاش) هستند. در این مثال، متغیر بار درجه حرارت جریان ورودی، T_i ، است. حالا شاید علت اینکه دو تابع تبدیل با نمادهای G_L و G_p معرفی شده‌اند، مشخص گردد. نکته مهم آنست که «ورودی» برای فرایند و سیستم کنترل با هم متفاوتند.

برای بقیه حلقه کنترل، G_c تابع تبدیل کنترل کننده و تابع تبدیل عنصر اندازه‌گیر (یا مبدل علائم) G_m است. در نمودار جعبه‌ای بهره حالت یکنواخت G_m که برابر K_m است نشان داده نشده است. نکته آنست که در نقطه جمع کننده متغیرهایی می‌توانند مقایسه شوند که هم بعد باشند. لذا مقدار مقرر که از نظر ابعادی با C یکی است، در K_m ضرب می‌شود تا هم بعد مقدار اندازه‌گیری شده گردد. استفاده از K_m صرفاً بدلیل تبدیل واحدی که بین واحد مقدار «داده شده» به کنترل کننده (بعنوان مقدار مقرر) و واحد مقداری که باید در مقایسه کننده استفاده شود، لازم است.

خواسته بعدی بدست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته است. برای جلوگیری از شلوغ شدن بی‌مورد و خواندن بهتر از نوشتن تابعیت s در توابع تبدیل خودداری می‌کنیم. حول نقطه جمع کننده داریم:

$$E = K_m R - G_m C$$

و حول فرایند:

$$C = (G_c G_a G_p) E + G_L L$$

با جایگذاری E :

$$C = G_c G_a G_p (K_m R - G_m C) + G_L L$$

و بازآرایی معادله بالا:



$$C = \left[\frac{K_m G_c G_a G_p}{1 + G_m G_c G_a G_p} \right] R + \left[\frac{G_L}{1 + G_m G_c G_a G_p} \right] L = G_{sp} R + G_{load} L \quad (11-5)$$

که توابع تبدیل حلقه بسته G_{sp} و G_{load} را نتیجه می‌دهد. بر مبنای معادله (۱۱-۵)، ورودی‌های به سیستم کنترل عبارتند از مقدار مقرر R و متغیر بار L ؛ متغیر کنترل شونده C هم خروجی سیستم است. اولین تابع تبدیل G_{sp} اثرات تغییر مقدار مقرر در خروجی را نشان می‌دهد که به آن تابع تعقیب فرمان^{۱۲} ورودی هم می‌گویند. تابع تبدیل دوم G_{load} اثرات تغییر اغتشاش در خروجی را نشان می‌دهد.

نکته مهم آنست که پایداری سیستم بوسیله معادله مشخصه حلقه بسته مدیریت می‌شود:

$$1 + G_m G_c G_a G_p = 0 \quad (12-5)$$

که برای هر دو حالت پیش گفته (تغییر در مقدار مقرر و یا بار) مشابه است. در بسیاری از کتاب‌ها از نماد مخفف $G_{OL} = G_m G_c G_a G_p$ برای تابع تبدیل حلقه باز استفاده می‌شود چرا که اگر حلقه از نقطه‌ای منفصل شود همه این جعبه‌ها در مسیر قرار می‌گیرند. به $G_c G_a G_p$ تابع تبدیل مسیر پیشخور گفته می‌شود.

بندرت اتفاق می‌افتد که تحلیل سیستم‌های SISO برای مقدار مقرر و بار همزمان صورت گیرد. دو احتمال بشرح ذیل ممکن است بوجود آید:

(۱) مسئله سروو^{۱۳}: تغییر در مقدار مقرر وقتی اغتشاشی وجود ندارد ($L = 0$)؛ $C = G_{sp} R$. بصورت آرمانی (بدین مفهوم که در واقعیت بصورت کامل دست نیافتنی است)، ما بدنال تعقیب مقدار مقرر بصورت صد در صد هستیم: $C = R$. یادآوری: متغیرها انحرافی هستند.

(۲) مسئله تنظیم^{۱۴}: تغییر در اغتشاش در حالی که مقدار مقرر ثابت است ($R = 0$)؛ $C = G_{load} L$. هدف حذف اغتشاشات است یعنی نگه داری خروجی سیستم در مقدار مقرر علیرغم تغییر اغتشاشات. بصورت آرمانی، می‌خواهیم $C = 0$ ، بعبارت بهتر حذف کامل اغتشاش.

۵-۲-۲ چطور متغیرهای کنترل شونده^{۱۵} و کنترل کننده را انتخاب کنیم؟

در مسائل تکلیفی شما برای کار، همه متغیرها بیان می‌گردند. اما در عمل مسئله کاملاً متفاوت است. در اینجا چند ایده ساده برای تصمیم سازی بیان می‌شود:

انتخاب متغیر کنترل شونده:

- آنها که بوسیله خود مسئله دیکته می‌شوند. (برای مثال درجه حرارت یک یخچال).
- آنها که خود تنظیم نیستند.
- آنها که ممکن است قیود تجهیزات یا فرایند را نقض کنند.
- آنها که ممکن است با متغیرهای دیگر تداخل ایجاد کنند. (برای مثال درجه حرارت یک راکتور روی بازده آن اثر دارد).

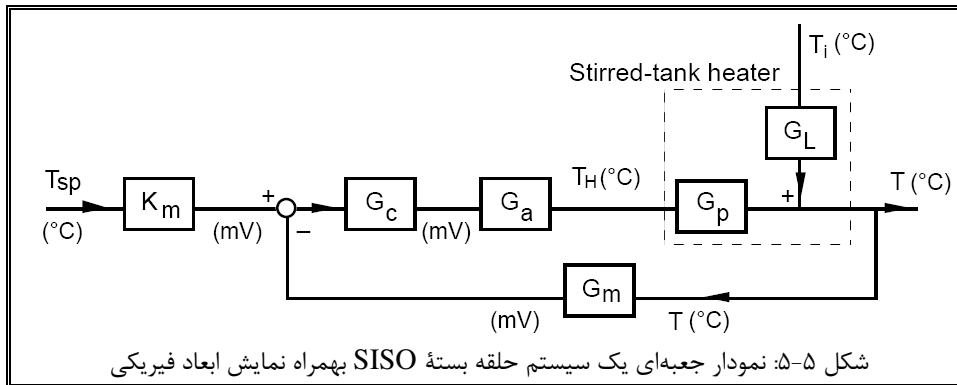
انتخاب متغیر کنترل کننده:

- آنها که اثر مستقیم بر روی فرایند دارند بخصوص بر روی متغیر کنترل شونده.
 - آنها که بهره حالت یکنواخت بزرگی دارند. (حساسیت خوب)
 - آنها که تأخیر زمانی ندارند.
 - آنها که با دیگر حلقه‌های کنترل تداخلی ندارند.
- بعد از انتخاب متغیرهای کنترل شونده و کنترل کننده، بقیه متغیرهای ورودی در یک سیستم SISO بار هستند.

۵-۲-۳ سنتز سیستم کنترل تک حلقه

اکنون با در نظر گرفتن مجدد سیستم تانک گرمکن همزن دار، به درون آن می‌رویم. حالا نگاهی دقیق‌تر به توابع تبدیل و واحد (بعد) آنها می‌اندازیم (شکل ۵-۵).

◇ مدل فرایند



اولین مورد «شناسایی فرایند»^{۱۶} است. یا تابع تبدیل فرایند را بر مبنای اصول علمی و مهندسی بدست می‌آوریم، یا بسادگی با انجام یک آزمایش پله، مدلی را بر اساس داده‌های ورودی-خروجی ارائه می‌دهیم. بر اساس هر کدام از روشها، نیاز به تصمیم‌گیری در مورد متغیر کنترل شونده است که باید اندازه‌گیری شود. سپس نیاز به انتخاب متغیر کنترل کننده داریم. بقیه متغیرها بعنوان اغتشاش شناخته می‌شوند.

در مورد تانک گرمکن همزن دار، بخوبی می‌دانیم که باید از درجه حرارت کویل حرارتی به منظور کنترل دمای تانک استفاده کنیم. تابع تبدیل G_p بر این مبنای تعریف شده است. در این مثال ساده، تنها متغیر باقیمانده یعنی درجه حرارت جریان ورودی اغتشاش است و تابع تبدیل بار G_L متناظرا تعریف شده است. از بخش ۲-۸-۲ و معادله (۲-۴۹ ب) داریم:

$$T = G_L T_i + G_p T_H = \left(\frac{K_L}{\tau_p s + 1} \right) T_i + \left(\frac{K_p}{\tau_p s + 1} \right) T_H \quad (۱۳-۵)$$

از همان بخش، می‌دانیم که بهره حالت یکنواخت و ثابت زمانی به مقادیر دبی جریان، دانسیته مایع، ظرفیت حرارتی، ضریب انتقال حرارت و غیره، بستگی دارند. برای جلوگیری از شلوغی، از تحلیل انتقال حرارت صرف نظر می‌کنیم. فرض کنید همه کارهای لازم انجام شده و به مقادیر زیر رسیده‌ایم: $K_p = 0.85 \text{ } ^\circ\text{C}/^\circ\text{C}$ و $\tau_p = 20 \text{ min}$.

◇ فرستنده علائم

بمحض دانستن متغیر کنترل شونده، باید بنحوی آن را اندازه‌گیری کرد. اگر مبدل علائم^{۱۷} (بسته‌ای شامل حسگر و فرستنده علائم^{۱۸}) در فاصله دوری در پایین دست جریان قرار گرفته و یا خیلی خوب ایزوله شده باشد و پاسخ هم کند باشد، تابع تبدیل عنصر اندازه‌گیر ممکن است بصورت زیر باشد:

$$\frac{T_m}{T} = G_m = \frac{K_m e^{-t_d s}}{\tau_m s + 1} \quad (۱۴-۵)$$

K_m بهره اندازه‌گیری مبدل، τ_m ثابت زمانی آن و t_d مقدار تأخیر انتقالی را نشان می‌دهند. در بدترین حالت، حسگر ممکن است غیرخطی باشد بدین مفهوم که بهره اندازه‌گیری با تغییر شرایط عملیاتی تغییر کند.

برای درجه حرارت، می‌توان از یک ترموکوپل استفاده کرد که دارای تفکیک پذیری $0.05 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ است. (همیشه می‌توان از یک RTD^{19} برای تفکیک پذیری و پاسخ بهتر استفاده کرد). تغییرات خروجی این ترموکوپل برای 12 A/D بیت بسیار کم است و نیاز به یک تقویت کننده^{۲۰} برای تقویت علائم دارد. در عمل مبدلها (شامل حسگر و فرستنده) بصورت بسته‌ای^{۲۱} در بازار موجود است و نیاز به دانستن اطلاعات تک تک اجزاء نیست. بسیاری از آنها دارای خروجی 0 تا 4 ولت یا 20 میلی آمپر هستند.

برای جلوگیری از اطاله کلام، فرض کنید فرستنده درجه حرارت تقویت کننده‌ای داخلی داشته باشد که بهره اندازه‌گیری آن $K_m = 5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ باشد. فرض کنید تأخیر زمانی وجود نداشته و پاسخ ترموکوپل هم سریع است. تابع تبدیل عنصر اندازه‌گیر برابر است با:

$$G_m = K_m = 5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$

این بهره مقدار اندازه‌گیری شده شیب منحنی کالیبراسیون است. اگر این منحنی خطی باشد شیب آن و اگر غیر خطی باشد شیب خط مماس خواهد بود.



◇ کنترل کننده

علائم تقویت شده از فرستنده به کنترل کننده فرستاده می‌شود که یک کامپیوتر یا یک جعبه سیاه^{۲۲} (که از داخل آن اطلاع دقیقی نداریم) است. در این باره بیشتر از این چیزی برای گفتن در حال حاضر وجود ندارد بجز آنکه چیزی شبیه یک کنترل کننده PID یا یک نرم‌افزار کامپیوتری و مدار حدواسط آن است.

یادآوری می‌کنیم که در جلوی دستگاه کنترل کننده واحدهای (ابعاد) فیزیکی مانند C° وجود دارد (البته تعدادی بر مبنای صفر تا صد درصد هستند). وقتی مقدار مقرر روی دستگاه تغییر کند، کنترل کننده باید آنرا به علائم دیگری (مثلا الکتریکی) تبدیل کند. به همین دلیل K_m بعنوان جزئی از کنترل کننده در شکل ۵-۵ معرفی شده است.

◇ محرک/شیر کنترل

در نهایت، طراحی یک محرک مناسب درد سری بزرگ است. باید محرکی را یافت که در محدوده تغییرات متغیر کنترل کننده کار کند، پاسخی سریعتر از فرایند داشته و راهی جهت اتصال کنترل کننده با آن وجود داشته باشد. در پس G_a اطلاعات زیادی است که باید طراحی شده و بدست آید.

در مثال تانک گرمکن همزن دار، چندین توضیح باید اضافه شود. سیستم باید ایمن^{۲۳} باشد. عبارت دیگر، اگر سیستم از کار بیفتد، باید مطمئن بود که حرارت بیشتری وارد تانک نمی‌شود. پس یک شیر قطع-بسته^{۲۴} لازم است بدین معنی که شیر برای باز شدن انرژی لازم دارد و در صورت قطع انرژی بسته می‌ماند. عبارت دیگر بهره شیر مثبت است. ما می‌توانیم اینطور در نظر بگیریم که: اگر درجه حرارت از مقدار مقرر کمتر شود، خطا زیاد می‌شود. با یک بهره تناسبی مثبت، خروجی کنترل کننده/فرازش می‌یابد، بنابر این شیر باز می‌شود. اگر در فرایند ناگهان برق قطع شود، شیر می‌بندد و بخار قطع می‌گردد. اما شیر چگونه بدون انرژی خودبخود بسته می‌شود؟ در اینجا لازم است توضیح دوم ارائه شود. ممکن است برای این حالت پیشنهاد شود که برق اضطراری یا یک فنر که شیر را بسته نگه دارد طراحی شود، اما بدلیل کاهش اثرات زیانبار آتش، در صنایع از شیرهای نیوماتیک^{۲۵} (که با هوای فشرده کار می‌کنند) استفاده می‌شود که با علائم فشاری بین $15-3\text{ psig}$ کار می‌کنند. سیگنال الکتریکی خروجی از کنترل کننده معمولا $20-4\text{ mA}$ است. علائم جریانی نسبت به علائم ولتاژ برای ارسال در مسیره‌های طولانی، کمتر مستعد تغییر با نویز هستند. بنابر این در بیشتر موارد، یک مبدل جریان-به-فشار^{۲۶} (I/P) بین خروجی کنترل کننده و محرک شیر قرار می‌گیرد.

دست آخر، با ارتباط دادن جریان بخار به درجه حرارت کویل حرارتی مسئله را پیچیده‌تر می‌کنیم. تحلیل مناسب این ارتباط شامل معادلات موازنه انرژی به خواننده واگذار می‌شود. برای جلوگیری از محاسبات پیچیده واقعی، چند فرض انجام می‌دهیم تا بهره شیر را بدست آوریم:

- (۱) فرض کنید تقویت کننده مناسب و مبدل مناسبی برای تبدیل علائم خروجی کنترل کننده به علائم مورد نیاز شیر (تبدیل علائم الکتریکی به دبی جریان) در دست است.
 - (۲) فرض کنید شیر کنترل بکار رفته دارای مشخصات خطی است یعنی دبی جریان رابطه‌ای خطی با میزان باز شدن شیر دارد.
 - (۳) تغییر دبی جریان بخار می‌تواند تغییر درجه حرارت کویل حرارتی «تلقی» شود.
- وقتی بهره‌های حالت یکنواخت هر سه فرض داده شده با هم مجتمع شود، به بهره شیر K_v می‌رسیم که دارای واحد C/mV است. برای این مثال بخصوص فرض کنید بهره شیر C/mV 0.6° و ثابت زمانی آن 0.2 min باشد. تابع تبدیل محرک برابر خواهد بود با:

$$G_v = \frac{K_v}{\tau_v s + 1} = \frac{0.6}{0.2s + 1}$$

و معادله مشخصه حلقه بسته تانک گرمکن همزن دار برابر است با:

$$1 + G_m G_c G_a G_p = 1 + G_c \frac{(0.6)(0.85)(5)}{(0.2s + 1)(20s + 1)} = 0$$

نیازی به نوشتن کل معادله حلقه بسته C/R یا در این مثال T/T_{sp} نیست. دلیل اصلی آنست که طراحی و تحلیل بر مبنای معادله مشخصه است. تابع تبدیل حلقه بسته فقط برای بدست آوردن شبیه سازی حوزه زمان است که بسادگی با Matlab قابل انجام است. درست است که این را می‌گوییم ولی برای درک بهتر تئوری، برای چند حالت ساده تابع تبدیل حلقه بسته را نیز بدست می‌آوریم.



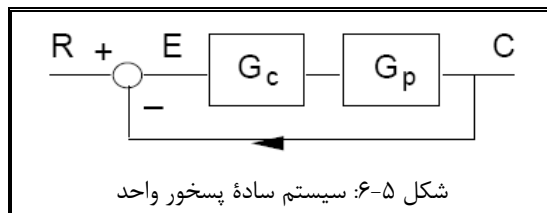
۳-۵ پاسخ سیستم حلقه بسته

در این بخش، توابع تبدیل حلقه بسته برای چند مثال ساده را بدست می‌آوریم. هدف در اینجا میزان دید و درکی است که از روند جبری بدست می‌آوریم. علاوه بر این، مراحل را که برای این کار انجام می‌دهیم برای یادگیری نحوه تحلیل مسائل کنترل لازم است. تحلیل همچنین به ما کمک خواهد کرد در درک بهتر مواردی همچون: چرا یک سیستم پاسخ سریعتری دارد، چرا یک سیستم کم میرا می‌شود، و چه موقع افت کنترل داریم. وقتی که روند جبری به اندازه کافی صریح باشد، می‌توان مشاهده کرد که چگونه تنظیم کنترل کننده بر پاسخ حلقه بسته اثر می‌گذارد. نتایج عموماً مواردی را که قبلاً در مورد مشخصات کنترل کننده‌های مختلف گفتیم را تأیید می‌کند.

کار واقعی مانند یک دستور آشنایی است:

- (۱) پس از بیان یک مسئله، حلقه کنترل آن را رسم کرده و تابع تبدیل حلقه بسته را بدست آورید.
- (۲) یکی از مسائل سروو یا تنظیم را انتخاب کنید. یادآوری: چند جمله‌ای مشخصه برای هر دو یکی است.
- (۳) توابع تبدیل مناسب G_c (P, PI, PD, یا PID)، G_a ، G_p و G_m را در تابع تبدیل حلقه بسته جایگذاری کنید. چند جمله‌ای مشخصه باید بنحو مناسبی بدست آید.
- (۴) با بازآرایی تابع تبدیل حلقه بسته آنرا در پیکره بندی ثابت زمانی بدست آورده، بهره و ثابت زمانی آن را تعیین کنید.

تمام تحلیل‌ها این مسیر عمومی را باید طی کنند. نیاز به هیچگونه محاسبه اضافی نیست! باید در بدست آوردن تابع تبدیل حلقه بسته، بهره حالت یکنواخت و دیگر کمیت‌های مربوط به هر مسئله کاملاً تبحر داشته باشید.



در اینجا برای مثال‌های ذکر شده فرض می‌کنیم $G_m = G_a = 1$ و مسئله سروو ($L = 0$) را در نظر می‌گیریم تا به شما تصور لازم را داده باشیم. روند جبری با این سیستم‌های پسخور ساده شده با G_c و G_p (شکل ۵-۶) بمراتب ساده‌تر است. تابع تبدیل حلقه بسته عبارتست از:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \quad (۱۵-۵)$$

و معادله مشخصه حلقه بسته آن برابر است با $1 + G_c G_p = 0$.

مثال ۵-۱: تابع تبدیل سیستم حلقه بسته‌ای با کنترل تناسبی و فرایند مرتبه اول را بدست آورید. مقدار نهایی (حالت پایایی جدید) متغیر کنترل شونده پس از اعمال یک تغییر پله‌ای در مقدار مقرر چیست؟

در این مثال، $G_c = K_c$ و $G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$. با جایگذاری این توابع تبدیل در معادله (۱۵-۵) خواهیم داشت:

$$\frac{C}{R} = \frac{K_c K_p}{\tau_p s + 1 + K_c K_p}$$

اگر صورت و مخرج بر $(1 + K_c K_p)$ تقسیم شود، داریم:

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad K = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p}, \quad \tau = \frac{\tau_p}{1 + K_c K_p}$$

K بهره حالت یکنواخت حلقه بسته و τ ثابت زمانی آن است.

از معادله (۱۱-۵) به خاطر می‌آوریم که چند جمله‌ای مشخصه حلقه بسته مخرج تابع تبدیل حلقه بسته است که محل قطب حلقه بسته برابر است با:



$$s = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1 + K_c K_p}{\tau_p}$$

دو مورد کلیدی قابل مشاهده است. اول اینکه همواره $K < 1$ ، بدین مفهوم که متغیر کنترل شونده به مقداری کوچکتر از تغییر در مقدار مقرر تغییر می‌کند که منشأ افت کنترل است. دوم اینکه $\tau < \tau_p$ یعنی سیستم پاسخی سریعتر از فرایند حلقه باز دارد. ثابت زمانی سیستم با بزرگ شدن بهره تناسبی کنترل کننده کوچکتر می‌شود. این با محل قطب بسته سازگار است چرا که با افزایش K_c از مبدأ «دور می‌شود».

اکنون به خطای ماندگار (افت کنترل) تفضیلی‌تر می‌پردازیم. فرض کنید که یک تغییر پله در مقدار مقرر اعمال شود: $R = M/s$. تغییرات نهایی در مقدار مقرر با استفاده از قضیه مقدار نهایی برابر است با:

$$\bar{c}_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{\tau s + 1} \frac{M}{s} = MK$$

افت کنترل خطای نسبی بین مقدار مقرر و مقدار اندازه‌گیری شده (مقدار متغیر کنترل شونده) در حالت پایا است، $(r - c_\infty)/r$:

$$e_{ss} = \frac{M - MK}{M} = 1 - K = 1 - \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p} = \frac{1}{1 + K_c K_p}$$

امکان کاهش افت کنترل با افزایش بهره تناسبی وجود دارد.

در اینجا به گونه‌ای دیگر به جبر ارزیابی خطای ماندگار می‌پردازیم. اگر تابع تبدیل حلقه بسته بین مقدار مقرر و خطا (آنطور که در شکل ۵-۶ دیده می‌شود) را بنویسیم داریم:

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 + G_c G_p}$$

حال چنانچه برای مقدار مقرر تغییر پله واحد را در نظر بگیریم، $R = 1/s$ ، خطای ماندگار از قضیه مقدار نهایی برابر خواهد بود با (در نظر داشته باشید که $e = \bar{e}$):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c G_p} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p} = \frac{1}{1 + K_{err}} \quad , \quad K_{err} = \lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p \quad (16-5)$$

K_{err} را **ثابت خطای موقعیت**^{۲۷} (در مقابل سرعت) می‌نامیم. برای آنکه خطا صفر شود، K_{err} باید به سمت بی‌نهایت میل کند. برای مثال ۵-۱، ثابت خطا و خطای ماندگار برابر است با:

$$K_{err} = \lim_{s \rightarrow 0} G_c G_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_c K_p}{\tau_p s + 1} = K_c K_p \quad \rightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + K_c K_p} \quad (17-5)$$

مثال ۵-۲: تابع تبدیل حلقه بسته را برای یک سیستم با کنترل تناسبی و فرایند مرتبه دوم پرمیرا را بدست آورید. اگر فرایند مرتبه دو دارای ثابت زمانی‌های ۲ و ۴ و بهره فرایندی ۱ باشد، چه بهره تناسبی پاسخ حلقه بسته با ضریب میرایی ۰٫۷ به ما خواهد داد؟

در این مثال، $G_c = K_c$ و $G_p = \frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$. با جایگذاری در معادله (۱۵-۵) داریم:

$$\frac{C}{R} = \frac{K_c K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K_c K_p} = \frac{K_c K_p / (1 + K_c K_p)}{\left(\frac{\tau_1 \tau_2}{1 + K_c K_p} \right) s^2 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_c K_p} \right) s + 1}$$



نکته کلیدی آنست که بدانیم سیستم حلقه بسته ممکن است دارای رفتاری کم میرا باشد هر چند فرایند پرمیراست. چند جمله‌ای مشخصه ممکن است بر اساس مقدار K_c دارای ریشه حقیقی یا مختلط باشد. (موقع بررسی مکان هندسی ریشه‌ها بهتر این موضوع را درک خواهید کرد). در حال حاضر می‌توان نوشت:

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}, \quad K = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_2}{1 + K_c K_p}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2 (1 + K_c K_p)}}$$

با جایگذاری $K_p = 1$, $\tau_1 = 2$ و $\tau_2 = 4$ ، برای آنکه $\zeta = 0.7$ مقدار $K_c = 1.29$ باید باشد. نهایتاً، دیده می‌شود که بهره حالت یکنواخت این سیستم مانند آن چیزی است که در مثال ۵-۱ بدست آوردیم، بدین مفهوم که خطای ماندگار این سیستم مرتبه دو نیز با سیستم مرتبه اول مثال ۵-۱ برابر است.

از دید طراحی کنترل کننده، می‌توان شیوه صرفاً تحلیلی را برای سیستم‌های ساده بکار برد. البته، در عالم واقع این گونه مسائل کمتر وجود دارد. از طرفی دیگر، اغلب مجبور به انتخاب از بین معیارهای متضاد هستیم. مثلاً ما نمی‌توانیم سیستمی داشته باشیم که در حین داشتن زمان خیز کوتاه، زمان نشست کوتاهی نیز داشته باشد. اگر هدف پاسخ هموار و بدون فرارفت اضافی به تغییر در مقدار مقرر باشد، نمی‌توان از سیستم همزمان یک پاسخ تند اولیه انتظار داشت. بعنوان یک مهندس، وظیفه تصمیم‌گیری با ماست. از دید خصوصیات پاسخ، استفاده از نسبت فروکش بعنوان معیار طراحی غیرمعمول نیست. با استفاده از معادله (۳-۲۹)، نسبت فروکش DR (یا فرارفت OS) تابعی است از ضریب میرایی:

$$DR = (OS)^\tau = \exp\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (۱۸-۵)$$

با استفاده از این فرمول می‌توان نوشت:

$$\zeta^\tau = \frac{(\ln DR)^\tau}{4\pi^\tau + (\ln DR)^\tau} = \frac{(\ln OS)^\tau}{\pi^\tau + (\ln OS)^\tau} \quad (۱۹-۵)$$

اگر یک سیستم مرتبه دو داشته باشیم، می‌توانیم برای کنترل کننده یک رابطه تحلیلی بیابیم. با داشتن یک کنترل کننده تناسبی و یک فرایند مرتبه دو همانطور که در مثال ۵-۲ گفته شد، به جوابی منحصر بفرد برای طراحی کنترل کننده می‌رسیم. حال اگر، برای مثال، یک کنترل کننده PI (دو پارامتر) با یک فرایند مرتبه اول داشته باشیم، از آنجا که با داشتن یک معادله و دو مجهول به جواب منحصر بفردی برای پارامترهای کنترل کننده نمی‌رسیم، نیاز به قید بیشتری خواهیم داشت.

مثال ۵-۳: تابع تبدیل حلقه بسته را برای یک سیستم با کنترل تناسبی-انتگرالی و فرایند مرتبه اول بدست آورید. مقدار افت کنترل سیستم چقدر است؟

با جایگذاری $G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$ و $G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$ در معادله (۵-۱۵)، برای تابع تبدیل حلقه بسته سروو خواهیم داشت:

$$\frac{C}{R} = \frac{K_c K_p (\tau_I s + 1)}{\tau_I s (\tau_p s + 1) + K_c K_p (\tau_I s + 1)} = \frac{(\tau_I s + 1)}{\left(\frac{\tau_I \tau_p}{K_c K_p}\right) s^2 + \left[\frac{\tau_I (1 + K_c K_p)}{K_c K_p}\right] s + 1}$$

دو نکته قابل ذکر در اینجا وجود دارد. اول، سیستم حلقه بسته از مرتبه دوم است چرا که کنترل کننده یکی به مرتبه آن افزوده است. دوم، بهره حالت یکنواخت سیستم حلقه بسته یک است و بنابر این افت کنترل نداریم. این خاصیت عمومی کنترل PI است. (اگر برای شما به اندازه کافی این موضوع شفاف نیست، کافی است که به مقدار مقرر ورودی پله داده و مقدار خطا را از قضیه مقدار نهایی بدست آورید.)

از آنجا که انتظار می‌رود پاسخ سیستم مرتبه دوم رفتاری کم میرا بروز دهد، تابع تبدیل آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:



$$\frac{C}{R} = \frac{(\tau_I s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_p}{K_c K_p}}, \quad \zeta = \frac{1}{2}(1 + K_c K_p) \sqrt{\frac{\tau_I}{K_c K_p \tau_p}}$$

در حالی که نتایج را برای ثابت زمانی و ضریب میرایی داریم، اما مشخص نیست که چگونه ثابت زمانی انتگرال و بهره تناسبی قطب‌های حلقه بسته و یا ضریب میرایی را تحت تأثیر قرار می‌دهند. مجدداً از ادامه مبحث تا زمان پوشش مبحث مکان هندسی ریشه‌ها خودداری می‌کنیم. مکان هندسی ریشه‌ها^{۲۸} ابزاری بسیار شگفت‌انگیز جهت ارزیابی چگونگی تأثیر طراحی کنترل کننده بر پاسخ سیستم است.

مثال ۴-۵: تابع تبدیل حلقه بسته را برای یک سیستم با کنترل تناسبی-مشتقی و فرایند مرتبه اول بدست آورید.

تابع تبدیل حلقه بسته (۱۵-۵) وقتی $G_c = K_c(1 + \tau_D s)$ و $G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$ برابر است با:

$$\frac{C}{R} = \frac{K_c K_p (\tau_D s + 1)}{(\tau_p s + 1) + K_c K_p (\tau_D s + 1)} = \frac{[K_c K_p / (1 + K_c K_p)] (\tau_D s + 1)}{\left[\frac{\tau_p + K_c K_p \tau_D}{1 + K_c K_p} \right] s + 1}$$

تابع تبدیل حلقه بسته مرتبه اول باقی مانده و یک عنصر پیش‌فاز/پس‌فاز را تشکیل می‌دهد:

$$\frac{C}{R} = \frac{K(\tau_D s + 1)}{\tau s + 1}, \quad K = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p}, \quad \tau = \frac{\tau_p + K_c K_p \tau_D}{1 + K_c K_p}$$

بهره حالت یکنواخت برای این سیستم هم همانست که در مثال ۱-۵ بدست آمد و لذا افت کنترل آن هم همان خواهد بود. ثابت زمانی سیستم به پارامترهای متفاوتی بستگی دارد. این مسئله را هم در مبحث مکان هندسی ریشه‌ها بحث خواهیم کرد.

مثال ۵-۵: تابع تبدیل حلقه بسته را برای یک سیستم با کنترل تناسبی و فرایند انتگرال‌گیر بدست آورید. مقدار افت کنترل سیستم چقدر است؟

با جایگذاری $G_c = K_c$ و $G_p = 1/s$ در معادله (۱۵-۵)، برای تابع تبدیل حلقه بسته خواهیم داشت:

$$\frac{C}{R} = \frac{K_c}{As + K_c} = \frac{1}{[A/K_c]s + 1}$$

با داشتن بهره حالت یکنواخت حلقه بسته، آشکار است که افت کنترل صفر است. نکته اینجاست که عملگر انتگرال می‌تواند توسط فرایند هم اعمال شود. در اینصورت نیازی به استفاده از کنترل PI نیست. فرایند سطح در تانک‌هایی که ورودی و خروجی آنها توسط پمپ و مستقل از سطح مایع درون آنها تغییر می‌کنند از این دست فرایندهاست (مثال ۳-۱).

مثال ۶-۵: شبیه‌سازی مصور پاسخ زمانی حلقه بسته را انجام دهید. بسیاری از متون دارای شکل‌های مصوری از خواص عمومی سیستم‌های پسخور هستند. این همان چیزی است که بسادگی با Matlab قابل انجام است. مشاهدات مثال‌های قبل را شبیه‌سازی کنید. از سیستم پسخور واحد استفاده نمایید.

مثال ۳-۵ را با $\tau_p = 5$ و $K_p = 0.8$ در نظر بگیرید. بجای استفاده از فرمول‌های بدست آمده در مثال ۳-۵، فرمان‌های زیر در Matlab شبیه‌سازی آن، وقتی تغییر در مقدار مقرر پله واحد است، را انجام می‌دهند.

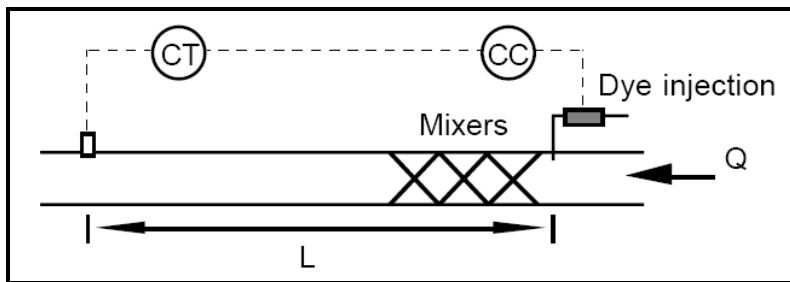
```
kc=1; %The two tuning parameters to be varied
taui=10;

% The following statements are best saved in an M-file
Gc=tf(kc*[taui 1],[taui 0]); % The PI controller function
Gp=tf(0.8,[5 1]); % The process function
Gcl=feedback(Gc*Gp,1) % Unity closed loop function GcGp/(1 + GcGp)
step(Gcl); % Personalize your own plotting
% and put a hold for additional curves
```



در این فرمان‌ها، تابع $()$ feedback بمنظور تولید تابع تبدیل حلقه بسته C/R استفاده شده است. پسخور واحد بودن حلقه در عدد «1» بکار رفته در ورودی تابع فوق نمایانگر است. ابتدا در حالی که $K_c = 1$ را ثابت نگه داشته‌اید، مقدار τ_I را $1, 10, 100$ و 1000 قرار دهید. سپس، مقدار $\tau_I = 100$ را انتخاب کرده و با مقادیر $1, 5, 10, 50, 100, 500$ K_c شبیه سازی را تکرار کنید. در هر دو حالت، نتایج باید مطالب پیش گفته را تأیید کنند. اگر مسئله را با $\tau_I = 1$ و $K_c = 1, 5, 10, 50, 100$ تکرار کنید به نتایجی غیر قابل انتظار خواهید رسید. تا اینجا برای توضیح این نتایج، تئوری لازم گفته نشده است. در آینده در این مورد بیشتر خواهیم گفت. با تغییر کنترل کننده به PD یا PID، اثرات تغییر در ثابت زمانی مشتق را می‌توان مشاهده کرد. در مباحث آینده مزایای این شبیه سازی دینامیکی را بهتر درک خواهیم کرد. عجلالتا، این شبیه سازی باید به ما در مورد مشخصات کنترل کننده PID و احساس نیاز به دانستن راه‌های بهتر برای تنظیم کنترل کننده، درک کیفی داده باشد.

مثال ۵-۷: باید برای یک سیستم اختلاط یک کنترل کننده سروو طراحی کنیم. رنگ آبی بدرون جریانی از آب تزریق می‌شود تا برای تولید پارچه راه راه از آن استفاده گردد. رنگ تزریق شده با جریان درون یک لوله توسط مخلوط‌کن‌های محلی اختلاط می‌یابد.



یک آشکار ساز نوری^{۲۹} بمنظور اندازه گیری غلظت رنگ در پایین دست جریان استفاده می‌گردد. خروجی آشکار ساز به کنترل کننده فرستاده می‌شود و کنترل کننده در پاسخ علائمی را به سر شیر تنظیم تزریق می‌فرستد. در مورد محل نصب آشکار ساز نوری باید دقت

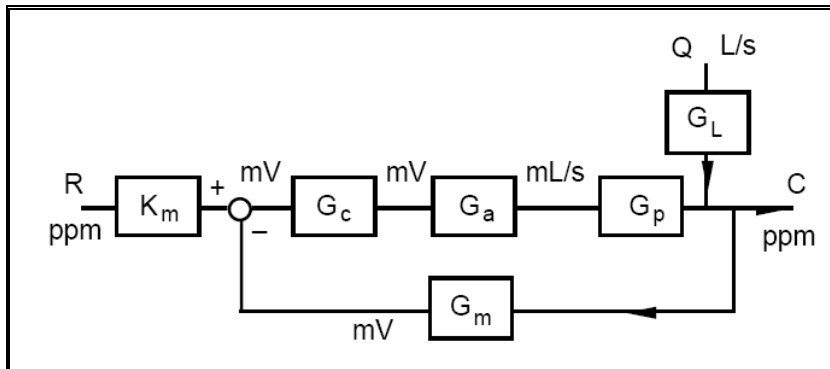
کرد که به فاصله نسبتاً زیاد از محل اختلاط در پایین دست جریان نصب شود تا از بابت اندازه گیری درست جریان مخلوط شده مطمئن باشیم. لازم بذکر است که چنانچه این فاصله خیلی زیاد باشد، تأخیر زمانی زیاد باعث ناپایداری احتمالی سیستم کنترل خواهد شد.

دبی جریان آب در لوله $2 L/s$ و سطح مقطع لوله $5 cm^2$ است. شیر تنظیم طراحی خاصی دارد بطوریکه مقدار تزریقی رنگ بر حسب mL/s با میزان باز بودن آن رابطه خطی داشته و تابع تبدیل آن مرتبه اول با ثابت زمانی $0.2 s$ و بهره حالت یکنواخت $0.6 mL \cdot s^{-1} \cdot mV^{-1}$ است. فرایند اختلاط به تنهایی بصورت یک تابع تبدیل مرتبه اول با بهره حالت یکنواخت $0.8 ppm \cdot s \cdot mL^{-1}$ مدل شده است. در آزمایشی مشخص شده است که پاسخ غلظت رنگ با تغییر پله‌ای در شیر تنظیم در مدت $20 s$ به 99.3% تغییرات نهایی می‌رسد. آشکار ساز نوری بشدت سریع بوده و در محدوده وسیعی از غلظت خطی است. تولید کننده رابطه کالیبراسیون زیر را پیشنهاد کرده است:

$$v = 0.3 + 2.6C$$

که در آن ولتاژ خروجی بر حسب mV و غلظت رنگ بر حسب ppm است.

این مسئله‌ای است که بارها به آن در فصل‌های بعد مراجعه خواهیم کرد. فعلاً، نمودار جعبه‌ای سیستم کنترل رنگ را رسم کرده و توابع تبدیل آن را مشخص نمایید. تمام واحدهای مربوطه را در نمودار و تمام اغتشاشات محتمل را در سیستم نشان دهید. علاوه،



نمی‌دانیم که آشکار ساز را کجا قرار دهیم. فرض کنید که در فاصله $290 cm$ از مخلوط کن قرار دارد.

نمودار جعبه‌ای در شکل روبرو نشان داده شده است. در این نمودار C غلظت رنگ و R مقدار مقرر هستند. دبی جریان یک منبع احتمالی اغتشاش است.

بر اساس اطلاعات داده شده، توابع تبدیل عبارتند از:



$$G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}, \quad G_v = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}, \quad G_m = K_m e^{-t_d s}$$

که در مورد مقدار بهره حالت یکنواخت G_L اطلاعاتی نداریم. مقادیر پارامترها عبارتست از:

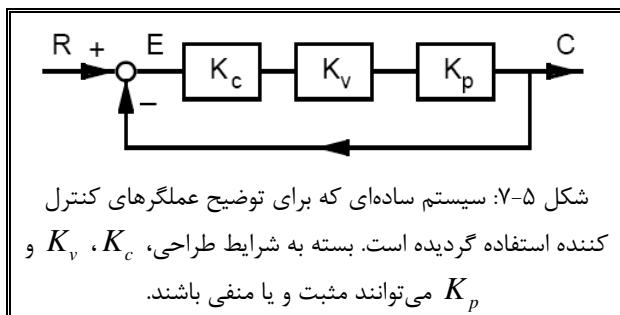
$$K_p = 0.8 \text{ ppm} \cdot s \cdot mL^{-1}, \quad \tau_p \approx 20/5 = 4 \text{ s}, \quad K_v = 0.6 \text{ mL} \cdot s^{-1} \cdot mV^{-1}$$

$$\tau_v = 0.2 \text{ s}, \quad K_m = 2.6 \text{ mV} \cdot \text{ppm}^{-1}$$

از آنجا که سرعت متوسط آب $4000/5 = 800 \text{ cm/s}$ است، مقدار تأخیر برابر است با: $t_d = 290/400 = 0.725 \text{ s}$. برای کنترل کننده هم یک تابع تبدیل PID در نظر می‌گیریم. با این مثال بعدا کار می‌کنیم.

۴-۵ انتخاب و عمل کنترل کننده‌ها

چند جمله‌ای را باید در مورد عمل کنترل کننده‌ها اضافه کنیم. نکته اینست که باید دلایل فیزیکی برای طراحی یک سیستم حقیقی داشته باشیم. همچنین باید به فکر ایمنی بوده و اتفاقاتی که ممکن است برای کنترل کننده و محرک بیافتد اگر سیستم دچار نقص

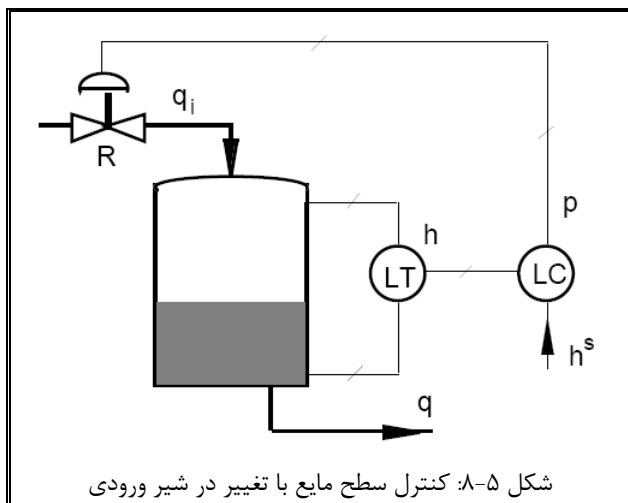


شود، را پیش‌بینی کنیم - خواسته‌ای که اغلب در مسائل درون کتاب‌ها نادیده گرفته می‌شود.

یک سیستم در کتاب‌های درسی دارای یک کنترل کننده با بهره تناسبی مثبت است. جعبه‌های دیگر نظیر فرایند و محرک هم دارای بهره حالت یکنواخت مثبت هستند. البته همیشه اینگونه نیست. از کنترل سطح مایع استفاده می‌کنیم تا بگوئیم منظور چیست. همه توضیحات زیر بر اساس شکل ۵-۷ است.

فرض کنید که سطح مایع داخل یک تانک را بخواهیم با تغییر دبی

جریان ورودی (شکل ۵-۸) کنترل کنیم. چنانچه سطح مایع به مقداری کمتر از مقدار مقرر کاهش یابد، کنترل کننده علائم فرستاده شده را افزایش می‌دهد تا شیر را باز کرده و با افزایش دبی جریان ورودی سطح تانک را افزایش دهد. تغییرات در متغیر کنترل شونده و

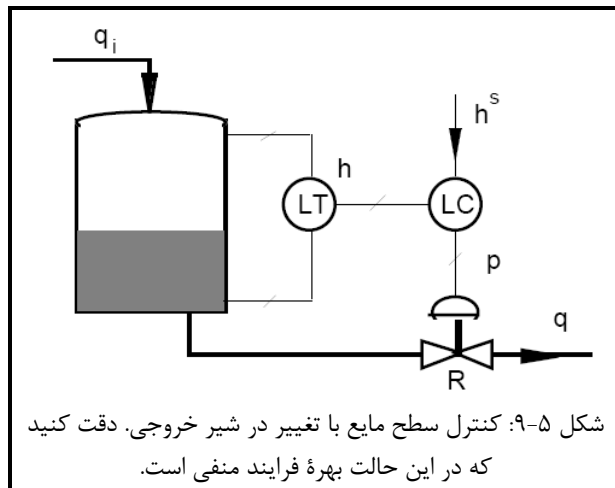


خروجی کنترل بر خلاف یکدیگر هستند. این نتیجه منطقی چگونگی تعریف خطا در سیستم‌های پسخور منفی است.

در این مورد بخصوص، از یک شیر باز شونده-باز شونده^{۳۰} استفاده می‌شود بدین مفهوم که برای باز شدن شیر نیاز به افزایش علائم خروجی کنترل کننده است. بعبارت دیگر، شیر دارای بهره مثبت ($+K_v$) است. یک شیر نیوماتیک باز شونده-باز شونده نیاز به انرژی برای باز شدن دارد. تحت شرایط نقص فنی سیستم که توان (انرژی) قطع شود، شیر بسته شده و از طغیان تانک جلوگیری می‌کند. به این شیر قطع-بسته هم می‌گوئیم که طراحی بهتر از لحاظ ایمنی است (شکل ۵-۸).

سناریوی بر عکس استفاده از شیر بسته شونده-باز شونده^{۳۱} است

که دارای بهره حالت یکنواخت منفی ($-K_v$) است؛ علائم کنترلی باعث بسته شدن شیر می‌گردند. بنابر این، این شیر را قطع-باز^{۳۲} می‌گویند که از لحاظ ایمنی در اینجا مناسب نیست. با تمام این حرف‌ها، اگر کسی اصرار به استفاده از این شیر داشته باشد باید از کنترل کننده‌ای با بهره منفی ($-K_c$) استفاده کند. حال چنانچه سطح مایع/افت داشته باشد، علائم خروجی کنترل کننده هم کاهش می‌یابد تا شیر بسته شونده-باز شونده شود.



حالتی را در نظر بگیرید که با تغییر شیر خروجی اقدام به کنترل سطح مایع کنیم (شکل ۵-۹). در این حالت بهره فرایند، K_p ، منفی است. اگر سطح مایع به مقداری کمتر از مقدار مقرر کاهش یابد، باید جریان خروجی کم شود و یا شیر خروجی بسته شود. مجدداً دو حالت متصور است:

اگر بهره کنترل کننده مثبت باشد ($+K_c$)، با کاهش سطح مایع خروجی کنترل کننده افزایش خواهد داشت. برای کاهش دبی جریان باید از یک شیر بسته‌شونده-با-هوا ($-K_v$) استفاده شود. در این حالت اگر توان از دست برود، شیر باز خواهد شد و تانک را کاملاً تخلیه خواهد کرد؛ حالتی که مایل به اتفاق آن نیستیم.

از طرف دیگر، با انتخاب شیر بازشونده-با-هوا ($+K_v$)، برای کاهش

دبی جریان خروجی با کاهش سطح مایع باید از کنترل کننده‌ای با بهره منفی ($-K_c$) استفاده کنیم. در این حالت، یک شیر قطع-بسته داریم که در صورتی که بخواهیم از انتشار اثرات ناخواسته در پایین دست جریان جلوگیری کنیم، مفید خواهد بود. این اصطلاحات اصلاً با هم اشتباه نمی‌شوند! برای اینکه با هم اشتباه نکنید علامت‌های بهره‌های یکنواخت در نمودار جعبه‌ای، شامل فرایند و حسگر را در نظر گرفته و علامت مناسب برای بهره کنترل کننده و شیر را بدست آورید. در نظر داشته باشید که در سیستم پسخور حلقه بسته فقط یک علامت منفی برای مقایسه کننده وجود دارد و حاصلضرب بقیه بهره‌ها باید مثبت باشد. بنحو مناسبی این را به خاطر بسپارید.

۵-۴-۱ چند توضیح در انتخاب کنترل کننده

در فرایندهای شیمیایی، متغیرهای کنترل شونده معمول عبارتند از: سطح مایع^{۳۳}، دبی جریان^{۳۴}، درجه حرارت^{۳۵}، فشار^{۳۶}، و بعضی مواقع غلظت^{۳۷}. مواردی که در زیر می‌آید مواردی کلی هستند. برای استفاده مناسب از آنها، اطلاعاتی از سخت افزار واقعی - محرک‌ها و عناصر کنترلی - مورد نیاز است که می‌توان آنها را در کتابهای مرجع و یا دستورالعمل استفاده از دستگاه‌ها پیدا کرد.

کنترل دبی جریان

کنترل کننده‌های PI بیشترین استفاده را دارند. در بیشتر تنظیم‌های صنعتی دارای سرعت پاسخی قابل قبول بوده و افت کنترل هم ندارند. معمولاً بهره کوچک تا متوسطی انتخاب می‌گردد (باند تناسبی پهن، $PB \approx 150$) تا اثرات ورودی‌های دارای نویز را کاهش دهد (بدلیل آشفتگی جریان؛ همچنین به دلیل عدم استفاده از کنترل D). ثابت زمانی انتگرال کوچک ($0.1 \approx$ دقیقه بر تکرار؛ دارای عملگر I بزرگ) انتخاب می‌شود تا دنبال کردن مقدار مقرر سریع باشد.

کنترل سطح مایعات

معمولاً نیاز به نگه داشتن سطح مایعات در محدوده‌ای حدود مقدار مقرر است و سرعت دغدغه مهمی نیست. بیاد آورید که بدلیل استفاده از پمپ در خروجی، یک سیستم انتگرال گیر داریم. همچنین، چنانچه دبی جریان خروجی بمنظور کنترل استفاده شود، تنظیم کنترل کننده باید محافظه کارانه باشد تا از نوسانات شدید در دبی خروجی جلوگیری شود. بنابر این یک کنترل کننده P معمولاً برای این منظور کافی است چرا که فرایندهای پیچیده‌ای نظیر جوشش و تبخیر هم اتفاق نمی‌افتد. مطمئن شوید که شیر انتخاب شده (یا خریداری شده) بازشونده-با-هوا است یا بسته‌شونده-با-هوا.

کنترل فشار

کنترل فشار بستگی به مورد دارد و بصورت کلی در مورد آن نمی‌توان صحبت کرد. دو مثال عبارتند از: برای فشار بخار در یک مخزن انبساط ناگهانی (و به تبع آن دبی جریان بخار)، پاسخی سریع نیاز است. حداقل یک کنترل کننده PI مورد نیاز است (مشابه کنترل دبی جریان است).



فشار در بالای یک برج تقطیر معمولاً بصورت غیر مستقیم توسط چگالش بخار در چگالنده صورت می‌گیرد. این عمل با کنترل مقدار آب خنک کن ورودی انجام می‌شود. انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی دینامیک کندی دارد. لذا از کنترل کننده PI استفاده نمی‌شود بلکه از P استفاده می‌گردد. در مواقعی که پاسخ زمانی مهم باشد از PID استفاده می‌شود.

کنترل درجه حرارت

تأخیرها در انتقال حرارت قابل توجه هستند و طبیعت مسئله کنترل در فرایندهای مختلف متفاوت است. اگر حسگر تأخیر داشته باشد، معمولاً بدلیل انتقال حرارت بین سیال و حسگر است. (ترموکوپل‌ها، بسته به اینکه چطور ساخته شوند، می‌توانند دارای پاسخ زمانی خیلی سریعی باشند.) در هر صورت پاسخ کلی خیلی کند است و استفاده از PI فقط آن را کندتر خواهد کرد. علاوه بر این افت کنترل هم نباید وجود داشته باشد. پس تنها گزینه ممکن PID است.

کنترل غلظت

استراتژی بستگی به موقعیت و چگونگی اندازه گیری غلظت دارد. اگر به pH و یا جذب (طیف سنجی مادون قرمز، مرئی و یا ماوراء بنفش) اطمینان کنیم، پاسخ زمانی نسبتاً سریع بوده و انتخاب کنترل کننده بر مبنای دینامیک سیستم خواهد بود. اغلب به انتخاب از بین PI و PID می‌اندیشیم. اگر از کروماتوگرافی گاز (GC) و یا دیگر روشهای تحلیلی برای اندازه گیری غلظت استفاده کنیم، کنترل گسسته را باید مد نظر قرار دهیم. در حقیقت، داشتن تأخیرهای زمانی کنترل فرایندهای شیمیایی را منحصر بفرد کرده که از سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی بسیار مشکل‌تر است.

در موقعیت‌های کنترل فرایند چند ظرفیتی کند، اگر از کنترل کننده PI استفاده شود، پاسخ سیستم کنترل بمراتب کندتر خواهد شد. باید در این حالت از کنترل PID استفاده شود تا سرعت پاسخ زمانی حلقه بسته افزایش یابد (قادر به استفاده از بهره‌های تناسبی بالاتر باشیم) در حالی که پایدار و مقاوم^{۲۸} باقی بماند. این توضیح برای همه حالت‌های دیگر نظیر درجه حرارت صادق است.



- ¹ Proportional band
- ² Saturate
- ³ Steady-state error
- ⁴ Offset
- ⁵ Integral time constant
- ⁶ Reset rate
- ⁷ Wind-up
- ⁸ Anti-wind-up
- ⁹ Derivative time constant
- ¹⁰ Derivative kick
- ¹¹ Manipulated variable
- ¹² Command tracking function
- ¹³ Servo problem
- ¹⁴ Regulatory problem
- ¹⁵ Controlled variable
- ¹⁶ Process identification
- ¹⁷ Signal transducer
- ¹⁸ Signal transmitter
- ¹⁹ Resistance Temperature Detector
- ²⁰ Amplifier
- ²¹ Package
- ²² Black box
- ²³ Safe
- ²⁴ Fail-closed
- ²⁵ Pneumatic
- ²⁶ Current to Pressure
- ²⁷ Position error constant
- ²⁸ Root locus
- ²⁹ Photodetector
- ³⁰ Air-to-open
- ³¹ Air-to-close
- ³² Fail-open
- ³³ Liquid level
- ³⁴ Flowrate
- ³⁵ Temperature
- ³⁶ Pressure
- ³⁷ Concentration
- ³⁸ Robust



۶ طراحی و تنظیم سیستم کنترل تک-حلقه

مجموعه کاملی از روشهای کنترل را در این فصل توضیح خواهیم داد. ما فقط سه مقدار عددی برای پارامترهای کنترل کننده PID لازم داریم، اما انتخاب این اعداد یکی از بخشهای گیج کننده در آموزش کنترل است. روشهای مختلف تنظیم نتایجی مشابه هم دارند ولی لزوماً با هم یکسان نیستند. جواب «بهترین» و یا «کاملاً درست» وجود ندارد. همه روشها طرفداران و محدودیت‌های خاص خود را دارند که مکمل همدیگرند. مهم آنست که ما انتخاب مناسب و قضاوت بی نقصی داشته باشیم - کاملاً درست برای طراحی سیستم.

عمده مباحث فصل:

- تنظیم کنترل کننده با روشهای تجربی
- تنظیم کنترل کننده با روشهای کنترل بر مبنای مدل

۶-۱ تنظیم کنترل کننده با روشهای تجربی

فرض کنید شیرها، مبدل‌های علائم، و حتی کنترل کننده انتخاب شده و نصب گردیده‌اند. حال باید بنحو مناسبی پارامترهای کنترل کننده انتخاب شوند - کاری که به آن تنظیم کنترل کننده می‌گویند. تنظیم حدس-و-خطایی وقت زیادی می‌برد (و بی‌معنی است!). دلایل دیگری نیز برای عدم امکان انجام آن وجود دارد؛ یک برج تقطیر بزرگ ساعت‌ها طول می‌کشد تا به حالت پایا برسد؛ یک راکتور شیمیایی اگر «کنترل نشده» باشد، ممکن است به حالت پایا نرسد؛ بعضی از فرایندها در بهره‌های بالا و یا پایین پسخور ممکن است ناپایدار باشند؛ تعدادی فقط در محدوده‌های میانی بهره پایدارند. اینها دلایلی است که باعث می‌شود تمام تئوری‌ها بررسی شوند تا بدانیم چگونه یک کنترل کننده را بر مبنای حدس‌های علمی طراحی و تنظیم کنیم.

تنظیم تجربی عموماً بر مبنای بدست آوردن یک مدل از روی اطلاعات تجربی حلقه-باز و یا حلقه-بسته است. بهره‌های کنترل کننده بر مبنای این مدل و چند رابطه تجربی بدست می‌آید. هنگام استفاده از روشهای تنظیم تجربی، قادر به دیکته کردن بسیاری از مشخصات دینامیکی پاسخ مورد نظر به سیستم کنترل نیستیم. بندرت اتفاق می‌افتد که تنظیم بدست آمده بهینه باشد. اغلب برای رسیدن به مشخصات دینامیکی مورد نظر برای پاسخ نیاز به تنظیم مجدد بعد از نصب در محل می‌باشد. تنظیم تجربی ممکن است مبنای تئوری نداشته باشد، اما یک نقطه شروع بسیار خوبی برای تنظیمی مناسب است. دو نکته قبل از شروع:

- اکثر روابط تجربی که در اینجا مطرح می‌شوند بر مبنای مدل حلقه باز حاصل از داده‌های تجربی بصورت تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر هستند. این خصوصیت مختص فرایندهایی است که اکثر واحدها در آنها خود-تنظیم هستند. تأخیر زمانی هم یا حاصل تقریب فرایند چند-ظرفیتی است و یا حاصل تأخیر انتقالی در اندازه گیری. بدلیل عدم قطبیت در تنظیم کنترل کننده و نیاز به بازتنظیم آن در محل، مدل‌های غیر از مرتبه اول همراه با تأخیر قطعیت لازم برای تنظیم تجربی را ندارند و کمتر استفاده می‌شوند.
- تعدادی از روابط تنظیم تجربی، مانند کوهن-کن، برای پاسخی با نسبت فروکش یک-چهارم برای تغییرات در بار ناخواسته بدست آمده‌اند. اگر تنظیم حاصل از این روابط برای مسئله سروو استفاده شود، به یک پاسخ نوسانی منجر خواهد شد که نمی‌تواند بعنوان «اندکی نوسانی» مد نظر باشد. تنظیم کنترل کننده به مسئله کنترل بستگی دارد. یقیناً بعد از تنظیم اولیه توسط روابط تجربی، نیاز به بازتنظیم در محل وجود دارد.

۶-۱-۱ تنظیم کنترل کننده بر مبنای منحنی واکنش فرایند

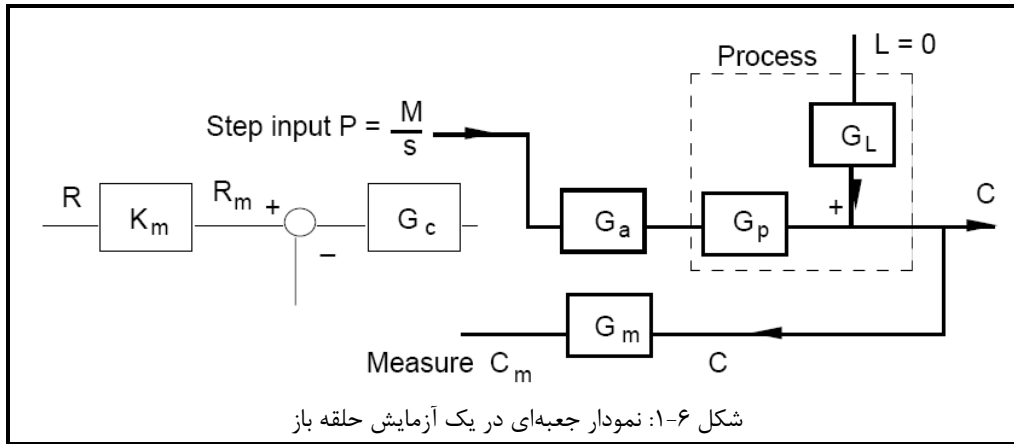
یک راه برای استفاده از روابط تنظیم تجربی، بدست آوردن منحنی واکنش فرایند^۱ است. کنترل کننده غیر فعال شده، به محرک یک تغییر پله اعمال می‌شود و پاسخ پله حلقه باز اندازه گیری می‌شود. به این عملیات تست پله حلقه باز گفته می‌شود. هر چند در نمودار جعبه‌ای (شکل ۶-۱) کنترل کننده از مدار خارج می‌شود، اما در عمل فقط کفایت که کنترل کننده در وضعیت «دستی»^۲



قرار گیرد. همانطور که در نمودار جعبه‌ای نشان داده شده است، آنچه اندازه‌گیری می‌شود پاسخ دینامیکی مجتمع بلوک‌های G_a ، G_m و G_p است. ما در اینجا تابع تبدیل مجتمع را بصورت G_{PRC} (تابع تبدیل منحنی واکنش فرایند) نشان می‌دهیم:

$$G_{PRC} = \frac{C_m}{R} = G_a G_p G_m \quad (1-6)$$

از دید آزمایشگاهی برای تغییر در متغیر کنترل کننده نیاز به محرک و برای اندازه‌گیری پاسخ نیاز به حسگر (مبدل علائم) داریم.

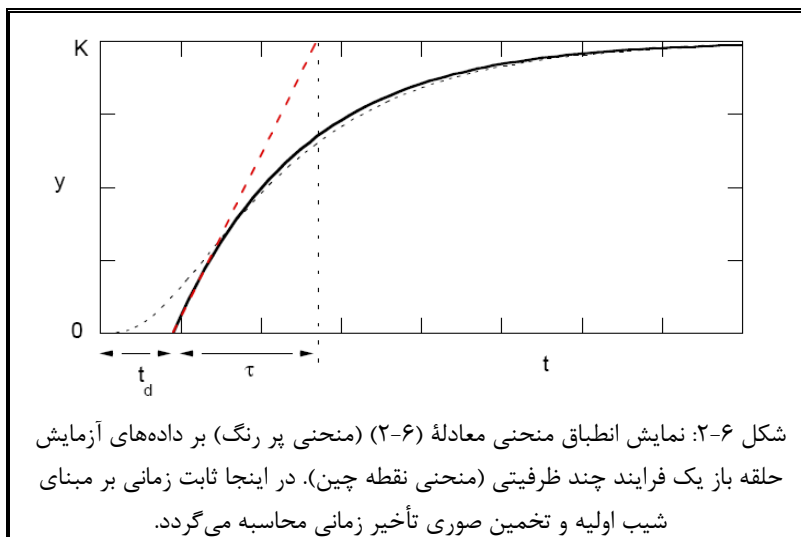


G_{PRC} همان تابع تبدیل فرایند در سیستم کنترل است، که در مواردی که اطلاعات کمی در مورد فرایند داشته باشیم و قادر به ایجاد مدلی برای آن نباشیم، قابل استفاده خواهد بود. حتی اگر توابع تبدیل G_m و G_a

هم مشخص باشند، بدلیل آنکه روابط تنظیم تجربی بر مبنای تابع تبدیل مجتمع G_{PRC} است، به آنها نیازی نداریم. از طرف دیگر، در صورتی که همه توابع G_a ، G_p و G_m مشخص باشند، G_{PRC} را می‌توان بصورت تقریب کاهش یافته $G_a G_p G_m$ بدست آورد.

داده‌های زمانی حقیقی (منحنی واکنش فرایند) در اغلب واحدهای فرایندی به شکل حرف انگلیسی S است (شکل ۲-۶) و می‌تواند بفرم یک تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر بیان شود:

$$G_{PRC} = \frac{C_m}{R} \approx \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1} \quad (2-6)$$



یکی از دلایلی که این تقریب درست است این است که عموماً عملیات در واحدهای شیمیایی بصورت حلقه باز پایدار بوده (خود تنظیم هستند) و ماهیتاً بصورت چند ظرفیتی هستند. **یادآوری:** پاسخ کم میرای سیستم کنترل بدلیل وجود کنترل کننده است که در تست پله حلقه باز حذف می‌شود.

با استفاده از تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر، روابط تنظیم تجربی مستقیماً برای محاسبه پارامترهای کنترل کننده استفاده می‌شود. روابط **زیگلر-نیکولز**^۳ بصورت عمومی برای این منظور به کار می‌روند. در کاربردهای

عملیات واحد، از روابط ارائه شده توسط **کوهن-کن**^۴ و **سیانکون-مارلین**^۵ هم استفاده می‌گردد. این روابط در جدول روابط تنظیم (بخش ۴-۱-۶) گردآوری شده است.



۶-۱-۲ معیارهای حداقل انتگرال خطا

پاسخ حلقه باز مدل شده توسط یک تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر G_{PRC} ، در دیگر روابط تنظیم هم می‌تواند استفاده شود. یک امکان، دسته‌ای از روابط هستند که از کمینه سازی انتگرال‌های خطا بوجود می‌آیند. در اینجا، سعی خواهد شد تا تفکر پایه‌ای پشت تئوری استفاده از انتگرال‌های خطا توضیح داده شود.

برای بدست آوردن معادلات تنظیم، بجای استفاده از تنها یک کمیت، نظیر نسبت فروکش، از پاسخ تئوری سیستم حلقه بسته حوزه زمان استفاده خواهیم کرد. پاسخ حوزه زمان به نوع کنترل کننده، ماهیت ورودی (تغییر در مقدار مقرر یا بار ناخواسته)، و در اینجا، تابع تبدیل «فرایند» مرتبه اول همراه با تأخیر، بستگی دارد. همچنین می‌توان مقدار خطا را بدست آورد - اختلاف بین مقدار مقرر و متغیر کنترل شونده. سپس طوری پارامترهای کنترل کننده را بدست می‌آوریم که خطا را در گستره زمانی (انتگرال خطا) کمینه کند (مثلا از ضرب کننده‌های لاگرانژ استفاده شود). البته در اینجا این کار را انجام نمی‌دهیم و فقط روابط منتج گزارش می‌گردد و اصل کمینه سازی به مبحث مربوطه در کنترل بهینه ارجاع می‌شود.

راههای مختلفی برای تعریف تابعی که قرار است کمینه شود وجود دارد. چند امکان عبارتند از:

(۱) انتگرال مربع خطا (ISE):^۶

$$ISE = \int_0^{\infty} [\bar{e}(t)]^2 dt \quad (۳-۶)$$

ISE خطاهای بزرگ را تقویت می‌کند - مربع کردن اعداد کوچک (< 1) را کوچکتر می‌کند. بنابر این کمینه کردن این انتگرال مقادیر خطاهای اولیه خیلی بزرگ را تحت تأثیر قرار می‌دهد. تنظیم کنترل کننده بدین روش دارای بهره تناسبی بالا بوده و پاسخ سیستم خیلی کم میرا خواهد بود.

(۲) انتگرال قدر مطلق خطا (IAE):^۷

$$IAE = \int_0^{\infty} |\bar{e}(t)| dt \quad (۴-۶)$$

IAE بصورت ساده همه قدر مطلق خطا را انتگرال گیری کرده و به همه خطاها، چه بزرگ و چه کوچک، وزن یکسانی می‌دهد.

(۳) انتگرال حاصلضرب زمان در قدر مطلق خطا (ITAE):^۸

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |\bar{e}(t)| dt \quad (۵-۶)$$

تابع وزنی زمان باعث افزایش وزن خطاهایی می‌شود که با گذشت زمان هنوز در پاسخ سیستم باقی مانده‌اند. تابع وزنی همچنین باعث می‌شود که پاسخ زمانی سیستم کنترل دارای زمان نشست کوتاهی باشد.

قبل از ادامه مطلب لازم است چند نکته تذکر داده شده و یادآوری شود:

- آنچه به ما مربوط است این است که استفاده از انتگرال خطا یک روش تجربی است. ما بسادگی از نتایج کمینه سازی دیگران استفاده می‌کنیم، لاز نیست یادآوری کنیم که تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر نتیجه تست حلقه باز است.
- تنظیم کنترل کننده منتج از کمینه سازی روش‌های مختلف انتگرال خطا با هم متفاوت است. ورودی‌های مقدار مقرر و بار ناخواسته دارای معادلات دیفرانسیل متفاوتی هستند، و از آنجا که محاسبات بهینه سازی بستگی مستقیمی به حل حوزه زمان دارند، برای ورودی‌های مختلف نتایج متفاوتی خواهیم داشت. درست است که قطب‌ها برای تمام ورودی‌ها یکسان هستند ولی صفرها، که روی ضرایب غیر متغیر با زمان پاسخ اثر دارند، متفاوتند.
- انتگرال زمانی برای $t = 0$ تا $t = \infty$ است و در صورتی که کراندار باشد قابل کمینه سازی است. بعبارت دیگر، اگر خطای ماندگار داشته باشیم نمی‌توان انتگرال را کمینه کرد. پس فقط کنترل کننده‌های PI یا PID قابل استفاده در این روش‌های طراحی هستند.



- در تئوری، با استفاده از روش‌های دیگر هم می‌توان کنترل کننده را طراحی کرد، اما کمینه سازی ITAE طراحی محافظه کارانه تری دارد که بشدت در عمل توصیه می‌شود. بهمین دلیل در بخش ۶-۱-۴ فقط نتایج این روش آورده شده است.

۶-۱-۳ روش بهره-نهایی^۹ زیگلر-نیکولز

این روش تجربی بر مبنای تست حلقه بسته (یا تنظیم برخط) فرایندهایی است که ذاتا پایدار هستند اما ممکن است سیستم کنترل آنها ناپایدار شود. برای آزمایش از کنترل تناسبی استفاده می‌شود. اگر امکان حذف سبک انتگرالی و مشتقی وجود نداشت، زمان انتگرال را روی مقدار حداکثر و زمان مشتق را روی حداقل آن قرار دهید. بهره تناسبی آرام آرام افزایش داده می‌شود تا با اعمال یک تغییر پله کوچکی در ورودی (مقدار مقرر یا بار ناخواسته)، پاسخ دارای نوسانات ثابتی شود. مقدار بهره تناسبی و دوره تناوب نوسان در این لحظه بترتیب بهره نهایی، $K_{c,u}$ ، و دوره تناوب نهایی^{۱۰}، T_u ، نامیده می‌شوند. این دو مقدار در مجموعه‌ای از روابط تجربی که توسط زیگلر و نیکولز ارائه شد که در بخش ۶-۱-۴ آمده است.

دو توضیح اضافی:

- مرور: بهره نهایی و دوره تناوب (یا فرکانس) نهایی را می‌توان از تحلیل پایداری هم بدست آورد. در فصل بعد با جایگذاری $s = j\omega$ در معادله مشخصه حلقه بسته، و در بحث پاسخ فرکانسی هم با استفاده از معیار نایکوئیست و نمودار Bode این مقادیر را بدست خواهیم آورد.
- سوالی که ممکن است پیش آید این است که معنی «نوسانات دائم^{۱۱}» چیست. بهره نهایی و دوره تناوب نهایی واژه‌هایی هستند که با پایداری حاشیه‌ای در ارتباط هستند - جایی که سیستم در معرض ناپایدار شدن قرار دارد. البته در واقعیت هرگز سیستم را به این سمت سوق نمی‌دهیم. با عدم قطعیت بزرگی که در تنظیم تجربی وجود داشته و لزوم تنظیم نهایی در محل، لازم نیست که اندازه‌گیری دقیقی از $K_{c,u}$ و T_u داشته باشیم. در هنگام آزمایش، فقط کافیست که بهره را تا جایی افزایش دهیم که به یک پاسخ نوسانی مناسبی برسیم.

مثال ۵-۷ الف: برای مسئله اختلاط رنگ در مثال ۵-۷ پارامترهای کنترل کننده PID را بدست آورید.

بر مبنای آنچه در مثال ۵-۷ بدست آوردیم، اگر آزمایشی حلقه باز آنچنانکه در معادله (۶-۱) پیشنهاد شد انجام شود، تابع تبدیل پاسخ پله برابر خواهد بود با:

$$G_{PRC} = G_d G_p G_m = \frac{(0,8)(0,6)(2,6)e^{-0,725s}}{(4s+1)(0,2s+1)}$$

برای استفاده از روابط تجربی باید داده‌ها با یک تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر تقریب زده شوند. در این مرحله تقریب زیر بدست می‌آید:

τ_D	τ_I	K_c	روش تجربی مورد استفاده
۰,۳۱	۲,۰	۴,۹	کوهن-کن
۰,۴۵	۱,۸	۴,۳	زیگلر-نیکولز
۰,۳۱	۳,۱	۲,۸	ITAE (مقدار مقرر)
۰,۰۷	۴,۴	۱,۲	سیانکون-مارلین (مقدار مقرر)

$$G_{PRC} \approx \frac{1,25e^{-0,9s}}{4s+1}$$

با استفاده از بخش ۶-۱-۴ تنظیم‌های زیر برای کنترل کننده PID بدست می‌آید.

نتایج روش‌های مختلف کاملا متفاوت است. عموماً، بهره تناسبی در روابط کوهن-کن بیشتر بوده و پاسخ دینامیکی بیشتر کم میرا است. تنظیم توسط روابط سیانکون-مارلین بسیار محافظه کارانه است؛ دارای

ثابت زمانی مشتق خیلی کوچک و به تبع آن ثابت زمانی انتگرال بسیار بزرگ. به دلیل گستردگی نتایج حاصل از این روش‌ها، معمولاً استفاده از PI در محاسبات تجربی ترجیح داده می‌شود.

مقایسه پاسخ زمانی شبیه سازی شده توسط کنترل کننده‌های مختلف در مثال ۵-۷ ج بررسی خواهد شد. نکته‌ای که باید بدان توجه شود این است که تنظیم تجربی یک علم بسیار مبهمی است. دلیلی وجود ندارد که در مورد عامل مشتق گیر حساسیت داشته باشیم. زیرا این محاسبات فقط جهت تنظیم اولیه کاربرد دارند و پس از آن تنظیم در محل و یا با محاسبات دقیق تر انجام می‌گیرد.



در حالی که محاسبات در مثال قبل خیلی ساده بنظر می‌رسد، نگاهی دقیق‌تر به روابط خالی از لطف نیست. از بخش ۶-۱-۴ برای محاسبه بهره‌تناسبی از روابط کوهن-کن داریم:

$$P: \quad K_c K = \left(\frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{3} \right) \quad (۶-۶)$$

$$PI: \quad K_c K = \left(0.9 \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{12} \right) \quad (۷-۶ \text{ الف})$$

$$PID: \quad K_c K = \left(\frac{4}{3} \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{4} \right) \quad (۸-۶ \text{ الف})$$

انتخاب بهره‌تناسبی تحت تأثیر دو کمیت (بی بعد) قرار دارد: حاصلضرب $K_c K$ و نسبت تأخیر زمانی به ثابت زمانی، t_d/τ . ممکن است دلیل اهمیت حاصلضرب $K_c K$ در حال حاضر روشن نباشد، اما در روش‌هایی که بخش بعد در سنتز مستقیم خواهیم دید علت بوجود آمدن آن را خواهیم دید. همچنین در بحث پایداری هم کمک آن را در محاسبه پایداری سیستم مشاهده خواهیم کرد. در شرایطی که زمان تأخیر نسبتاً کوچک است، فقط جملات سمت راست در سه تنظیم گفته شده مهم است و می‌توان از عدد ثابت صرف نظر کرد. با افزایش مقدار تأخیر زمانی (یا کاهش τ/t_d)، مقدار بهره‌تناسبی باید کاهش یابد که روابط هم این موضوع را تأیید می‌کنند. با افزایش عملگر انتگرال، نیاز به کاهش K_c است. در حقیقت در معادله (۷-۶ الف) در مقایسه با معادله (۶-۶)، جمله τ/t_d به اندازه ۱۰٪ کاهش یافته و عدد ثابت هم به $1/12$ تنزل می‌یابد. با اعمال کنترل PID، می‌توان از بهره‌های تناسبی بزرگتر استفاده کرد. در معادله (۸-۶ الف) این را بوضوح می‌شود دید. همین تحلیل در مورد روابط زیگلر-نیکولز در بخش ۶-۱-۴ هم برقرار است. علاوه بر این، از بخش ۶-۱-۴ می‌توان استنباط کرد که افزایش تأخیر زمانی باعث افزایش ثابت زمانی انتگرال می‌شود.

۶-۱-۴ روابط مختلف تنظیم کنترل کننده

الف) روابط مبتنی بر تست حلقه باز: در این روابط تابع تبدیل حلقه باز بصورت زیر از داده‌های تجربی بدست می‌آید:

$$G_{PRC} = \frac{K e^{-t_d s}}{\tau s + 1}$$

الف - ۱) روابط کوهن-کن و زیگلر-نیکولز

کنترل کننده	روش کوهن-کن	روش زیگلر-نیکولز
P	$K_c K = \left(\frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{3} \right)$ (۶-۶)	$K_c K = \frac{\tau}{t_d}$ (۹-۶)
PI	$K_c K = \left(0.9 \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{12} \right)$ (۷-۶ الف) $\tau_I = t_d \frac{30 + 3(t_d/\tau)}{9 + 20(t_d/\tau)}$ (۷-۶ ب)	$K_c K = 0.9 \frac{\tau}{t_d}$ (۱۰-۶ الف) $\tau_I = 3.3 t_d$ (۱۰-۶ ب)
PID	$K_c K = \left(\frac{4}{3} \frac{\tau}{t_d} + \frac{1}{4} \right)$ (۸-۶ الف) $\tau_I = t_d \frac{32 + 6(t_d/\tau)}{13 + 8(t_d/\tau)}$ (۸-۶ ب) $\tau_D = t_d \frac{4}{11 + 2(t_d/\tau)}$ (۸-۶ ج)	$K_c K = 1.2 \frac{\tau}{t_d}$ (۱۱-۶ الف) $\tau_I = 2 t_d$ (۱۱-۶ ب) $\tau_D = 0.5 t_d$ (۱۱-۶ ج)



الف - ۲) روابط مربوط به معیار حداقلی ITAE

برای تغییر در بار ناخواسته

$$K_c = \frac{a_1}{K} \left(\frac{\tau}{t_d} \right)^{b_1}, \quad \tau_I = \frac{\tau}{a_r} \left(\frac{t_d}{\tau} \right)^{b_r}, \quad \tau_D = a_r \tau \left(\frac{t_d}{\tau} \right)^{b_r} \quad (۱۲-۶)$$

کنترل کننده	a_1	b_1	a_r	b_r
PI	۰٫۸۵۹	۰٫۹۷۷	۰٫۶۷۴	۰٫۶۸۰
PID	۱٫۳۵۷	۰٫۹۴۷	۰٫۸۴۲	۰٫۷۳۸

برای تغییر در مقدار مقرر

$$K_c = \frac{a_1}{K} \left(\frac{\tau}{t_d} \right)^{b_1}, \quad \tau_I = \frac{\tau}{a_r - b_r (t_d/\tau)}, \quad \tau_D = a_r \tau \left(\frac{t_d}{\tau} \right)^{b_r} \quad (۱۳-۶)$$

کنترل کننده	a_1	b_1	a_r	b_r
PI	۰٫۵۸۶	۰٫۹۱۶	۱٫۰۳۰	۰٫۱۶۵
PID	۰٫۹۶۵	۰٫۸۵۵	۰٫۷۹۶	۰٫۱۴۷

ب) روابط تنظیم مبتنی بر تست حلقه بسته. در این روش با داشتن مقادیر بهره نهایی $K_{c,u}$ و دوره تناوب نهایی T_u با استفاده از روش بهره-نهایی زیگلر-نیکولز مقادیر پارامترهای کنترل کننده بدست می‌آیند.

کنترل کننده

کنترل کننده	بدون فرارفت	با فرارفت اندک	با نسبت فروکش یک چهارم
P	$K_c = ۰٫۲ K_{c,u}$ (الف ۱۸-۶)	$K_c = ۰٫۳۳ K_{c,u}$ (الف ۱۷-۶)	$K_c = ۰٫۵ K_{c,u}$ (الف ۱۶-۶)
PI	$\tau_I = ۰٫۵ T_u$ (ب ۱۸-۶)	$\tau_I = ۰٫۵ T_u$ (ب ۱۷-۶)	$\tau_I = ۰٫۵ T_u$ (ب ۱۶-۶)
PID	$\tau_I = ۰٫۳۳۳ T_u$ (ج ۱۸-۶)	$\tau_I = ۰٫۳۳۳ T_u$ (ج ۱۷-۶)	$\tau_I = ۰٫۱۲۵ T_u$ (ج ۱۶-۶)

۲-۶ سنتز مستقیم^{۱۲} و کنترل مدل داخلی (IMC)^{۱۳}

در اینجا فلسفه متفاوتی از طراحی کنترل کننده مطرح می‌شود. در مطالبی که تاکنون آمده است، نوع کنترل کننده از قبل مشخص بوده و باید بمنظور داشتن پاسخ مناسب سیستم، تنظیم می‌شد. از طرف دیگر، می‌توان از خصوصیت‌های دیگری برای تنظیم کنترل کننده استفاده کرد؛ مثلاً می‌توان کنترل کننده را طوری طراحی کرد که پاسخ مناسبی برای سیستم حلقه بسته داشته باشیم. بدلیل آنکه این نوع کنترل کننده‌ها بیشتر بر مبنای الگوریتم‌های کامپیوتری هستند، نیازی نیست که در بازار به دنبال آنها باشیم. در این فصل برخی از موارد ملموس این کنترل کننده‌ها (و نه همه آنها) مطرح خواهند شد. مواردی از فرایندها در نظر گرفته خواهند شد و فرض‌هایی خواهیم کرد تا کنترل کننده منتج یک PID باشد. خواهیم دید که این روش بهره‌های کنترل کننده را با استفاده از پارامترهای فرایند (مدل فرایند) انتخاب خواهد نمود. این روش، در مقایسه با روش‌های تجربی، طراحی معقول‌تری برای کنترل کننده خواهد داشت. از آنجا که نتایج وابسته به مدل هستند به آنها طراحی مدل-مبنا^{۱۴} گفته می‌شود.



۱-۲-۶ سنتز مستقیم

یک مسئلهٔ سروو را در نظر می‌گیریم ($L = 0$)، و توابع تبدیل محرک و اندازه گیر را برابر واحد انتخاب می‌کنیم $G_a = G_m = 1$. تابع تبدیل حلقه بسته عبارتست از:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \quad (۱۹-۶)$$

با محاسبه G_c خواهیم داشت:

$$G_c = \frac{1}{G_p} \left[\frac{(C/R)}{1 - (C/R)} \right] \quad (۲۰-۶)$$

اگر پاسخ خصوصی از سیستم کنترل مد نظر باشد (C/R مشخص)، می‌توان تابع تبدیل کنترل کننده را برای هر فرایندی (با تابع تبدیل G_p) بدست آورد.

دو مشاهدهٔ سریع از معادلهٔ اخیر: اول، G_c معکوس G_p است. بعبارت دیگر، قطب‌های G_p به صفرهای G_c و بالعکس وابسته هستند - این مبنای عملی است که حذف قطب با صفر^{۱۵} نامیده می‌شود. دوم، هر انتخابی برای C/R جایز نیست؛ فقط انتخاب‌هایی مجاز است که معادلهٔ مشخصهٔ حلقه بسته را ارضاء کند:

$$1 + G_c G_p = 1 + \left[\frac{(C/R)}{1 - (C/R)} \right] = 0 \quad (۲۱-۶)$$

از معادلهٔ (۲۰-۶)، دیده می‌شود که نمی‌توان $C/R = 1$ را انتخاب کرد، چرا که به بهرهٔ نامحدود برای کنترل کننده نیاز دارد. اما از معادلهٔ (۲۱-۶) استنباط می‌شود که C/R عدد ثابتی هم نمی‌تواند باشد. برای ارضاء (۲۱-۶) پاسخ حلقه بسته (C/R) باید شامل متغیر s باشد بدین معنی که سیستم نمی‌تواند سریعاً پاسخ داده و باید زمانی محدود برای پاسخ در نظر گرفته شود. فرض کنید بعنوان پاسخ سیستم، یک تابع تبدیل مرتبهٔ اول با بهرهٔ حالت یکنواخت واحد در نظر باشد:

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{\tau_c s + 1} \quad (۲۲-۶)$$

که τ_c ثابت زمانی سیستم است و پارامتر طراحی نامیده می‌شود. بهرهٔ واحد یعنی اینکه در سیستم افت کنترل نداریم. جایگذاری از معادلهٔ (۲۲-۶) در (۲۰-۶) تابع تبدیل کنترل کننده را نتیجه می‌دهد:

$$G_c = \frac{1}{G_p} \left[\frac{1}{\tau_c s} \right] \quad (۲۳-۶)$$

معادلهٔ مشخصهٔ حلقه بسته متناظر با معادلهٔ (۲۱-۶) برابر است با:

$$1 + G_c G_p = 1 + \frac{1}{\tau_c s} = 0 \quad (۲۴-۶)$$

که همان معادلهٔ $1 + \tau_c s = 0$ است که از معادلهٔ (۲۲-۶) هم بدست می‌آید. قطب حلقه بسته $s = -1/\tau_c$ است. این نتیجه برای هر G_p صحیح است - مادامی که بتوان بصورت فیزیکی کنترل کننده را ساخت و یا آن را با کامپیوتر شبیه سازی کرد. از آنجا که ثابت زمانی سیستم τ_c پارامتر طراحی ماست، مشخص می‌شود که سنتز مستقیم اجازه طراحی هر گونه پاسخ زمانی را به ما می‌دهد. واضح است که در عالم واقع این درست نیست زیرا محدودیت‌های فیزیکی نظیر اشباع شدن قدرت مانور را از ما می‌گیرند.

مثال ۱-۶: تابع تبدیل کنترل کننده را برای یک فرایند مرتبهٔ اول برای پاسخی که با معادلهٔ (۲۲-۶) داده شده است را بدست آورید.



برای تابع تبدیل فرایند $G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$ و بر اساس رابطه (۶-۲۳)، تابع تبدیل کنترل کننده برابر است با:

$$G_c = \frac{(\tau_p s + 1)}{K_p} \left[\frac{1}{\tau_c s} \right] = \frac{\tau_p}{K_p \tau_c} \left[1 + \frac{1}{\tau_p s} \right]$$

که بوضوح مشخص است که یک کنترل کننده PI است با $K_c = \tau_p / K_p \tau_c$ و $\tau_I = \tau_p$. توجه کنید که بهره تناسبی با عکس بهره فرایند متناسب است. چنانچه τ_c کوچک (پاسخ سریع) مد نظر باشد، بهره تناسبی باید بزرگ انتخاب شود. یادآوری: تنظیم پارامترهای کنترل کننده K_c و τ_I توسط پارامترهای فرایند و پاسخ سیستم (که انتخابی ماست)، مدیریت می‌شود. تنها پارامتر تنظیمی ثابت زمانی پاسخ سیستم، τ_c است.

مثال ۶-۲: تابع تبدیل کنترل کننده را برای یک فرایند مرتبه دوم پرمیرا برای پاسخی که با معادله (۶-۲۲) داده شده است را بدست آورید.

برای تابع تبدیل فرایند $G_p = \frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ و بر اساس رابطه (۶-۲۳)، تابع تبدیل کنترل کننده برابر است با:

$$G_c = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p} \left[\frac{1}{\tau_c s} \right]$$

که یک کنترل کننده PID است. با این حال دو راه برای نمایش این کنترل کننده وجود دارد. یکی بسط جملات صورت و فاکتور گیری از $(\tau_1 + \tau_2)$ است که نتیجه خواهد داد:

$$G_c = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{K_p \tau_c} \left[1 + \left(\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \right) \frac{1}{s} + \left(\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right) s \right]$$

مقادیر بهره تناسبی، ثابت زمانی انتگرال و ثابت زمانی مشتق توسط روابط $K_c = (\tau_1 + \tau_2) / (K_p \tau_c)$ و $\tau_I = \tau_1 + \tau_2$ و $\tau_D = \tau_1 \tau_2 / (\tau_1 + \tau_2)$ داده می‌شوند.

روند دوم این است که تابع تبدیل کنترل کننده بصورت PID سری نوشته شود:

$$G_c = \frac{\tau_1}{K_p \tau_c} \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right) (\tau_2 s + 1), \quad \tau_1 > \tau_2$$

جمله مشتق می‌تواند بصورت مشتق «واقعی» نوشته شود همانطور که در معادلات (۵-۹ الف و ب) توضیح داده شد. بر مبنای تجربه، از آنجا که ثابت زمانی مشتق کوچکتر از ثابت زمانی انتگرال است، ثابت زمانی بزرگتر بعنوان ثابت زمانی انتگرال انتخاب می‌گردد. بنابراین این τ_1 برای ثابت زمانی انتگرال و τ_2 برای ثابت زمانی مشتق انتخاب می‌شود. در حالی که $\tau_1 \gg \tau_2$ ، هر دو تعریف اخیر برای G_c با هم برابر خواهد شد.

در مواقعی که فرایند دارای تأخیر است، از تأخیر نمی‌توان صرف نظر کرد. بنابراین پاسخ سیستم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{C}{R} = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1} \quad (۶-۲۵)$$

که θ تأخیر سیستم است. تعریف کنترل کننده بر مبنای معادله (۶-۲۰) برابر است با:

$$G_c = \frac{1}{G_p} \left[\frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c s + 1) - e^{-\theta s}} \right] \approx \frac{1}{G_p} \left[\frac{e^{-\theta s}}{(\tau_c + \theta) s} \right] \quad (۶-۲۶)$$



برای رسیدن به تعریف سمت راست، از بسط تیلور مرتبه اول $(e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s)$ در مخرج استفاده شده است. این بمنظور ساده سازی فرمول‌ها، همانطور که در مثال بعد دیده می‌شود، استفاده می‌گردد. (برای ترم نمایی می‌توان از تقریب Pade هم استفاده کرد اما نتایج بسادگی یک کنترل کننده PI نخواهد بود.)

مثال ۳-۶: تابع تبدیل کنترل کننده را برای یک فرایند مرتبه اول همراه با تأخیر زمانی برای پاسخی که با معادله (۲۵-۶) داده شده است را بدست آورید.

تابع تبدیل فرایند $G_p = \frac{K_p e^{-t_d s}}{(\tau_p s + 1)}$ است. با تغییر متغیر $\theta = t_d$ برای تأخیر زمانی و استفاده از رابطه (۲۳-۶)، تابع تبدیل کنترل کننده برابر است با:

$$G_c = \frac{\tau_p}{K_p (\tau_c + \theta)} \left[1 + \frac{1}{\tau_p s} \right]$$

که یک کنترل کننده PI است. هر چند نتایج بدست آمده برای تابع تبدیل فرایند است اما قابل استفاده برای G_{PRC} بدست آمده از داده‌های تجربی نیز می‌باشد.

حال سوال اینجاست: مقدار τ_c انتخاب شده چقدر می‌تواند باشد؟ منابع مختلف در کتب و مقالات توصیه‌های متفاوتی دارند. برای نمونه، یک راهبرد آنست که برای کنترل کننده PI، $\tau_c > 1.7\theta$ و برای کنترل کننده PID، $\tau_c > 0.25\theta$ انتخاب گردد. یادآوری مهم آن است که باید همواره مقدار τ_c با استفاده از پاسخ شبیه سازی شده و تحلیل تنظیم، چک شود. در مقابل معادله (۲۲-۶) استفاده از پاسخ مرتبه دوم کم میرای سیستم است بصورت:

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (27-6)$$

که در آن ζ و τ بترتیب ضریب میرایی و دوره تناوب طبیعی سیستم هستند (که باید بر اساس خصوصیات رفتاری پاسخ مورد نظر بدست آیند). با جایگذاری معادله (۲۷-۶) در (۲۰-۶) داریم:

$$G_c = \frac{1}{G_p} \left[\frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s} \right] \quad (28-6)$$

که از (۲۳-۶) کمی پیچیده‌تر است. ما باز هم مثال‌هایی می‌آوریم که با ساده کردن آن کنترل کننده از نوع PID داشته باشیم.

مثال ۴-۶: تابع تبدیل کنترل کننده را برای یک فرایند مرتبه دوم پرمیرا برای پاسخی کم میرا همانطور که با معادله (۲۷-۶) داده شده است را بدست آورید.

برای تابع تبدیل فرایند $G_p = \frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$ و بر اساس رابطه (۲۸-۶)، تابع تبدیل کنترل کننده برابر است با:

$$G_c = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p \tau s (\tau s + 2\zeta)}$$

با تعریف $\tau_f = \tau / (2\zeta)$ ، G_c برابر است با:

$$G_c = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{2\zeta K_p \tau s (\tau_f s + 1)}$$

فرض کنید که τ_f قطب کندتر ($\tau_f > \tau_1$) باشد. با انتخاب $\tau_f = \tau_1$ عمل حذف قطب با صفر اتفاق خواهد افتاد و نتیجه یک کنترل کننده PI خواهد بود:



$$G_c = \frac{1}{2\zeta K_p \tau} \frac{(\tau_I s + 1)}{s}$$

با تعریف $\tau_f = \tau_p$ و نیاز به $\tau_f = \tau_p$ ، می‌توان نوشت که $\tau = 2\zeta\tau_p$ و شکل نهایی کنترل کننده عبارتست از:

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right), \quad K_c = \frac{\tau_I}{4\zeta^2 K_p \tau_p}, \quad \tau_I = \tau_p$$

در این مسئله، مقدار ضریب میرایی سیستم، ζ ، پارامتر تنظیم است.

۶-۲-۲ حذف قطب با صفر

از عبارت «حذف قطب با صفر» در ابتدای این بخش استفاده کردیم. باید در این مورد بیشتر توضیح بدهیم تا بهتر بتوانیم از آن استفاده کنیم. حذف قطب با صفر همچنین با عناوین **جبران سازی حذف**^{۱۶} و یا طراحی قطب فراگیر (غالب) استفاده می‌گردد. البته در سیستم‌های موجود فیزیکی این عمل بصورت کامل بندرت اتفاق می‌افتد، اما بررسی این موضوع کمک شایانی به درک تئوری ما خواهد داشت.

تفکر این است که یک قطب (نامطلوب حلقه باز) فرایند با یک قطب مطلوب حلقه بسته جایگزین شود. اگر از معادله (۶-۲۰) بخاطر آورد، G_c شامل عکس G_p است. چنانچه صفرهای G_c همان قطب‌های G_p انتخاب شود، با ضرب این دو یعنی $G_c G_p$ ، با هم حذف می‌شوند - عملی که حذف قطب با صفر نامیده می‌شود. به جهت تکرار، معادله (۶-۲۰) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$G_c G_p = \frac{(C/R)}{1 - (C/R)} \quad (۶-۲۰ الف)$$

یعنی، سوای این که G_p چه باشد، G_c طوری تعریف شده است که حاصلضرب آنها کاملاً تابعی از پاسخ دلخواه سیستم (C/R) است. برای پاسخ حلقه بسته ویژه همانطور که در معادله (۶-۲۳) داده شده نیز می‌توان نوشت:

$$G_c G_p = \frac{1}{\tau_c s} \quad (۶-۲۳ الف)$$

از آنجا که معادله مشخصه سیستم برابر $1 + G_c G_p = 0$ است، قطب‌های حلقه بسته فقط به پارامتر طراحی τ_c بستگی خواهد داشت. یک سیستم حلقه بسته‌ای که بر اساس حذف قطب با صفر طراحی شود، رفتاری بشدت متفاوت نسبت به سیستمی خواهد داشت که بدون این حذف باشد.

برای روشن شدن بیشتر موضوع یک کنترل کننده PI را در نظر بگیرید که برای کنترل یک فرایند مرتبه اول استفاده شود با این شرط که $G_a = G_m = 1$. معادله مشخصه حلقه بسته برابر است با:

$$1 + G_c G_p = 1 + K_c \left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) \frac{K_p}{\tau_p s + 1} = 0 \quad (۶-۲۹)$$

در شرایط معمول باید τ_I بنحو مناسبی انتخاب گردد. اگر τ_I برابر τ_p انتخاب شود، صفر تابع تبدیل کنترل کننده قطب تابع تبدیل فرایند را حذف خواهد کرد. قطب حلقه باز نهایتاً در مبدأ خواهد بود. معادله (۶-۲۹) وقتی $\tau_I = \tau_p$ به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$1 + \frac{K_c K_p}{\tau_p s} = 0 \rightarrow s = -\frac{K_c K_p}{\tau_p}$$

با فرض $K_c > 0$ ، قطب حلقه بسته حقیقی و منفی خواهد بود. این همان نتیجه‌ای است که با سنتز مستقیم هم به آن می‌رسیم. از نتایج مثال ۶-۱ که بر مبنای C/R در معادله (۶-۲۲) بود، تابع تبدیل کنترل کننده PI برابر است با:

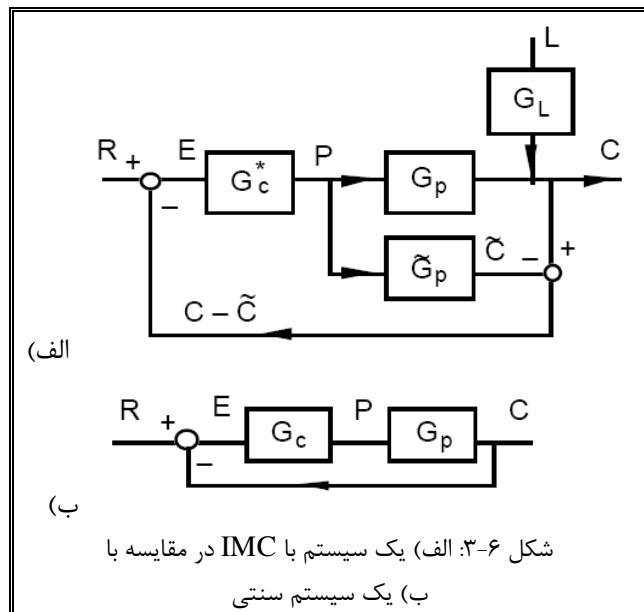
$$G_c = K_c \left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) = \frac{\tau_p}{K_p \tau_c} \left(\frac{\tau_p s + 1}{\tau_p s} \right) \rightarrow K_c = \frac{\tau_p}{K_p \tau_c}, \quad \tau_I = \tau_p$$



با جایگذاری این مقادیر در معادله مشخصه، قطب حلقه بسته برابر $s = -1/\tau_c$ خواهد بود. حاصلضرب $G_c G_p$ هم با معادله (۳-۶) الف) مطابقت کامل دارد.

۳-۲-۶ کنترل مدل داخلی (IMC)

یک روش زیباتر از سنتز مستقیم، کنترل مدل داخلی (IMC) است. فرض مقدم در IMC آن است که در واقعیت، فقط مدلی تقریبی



از فرایند واقعی موجود است. حتی اگر مدل درست فرایند را داشته باشیم، پارامترهای آن ممکن است درست اندازه گیری نشده باشند. بنابر این مدل ناقص باید فقط بعنوان بخشی از طراحی استفاده شود.

در دیاگرام جعبه‌ای که از IMC استفاده می‌شود (شکل ۳-۶ الف)، کنترل کننده سنتی معادل G_c شامل مدل (تئوری) کنترل کننده G_c^* و تابع تبدیل تقریبی \tilde{G}_p خواهد بود. مجدداً، موارد قابل بحث در اینجا محدودند و ما این تحلیل را برای آن دسته از مواردی بحث می‌کنیم که به نتایج مثال ۵-۶ برسیم و بتوانیم کنترل کننده PID را مانند شکل ۳-۶ ب تنظیم کنیم. در ابتدا لازم است که تابع تبدیل حلقه بسته سیستم بدست آید. بر اساس نمودار جعبه‌ای (شکل ۳-۶ الف) برای خطا داریم:

$$E = R - (C - \tilde{C})$$

و خروجی کنترل کننده مدل:

$$P = G_c^* E = G_c^* (R - C + \tilde{C})$$

$$\tilde{C} = \tilde{G}_p P$$

$$P = G_c^* E = G_c^* (R - C + \tilde{G}_p P) \quad (۳۰-۶)$$

با بازآرایی این معادله

$$P = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}_p} (R - C) \quad (۳۰-۶) \text{ الف)}$$

هدف از این مرحله این است که ارتباط بین G_c با G_c^* و \tilde{G}_p را نشان دهیم:

$$G_c = \frac{G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}_p} \quad (۳۱-۶)$$

این همان معادله‌ای است که برای بدست آوردن بهره‌های معادل کنترل کننده PID استفاده خواهد شد. با جایگذاری معادله (۳۰-۶) الف) در معادله فرایند خواهیم داشت:

$$C = G_L L + G_p P = G_L L + \frac{G_p G_c^*}{1 - G_c^* \tilde{G}_p} (R - C)$$

و با استفاده از نتایج این مرحله:

$$C = \left[\frac{(1 - G_c^* \tilde{G}_p) G_L}{1 + G_c^* (G_p - \tilde{G}_p)} \right] L + \left[\frac{G_p G_c^*}{1 + G_c^* (G_p - \tilde{G}_p)} \right] R \quad (۳۲-۶)$$



جملات داخل پرانتز دو تابع تبدیل حلقه بسته هستند. مثل همیشه، مخرج آنها شبیه به هم است - چون چند جمله‌ای مشخصه می‌باشد.

هنوز یک کار باقی مانده است! نمی‌دانیم چگونه باید G_c^* انتخاب گردد. قبل از تصمیم‌گیری در این مورد، باید یادآوری کنیم که در روش‌های سنتز مستقیم، قطب‌های G_c «بطور ذاتی» از صفرهای G_p بدست می‌آیند. اگر G_p دارای صفر مثبت باشد، منجر به تابعی برای G_c خواهد شد که دارای قطب مثبت (ناپایدار!) است. برای جلوگیری از این مورد، ما تابع تبدیل تقریبی را به دو قسمت «تقسیم» می‌کنیم:

$$\tilde{G}_p = \tilde{G}_{p+} \tilde{G}_{p-} \quad (۳۳-۶)$$

که \tilde{G}_{p+} شامل همه صفرهای مثبت (در صورت وجود!) است. کنترل کننده فقط بر مبنای \tilde{G}_{p-} طراحی می‌گردد. تابع تبدیل کنترل کننده مدل، مشابه آنچه در سنتز مستقیم گفتیم، بدست می‌آید:

$$G_c^* = \frac{1}{\tilde{G}_{p-}} \left[\frac{1}{\tau_c s + 1} \right]^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (۳۴-۶)$$

مشابه سنتز مستقیم، τ_c ثابت زمانی حلقه بسته و تنها پارامتر تنظیم است. به منظور اطمینان از اینکه کنترل کننده بدست آمده بصورت فیزیکی قابل تحقق است، در (۳۴-۶) از توان r استفاده شده است. دوباره متذکر می‌شویم که مثال‌هایی که در اینجا آورده می‌شوند طوری انتخاب شده‌اند که به یک کنترل کننده PID برسیم.

مثال ۵-۶: برای یک سیستم با فرایند مرتبه اول همراه با تأخیر زمانی و با استفاده از IMC کنترل کننده‌ای مناسب طراحی کنید.

فرض کنید یک فرایند با یک تابع تبدیل مرتبه اول با تأخیر مدل شده باشد (با استفاده از اطلاعات تست حلقه باز)، و با قبول خطاها و یا عدم قطعیت آزمایش، تابع تبدیل مدل تقریبی \tilde{G}_p بصورت زیر است:

$$\tilde{G}_p = \frac{K_p e^{-t_d s}}{\tau_p s + 1}$$

با استفاده از تقریب مرتبه اول Pade برای تأخیر زمانی و جدا کردن صفر مثبت مانند معادله (۳۳-۶) داریم:

$$\tilde{G}_p = \frac{K_p}{(\tau_p s + 1) \left(\frac{t_d}{2} s + 1 \right)} \left(-\frac{t_d}{2} s + 1 \right) = \tilde{G}_{p-} \tilde{G}_{p+}$$

که:

$$\tilde{G}_{p+} = \left(-\frac{t_d}{2} s + 1 \right)$$

اگر $r = 1$ انتخاب گردد، از معادله (۳۴-۶) نتیجه می‌گردد:

$$G_c^* = \frac{(\tau_p s + 1) \left(\frac{t_d}{2} s + 1 \right)}{K_p (\tau_c s + 1)}$$

با جایگذاری روابط اخیر در معادله (۳۱-۶) و کمی کار ریاضی به یک کنترل کننده PID می‌رسیم با پارامترهای زیر:

$$K_c = \frac{1}{K_p} \frac{2\tau_p + t_d}{2\tau_c + t_d}, \quad \tau_I = \tau_p + \frac{t_d}{2}, \quad \tau_D = \frac{\tau_p t_d}{2\tau_p + t_d}$$

مثال ۷-۵ ب: با استفاده از نتایج مثال ۵-۶ برای تنظیم کنترل کننده PID برای فرایندهای مرتبه اول همراه با تأخیر زمانی، پارامترهای کنترل کننده PID را برای مسئله اختلاط رنگ (مثال ۷-۵) بدست آورید.



با تقریب مرتبه اول همراه با تأخیر همانطور که در مثال ۷-۵ الف بیان شد و با فرض اینکه τ_c دوسوم مقدار تأخیر باشد، مقادیر پارامترهای کنترل کننده بر مبنای IMC که در مثال قبل برای PID بدست آمد، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccc} \tau_D & \tau_I & K_c \\ 0,4 & 4,5 & 3,4 \end{array}$$

مقایسه این نتایج با آنچه در مثال ۷-۵ الف بدست آوردیم کمی متفاوت است. در حالی که بهره تناسبی IMC بین کوهن-کن و ITAE قرار دارد، زمان انتگرال آن نسبتاً بزرگ است. با وجود ثابت زمانی انتگرال کوچکتر انتظار می‌رود که تنظیم IMC کمتر نوسانی باشد. در مثال ۷-۵ ج پاسخ حلقه بسته را با تنظیم‌های مختلف خواهیم دید.

مثال ۷-۵ ج: چگونه تنظیم‌های مختلف کنترل کننده بر پاسخ زمانی مسئله اختلاط رنگ موثر است؟

از فرمان‌های زیر در Matlab جهت شبیه سازی پاسخ زمانی استفاده کنید:

```
alpha=0.1; % Real PID
Gc=tf(kc*[taui*taud (taui+taud) 1],[alfa*taui*taud taui 0]);
td=0.725;
Gm=tf([-td/2 1],[td/2 1]); %Padé approximation for dead time
Km=2.6; %Move Km into the forward path
Gp=tf(0.8,[4 1]);
Ga=tf(0.6,[0.2 1]);
Gcl=feedback(Km*Gc*Ga*Gp,Gm); % The closed-loop function
step(Gcl) % Plotting...
```

با تغییر پارامترهای کنترل کننده، مشاهده می‌شود که تنظیم‌های کوهن-کن و زیگلر-نیکولز بترتیب دارای ۷۴٪ و ۶۴٪ فرارفت هستند که از آنچه انتظار می‌رفت بمراتب بزرگتر هستند (برای زیگلر-نیکولز باید نسبت فروکش یک‌چهارم باشد). ITAE با ۱۴٪ فرارفت محافظه‌کاری بیشتری دارد. تنظیم سیانکون-مارلین بسیار محافظه‌کارانه بوده و پرمیرا و کند است.

با تنظیم IMC مثال قبل، پاسخ زمانی منتج (به زیبایی) کمی کم میراست با وجود اینکه پاسخ مورد انتظار باید بدون نوسان باشد. یکی از دلایل این موضوع تقریب تابع تأخیر زمانی و دیگری نحوه انتخاب ثابت زمانی سیستم است. بطور کلی بهتر است تنظیم‌های IMC مجدداً چک شوند.

تا اینجا ممکن است کاملاً در مورد نحوه تنظیم پارامترهای کنترل کننده بدلیل وجود تنوع در روش‌های تنظیم گیج شده باشید. در ادامه ابتدا چند مورد از روابط تنظیم توسط IMC آورده می‌شود و سپس خلاصه‌ای از مقایسه روش‌های مختلف بعنوان راهنما برای شما آورده شده است.

۶-۲-۴ خلاصه روابط تنظیم کنترل کننده بر مبنای IMC و سنتز مستقیم

مدل فرایند	کنترل کننده	K_c	τ_I	τ_D
$\frac{K_p}{\tau_p s + 1}$	PI	$\frac{\tau_p}{K_p \tau_c}$	τ_p	-
	PID	$\frac{\tau_1 + \tau_2}{K_p \tau_c}$	$\tau_1 + \tau_2$	$\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$
$\frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	PID با $\tau_1 > \tau_2$	$\frac{\tau_1}{K_p \tau_c}$	τ_1	τ_2
	PI (کم میرا)	$\frac{\tau_1}{4 K_p \zeta^2 \tau_2}$	τ_1	-
$\frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}$	PID	$\frac{2\zeta \tau}{K_p \tau_c}$	$2\zeta \tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$



τ_p	-	$\frac{1}{K_p \tau_c}$	PD	$\frac{K_p}{s(\tau_p s + 1)}$
-	τ_p	$\frac{\tau_p}{K_p(\tau_c + t_d)}$	PI	$\frac{K_p e^{-t_d s}}{\tau_p s + 1}$
$\frac{\tau_p t_d}{2\tau_p + t_d}$	$\tau_p + \frac{t_d}{2}$	$\frac{1}{K_p} \frac{2\tau_p + t_d}{2\tau_c + t_d}$	PID	$\tau_p s + 1$
-	-	$\frac{1}{K_p \tau_c}$	P	$\frac{K_p}{s}$

۶-۲-۵ خلاصه روش‌های انتخاب بهره کنترل کننده

روش	چه باید کرد؟	کدام پارامتر محاسبه می‌شود؟	ملاحظات
<input type="checkbox"/> معیار پاسخ گذرا <input checked="" type="checkbox"/> اکتباس تحلیلی	با استفاده از چند جمله‌ای مشخصه سیستم مرتبه دوم ضریب میرایی حلقه بسته را بدست آورید. ضریب میرایی را به بهره تناسبی سیستم مربوط کنید.	معمولا بهره تناسبی	<ul style="list-style-type: none"> محدود به سیستم‌های مرتبه دوم است. بجز کنترل کننده P، برای بقیه کنترل کننده‌ها جواب منحصر بفردی وجود ندارد. در تئوری می‌توان از دیگر معیارهای پاسخ گذرا هم استفاده کرد. نسبت فروکش یک‌چهارم برابر ۵۰٪ فرافت است.
<input type="checkbox"/> تنظیم تجربی با تست حلقه باز <ul style="list-style-type: none"> کوهن-کن زیگلر-نیکولز سیاتکون-مارلین 	پاسخ پله حلقه باز، که منحنی واکنش فرایند نامیده می‌شود، را بدست آورید. آنرا با یک مرتبه اول همراه با تأخیر تقریب بزنیید. روابط طراحی تجربی را اعمال کنید.	بهره تناسبی، ثابت زمانی انتگرال و مشتق کنترل کننده‌های P، PI و PID	<ul style="list-style-type: none"> کوهن-کن با جلوگیری از یک انحراف اولیه بزرگ از مقدار مقرر برای مهار اغتشاشات طراحی شده است. مقدار نسبت فروکش یک‌چهارم عموماً برای تغییر در مقدار مقرر خیلی بزرگ است. برای تغییرات مقدار مقرر و یا بار ناخواسته روابط متفاوتند. برای انتگرال‌های متفاوت خطا روابط متفاوتند. معیار کمینه ITAE کمترین نوسان پاسخ را دارد.
<input type="checkbox"/> بهره نهایی زیگلر-نیکولز (تنظیم تجربی با تست حلقه بسته)	بهره تناسبی را انقدر افزایش دهید تا پاسخ پله سیستم نوسان پایداری شود. بهره نهایی و دوره تناوب نهایی را بدست آورید. روابط تجربی طراحی را اعمال کنید.	بهره تناسبی، ثابت زمانی انتگرال و مشتق کنترل کننده‌های P، PI و PID	<ul style="list-style-type: none"> جایگذاری $s = j\omega$ بصورت تجربی و آزمایشگاهی. لزوماً برای سیستم‌های شیمیایی در عمل مناسب نیست. روابط تنظیم اجازه استفاده از مقدار یک‌چهارم نسبت فروکش تا نوسانات اندک را می‌دهند.
<input type="checkbox"/> مدل-مبنا <input checked="" type="checkbox"/> سنتز مستقیم <ul style="list-style-type: none"> کنترل مدل داخلی 	برای یک سیستم داده شده، تابع تبدیل کنترل کننده را برای پاسخ دلخواه حلقه بسته سنتز کنید. ثابت زمانی سیستم τ_c تنها پارامتر تنظیم است. بسط یافته سنتز مستقیم است. طراحی کنترل کننده شامل یک تابع تبدیل تقریبی داخلی برای فرایند است.	بهره تناسبی، ثابت زمانی انتگرال و مشتق هر کجا که مقتضی باشند.	<ul style="list-style-type: none"> طراحی لزوماً PID نیست اما در حالت‌هایی که ساختار کنترل کننده PID بوجود بیاید، این روش بصیرت لازم برای انتخاب نوع (P، PI و PID) و تنظیم آن را به ما خواهد داد. برای یک تابع تبدیل مرتبه اول همراه با تأخیر، بهره تناسبی، ثابت زمانی انتگرال و مشتق کنترل کننده PID ایده‌آل.
<input type="checkbox"/> روش‌های تحلیل پایداری <input checked="" type="checkbox"/> معیار روث-هرویتس	آزمون روث را بر چند جمله‌ای مشخصه حلقه بسته اعمال کنید تا اگر قطب حلقه بسته‌ای سمت راست محور موهومی باشد، آن را بیابید.	روی بهره کنترل کننده محدودیت اعمال می‌کند.	<ul style="list-style-type: none"> معمولاً برای سیستم‌های نسبتاً ساده و با تمرکز بر روی بهره تناسبی. هنگامی که بهره تناسبی منفی می‌دهد در مورد تفسیر آن باید محتاط بود.



<ul style="list-style-type: none"> نتایج حاصل از بهره‌ نهایی با نتایج تحلیل آرایه روث مطابقت دارد. محدود به سیستم‌های ساده است. بندرت در مراحل نهایی طراحی کنترل کاربرد دارد زیرا با تابع تأخیر زمانی مشکل دارد. این روش دستورالعملی است و برای آموزش بسیار مناسب است. 	<ul style="list-style-type: none"> بهره نهایی و دوره تناوب نهایی $(T_u = 2\pi/\omega_u)$ می‌توانند در روابط بهره نهایی زیگلر-نیکولز استفاده شوند. مکان قطب‌های حلقه بسته اثر احتمالی تغییر بهره کنترل کننده را بر روی پاسخ دینامیکی نشان می‌دهد. با خصوصیات نسبت میرایی و ثابت زمانی، مکان هندسی می‌تواند مبنایی برای انتخاب بهره تناسبی باشد. 	<p>در چند جمله‌ای مشخصه $s = j\omega$ را قرار داده و برای قطب‌های روی محور موهومی حل کنید. قسمت حقیقی و قسمت موهومی آن مقادیر بهره نهایی و فرکانس نهایی را خواهد داد. با انتخاب مقادیر مختلف بهره تناسبی، قطب‌های حلقه بسته را رسم کنید. با دست و یا کامپیوتر شاخه‌های مکان را رسم کنید.</p>	<ul style="list-style-type: none"> جایگذاری مستقیم مکان هندسی ریشه‌ها
<ul style="list-style-type: none"> تأخیر زمانی را براحتی و با دقت پشتیبانی می‌کند. معیار نایکوئیست اجازه استفاده از تابع تبدیل حلقه باز در ترسیم نمودارهای Bode و نایکوئیست را می‌دهد که برای تحلیل مسئله حلقه بسته بکار می‌رود. معیار پایداری برای سیستم‌های ساده مرتبه اول و دوم بدون صفر حلقه باز مثبت کاربردی ندارد. این نمودارها در مورد پایداری نتایج خوبی دارند اما برای تحلیل پاسخ حلقه بسته نیاز به روش‌های دیگر دارند. چارت نیکولز معمولاً برای سیستم پسخور واحد ترسیم می‌شود. 	<ul style="list-style-type: none"> مقدار بهره تناسبی لازم برای حاشیه بهره و حاشیه فاز را محاسبه می‌کند. برای حاشیه فاز و یا بهره داده شده، بهره تناسبی را محاسبه می‌کند. همچنین می‌توان با استفاده از آن حداکثر نسبت دامنه‌ها را بدست آورده، درجه نوسان پاسخ حلقه بسته را بدست آورد. برای بهره‌های تناسبی مختلف حداکثر نسبت دامنه‌ها را می‌دهد. 	<p>نمودار Bode بصورت اندازه تابع تبدیل حلقه باز بر حسب فرکانس و آرگومان تابع تبدیل حلقه باز بر حسب فرکانس رسم می‌گردد. نمودار نایکوئیست نموداری پارامتری بر حسب فرکانس است. چارت نیکولز نموداری پارامتریک بر حسب فرکانس است که اندازه تابع تبدیل بر حسب آرگومان آن را ترسیم می‌کند. اندازه و آرگومان تابع تبدیل حلقه بسته بصورت contour مشخص شده اند. نموداری است که اندازه تابع تبدیل حلقه بسته را بر حسب فرکانس رسم می‌کند.</p>	<p>□ روش‌های پاسخ فرکانسی</p> <ul style="list-style-type: none"> نمودار Bode نمودار نایکوئیست چارت نیکولز مدول لگاریتمی حداکثری حلقه بسته



-
- ¹ Process reaction curve
 - ² Manual
 - ³ Ziegler-Nichols
 - ⁴ Cohen-Coon
 - ⁵ Ciancone-Marlin
 - ⁶ Integral of Square Error
 - ⁷ Integral of Absolute Error
 - ⁸ Integral of Time-weighted Absolute Error
 - ⁹ Ultimate gain
 - ¹⁰ Ultimate period
 - ¹¹ Sustained oscillation
 - ¹² Direct synthesis
 - ¹³ Internal Model Control
 - ¹⁴ Model-based
 - ¹⁵ Pole-zero cancellation
 - ¹⁶ Cancellation compensation



۷ پایداری سیستم‌های حلقه بسته

هنگام طراحی یک سیستم حلقه بسته، خصوصیات مورد انتظار ممکن است مشخصاتی خاص را برای پاسخ دینامیکی دیکته کنند. این کار مقدور نخواهد بود مگر آنکه سیستم پایدار باشد. بنابر این نگرانی اولیه در طراحی سیستم، پایدار نگه داشتن آن است که بخودی خود می‌تواند بعنوان یک هدف طراحی استفاده شود.

عمده مباحث فصل:

تحلیل پایداری یک سیستم حلقه بسته با یکی از سه تکنیک:

- معیار روث-هرویتس برای تعیین محدوده پایداری
- جایگذاری مستقیم $s = j\omega$ برای یافتن ریشه‌ها در مرز پایداری
- مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه (قطب‌های حلقه بسته)

۷-۱ تعریف پایداری

هدف ساده است. می‌خواهیم مطمئن شویم که تنظیم کنترل کننده منجر به ناپایداری سیستم نخواهد شد. پاسخ سیستم حلقه بسته، آنطور که در بخش ۵-۲ بدست آمده است، را در نظر بگیرید.

$$C = \left[\frac{K_m G_c G_a G_p}{1 + G_m G_c G_a G_p} \right] R + \left[\frac{G_L}{1 + G_m G_c G_a G_p} \right] L \quad (1-7)$$

با معادله مشخصه:

$$1 + G_m G_c G_a G_p = 0 \quad (2-7)$$

اگر تمام ریشه‌های معادله مشخصه دارای قسمت حقیقی منفی باشند، سیستم پایدار است. به بیان دیگر، برای پایداری سیستم تمام قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته باید در سمت چپ محور موهومی واقع شوند. با این بیان، پایداری جزء خصوصیات ذاتی دینامیکی سیستم بوده و ربطی به تابع ورودی ندارد؛ یعنی برای مسئله سروو و مسئله تنظیم نتایج پایداری تفاوتی نخواهد داشت.

تعریف عمومی دیگری هم تحت عنوان پایداری ورودی محدود خروجی محدود (BIBO) وجود دارد: یک سیستم، پایدار BIBO است اگر برای هر ورودی محدود پاسخ خروجی محدود بماند. برای درک بهتر این تعریف، یک موقعیت فرضی را در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه بسته فقط یک قطب در مبدأ داشته باشد (یک انتگرال گیر باشد). اگر به این سیستم یک ورودی ضربان و یا ضربه مستطیلی وارد شود، پاسخ (انتگرال ورودی: سطح زیر منحنی ورودی حوزه زمان) محدود باقی می‌ماند. اما، چنانچه به این سیستم یک ورودی پله واحد اعمال گردد (که محدود است)، پاسخ خروجی یک شیب ثابت است که با افزایش زمان، افزایش می‌یابد و نامحدود می‌گردد. به همین دلیل، هیچ سیستم کنترلی که دارای قطبی روی محور موهومی باشد، پذیرفته نیست. همه قطب‌ها باید در سمت چپ محور موهومی باشند.

اضافه کردن حلقه کنترل پسخور ممکن است یک فرایند ناپایدار را پایدار کند و یا منجر به ناپایداری یک فرایند پایدار گردد. مثال‌های بسیاری از حالت دوم را بعداً خواهیم دید. عجلاتا، مثالی کلاسیک را در نظر می‌گیریم که تلاش می‌کند یک فرایند ناپایدار حلقه باز را پایدار نماید.

مثال ۷-۱: تابع تبدیل فرایند ناپایدار $G_p = \frac{K}{s-a}$ (مثلاً مدل خطی شده یک راکتور گرم‌زا که سیستم خنک کن درستی ندارد) را در نظر بگیرید. سوال این است که آیا می‌توان با یک کنترل کننده تناسبی، سیستم کنترل آن را پایدار کرد. برای درک بهتر و تصور



درست مسئله، سیستم کنترل را پسخور واحد با $G_m = 1$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌شود که تابع تبدیل محرک هم برابر واحد باشد، $G_a = 1$.

با فرض کنترل کننده تناسبی، $G_c = K_c$ ، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته سروو برابر است با:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{K_c K}{s - a + K_c K}$$

که معادله مشخصه آن برابر است با:

$$s - a + K_c K = 0$$

اگر بخواهیم که سیستم پایداری داشته باشیم، قطب‌های حلقه بسته باید در رابطه زیر صدق کنند:

$$s = -a + K_c K < 0$$

بعبارت دیگر، سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود اگر: $K_c > a/K$.

برای مسائل پیچیده‌تر، چند جمله‌ای مشخصه به این سادگی نبوده و برای تحلیل ابزار کمکی لازم است. دو تکنیکی که فرا خواهیم گرفت آزمون روث-هرویتس و مکان هندسی ریشه‌ها می‌باشد. مکان هندسی بخصوص وقتی که کامپیوتر در اختیار باشد مهمتر و مفیدتر است. وقتی شرایط اجازه بدهد (جبر خیلی پیچیده نباشد)، می‌توان ریشه‌های روی محور موهومی را پیدا کرد - که به آن پایداری حاشیه‌ای (مرز ناپایداری) گفته می‌شود. در مثال ساده بالا، وقتی $K_c = a/K$ باشد قطب حلقه بسته (ریشه معادله مشخصه) روی محور موهومی خواهد بود. البته در اینجا باید هوشیار بود که $K_c > a/K$ انتخاب گردد و نه $K_c < a/K$.

۲-۷ معیار روث-هرویتس^۲

در ابتدا روش بسیار قدیمی روث-هرویتس برای بررسی پایداری معرفی می‌گردد. آن را در اینجا اثبات نخواهیم کرد - بندرت کسی در متون درسی این کار را می‌کند. با این حال، دو چند جمله‌ای برای به تصویر کشیدن خواص ساده استفاده خواهند شد. ابتدائاً، یک چند جمله‌ای مرتبه دوم از s را در نظر بگیرید که ضریب s^2 آن برابر یک است. این چند جمله‌ای دارای دو ریشه p_1 و p_2 (در صورت مختلط بودن مزدوج خواهند بود!) است که بصورت زیر تجزیه خواهد شد:

$$P(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \quad (3-7)$$

در شرایطی که $a_1 = 0$ دو ریشه $\pm j\sqrt{a_0}$ روی محور موهومی خواهند بود (با فرض $a_0 > 0$). چنانچه $a_0 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها در مبدأ خواهد بود. با بسط معادله (۳-۷) داریم:

$$P(s) = s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 p_2 \quad (4-7)$$

با مقایسه (۴-۷) با (۳-۷) داریم: $a_1 = -(p_1 + p_2)$ و $a_0 = p_1 p_2$. حال چنانچه قسمت حقیقی p_1 و p_2 منفی باشند، مجموع آنها عددی حقیقی و منفی، و حاصلضرب آنها عددی حقیقی و مثبت خواهد بود. به بیان دیگر: $a_1 > 0$ و $a_0 > 0$. سپس، یک چند جمله‌ای مرتبه سوم از s را در نظر بگیرید که ضریب s^3 آن برابر یک است. این چند جمله‌ای دارای سه ریشه p_1 ، p_2 و p_3 می‌باشد که حداقل یکی حقیقی است (در صورت مختلط بودن مزدوج خواهند بود!) و بصورت زیر تجزیه خواهد شد:

$$P(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \quad (5-7)$$

با بسط این معادله داریم:

$$P(s) = s^3 - (p_1 + p_2 + p_3)s^2 + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)s - p_1 p_2 p_3 \quad (6-7)$$

و مجدداً، اگر تمام ریشه‌ها دارای قسمت حقیقی منفی باشند، ضرایب a_2 ، a_1 و a_0 مثبت خواهند بود (چرا؟). تصور بر این است که بین علامت قسمت حقیقی قطب‌ها و ضرایب a_0 ، a_{n-1} ، a_{n-2} ، ... در چند جمله‌ای مشخصه مرتبه n باید ارتباطی باشد. حال سوال اینست که اگر نیاز به داشتن قطب‌هایی است که همگی دارای قسمت حقیقی منفی باشند (تست پایداری سیستم)،



آیا راهی برای فهم این موضوع با استفاده از ضرایب a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 بدون بدست آوردن مقادیر واقعی ریشه‌ها وجود دارد. پاسخ این سوال مثبت بوده و راه مورد اشاره بطور خلاصه این است که همه ضرایب چند جمله‌ای مشخصه باید مثبت باشند. یک تئوری فراگیر هم در این زمینه وجود دارد که روث آن را انجام داده است. جذابیت معیار روث در آنست که بدون نیاز به حل معادله مشخصه برای بدست آوردن قطب‌ها، می‌توان نامساوی‌هایی بدست آورد که محدوده پایداری برای طراحی کنترل کننده را مشخص کنند.

گفتیم که برای پایداری BIBO همه قطب‌ها باید در سمت چپ محور موهومی باشند. تحلیل کامل آرایه روث تعداد قطب‌هایی که دارای قسمت حقیقی نامنفی هستند (روی محور موهومی و یا سمت راست آن) را مشخص می‌نماید. در اینجا خیلی به جزئیات آنگونه که در اکثر متون کنترل آمده است، نخواهیم پرداخت. درست است که با استفاده از Matlab می‌توان ریشه‌های دقیق چند جمله‌ای را پیدا کرد، اما معیار روث هم برای هدفی که تعریف می‌شود هنوز کاربرد دارد. این هدف بدست آوردن معیاری است که برای انتخاب بهره‌های کنترل کننده در سیستم‌های نسبتاً ساده به ما کمک کند. این تکنیک موقعی که جبر مسئله پیچیده باشد جذابیت خود را از دست می‌دهد. ذیلاً معیار ساده شده روث-هرویتس بدون اثبات خواهد آمد.

۷-۲-۱ آزمون هرویتس برای ضرایب چند جمله‌ای

برای آنکه چند جمله‌ای مرتبه n

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0 \quad (7-7)$$

دارای ریشه‌هایی باشد که سمت چپ محور موهومی واقع باشند باید تمام ضرایب a_n, \dots, a_0 مثبت باشند. چنانچه یکی از ضرایب منفی باشد، حداقل یک ریشه با قسمت حقیقی مثبت (سمت راست محور موهومی) خواهیم داشت. اگر یکی از ضرایب صفر باشد، تمام ریشه‌ها سمت چپ محور موهومی نخواهند بود؛ به نظر می‌رسد تعدادی از آنها روی محور موهومی باشند. به هر صورت نیاز به تحلیل بیشتر نیست. این آزمون یک شرط لازم برای پایداری BIBO است و در صورت خطا در این آزمون باید کنترل کننده را مجدداً طراحی کرد.

۷-۲-۲ آرایه روث

اگر چند جمله‌ای مشخصه آزمون ضرایب را بگذرانند، آرایه روث بمنظور بدست آوردن شرط لازم و کافی جهت پایداری تشکیل داده خواهد شد. این یکی از معدود تکنیک‌های کلاسیکی است که روی بدست آوردن در اینجا خیلی تأکید نکرده و فرمول کلی آن حذف می‌گردد. ساختن آرایه برای چند جمله‌ای‌ها تا مرتبه چهار بررسی خواهد شد تا مفهوم آن را به تصویر بکشیم.

در حالت کلی، برای یک چند جمله‌ای مرتبه n ، آرایه روث $(n+1)$ سطر دارد. ضرایب چند جمله‌ای در دو سطر اول بصورت ستونی قرار داده می‌شوند. بقیه آرایه‌ها بصورت دترمینان نرمالایز شده ستون اول با ستونهای دیگر هستند. حتی بدون دانستن فرمول کلی، با استفاده از الگوی استفاده شده در مثال‌های زیر می‌توان آرایه روث را ساخت.

معیار روث، داشتن سیستمی پایدار را منوط به داشتن آرایه‌ای می‌کند که «تمام» ضرایب در ستون اول آن دارای علامت مثبت باشند. اگر حتی یکی از آنها منفی باشد، حداقل یک ریشه با قسمت حقیقی مثبت (سمت راست محور موهومی) خواهیم داشت. تعداد تغییر علامت‌ها در ستون اول تعداد قطب‌های با قسمت حقیقی مثبت خواهد بود.

آرایه برای یک چند جمله‌ای مرتبه دوم، $P(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ ، بقرار زیر خواهد بود:

	$P(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$	
۱	a_2	a_0
۲	a_1	۰
۳	$b_1 = \frac{a_1 a_0 - (0) a_2}{a_2} = a_0$	

برای سیستم مرتبه دوم، اولین ستون آرایه روث همان ضرایب چند جمله‌ای خواهد بود. در اینجا آزمون ضرایب (هرویتس) شرط کافی هم خواهد بود. بعبارت دیگر نتیجه آزمون ضرایب و یا آرایه روث یکی خواهد بود.



آرایه روث برای یک چند جمله‌ای مرتبه سوم، $P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$ ، بقرار زیر خواهد بود:

	$P(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$		
۱	a_3	a_1	○
۲	a_2	a_0	○
۳	$b_1 = \frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_3}$	$b_2 = \frac{a_2(\circ) - (\circ)a_3}{a_3} = 0$	
۴	$c_1 = \frac{b_1a_0 - b_2a_2}{b_1} = a_0$		○

در این حالت یک ستون صفر اضافه کردیم تا نشان دهیم چگونه b_2 محاسبه می‌گردد. از آنجا که $b_2 = 0$ است، $c_1 = a_0$ بوده و معیار روث یک قید اضافه اعمال می‌کند:

$$b_1 = \frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_3} > 0 \quad (8-7)$$

با یک چند جمله‌ای مرتبه چهار بحث را پی می‌گیریم: $P(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$.

	$P(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$		
۱	a_4	a_2	a_0
۲	a_3	a_1	○
۳	$b_1 = \frac{a_3a_2 - a_1a_4}{a_4}$	$b_2 = \frac{a_3a_0 - (\circ)a_4}{a_4} = a_0$	○
۴	$c_1 = \frac{b_1a_1 - b_2a_3}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1(\circ) - (\circ)a_4}{b_1} = 0$	
۵	$d_1 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{c_1} = b_2 = a_0$		○

دو قید اضافی در این حالت بوجود خواهد آمد که عبارتند از:

$$b_1 = \frac{a_3a_2 - a_1a_4}{a_4} > 0 \quad (9-7)$$

$$c_1 = \frac{b_1a_1 - b_2a_3}{b_1} = \frac{b_1a_1 - a_0a_3}{b_1} > 0 \quad (10-7)$$

مثال ۷-۲: برای سیستم‌های با قطب‌های حلقه باز حقیقی و منفی، اگر از کنترل کننده تناسبی (یک پارامتری) استفاده گردد، معیار روث-هرویتس بسادگی برای سیستم‌های مرتبه بالا قابل اعمال است. برای نمونه، برای معادله مشخصه حلقه بسته زیر معیار پایداری را بدست آورید.

$$1 + K_c \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

با بسط و بازآرایی معادله به صورت چند جمله‌ای خواهیم داشت:

$$s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + K_c) = 0$$



	$s^2 + 6s^2 + 11s + (6 + K_c)$		چون ضریب اول چند جمله‌ای مشخصه مثبت است، با آزمون هرویتس، $6 + K_c > 0 \rightarrow K_c > -6$
۱	۱	۱۱	و یا در صورتی که پارامترهای مثبت برای بهره کنترل کننده مد نظر باشد $K_c > 0$.
۲	۶	$6 + K_c$	
۳	b_1	۰	برای محدوده پایداری در معیار روث مقدار b_1 نیز باید مثبت باشد. لذا:
۴	$6 + K_c$		$b_1 = \frac{6 \times 11 - (6 + K_c)}{6} = \frac{60 - K_c}{6} > 0 \rightarrow K_c < 60$ پس محدوده پایداری سیستم برابر خواهد بود با $0 < K_c < 60$.

مثال ۷-۳: یک فرایند میرای بحرانی با تابع تبدیل $G_p = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$ را در نظر بگیرید. اگر هدف استفاده از یک کنترل کننده PI باشد، قیود پایداری را تعیین کنید.

برای سادگی فرض می‌شود که $G_m = G_a = 1$. تابع تبدیل حلقه بسته برای مسئله سروو بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

در این مسئله معادله مشخصه حلقه بسته عبارت است از:

$$1 + G_c G_p = 1 + K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = 0$$

و یا:

$$\tau_I s^2 + 2\tau_I s + \tau_I (1 + K_c) s + K_c = 0$$

بدلیل آنکه τ_I مثبت است، با استفاده از آزمون هرویتس می‌توان نتیجه گرفت که باید $K_c > 0$ تا همه ضرایب مثبت شوند.

آرایه روث برای این معادله مشخصه بفرم روبرو خواهد بود. با استفاده از

معادله (۷-۸) نیاز است که:

	$\tau_I s^2 + 2\tau_I s + \tau_I (1 + K_c) s + K_c$		
۱	τ_I	$\tau_I (1 + K_c)$	$b_1 = \frac{2\tau_I^2 (1 + K_c) - \tau_I K_c}{2\tau_I} = \tau_I (1 + K_c) - \frac{K_c}{2} > 0$
۲	$2\tau_I$	K_c	با باز نویسی این نامساوی خواهیم داشت:
۳	b_1	۰	$\tau_I + \left(\tau_I - \frac{1}{2} \right) K_c > 0$
۴	K_c		که بر حسب مقادیر τ_I دو حالت متصور خواهد بود:

• $\tau_I \geq 0.5$: به ازای تمام مقادیر $K_c > 0$ ، مثبت بوده و تغییر K_c تغییری در پایداری سیستم نخواهد داشت.

• $\tau_I < 0.5$: در این صورت نامساوی یاد شده (شرط پایداری) به دو صورت زیر قابل بیان است:

$$\tau_I > \frac{K_c}{2(1 + K_c)} \text{ یا } K_c < \frac{2\tau_I}{1 - 2\tau_I}$$

بعبارت دیگر در حالت اخیر برای τ_I داده شده مقدار K_c نباید از مقدار بیشینه‌ای تجاوز کند و یا برای K_c داده شده مقدار τ_I نباید از حدی کمتر شود.

به این مسئله در مبحث مکان هندسی ریشه‌ها هم خواهیم پرداخت و خواهیم دید چگونه بسادگی درک این شرایط مقدور است.

۳-۷: روش جایگذاری مستقیم^۴

از آنجا که مرز ناپایداری محور موهومی است، بدست آوردن محل قطبها روی محور موهومی با قرار دادن $s = j\omega$ در معادله مشخصه، مقدار بهره تناسی حد پایداری (یا مرز ناپایداری) را به ما خواهد داد. این مقدار بهره تناسی بهره نهایی یا بحرانی نامیده می‌شود. فرکانس متناظر نیز فرکانس نهایی یا گذر^۵ نامیده می‌شود.

مثال ۲-۷ الف: با اعمال روش جایگذاری مستقیم در معادله مشخصه مثال ۲-۷ مقادیر بهره نهایی و فرکانس نهایی را بدست آورید.

$$s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + K_c) = 0$$

با جایگذاری $s = j\omega$ خواهیم داشت:

$$-j\omega^3 - 6\omega^2 + 11j\omega + (6 + K_c) = 0$$

برای صفر شدن این معادله باید قسمت حقیقی و موهومی آن با هم صفر شوند:

$$\text{Re: } -6\omega^2 + (6 + K_c) = 0 \rightarrow K_c = 6(\omega^2 - 1)$$

$$\text{Im: } -\omega^3 + 11\omega = 0 \rightarrow \omega(11 - \omega^2) = 0$$

از معادله بدست آمده قسمت موهومی، فرکانس نهایی برابر $\omega_u = \sqrt{11}$ بدست می‌آید. جایگذاری این مقدار در معادله قسمت حقیقی، مقدار بهره نهایی را برابر $K_{c,u} = 6$ پیشنهاد می‌کند که با نتایج بدست آمده از معیار روث تطابق دارد. مقدار دیگر $\omega_u = 0$ خواهد بود بدین مفهوم که مبدأ محل قطب دیگر روی محور موهومی خواهد بود که مقدار بهره نهایی $K_{c,u} = -6$ را خواهد داد. این مقدار نیز با مقدار حاصل از معیار روث تطابق کامل دارد.

مثال ۳-۷ الف: در مثال ۳-۷ شرایط بهره نهایی را بدست آورید.

با جایگذاری $s = j\omega$ در:

$$\tau_1 s^3 + 2\tau_1 s^2 + \tau_1(1 + K_c)s + K_c = 0$$

خواهیم داشت:

$$-\tau_1 j\omega^3 - 2\tau_1 \omega^2 + \tau_1(1 + K_c)j\omega + K_c = 0$$

دو معادله از قراردادن قسمت حقیقی و قسمت موهومی برابر صفر بدست می‌آید:

$$\text{Re: } -2\tau_1 \omega^2 + K_c = 0 \rightarrow K_c = 2\tau_1 \omega^2$$

$$\text{Im: } \tau_1 [-\omega^3 + (1 + K_c)]\omega = 0$$

بنابر این یا $\omega = 0$ و یا $-\omega^3 + (1 + K_c) = 0$. با جایگذاری K_c از معادله قسمت حقیقی در معادله قسمت موهومی خواهیم داشت:

$$-\omega^3 + 1 + 2\tau_1 \omega^2 = 1 + (2\tau_1 - 1)\omega^2 = 0$$

واضح است که چنانچه $2\tau_1 - 1 \geq 0$ ، قسمت موهومی فقط برای $\omega = 0$ برابر صفر خواهد بود و در نتیجه $K_{c,u} = 0$. بنابر این محور موهومی در محلی دیگر قطع نخواهد شد. اگر $2\tau_1 - 1 < 0$ ، خواهیم داشت:

$$\omega_u^2 = \frac{1}{1 - 2\tau_1}$$

زیرنویس برای نشان دادن فرکانس نهایی استفاده شده است. جایگزینی فرکانس نهایی در معادله قسمت حقیقی، مقدار بهره نهایی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$K_{c,u} = \frac{2\tau_1}{1 - 2\tau_1}$$

همانطور که دیده می‌شود، نتایج حاصل از جایگذاری مستقیم نتایج معیار روث را تأیید می‌کنند.



سوالی که ممکن است پیش آید این است که «آیا روش جایگزینی مستقیم بهترین روش است؟». جواب قطعی و دقیقی برای این سوال وجود ندارد. رویهم رفته، احتمال اشتباه جبری هنگام استفاده از دستورالعمل روث-هرویتس کمتر است و نتایج مستقیماً بدست می‌آیند. در عوض در روش جایگذاری مستقیم نیازی به حفظ فرمول نبوده و فرکانس نهایی (محصول جانبی!!) هم بدست می‌آید. لازم بذکر است که فرکانس نهایی را می‌توان با رسم مکان هندسی ریشه‌ها و تحلیل پاسخ فرکانسی هم بدست آورد. در سیستم‌های دارای تأخیر زمانی، هنگام استفاده از معیار روث-هرویتس باید تابع نمایی تأخیر تقریب زده شود (مثلاً تقریب Pade). لذا نتایج بدست آمده تقریبی بیش نخواهند بود. جایگذاری مستقیم، اما، این امکان را فراهم می‌کند که مقادیر فرکانس و بهره نهایی بصورت دقیق بدست آیند. مثال بعد این موضوع را توضیح می‌دهد.

مثال ۷-۴: یک سیستم را در نظر بگیرید که با کنترل کننده تناسبی یک فرایند مرتبه اول همراه با تأخیر را کنترل می‌کند. معادله مشخصه حلقه بسته این سیستم برابر است با:

$$1 + K_c \frac{0.8e^{-2s}}{\Delta s + 1} = 0$$

معیار پایداری را برای این سیستم بدست آورید.

برای استفاده از معیار روث-هرویتس از تقریب مرتبه اول Pade برای جمله تأخیر استفاده می‌کنیم. با این تقریب معادله مشخصه برابر است با:

$$1 + K_c \frac{0.8}{\Delta s + 1} \frac{(-s+1)}{(s+1)} = 0 \rightarrow \Delta s^2 + (6 - 0.8K_c)s + (1 + 0.8K_c) = 0$$

برای مقادیر مثبت K_c ، آزمون هرویتس (در اینجا شرط لازم و کافی!) پیشنهاد می‌کند که $6 - 0.8K_c > 0$ یا $0 < K_c < 7.5$. با جایگذاری مستقیم $s = j\omega$ در معادله مشخصه واقعی و استفاده از اتحاد اولر ($e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$) برای جمله تأخیر خواهیم داشت:

$$(\Delta j\omega + 1) + 0.8K_c (\cos 2\omega - j\sin 2\omega) = 0$$

که مجدداً معادل است با معادلات قسمت حقیقی و قسمت موهومی صفر. یعنی:

$$\text{Re: } 1 + 0.8K_c \cos 2\omega = 0 \rightarrow K_c = -\frac{1}{0.8 \cos 2\omega}$$

$$\text{Im: } \Delta\omega - 0.8K_c \sin 2\omega = 0 \rightarrow K_c = \frac{\Delta\omega}{0.8 \sin 2\omega}$$

با برابر قرار دادن مقادیر K_c بدست آمده از دو فرمول اخیر خواهیم داشت:

$$\Delta\omega + \tan 2\omega = 0$$

حل این معادله فرکانس نهایی را برابر $\omega_u = 0.895$ خواهد داد. مقدار بهره نهایی از معادله قسمت حقیقی و یا موهومی برابر خواهد بود با $K_{c,u} = 5.73$. لذا حدود دقیق پایداری برای بهره تناسبی برابر است با $0 < K_c < 5.73$. نکته ۱: این نتایج با مقادیری که بعداً در مبحث پاسخ فرکانسی خواهیم گفت مطابقت کامل دارد. نکته ۲: راه حل این معادله روش‌های تکراری است. از آنجا که این روش‌ها بشدت به حدس اولیه وابسته هستند، ممکن است حدس اولیه اشتباه منجر به نتایج کاملاً اشتباه (!) و یا نتایج غیر قابل قبول گردد. قبول کورکورانه جواب بدست آمده منجر به نتایج غلط و دور از انتظار خواهد شد.

۷-۴ تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها

در صورت دسترسی به کامپیوتر، بتصویر کشیدن نمودار مکان هندسی بسیار ساده است:

(۱) یک پارامتر طراحی را انتخاب کنید، مثلاً بهره تناسبی K_c .

(۲) برنامه کوچکی بنویسید که ریشه‌های معادله مشخصه را به ازاء مقادیر مختلف پارامتر طراحی به شما بدهد، بعنوان نمونه در

۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰، ... و غیره.



۳) نتایج (همان مقادیر ریشه‌ها) را در یک جدول قرار دهید و یا زیباتر در صفحه مختلط ترسیم نمایید. درست است که رسم نمودار مکان هندسی خیلی ساده به نظر می‌رسد، اما یکی از قدرتمندترین تکنیک‌ها در طراحی و تحلیل کنترل کننده است البته وقتی که سیستم دارای تأخیر زمانی نباشد. مکان هندسی ریشه‌ها نمایشی گرافیکی است از محل ریشه‌های معادله مشخصه (قطب‌ها) حلقه بسته وقتی که پارامتر طراحی تغییر می‌کند. در اینجا فقط ریشه‌ها ترسیم می‌شوند و مقادیر پارامتر طراحی بطور صریح نشان داده نمی‌شوند. برای تحلیل معمولاً از بهره تناسبی بعنوان پارامتر طراحی استفاده می‌گردد. مقادیر بهره تناسبی از صفر تا بی‌نهایت (در عمل به میزان خیلی بزرگ) تغییر می‌کند. با مثالی ساده این روش را توضیح می‌دهیم.

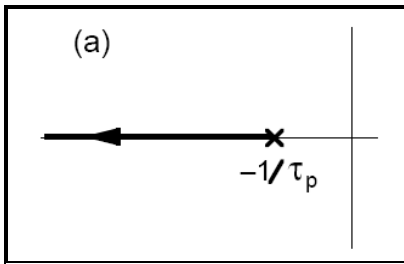
مثال ۷-۵: مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم‌های مرتبه اول و دوم با کنترل کننده تناسبی بدست آورید. دقت کنید چگونه مکان به بی‌نهایت می‌رود.

الف) معادله مشخصه یک سیستم ساده متشکل از فرایندی مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$1 + K_c \frac{K_p}{\tau_p s + 1} = 0 \rightarrow \tau_p s + 1 + K_c K_p = 0$$

جواب این معادله، همان قطب حلقه بسته سیستم، برابر است با:

$$s = -\frac{(1 + K_c K_p)}{\tau_p}$$



نمودار مکان هندسی (شکل روبرو) یک خط روی محور حقیقی است که از $s = -1/\tau_p$ وقتی که $K_c = 0$ است شروع شده و وقتی K_c به بی‌نهایت میل کند، به سمت منهای بی‌نهایت امتداد می‌یابد. با افزایش بهره کنترل کننده پاسخ سریع‌تر خواهد شد. آیا در عمل حد بالایی برای آن متصور است؟ (بله، اشباع شدن).

ب) مثال را با فرایندی که تابع تبدیل آن مرتبه دوم پرمیرا است ادامه می‌دهیم. معادله مشخصه حلقه بسته سیستم بصورت زیر است:

$$1 + K_c \frac{K_p}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = 0 \rightarrow \tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + (1 + K_c K_p) = 0$$

دو قطب حلقه بسته عبارتند از:

$$s = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + K_c K_p)}}{2\tau_1\tau_2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2 K_c K_p}}{2\tau_1\tau_2}$$

برای تغییر K_c چهار حالت متصور است:

(۱) $K_c = 0$ ، دو قطب حقیقی منفی بصورت

$$s = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2}}{2\tau_1\tau_2} \rightarrow s = -\frac{1}{\tau_1}, \quad s = -\frac{1}{\tau_2}$$

که همان قطب‌های حلقه باز هستند.

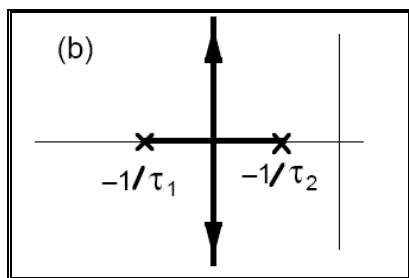
$$0 < K_c < \frac{1}{K_p} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2} \quad (2)$$

دارای دو قطب حقیقی منفی و غیر تکراری.

$$K_c = \frac{1}{K_p} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2} \quad (3)$$

دارای دو قطب حقیقی تکراری برابر با:

$$s = \frac{-(\tau_1 + \tau_2)}{2\tau_1\tau_2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right]$$



(۴) $K_c > \frac{1}{K_p} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2}$ با افزایش K_c قطب‌های حلقه بسته از هم جدا شده (نقطه جدایی) و تشکیل دو قطب مزدوج مختلط خواهند داد (شکل روبرو). از اینجا به بعد دیگر قسمت حقیقی این قطب‌ها تغییر نکرده و برابر ریشه‌های تکراری ذکر شده در حالت (۳) باقی خواهد ماند. بنابر این دو شاخه عمودی خواهیم داشت که قسمت موهومی آنها به سمت بی‌نهایت می‌رود. در این تحلیل، می‌توان دید که با افزایش K_c ، پاسخ سیستم از پر میرا به کم میرا تغییر می‌کند اما همچنان پایدار می‌ماند.

این همان چیزی است که در رسم نمودار قطب‌های حلقه بسته (و یا نمودار مکان هندسی ریشه‌ها) به دنبال آن هستیم. پر واضح است که به ابزار ریاضی و محاسباتی بیشتری در تحلیل سیستم‌های پیچیده‌تر نیاز خواهد بود. نتیجه‌ای ارزشمند که از مثال ۵-۷ استنباط می‌گردد آن است که برای سیستم‌های مرتبه اول و دومی که قطب و یا صفر حلقه باز در سمت راست محور موهومی نداشته باشند، سیستم حلقه بسته همواره پایدار است.

هم اکنون مسئله را در حالت کلی‌تری بررسی می‌کنیم. فرض کنید که معادله مشخصه حلقه بسته بصورت $1 + K_c G^* = 0$ باشد که در آن $K_c G^*$ تابع تبدیل حلقه باز است. K_c بهره تناسبی کنترل کننده و G^* «تمام بلوک‌های باقیمانده» است. اگر کنترل کننده تناسبی باشد، $G^* = G_a G_p G_m$. چنانچه کنترل کننده دیگری داشته باشیم، علاوه بر این شامل قسمتی از کنترل کننده هم خواهد بود. با تعریف G^* بصورت نسبت دو چند جمله‌ای و نوشتن چند جمله‌ای‌ها در ترکیب بندی قطب-صفر خواهیم داشت:

$$1 + K_c G^* = 1 + K_c \frac{Q(s)}{P(s)} = 1 + K_c \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = 0 \quad (11-7)$$

و یا:

$$[(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)] + K_c [(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)] = 0 \quad (11-7 \text{ الف})$$

ریشه‌های چند جمله‌ای مرتبه n ام $P(s) = 0$ یا p_1, p_2, \dots, p_n قطب‌های حلقه باز هستند. ریشه‌های چند جمله‌ای مرتبه m ام $Q(s) = 0$ یا z_1, z_2, \dots, z_m صفرهای حلقه باز هستند. ریشه‌های کل معادله مشخصه (۱۱-۷) قطب‌های حلقه بسته هستند که مکان را بوجود می‌آورند.

تعداد شاخه‌های مکان برابر مرتبه چند جمله‌ای مشخصه (۱۱-۷ الف) خواهد بود. بسادگی می‌توان مشاهده نمود که وقتی $K_c = 0$ ، قطب‌های سیستم حلقه بسته (معادله مشخصه (۱۱-۷)) برابر قطب‌های حلقه باز خواهد بود. هنگامی که $K_c \rightarrow \infty$ ، قطب‌های سیستم حلقه بسته برابر صفرهای حلقه باز می‌شوند. این نتایج دو خصوصیت ریاضی ارزشمند هستند.

بعبارت دیگر، در یک نمودار مکان هندسی، هر شاخه مکان از یک قطب حلقه باز شروع و به یک صفر حلقه باز ختم می‌شود. برای سیستم‌های واقعی، $n > m$ و $m \geq 0$ است. پس $(n - m)$ شاخه مکان که برای آنها صفر حلقه باز وجود ندارد، بسته به نوع سیستم مورد مطالعه، بنحوی به سمت بی‌نهایت می‌روند.

مثال ۲-۷ ب: برای مثال ۲-۷ مکان هندسی را رسم کرده و بهره نهایی را بیابید.

برای مثال یاد شده معادله مشخصه برابر است با:

$$1 + K_c \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

بوسیله Matlab و با فرمان‌های زیر مقدار بهره نهایی تقریباً ۶۰ بدست می‌آید.

```
G=zpk([], [-1 -2 -3], 1);
k=0:1:100; % We have to use our own gain vector in this example
rlocus(G,k) % because the MATLAB default plot does not cross the Im axis
rlocfind(G)
```



بعد از وارد کردن فرمان `Matlab, rlocfind()` تقاضای کلیک بر روی نقطه‌ای از مکان می‌کند تا مقدار ریشه‌ها و بهره تناسبی متناظر را محاسبه کند. در این مسئله روی محل تلاقی مکان با محور موهومی کلیک می‌کنیم.

مثال ۳-۷: مثال ۳-۷ را با استفاده از تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها تکرار کنید. معادله مشخصه حلقه بسته مثال ۳-۷ بصورت زیر است:

$$1 + K_c \frac{(\tau_I s + 1)}{\tau_I s (s^2 + 2s + 1)} = 0$$

برای مقادیر مختلف τ_I با استفاده از `Matlab` مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کنید. برای نمونه می‌توانید:

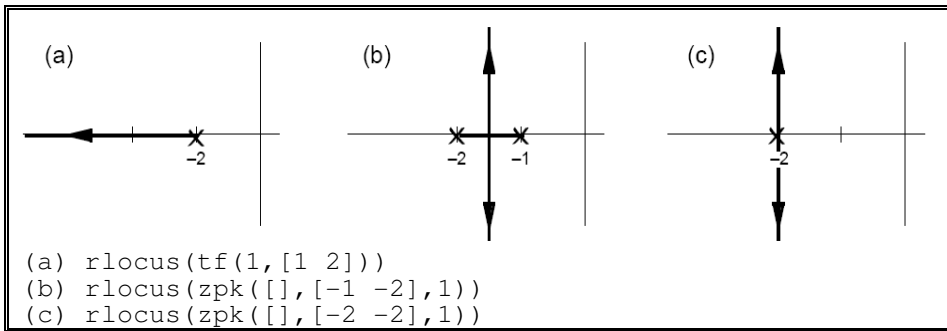
```
tauI=0.2; % Open-loop zero at -5
G=tf([tauI 1],conv([tauI 0],[1 2 1]));
rlocus(G)
```

درخواهید یافت که برای $\tau_I > 0.5$ ، سیستم همواره پایدار است. برای $\tau_I = 0.5$ ، سیستم در مقادیر بی‌نهایت K_c ناپایدار می‌گردد. اما برای مقادیر $\tau_I < 0.5$ وقتی از مقادیر بزرگ K_c استفاده شود سیستم ناپایدار خواهد شد. مثلاً برای $\tau_I = 0.1$ و با استفاده از تابع `rlocfind` مقدار بهره نهایی تقریباً برابر 0.25 خواهد بود که برابر مقداری است که در مثال ۳-۷ بدست آمد. نزدیکی این مقادیر به هم، بستگی به دقت شما در کلیک کردن بر روی نقطه تلاقی مکان با محور موهومی دارد.

درست است که `Matlab` بسادگی مکان هندسی ریشه‌ها را رسم می‌کند اما بسیار مفید خواهد بود که بدانیم چگونه می‌توان آن را با دست انجام داد. حداقل اطلاعات مورد نیاز، دانستن محل قطب‌ها و صفرهای حلقه باز و جهت حرکت شاخه‌ها می‌باشد. مثال زیر چند خصوصیتی که در مسائل کنترل عمومی‌ترند، را بتصویر می‌کشد. موارد بسیار زیادتری وجود دارند اما این مثال نقطه شروع مناسبی است.

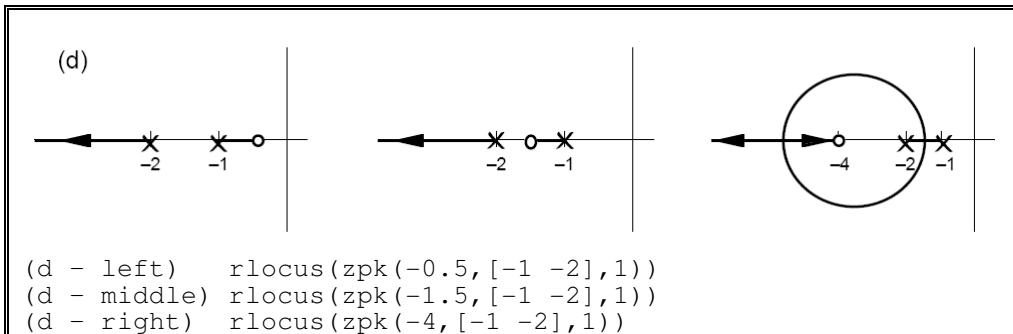
معادله مشخصه حلقه بسته	توصیف	مثال ۶-۷: نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را برای چند معادله مشخصه حلقه بسته معمول زیر رسم کنید. حتماً آنها را با <code>Matlab</code> خودتان انجام دهید.
$1 + K_c \frac{1}{(s+2)} = 0$	(الف) یک سیستم مرتبه اول	در مورد (و) شکل نمودار را برای صفرهای حلقه باز $0.5, -2.5, -3.5$ هم رسم کنید.
$1 + K_c \frac{1}{(s+2)(s+1)} = 0$	(ب) یک سیستم مرتبه دوم	در اینجا شکل‌های تقریبی آنچه شما در <code>Matlab</code> بدست خواهید آورد همراه فرمان‌های لازم ترسیم شده است. مکان هندسی سیستم (الف) خطی است که روی محور حقیقی به سمت منهای بی‌نهایت خواهد رفت (شکل زیر). شاخه‌های
$1 + K_c \frac{1}{(s+2)^2} = 0$	(ج) یک سیستم مرتبه دوم با قطب‌های حلقه باز تکراری	
$1 + K_c \frac{(s+0.5)}{(s+2)(s+1)} = 0$	(د) یک سیستم مرتبه دوم با صفرهای متفاوت حلقه باز	
$1 + K_c \frac{(s+1.5)}{(s+2)(s+1)} = 0$		
$1 + K_c \frac{(s+4)}{(s+2)(s+1)} = 0$		
$1 + K_c \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} = 0$	(ه) یک سیستم مرتبه سوم	
$1 + K_c \frac{(s+1.5)}{(s+3)(s+2)(s+1)} = 0$	(و) یک سیستم مرتبه سوم با صفر حلقه باز	

مکان هندسی سیستم (ب) روی محور حقیقی به سمت همدیگر آمده و از هم جدا شده و با زاویه 90° به سمت بی‌نهایت می‌روند. ریشه‌های تکراری در (ج) بسادگی از هم جدا شده به سمت بی‌نهایت می‌روند.



موارد (الف) تا (ج) همگی فقط دارای قطب حلقه باز حقیقی هستند و کنترل کننده آنها تناسبی است. در مورد (الف) سیستم دارای فرایندی مرتبه اول است در حالیکه در دو مورد دیگر بترتیب سیستم دارای فرایندهای مرتبه دوم پرمیرا و میرای بحرانی است.

نمودارهای سیستم‌های (د) نشان می‌دهند که چگونه یک صفر حلقه باز (مثلا یک کنترل کننده PD ایده‌آل) ممکن است نمودار مکان هندسی ریشه‌ها و رفتار دینامیکی سیستمی که یک فرایند مرتبه دوم پرمیرا را کنترل می‌کند، را تحت تأثیر قرار دهد. رفتارهای کم میرا فقط در صفرهای حلقه باز نسبتا بزرگ (τ_D کوچک) بروز می‌کند. در نمودار سمت چپ شکل زیر، یکی از شاخه‌ها از قطب حلقه

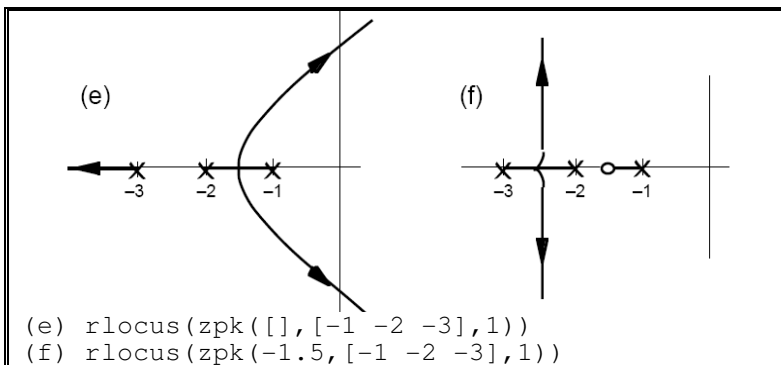


باز ۱- شروع شده و به صفر حلقه باز ۰٫۵- می‌رسد. شاخه دوم از ۲- به سمت منهای بی‌نهایت خواهد رفت. در نمودار میانی، یک شاخه از ۱- به قطب حلقه باز ۱٫۵- رفته و دیگری از ۲- به

سمت منهای بی‌نهایت خواهد رفت. در نمودار سمت راست جایی که صفر حلقه باز در ۴- قرار دارد، دو شاخه مکان از ۱- و ۲- به سمت هم حرکت کرده، و سپس از یکدیگر جدا می‌شوند (نقطه جدایی). شاخه‌ها پس از آن در جایی دورتر روی محور حقیقی فرود می‌آیند (نقطه همرسی)؛ یکی به سمت ۴- رفته و دیگری به بی‌نهایت می‌رود.

سیستم‌های (ه) و (و) شامل فرایندهای مرتبه سوم هستند. بدیهی است که در مورد (ه) کنترل کننده مورد استفاده فقط می‌تواند تناسبی باشد، در حالیکه (و) دارای سناریویی است که می‌تواند حاصل استفاده از یک PD ایده آل باشد.

سیستم (ه) می‌تواند ناپایدار گردد حال آنکه افزودن یک صفر حلقه باز همانند (و) می‌تواند به پایداری سیستم کمک زیادی بکند



(شکل زیر). در (ه)، دو شاخه از ۱- و ۲- شروع شده و به سمت هم می‌آیند. متعاقبا از هم جدا شده و پس از قطع محور موهومی، قطب‌های حلقه بسته ناپایدار می‌شوند. دو شاخه با زوایای $\pm 60^\circ$ به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کنند (مجانب می‌شوند). در (و)، سیستم همواره پایدار است. قطب حلقه بسته ماندگار همانست که از ۱- به سمت ۱٫۵- می‌رود. با انتخاب مناسب صفر حلقه باز (مثلا ۰٫۵-) این سیستم می‌تواند سریع‌تر گردد.

در اغلب متون کنترل، راهنمای ترسیم جهت رسم دستی نمودار ارائه می‌شود. بعد از مثال ۶-۷ تعدادی از قواعد آنها بسادگی قابل درک است. این دستورالعمل ساده عبارتست از:

۱. مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.
۲. تعداد شاخه‌های مکان برابر تعداد قطب‌های حلقه باز (یا مرتبه سیستم) است.



۳. یک شاخه (مسیر ریشه معادله مشخصه حلقه بسته) از یک قطب حلقه باز شروع می‌گردد و به یک صفر حلقه باز ختم شده و یا به بی‌نهایت می‌رود.
۴. قسمتی از محور حقیقی روی مکان است که تعداد قطب‌ها و صفرهای سمت چپ آن فرد باشد. (در کلاس مفصل بحث خواهد شد.)
۵. محل تلاقی با محور موهومی را می‌توان هم با استفاده از آرایه روث بدست آورد و هم با جایگذاری مستقیم $s = j\omega$ در معادله مشخصه حلقه بسته. (البته Matlab هم می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.)
- برای بدست آوردن شکل نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، موارد ذیل (در صورت لزوم) که همگی از معادله مشخصه حلقه بسته (۷-۱۱) بدست می‌آیند باید محاسبه شوند:

۶. به تعداد $(n-m)$ شاخه به بی‌نهایت می‌روند. این شاخه‌ها با خطوطی مجانب می‌شوند که هم‌رس هستند. زوایا و محل تلاقی مجانب‌ها (در صورتیکه بیش از یک مجانب باشند) از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\text{محل تلاقی مجانب‌ها} = \frac{1}{(n-m)} \left[\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right]$$

$$\text{زاویه مجانب‌ها} = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

۷. محل نقاط جدایی و هم‌رسی (نقاط شکست) در مکان از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d}{ds} K_c = 0 \rightarrow \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{G^*} \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{ds} G^* = 0 \rightarrow \frac{1}{P(s)} \frac{d}{ds} [P(s)] = \frac{1}{Q(s)} \frac{d}{ds} [Q(s)]$$

در پیکره بندی قطب-صفر، این رابطه بصورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s-p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s-z_i}$$

۸. اگر p_a قطب مرتبه q و مختلط باشد، زاویه ترک آن از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\text{زاویه ترک قطب} = \frac{1}{q} \left[(2k+1)\pi - \sum_{i=1, i \neq a}^n \angle(p_a - p_i) + \sum_{i=1}^m \angle(p_a - z_i) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, q-1$$

۹. اگر z_b صفر مرتبه v و مختلط باشد، زاویه میل به آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{زاویه میل صفر} = \frac{1}{v} \left[(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^n \angle(z_b - p_i) - \sum_{i=1, i \neq b}^m \angle(z_b - z_i) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, v-1$$

۱۰. برای بدست آوردن بهره تناسبی متناظر با هر s روی مکان s باید در معادله مشخصه $1 + K_c G^*(s) = 0$ صدق کند، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$K_c = \frac{1}{|G^*(s)|}$$

۵-۷ طراحی با استفاده از مکان هندسی

در بحث طراحی کنترل کننده، قطب‌های حلقه بسته (یا شاخه‌های مکان) اطلاعاتی را در مورد دینامیک سیستم به ما می‌دهند. همیشه اطلاعات بدست آمده از مکان هندسی ریشه‌ها بمراتب بیشتر و بهتر از تحلیل معیار روث و یا جایگزینی $s = j\omega$ است. در حقیقت، هنگام استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها بعنوان ابزار طراحی، می‌توان مشخصاتی خاص، مثلاً ثابت زمانی یا نسبت فروکش دلخواه، برای سیستم را دیکته کرد.

مثال ۵-۷ الف: سیستم مرتبه دوم مثال ۵-۷ را در نظر بگیرید. به ازاء چه بهره تناسبی سیستم کنترل شده دارای ضریب میرایی ۰٫۷ خواهد بود؟



معادله مشخصه سیستم حلقه بسته مرتبه دوم که در مثال ۷-۵ بدست آمد را می توان بفرم زیر باز نویسی کرد:

$$\frac{\tau_1 \tau_2}{(1 + K_c K_p)} s^2 + \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{(1 + K_c K_p)} s + 1 = 0$$

با مقایسه این معادله و معادله عمومی $\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1 = 0$ ، که τ تناوب زمانی و ζ ضریب میرایی است، می توان نوشت:

$$\tau = \sqrt{\frac{\tau_1 \tau_2}{(1 + K_c K_p)}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{\sqrt{\tau_1 \tau_2 (1 + K_c K_p)}}$$

پس مقدار K_c را می توان برای ζ داده شده بدست آورد.

با نرم افزار Matlab اما می توان بمراتب سریع تر پاسخ را یافت - خصوصا در مواجهه با سیستم های پیچیده تر که بسیار مفید است. مسئله را با مقادیر عددی بهره فرایند $K_p = 1$ و ثوابت زمانی فرایند برابر $\tau_1 = 2$ و $\tau_2 = 4$ را در نظر بگیرید. معادله مشخصه حلقه بسته برابر است با

$$1 + K_c \frac{1}{(2s+1)(4s+1)} = 0$$

فرمان های زیر را در Matlab وارد می کنیم:

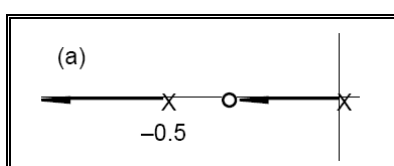
```
G=tf(1,conv([2 1],[4 1]));
rlocus(G)
sgrid(0.7,1) % plot the 0.7 damping ratio lines
[kc,cpole]=rlocfind(G)
```

با استفاده از rlocfind(G) از محل تقاطع خط ضریب میرایی ۰٫۷ و مکان هندسی ریشه ها، مقدار بهره تناسبی برابر ۱٫۲۹ (مقدار واقعی برابر ۱٫۲۹۴۴ است) بدست می آید که محل قطبها در $0.382j \pm 0.375j - 0.5$ خواهد بود. قسمت موهومی و حقیقی این قطبها برابر نیستند چون $\cos^{-1} 0.7 = 45^\circ$ نیست. برای تأیید نتایج می توان از معادلات تحلیلی بدست آمده کمک گرفت. با استفاده از نتایج بدست آمده از مثال ۷-۵ نتیجه می شود که قسمت حقیقی قطبهای حلقه بسته و مقدار بهره تناسبی با هم تطابق کامل دارند.

مثال ۷-۷: فرض کنید هدف تنظیم کنترل کننده PI برای یک سیستم مرتبه اول بدون افت کنترل می باشد. بهره حالت یکنواخت فرایند برابر ۰٫۵ و ثابت زمانی آن برابر ۲ دقیقه است. علاوه بر این فرض کنید $G_a = G_m = 1$. معادله مشخصه حلقه بسته سیستم بسادگی بصورت زیر خواهد بود:

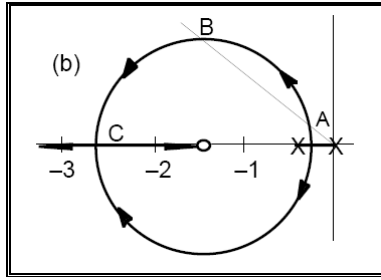
$$1 + K_c \frac{0.5(\tau_I s + 1)}{\tau_I s(2s + 1)} = 0$$

هدف داشتن پاسخی کم میرا و به نسبت سریع با ضریب میرایی ۰٫۷ است. چگونه باید کنترل کننده را طراحی کرد؟ برای داشتن تصویری بهتر مقادیر ثابت زمانی انتگرال را در دو حالت الف) $\tau_I = 3$ (ب) $\tau_I = 2/3$ دقیقه در نظر بگیرید. قبل از شروع طراحی یادآوری می کنیم که این یک سیستم مرتبه دوم بدون صفر مثبت است، بنابر این در پایداری آن بحثی نیست. بصورت تئوری، می توان معادله مشخصه یک سیستم مرتبه دو را نوشت و نتایج را بصورت تئوری بدست آورد. اما، با مکان هندسی ریشه ها این کار بمراتب ساده تر است.



الف) قطبهای حلقه باز در -0.5 و مبدأ هستند. با در نظر گرفتن $\tau_I = 3$ همانطور که در شکل پیداست، صفر حلقه باز در $-1/3$ بوده و تمام قطبهای حلقه بسته حقیقی و منفی هستند. سیستم کم میرا خواهد شد. «سرعت» پاسخ وقتی که بهره تناسبی افزایش یابد با موقعیت صفر در $-1/3$ محدود خواهد شد. این همان مقداری است که قطب حلقه بسته فراگیر قرار خواهد گرفت.

ب) با ثابت زمانی انتگرال کوچکتر، $\tau_I = 2/3$ ، وضعیت جالب تری اتفاق می افتد. صفر حلقه باز حالا در $-1/5$ است. شاخه های مکان هندسی ریشه ها به سمت یکدیگر آمده سپس جدا شده و تشکیل یک دایره می دهند (شکل زیر). با افزایش بیشتر K_c ، شاخه ها مجدداً به سمت محور حقیقی حرکت می کنند. قطب ماندگار به سمت صفر که در $-1/5$ قرار دارد میل خواهد کرد.



با استفاده از نرم افزار Matlab، خط ضریب میرایی ۰٫۷ در دو نقطه مکان هندسی ریشه‌ها را قطع خواهد کرد: نقطه (A) برابر $z = ۰٫۳۲۳ + ۰٫۳۱۲j$ و متناظرا $K_c = ۰٫۵۵$ ؛ نقطه (B) برابر $z = ۱٫۱۷ + ۱٫۱۵j$ و متناظرا $K_c = ۷٫۱۷$.

```
kc=1; tau=2/3;
Gc=tf(kc*[tau 1], [tau 0]);
Gp=tf(0.5, [2 1]);
rlocus(Gc*Gp)
sgrid(0.7,1)
[kc,cpole]=rlocfind(Gc*Gp)
```

اگر اشباع شدگی مهم نباشد، بهره تناسبی $K_c = ۷٫۱۷$ (نقطه B) ترجیح داده می‌شود. قطب حلقه بسته متناظر ثابت زمانی سریعتری خواهد داشت. (محاسبات مربوط به تناوب زمانی یا فرکانس و تأیید ضریب میرایی بعنوان تمرین واگذار می‌گردد.) نکته ۱: از نظر تئوری، نقطه C روی مکان هندسی آرمانی است - سریعترین پاسخ بدون نوسان ممکن. بندرت در عمل این کار قابل انجام است؛ بهره تناسبی آنقدر زیاد است که کنترل کننده اشباع خواهد شد.

نکته ۲: با کاهش ثابت زمانی انتگرال از $\tau_I = ۳$ به دقیقه ۲ دقیقه، حذف قطب با صفر اتفاق خواهد افتاد. جملاتی از معادله مشخصه حلقه بسته حذف خواهند شد و پاسخ در این مثال به یک سیستم مرتبه اول کاهش خواهد یافت. اگر τ_I فقط اندکی کوچکتر از ۲ دقیقه باشد، سیستمی خواهیم داشت که اندکی کم میراست؛ «دایره» بوجود آمده در حالت (ب) بسیار کوچک خواهد بود (آنها با Matlab چک کنید). در عمل، بسیار مشکل است که یک حذف قطب با صفر کامل اتفاق بیفتد. چنانچه τ_I خیلی نزدیک τ_p انتخاب گردد، پاسخ سیستم بین کم میرا و پرمیرا نوسان خواهد داشت.

آخرین تذکر برای مکان هندسی ریشه‌ها

علیرغم مفید بودن مکان هندسی ریشه‌ها، این تکنیک محدودیت‌های خاص خودش را دارد. یکی از مهمترین این محدودیت‌ها آنست که تأخیر زمانی بسادگی قابل اعمال توسط این روش نیست. با داشتن فرایندی که تأخیر زمانی دارد بناچار باید از تقریب Pade استفاده کرد. این محدودیت همانند محدودیت معیار روث-هرویتس است.

ممکن است از خود پرسید که با پیشرفت‌های سریع کامپیوتر، آیا کسی نمی‌تواند برنامه‌ای بنویسد که ریشه‌ها را برای سیستم‌های دارای تأخیر با دقت بدست آورد؟ البته که افرادی این کار را کرده‌اند. حتی تکنیک‌هایی برای رسم دستی مکان هندسی ریشه‌های سیستم‌های دارای تأخیر بسط یافته‌اند. اما، این ابزارها براحتی قابل استفاده نبوده و بندرت استفاده می‌شوند. تعداد اندکی از آن استفاده می‌کنند زیرا تحلیل پاسخ فرکانسی در فصل ۸ براحتی و با دقت سیستم‌های دارای تأخیر زمانی را تحلیل می‌کند.

نکته دوم که حائز اهمیت است آن است که مکان هندسی ریشه‌ها فقط در مورد پایداری مطلق بحث کرده و با آن نمی‌توان پایداری نسبی را تحلیل کرد، بدین مفهوم که راه آسانی برای تعریف یک «حاشیه امن»^۷ عمومی و خوب وجود ندارد. ممکن است کسی پاسخ دهد که با انتخاب فاصله‌ای مناسب برای قطب‌های حلقه بسته از محور موهومی این کار امکان پذیر است، اما این روند ویژه هر مسئله باید تعریف شود. بیاد آورید که بهره تناسبی پارامتر ضمنی مکان هندسی ریشه‌ها است و خیلی مشکل است که از روی آن بتوان اثر تغییرات تدریجی بهره تناسبی (مسئله حساسیت) را بدست آورد. تحلیل پاسخ فرکانسی در اینجا می‌تواند در درک اثرات تغییر پارامترهای کنترل کننده، کمک زیادی بکند. مثلاً یک ثابت زمانی انتگرال مشخص چگونه می‌تواند باعث ناپایداری یک سیستم شود. از طرف دیگر، تحلیل پاسخ فرکانسی قادر نیست اطلاعاتی در مورد پاسخ دینامیکی به ما بدهد - کاری که مکان هندسی ریشه‌ها به سادگی انجام می‌دهد. لذا طراحی کنترل کننده همواره یک روند تکراری دارد و راه حلی منحصر بفرد وجود ندارد!

نهایتاً، ممکن است تعجب کنید که می‌توان از ثوابت زمانی انتگرال و مشتق هم بعنوان پارامتر استفاده کرد و برای تغییر آنها مکان هندسی ریشه‌ها رسم کرد. از لحاظ تئوری این امکان پذیر می‌باشد. با بازآرایی معادله مشخصه بصورتی که پارامترهای دیگر بمانند بهره تناسبی عمل نمایند، این کار قابل انجام است اما کسی چنین کاری نمی‌کند. یک دلیل عمده آنست که شاخه‌های مکان تفسیر زیبایی آنطور که با بهره تناسبی داریم را نمی‌توانند داشته باشند.



-
- ¹ Bounded-Input Bounded-Output
 - ² Routh-Herwitz criterion
 - ³ Routh array
 - ⁴ Direct substitution
 - ⁵ Cross-over frequency
 - ⁶ Root locus method
 - ⁷ Safe margin



۸ تحلیل پاسخ فرکانسی

پاسخ فرکانسی^۱ یک سیستم مفروض به یک ورودی موج سینوسی پس از طی زمان طولانی (پاسخ ماندگار)، با دامنه و تأخیر فاز آن مشخص می‌گردد. این دو کمیت را می‌توان از تابع تبدیل و البته بدون عملیات معکوس گیری نیز بدست آورد. این تحلیل بر مبنای جایگزینی ساده $s = j\omega$ در تابع تبدیل (نگاشت^۲ محور موهومی) است، که از اندازه^۳ (قدر مطلق) و زاویه^۴ فاز^۴ (آرگومان^۵) تابع تبدیل، اطلاعات لازم استخراج می‌گردد. از آنجا که این تحلیل هم مانند تحلیل‌های قبلی بر مبنای تبدیل لاپلاس است، فقط برای مدل‌های خطی شده کاربرد دارد.

عمده مباحث فصل:

- از دید تئوری، فرض می‌شود که رفتار دینامیکی یک فرایند یا یک سیستم با اعمال یک ورودی سینوسی و اندازه گیری پاسخ ماندگار آن، قابل مطالعه و درک است. در سیستم‌های شیمیایی که آزمایش پاسخ فرکانسی براحتی میسر نیست، برای یک مبتدی آنچه در این فصل می‌آید، براحتی قابل درک نخواهد بود. لذا در حال حاضر، پاسخ فرکانسی بعنوان یک مسئله صرفاً ریاضی در نظر گرفته می‌شود.
- هم اندازه و هم آرگومان نگاشت محور موهومی توسط تابع تبدیل، توابعی از فرکانس هستند. نمودارهایی که به نام Bode و نایکوئیست مشهورند صرفاً نمایش گرافیکی این تابعیت هستند.
- تحلیل پاسخ فرکانسی به ما اجازه بدست آوردن معیاری عمومی را خواهد داد که در سیستم‌های با تأخیر زمانی هم کاربرد دارد. این خصوصیت برای طراحی کنترل کننده استفاده خواهد شد.

۸-۱ دامنه و تأخیر فاز

تحلیل بر این خصوصیت ریاضی استوار است که پاسخ یک فرایند (یا سیستم) پایدار به ورودی سینوسی نهایتاً یک سینوسی خالص خواهد بود. فرکانس پاسخ با فرکانس ورودی برابر، اما دامنه و زاویه فاز آن متفاوت خواهد بود. دو کمیت دامنه و زاویه فاز از تابع تبدیل بدست می‌آیند.

برای نشان دادن این خصوصیت، ابتدا از روش تبدیل معکوس و پاسخ زمانی استفاده می‌کنیم. مدل آشنای مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$\tau_p \frac{dy}{dt} + y = K_p x(t) \quad (1-8)$$

با تابع تبدیل زیر:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \quad (2-8)$$

اگر ورودی یک تابع سینوسی بفرم $x(t) = A \sin \omega t$ باشد، تبدیل لاپلاس خروجی برابر خواهد بود با:

$$Y(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3-8)$$

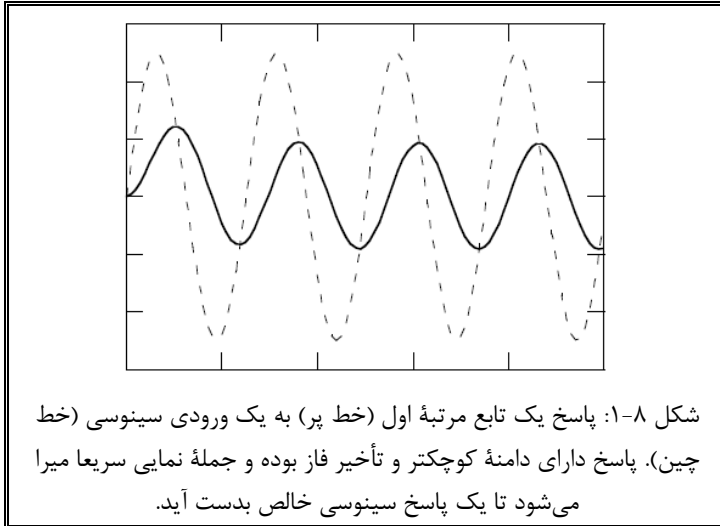
با بسط کسرهای جزئی و گرفتن تبدیل معکوس، البته بعد از کلی محاسبات، پاسخ زمانی برابر خواهد بود با:



$$y(t) = \frac{AK_p \tau_p \omega}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} e^{-t/\tau_p} + \left[\frac{AK_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \right] \sin(\omega t + \phi) \quad (4-8)$$

که در آن:

$$\phi = \tan^{-1}(-\tau_p \omega) \quad (5-8)$$



تأخیر فاز است. جزئیات جبری نحوه محاسبه معادله (۸-۴) مهم نیست. مهم آنست که همانطور که بعداً خواهیم گفت به همین نتیجه می‌توان بسیار راحت‌تر و با محاسبات کمتر رسید. قبل از آن، اما، نکته مهم آنکه اگر زمان به اندازه کافی (نسبت به τ_p) سپری گردد، تابع نمایشی در معادله (۴-۸) میرا شده و پاسخ زمانی یک تابع سینوسی خالص خواهد شد (شکل ۸-۱).

پاسخ زمانی پس از گذشت زمانی طولانی (که اصطلاحاً به آن پاسخ ماندگار هم گفته می‌شود) را می‌توان بصورت زیر در حالت نرمالایز شده نوشت:

$$\frac{y_{\infty}(t)}{A} = \left[\frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \right] \sin(\omega t + \phi) \quad (6-8)$$

به دامنه پاسخ ماندگار نرمالایز شده پس از گذشت زمان طولانی نسبت دامنه‌ها (AR) گویند. دامنه و زاویه فاز پاسخ ماندگار در مقایسه با موج ورودی متفاوت است. اگر معادله (۶-۸) مجدداً نرمالایز شود تا دامنه پاسخ بدست آمده بین صفر و یک محدود شود، خواهیم داشت:

$$\frac{y_{\infty}(t)}{AK_p} = \left[\frac{1}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}} \right] \sin(\omega t + \phi) \quad (7-8)$$

دامنه این پاسخ نرمالایز شده، y_{∞}/AK_p ، نسبت اندازه‌ها نامیده می‌شود (از این تعریف کمتر استفاده خواهیم کرد). حال نگاهیست محور موهومی توسط تابع تبدیل را بدست می‌آوریم. با قرار دادن $s = j\omega$ ، $G_p(s) = G_p(j\omega)$ عددی مختلط خواهد بود:

$$G_p(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega\tau_p + 1} \left(\frac{-j\omega\tau_p + 1}{-j\omega\tau_p + 1} \right) = \left(\frac{K_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \right) - j \left(\frac{K_p \omega \tau_p}{\tau_p^2 \omega^2 + 1} \right) \quad (8-8)$$

اگر (۸-۸) در مختصات قطبی نوشته شود، $G_p(j\omega) = |G_p(j\omega)| e^{j\phi}$ ، اندازه $|G_p(j\omega)|$ و زاویه فاز ϕ برابرند با:

$$|G_p(j\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}}, \quad \phi = \angle G_p(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega\tau_p) \quad (9-8)$$

مقایسه بین معادلات (۹-۸) و (۶-۸) نشان می‌دهد که $|G_p(j\omega)|$ و $\angle G_p(j\omega)$ بترتیب دقیقاً همان دامنه و تأخیر فاز پاسخ ماندگار هستند.



باید توجه نمود که $|G_p(j\omega)|$ و ϕ توابعی از فرکانس هستند. با بزرگتر شدن فرکانس، $|G_p(j\omega)|$ کوچکتر و ϕ بزرگتر خواهند شد. با نوشتن $\tau_p \omega = \omega/\omega_p$ ، دیده می‌شود که چنانچه فرکانس موج ورودی به اندازه کافی از فرکانس «طبیعی» فرایند، ω_p ، بیشتر باشد، فرایند سریع‌ا پاسخ نداده و بالنتیجه، کاهش $|G_p(j\omega)|$ و افزایش ϕ را خواهیم داشت. ولی اگر فرکانس موج ورودی به نسبت کوچک باشد، $|G_p(j\omega)|$ به مقدار بهره حالت یکنواخت، و ϕ به صفر میل می‌کند.

۸-۱-۱ تحلیل عمومی

اکنون به مسئله ساده پیش گفته عمومیت می‌دهیم. تابع تبدیل عمومی یک مدل پایدار $G(s)$ را در نظر بگیرید. این تابع تبدیل را می‌توان همچین صورت نسبت دو چندجمله‌ای هم نوشت، $G(s) = Q(s)/P(s)$. با دادن ورودی سینوسی $x(t) = A \sin \omega t$ تبدیل لاپلاس خروجی برابر است با:

$$Y(s) = G(s) \left(\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{Q(s)}{P(s)} \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

از آنجا که مدل پایدار است، تمام ریشه‌های $P(s)$ صرف نظر از اینکه حقیقی و یا مختلط هستند، دارای قسمت حقیقی منفی بوده و جملات زمانی متناظر بصورت نمایی میرا خواهد بود. بنابر این اگر به پاسخ زمانی ماندگار علاقمند باشیم، فقط کافیست که بسط کسرهای جزئی دو جمله‌منتج از ورودی سینوسی را بدست آوریم:

$$Y_{\infty}(s) = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{a^*}{s-j\omega} \quad (10-8)$$

بعد از آن، بدست آوردن پاسخ ماندگار با استفاده از تبدیل معکوس دیگر مشکل نخواهد بود. با استفاده از بسط هوی‌ساید:

$$a = (s+j\omega)Y(s) \Big|_{s=-j\omega} = G(-j\omega) \frac{A\omega}{-2j\omega} = \frac{AG(-j\omega)}{-2j}$$

و برای مزدوج آن،

$$a^* = (s-j\omega)Y(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) \frac{A\omega}{2j\omega} = \frac{AG(j\omega)}{2j}$$

و در نتیجه $G(j\omega)$ مزدوج $G(-j\omega)$ خواهد بود. بنابر این پاسخ ماندگار برابر است با:

$$y_{\infty}(t) = \left[\frac{AG(-j\omega)}{-2j} \right] e^{-j\omega t} + \left[\frac{AG(j\omega)}{2j} \right] e^{j\omega t}$$

با نوشتن $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$ و $G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$ ، معادله زیر برای پاسخ ماندگار بدست می‌آید.

$$\frac{y_{\infty}(t)}{A} = |G(j\omega)| \left[\frac{e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{-2j} + \frac{e^{j\phi} e^{j\omega t}}{2j} \right]$$

با اعمال اتحاد اولر، نتیجه نهایی برای پاسخ نرمالایز شده برابر است با:

$$\frac{y_{\infty}(t)}{A} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \phi = \angle G(j\omega) \quad (11-8)$$

این نتیجه بدست آمده بسیار مهم بوده و بنیان تحلیل پاسخ فرکانسی را تشکیل می‌دهد. در حالت کلی، فقط لازم است اندازه و آرگومان تابع تبدیل $G(s)$ با جایگذاری $s = j\omega$ (و یا ساده‌تر نگاشت محور موهومی توسط تابع تبدیل) بدست آید.

۸-۱-۲ چند خصوصیت مهم

از آنجا که خواص نگاشت توابع تبدیل وقتی که به صورت متغیرهای مختلط نوشته می‌شوند، در انجام تحلیل پاسخ فرکانسی بسیار مهم است، در اینجا به مطالعه آنها می‌پردازیم. در نظر داشته باشید که هر تابع تبدیلی قابل «شکستن» به حاصلضرب توابع تبدیل ساده‌تر است:



$$G(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s) \quad (12-8)$$

نیاز به بسط تمام تابع تبدیل به کسرهای جزئی نیست. توابع G_1 ، G_2 و غیره اگر بفرم ساده مرتبه اول و یا حداکثر مرتبه دوم نوشته شوند، به اندازه کافی برای تحلیل قابل استفاده خواهند بود. در تحلیل پاسخ فرکانسی، جایگزینی $s = j\omega$ انجام گرفته و اندازه و زاویه فاز نگاشت حاصل بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1}|G_2(j\omega)|e^{j\phi_2}\cdots|G_n(j\omega)|e^{j\phi_n}$$

و یا:

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots|G_n(j\omega)|e^{j(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_n)}$$

اندازه برابر خواهد بود با:

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots|G_n(j\omega)| \quad (13-8)$$

یا:

$$\log |G(j\omega)| = \log |G_1(j\omega)| + \log |G_2(j\omega)| + \cdots + \log |G_n(j\omega)|$$

زاویه فاز برابر است با:

$$\phi = \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \cdots + \angle G_n(j\omega) \quad (14-8)$$

مثال ۸-۱: اندازه و تأخیر فاز را برای تابع تبدیل زیر بدست آورید:

$$G(s) = \frac{(\tau_a s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

این تابع تبدیل را می‌توان بصورت حاصلضرب زیر نوشت:

$$G(s) = (\tau_a s + 1) \frac{1}{(\tau_1 s + 1)} \frac{1}{(\tau_2 s + 1)}$$

بر اساس معادله (۹-۸):

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \tau_a^2 \omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}(\omega \tau_a) + \tan^{-1}(-\omega \tau_1) + \tan^{-1}(-\omega \tau_2)$$

تاکنون حالتی که در صورت صفر داشته باشد، بررسی نشده بود. در اینجا فقط حدس می‌زنیم که نتایج حاصل از تابع تبدیل اولی باید عکس نتایج حاصل از تابع تبدیل مرتبه اول باشد که در معادله (۹-۸) بدست آوردیم. در مثال ۸-۴ آن را بدست خواهیم آورد. توجه کنید که τ دارای بعد زمان، ω دارای بعد رادیان بر زمان بوده و در نتیجه $\tau\omega$ دارای بعد رادیان است.

تابع تبدیل $G(s)$ را می‌توان بصورت متفاوت زیر نوشت:

$$G(j\omega) = \frac{G_a(j\omega)G_b(j\omega)\cdots G_m(j\omega)}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)} = \frac{|G_a||G_b|\cdots|G_m|}{|G_1||G_2|\cdots|G_n|} e^{j(\phi_a+\phi_b+\cdots+\phi_m-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_n)} \quad (15-8)$$

در این حالت، فرم معادل معادله (۱۳-۸) برابر است با:

$$\log |G(j\omega)| = [\log |G_a| + \log |G_b| + \cdots + \log |G_m|] - [\log |G_1| + \log |G_2| + \cdots + \log |G_n|] \quad (16-8)$$

و معادل آنچه در معادله (۱۴-۸) گفته شد برابر است با:

$$\phi = \angle G(j\omega) = [\angle G_a + \angle G_b + \cdots + \angle G_m] - [\angle G_1 + \angle G_2 + \cdots + \angle G_n] \quad (17-8)$$



با این نتایج، اکنون قادریم که نمودارهای لازم در تحلیل پاسخ فرکانسی را رسم کنیم. پیام مهم این فرمول‌ها مشارکت تک تک توابع تبدیل در ساختار منحنی نهایی است. اندازه‌ها، البته در مقیاس لگاریتمی خواهد بود.

۸-۲ ابزار تحلیل گرافیکی

می‌دانیم که هم $|G(j\omega)|$ و هم $\angle G(j\omega)$ توابعی از فرکانس، ω ، هستند. مشخصاً بدنبال آن هستیم تا این ارتباط را به صورت نموداری مشاهده کنیم. سه نمایش گرافیکی برای نشان دادن تابعیت از فرکانس وجود دارد. ابتدا هر سه را بصورت خلاصه توضیح خواهیم داد. معرفی را با نموداری که آنرا نمودار Bode می‌نامیم آغاز می‌کنیم و در مثال‌های بعدی مفصلاً به توضیح آن خواهیم پرداخت.

۸-۲-۱ نمودارهای اندازه و فاز - رسم $\log|G(j\omega)|$ بر حسب $\log \omega$ و $\angle G(j\omega)$ بر حسب $\log \omega$

$|G_p(j\omega)|$ و $\angle G_p(j\omega)$ جداگانه بر حسب فرکانس رسم می‌شوند - که نمودار Bode خوانده می‌شود. بر اساس معادله (۸-۱۶)، برای اندازه باید مقیاس لگاریتمی استفاده شود. بمنظور پوشش محدوده بزرگتر، برای فرکانس هم از مقیاس لگاریتمی استفاده می‌شود. لذا برای رسم $|G(j\omega)|$ بر حسب ω از مقیاس log-log و برای رسم $\angle G(j\omega)$ بر حسب ω از مقیاس semi-log استفاده می‌کنیم. واحد زاویه فاز معمولاً درجه و واحد فرکانس رادیان بر واحد زمان است. در بیشتر کتاب‌های کنترل مورد استفاده در مهندسی برق و یا کنترل صنعتی، واحد مورد استفاده برای اندازه (قدر مطلق) دسی‌بل (dB) است:

$$1 \text{ dB} = 20 \log |G(j\omega)| \quad (8-18)$$

حتی با امکان استفاده از Matlab، دانستن شکل مورد انتظار منحنی‌ها و خصوصیات خاص آنها لازم است. این درک برای بسط مهارت‌های حل مسئله بسیار تعیین کننده است. بنابر این رسم دستی چند نمودار ساده در درک مطلب بسیار آموزنده خواهد بود. هنگام رسم نمودار Bode، فرکانس گوشه (شکست)، شیب مجانب‌های فرکانس بالا و پایین در رسم اندازه (قدر مطلق) و مقادیر زاویه فاز برای فرکانس بالا و پایین در رسم زاویه فاز باید محاسبه شوند. جزئیات را در مثال‌های بعدی خواهیم دید. دیگر مزیت تحلیل پاسخ فرکانسی آن است که می‌توان از داده‌های غیر فرکانسی حاصل از آزمایش هم تابع تبدیل فرایند را «شناسایی» کرد. با استفاده از آزمایش پاسخ فرکانسی و یا آزمایش یک ضربه به‌مراه تبدیل فوریه مناسب، می‌توان نمودار Bode را رسم کرد و آنرا برای طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار داد.

۸-۲-۲ نمودار مختصات قطبی^۱ - رسم $G(j\omega)$ در مختصات قطبی و یا $\text{Im}[G(j\omega)]$ بر حسب $\text{Re}[G(j\omega)]$

می‌توان قسمت حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ در صفحه مختلط را با تغییر پارامتر ω رسم کرد - معروف است به نمودار نایکوئیست^۲. بدلیل آنکه یک عدد مختلط می‌تواند بصورت مختصات قطبی نیز نمایش داده شود، به نمودار نایکوئیست نمودار قطبی هم می‌گویند.

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)] = |G(j\omega)| e^{j\phi}, \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

این نحوه ترسیم همان اطلاعات نمودار Bode را دارد. نمودار قطبی فشرده‌تر است اما نسبت به فرکانس ضمنی است. اگر کامپیوتری در دست نباشد، از دید تئوری، اعداد روی نمودار Bode می‌توانند برای ترسیم نمودار نایکوئیست استفاده شوند. استفاده از نمودار نایکوئیست در تحلیل‌های چند حلقه و یا چند متغیره بیشتر معمول است. اما از طرف دیگر، نمودار Bode آسانتر تفسیر شده و ابزار یادگیری خوبی است.

روش‌های ترسیم دستی هم وجود دارند اما ما از کامپیوتر بیشتر استفاده خواهیم کرد. اما هنوز نیاز به دانستن خصوصیت کیفی چند تابع تبدیل ساده ضروری می‌نماید.



۸-۲-۳ نمودار اندازه بر حسب فاز - رسم $\log G(j\omega)$ بر حسب $\angle G(j\omega)$

در تفسیر تصویری سوم از $G(j\omega)$ ، می‌توان لگاریتم اندازه را بر حسب تأخیر فاز ترسیم کرد - معروف به چارت نیکولز^۱. عموماً این نمودار برای سیستم کنترل پسخور واحد رسم می‌گردد. کانتورهای اندازه و آرگومان تابع تبدیل حلقه بسته روی آن قرار دارند. این نمودار تحلیل طراحی پاسخ فرکانسی را انجام می‌دهد و ارتباط بهتری با پاسخ دینامیکی حلقه بسته دارد.

در اینجا، نحوه رسم نمودارهای Bode و نایکوئیست که قبلاً در فصول ۲ و ۳ معرفی شد، توضیح داده می‌شود. لازم به یادآوری است که همه این نمودارها اطلاعات یکسانی دارند: $G(j\omega)$. چنانچه مثال‌های داده شده در زیر را با داده‌های عددی دلخواه در نرم‌افزار Matlab نیز امتحان کنید، کمک شایانی برای یادگیری بهتر شما خواهد بود.

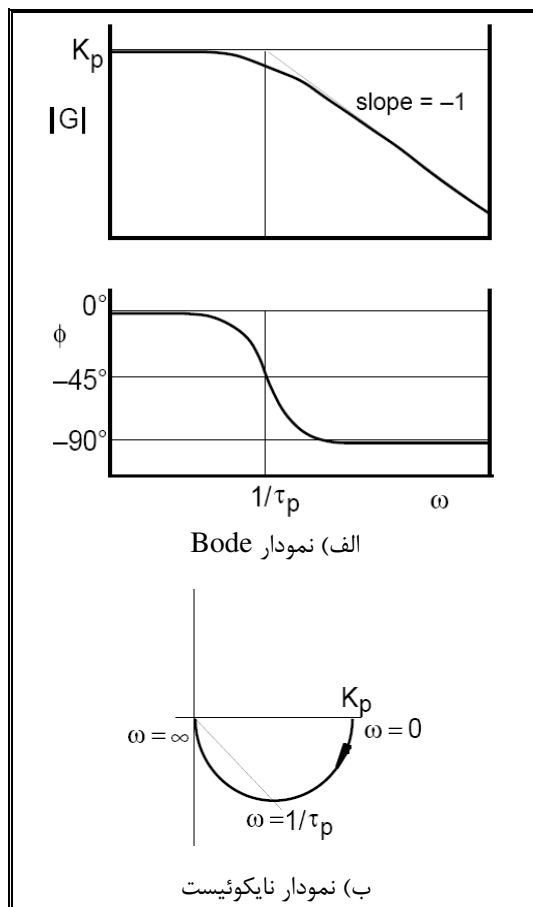
مثال ۸-۲: نمودارهای Bode و نایکوئیست را برای یک تابع تبدیل مرتبه اول رسم کنید.

از پیکره‌بندی ثابت زمانی تابع تبدیل استفاده می‌کنیم. اندازه و زاویه فاز نگاهت محور موهومی توسط تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

طبق معادله (۸-۹) برابر است با:

$$|G_p(j\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \omega^2 + 1}}, \quad \phi = \angle G_p(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega\tau_p)$$



با استفاده از فرمان‌های Matlab بصورت زیر شکل روبرو بوجود خواهد آمد.

```
kp=1; % Just arbitrary values.
tau=2;
G=tf(kp, [tau 1]);
figure(1), bode(G);
figure(2), nyquist(G);
```

اما برای ترسیم دستی، در حالت تئوری به این ترتیب عمل می‌شود که:

$$\log |G_p(j\omega)| = \log K_p - \frac{1}{\tau_p} \log(\tau_p \omega + 1)$$

برای رسم نمودار ϕ فقط از تعریف $\phi = \angle G_p(j\omega)$ استفاده می‌شود. برای رسم نمودار در مختصات قطبی (نایکوئیست)، محاسبات پارامتری $|G_p(j\omega)|$ و $\angle G_p(j\omega)$ انجام شده و یا بصورت ساده قسمت موهومی بر حسب قسمت حقیقی $G_p(j\omega)$ رسم می‌گردد. برای ارزیابی درستی نمودارهای رسم شده توسط کامپیوتر، فقط کفایت مجانب‌های^{۱۱} فرکانس بالا و پایین تست شوند - کاری که برای رسم این نمودارها در روزگاران گذشته استفاده می‌شده است. در حد فرکانس پایین:

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow |G_p(j\omega)| \rightarrow K_p, \quad \phi = \angle G_p(j\omega) \rightarrow 0$$

در نمودار اندازه، مجانب فرکانس پایین (یا فرکانس صفر) خطی است افقی در K_p . در نمودار فاز، مجانب فرکانس پایین خط افقی صفر درجه است. در نمودار قطبی (نایکوئیست) حد فرکانس صفر نقطه K_p روی محور حقیقی است. در حد فرکانس بالا:

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow |G_p(j\omega)| \rightarrow \frac{K_p}{\tau_p \omega}, \quad \phi = \angle G_p(j\omega) \rightarrow -90^\circ$$

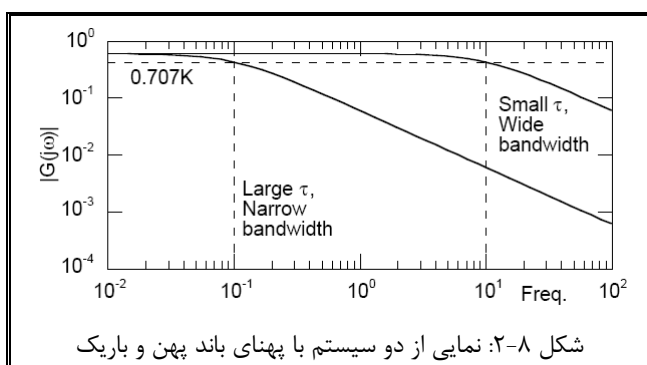
با بررسی مقدار تأخیر فاز، شاید بتوان علت نامگذاری یک تابع تبدیل مرتبه اول به یک تأخیر مرتبه اول را درک کرد. با رسم نمودار log-log، مجانب فرکانس بالا شبیهی برابر -۱ دارد. این مجانب همچنین خط افقی K_p (مجانب فرکانس پایین) را در $\omega = 1/\tau_p$



قطع خواهد کرد. در نمودار زاویه فاز، مجانب فرکانس بالا خط افقی -90° است. در نمودار قطبی (نایکوئیست)، حد فرکانس بی‌نهایت با مبدأ مختصات نشان داده می‌شود که نمودار $G_p(j\omega)$ با زاویه -90° به سمت آن میل می‌کند. فرکانس محل تلاقی مجانب‌های فرکانس بالا و پایین، $\omega = 1/\tau_p$ ، فرکانس گوشه^{۱۲} (یا فرکانس شکست) نامیده می‌شود. در این فرکانس:

$$\omega = \frac{1}{\tau_p} \rightarrow |G_p| = \frac{K_p}{\sqrt{2}}, \quad \phi = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ$$

ممکن است اهمیت فرکانس گوشه، $\omega = 1/\tau$ ، مورد پرسش قرار گیرد. برای روشن شدن مطلب از یک مثال عینی برای تابع تبدیل مرتبه اول استفاده می‌کنیم. اگر ثابت زمانی کوچک باشد، فرکانس گوشه بزرگ خواهد بود. بعبارت دیگر، یک فرایند یا سیستم سریع به محدوده بزرگی از فرکانس‌های ورودی بدون تغییر در دامنه آنها پاسخ خواهد داد. بر عکس، یک فرایند یا سیستم کند دارای ثابت زمانی بزرگ و بالتبع دارای فرکانس گوشه کوچکی است. دامنه پاسخ این‌گونه فرایندها یا سیستم‌ها سریعاً با افزایش فرکانس ورودی کاهش می‌یابد. متناسباً، تأخیر فاز سریعاً به مقدار مجانب فرکانس بالا کاهش پیدا می‌کند.



اصطلاح عمومی مورد استفاده در مهندسی کنترل **پهنای باند**^{۱۳} است، که به فرکانسی گفته می‌شود که مقدار $|G(j\omega)|$ به 70.7% مقدار مجانب فرکانس پایین کاهش می‌یابد (شکل ۸-۲). واضح است که مقدار 70.7% مقدار $1/\sqrt{2}$ است که از

محاسبات تابع تبدیل مرتبه اول در مثال ۸-۲ بدست آمد. سیستم‌های دارای ثابت زمانی کوچک، پهنای باند بزرگی دارند در حالی که پاسخ‌های کند یا ثابت زمانی‌های بزرگ پهنای باند باریک بوجود می‌آورند. از زاویه‌ای دیگر، تابع تبدیل مرتبه اول ساده‌ترین مثال فیلترهای پایین‌گذر^{۱۴} هستند. سیگنال‌های با فرکانس زیر پهنای باند بدون تغییر عبور می‌کنند، در حالیکه با افزایش فرکانس ورودی دامنه خروجی کاهش می‌یابد.

مثال ۸-۳: نمودارهای Bode و نایکوئیست یک تابع تبدیل مرتبه دوم را رسم کنید.

با جایگذاری $s = j\omega$ در تابع تبدیل مرتبه دوم

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

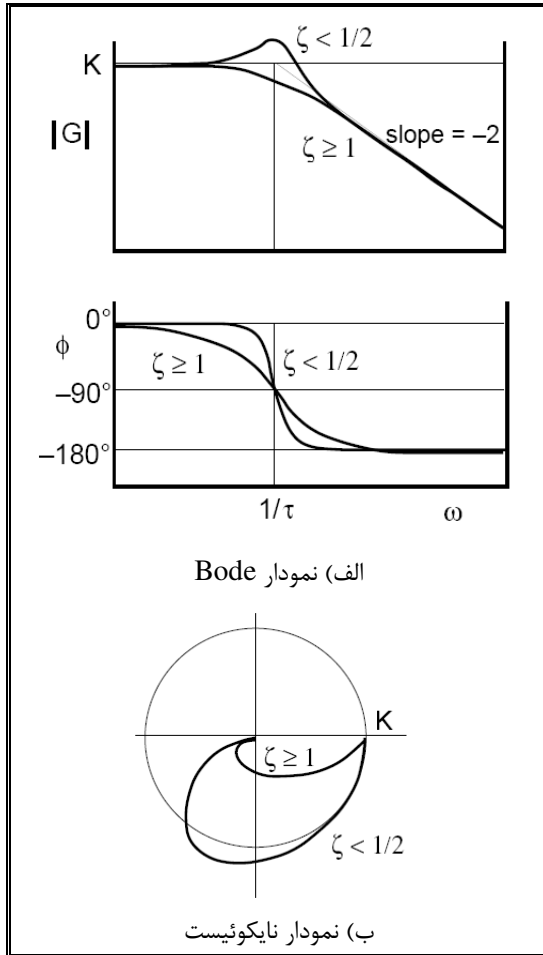
داریم:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 - \tau^2 \omega^2) + j2\zeta\tau\omega} = \frac{K[(1 - \tau^2 \omega^2) - j2\zeta\tau\omega]}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}$$

پس از انجام چند مرحله ریاضی:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\tau\omega}{1 - \tau^2 \omega^2}\right)$$



فرمان‌های Matlab برای رسم نمودارهای یاد شده بقرار زیر است که در شکل روبرو نمودارها دیده می‌شوند:

```
k=1; % Just arbitrary values.
tau=2;
zeta=0.2;
G=tf(k, [tau*tau 2*zeta*tau 1]);
damp(G) % confirm the damping ratio
figure(1), bode(G);
figure(2), nyquist(G);
```

در حد فرکانس پایین:

$$\omega \rightarrow 0 \rightarrow |G(j\omega)| \rightarrow K, \quad \phi = \angle G(j\omega) \rightarrow 0$$

و در حد فرکانس بالا:

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow |G_p(j\omega)| \rightarrow \frac{K}{\tau^2 \omega^2}, \quad \phi \rightarrow -180^\circ$$

در نمودار log-log اندازه، مجانب فرکانس بالا شیبی برابر ۲- دارد. محل تلاقی مجانب‌های فرکانس بالا و پایین (خط K) در $\omega = 1/\tau$ خواهد بود. در فرکانس گوشه،

$$\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow |G_p| = \frac{K}{2\zeta}, \quad \phi = \tan^{-1}(-\infty) = -90^\circ$$

برای فرایند و یا سیستمی که به اندازه کافی کم میرا باشد، $\zeta \leq 1/\sqrt{2}$ ، منحنی اندازه در بالای مجانب فرکانس پایین واقع خواهد شد. بعبارت دیگر در مختصات قطبی نمودار بیرون دایره با شعاع K قرار می‌گیرد.

با مشتق‌گیری از معادله اندازه، $|G(j\omega)| = K / \sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\zeta\tau\omega)^2}$ برای بدست آوردن بیشینه واقعی و فرکانس مربوطه، که فرکانس تشدید^{۱۵} هم نامیده می‌شود، داریم:

$$\omega_r = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\tau} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (19-8)$$

و مقدار حداکثر اندازه برابر است با:

$$M_p = |G(j\omega)|_{\omega_r} = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (20-8)$$

کنترل کننده را می‌توان بر مبنای حد بالایی برای M_p طراحی کرد. هر چه مقدار ضریب میرایی ζ کوچکتر باشد، مقدار M_p بزرگتر بوده و فرارفت بیشتری خواهیم داشت. بعبارت دیگر پاسخ سیستم کم میرا خواهد بود. نیاز به گفتن نیست که تشدید بیش از مقدار مجاز، قابل قبول نخواهد بود.

مثال ۸-۴: نمودار Bode و نایکوئیست یک پیش‌فاز مرتبه اول، $G(s) = \tau_p s + 1$ ، را رسم کنید.

بعد از جایگذاری $s = j\omega$ در تابع تبدیل،

$$G(j\omega) = 1 + j\tau_p \omega$$



که:

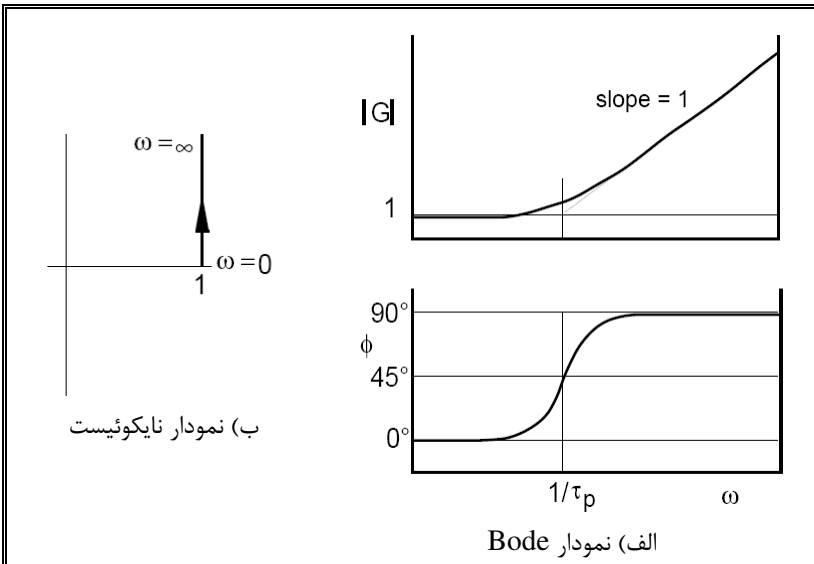
$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \tau_p^2 \omega^2}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\tau_p \omega)$$

با اجرای فرمان‌های زیر در Matlab نمودار روبرو بدست می‌آید.

```
taup=2; % Just an arbitrary value
G=tf([taup 1],1);
figure(1), bode(G);
figure(2), nyquist(G);
```

نمودارهای $|G(j\omega)|$ و ϕ همان «تصویر آینه‌ای» نمودارهای تأخیر مرتبه اول (نسبت به مجانب فرکانس پایین) هستند. اما، نمودار قطبی (نایکوئیست)، کاملاً متفاوت است. قسمت حقیقی $G(j\omega)$ مستقل از ω و برابر ۱ است.



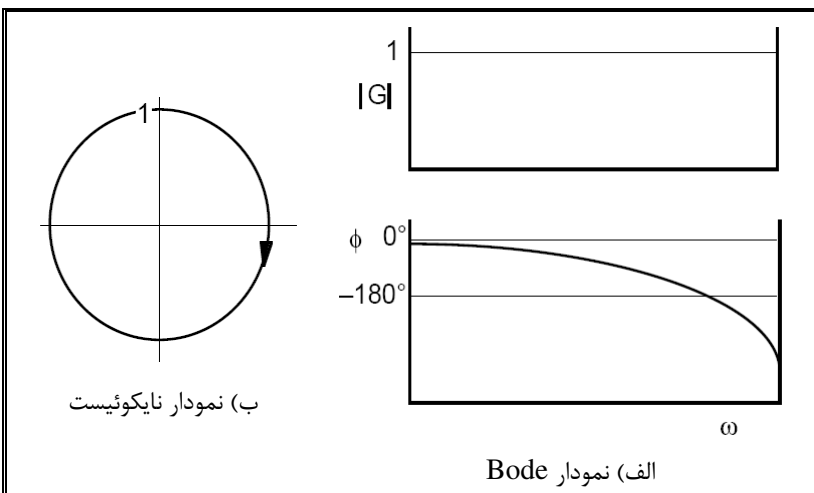
مثال ۸-۵: نمودار Bode و نایکوئیست

برای تابع تأخیر زمانی، $G(s) = e^{-\theta s}$ ، را رسم نمایید.

مجدداً، با جایگذاری $s = j\omega$ در تابع تبدیل،

$$G(j\omega) = e^{-j\theta\omega}$$

که $|G(j\omega)| = 1$ و $\phi = -\omega\theta$ هنگامی که $\omega = \pi/\theta$ است، $\phi = -\pi$ در نمودار قطبی، تابع تبدیل یک تأخیر زمانی دایره واحد خواهد بود.



نکته مهم در مثال اخیر آن است که تأخیر فاز

یک تابع تأخیر زمانی بدون هیچ محدودیتی با افزایش فرکانس افزایش می‌یابد. در مقایسه با سیستم‌های مرتبه اول و دوم که مینیمم فاز هستند، سیستمی با این مشخصات را سیستم غیرمینیمم فاز^{۱۶} گویند. در تعریف رسمی، یک سیستم مینیمم فاز^{۱۷} به سیستمی گفته می‌شود که نه دارای تأخیر باشد و نه صفری سمت راست محور موهومی داشته باشد. از اینجا به بعد، فقط محاسبات تحلیلی و یا نمودارهای مجانبی مهم در حل مثال‌ها استفاده خواهد شد. خواننده می‌تواند با داده‌های عددی آنها را در Matlab چک کند.

مثال ۸-۶: نمودار Bode و نایکوئیست یک تأخیر مرتبه اول همراه با تأخیر زمانی را رسم کنید.

این مثال دلیل بسیار مهمی را نشان می‌دهد که چرا پاسخ فرکانسی قادر است تأخیر زمانی را به آسانی تحلیل نماید. با جایگذاری

$$s = j\omega \text{ در } G(s) = \frac{K_p e^{-t_d s}}{\tau_p s + 1}, \text{ و استفاده از نتایج مثال ۸-۵ و ۸-۲، داریم:}$$

$$G(j\omega) = \frac{K_p e^{-j\omega t_d}}{j\tau_p \omega + 1} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{1 + \tau_p^2 \omega^2}}, \quad \phi = \angle G(j\omega) = -\omega t_d + \tan^{-1}(-\omega \tau_p)$$



نتایج واقعی هستند - مانند تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها و یا آزمون روث نیاز به تقریب نیست. نمودار $|G(j\omega)|$ همانند تابع تبدیل مرتبه اول است اما، تأخیر فاز بدون هیچ محدودیتی، بدلیل وجود جمله $-\omega t_d$ در معادله ϕ ، افزایش می‌یابد. خواهیم دید چگونه این جمله نقش انکارناپذیری در ناپایداری دارد. در نمودار نایکوئیست، نمودار $G(j\omega)$ از مقدار K_p روی محور حقیقی شروع شده و با «چرخش حلقوی» به سمت مبدا در صفحه مختلط حرکت می‌کند.

برای رسم این نمودار در Matlab بصورت زیر عمل می‌کنیم:

```
kp=1;
taup=10;
G=tf(kp,[taup 1]);
tdead=2;
freq=logspace(-1,1); %Make a frequency vector
[mag,phase]=bode(G,freq);
mag=mag(1,:); phase=phase(1,:); %MATLAB specific step
phase = phase - ((180/pi)*tdead*freq); %Add dead time phase lag
figure(1);
subplot(211), loglog(freq,mag)
ylabel('Magnitude'),title('Bode Plot'), grid
subplot(212), semilogx(freq,phase)
ylabel('Phase (degree)'),xlabel('Frequency'), grid
figure(2) % We have to switch over to the polar plot
phase=phase*pi/180; % function to do this Nyquist plot
polar(phase,mag)
```

مثال ۸-۷: نمودار Bode و نایکوئیست یک تابع تبدیل صرفاً انتگرال‌گیر، $G(s) = K/s$ ، را بدست آورید.

جایگذاری $s = j\omega$ در تابع تبدیل منجر به یک عدد موهومی خالص می‌گردد: $G(j\omega) = K/j\omega = -j(K/\omega)$. و لذا:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

فرمان‌های Matlab بقرار زیر است:

```
G=tf(1,[1 0]);
figure(1), bode(G)
figure(2), nyquist(G)
```

$|G(j\omega)|$ در نمودار log-log خطی با شیب -۱ و نمودار ϕ خطی در -90° است. در مختصات قطبی، نمودار قسمت منفی محور موهومی است که با تغییر فرکانس از صفر تا ∞ ، از $-\infty$ تا صفر تغییر می‌کند.

مثال ۸-۸: نمودار Bode و نایکوئیست یک تأخیر مرتبه اول همراه انتگرال‌گیر را بدست آورید.

قدم اول برای این منظور جایگذاری $s = j\omega$ در تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{K_p}{s(\tau_p s + 1)}$$

است. براحتی می‌توان دید که این تابع تبدیل حاصلضرب یک تأخیر مرتبه اول و یک انتگرال‌گیر است. با ادغام نتایج حاصل از مثال‌های ۸-۲ و ۸-۷:

$$|G(j\omega)| = \frac{K_p}{\omega\sqrt{1+\tau_p^2\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ + \tan^{-1}(-\tau_p\omega)$$

نمونه‌ای از فرمان‌ها در Matlab بمنظور رسم این نمودارها عبارتست از:

```
kp=1;
taup=2;
G=tf(kp,[taup 1 0]);
figure(1), bode(G)
figure(2), nyquist(G)
```



بدلیل وجود انتگرال گیر، هیچکدام از مجانب‌های فرکانس بالا و یا پایین افقی نیستند. نمودار $|G(j\omega)|$ نشان می‌دهد که با افزایش فرکانس مقادیر اندازه کاهش می‌یابد. نمودار ϕ از -90° در مجانب فرکانس پایین شروع شده و در مجانب فرکانس بالا به -180° می‌رسد. نمودار قطبی از منفی بی‌نهایت در کنار خط $-K_p \tau_p$ شروع شده و وقتی $\omega \rightarrow \infty$ به مبدأ متمایل خواهد شد.

مثال ۸-۹: نمودار Bode تابع تبدیل زیر را رسم کنید:

$$G(s) = \frac{(\Delta s + 1)}{(10s + 1)(2s + 1)}$$

فرمان‌های Matlab بقرار زیر است:

```
G=tf([5 1],conv([10 1],[2 1]));
bode(G);
```

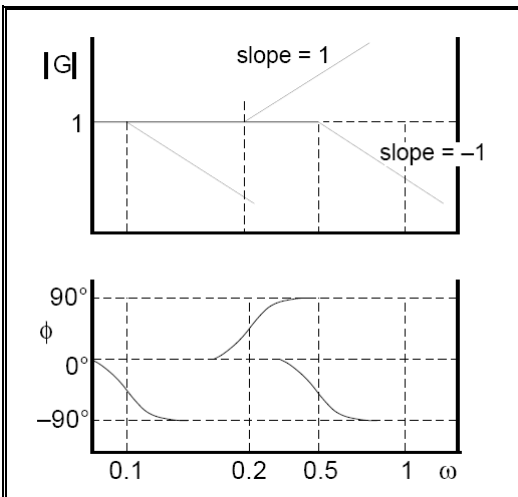
بطور کلی باید توابع

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \Delta^2 \omega^2} \frac{1}{\sqrt{1 + 10^2 \omega^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 \omega^2}}$$

و

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\Delta\omega) + \tan^{-1}(-10\omega) + \tan^{-1}(-2\omega)$$

رسم شوند. در ترسیم با Matlab، منحنی‌ها هموار هستند؛ که کاملاً با ترسیم دستی متفاوتند. علاوه بر این، درک خصوصیات مجانبی در ترسیم درست نمودارها بصورت دستی بسیار مفید هستند. برای نمودارهای تأخیر فاز هم ترسیم دستی، ساده (و البته بسیار مهم) است.



برای آنکه درک درستی از نتایج حاصل از Matlab داشته باشید، در شکل روبرو نمودار مجانبی فرکانس‌های بالا و پایین رسم شده است. نکته کلیدی تشخیص درست فرکانس‌های گوشه است. در مورد مطرح شده، فرکانس گوشه برای پیش‌فاز مرتبه اول $1/5$ و یا 0.2 است، در حالیکه برای دو پس‌فاز مرتبه اول فرکانس‌های گوشه عبارتند از $1/10 = 0.1$ و $1/2 = 0.5$. منحنی نهایی حاصل تجمیع اثرات تمامی توابع تبدیلی است که تابع تبدیل اصلی را تشکیل داده‌اند.

علاوه بر این، چنانچه علاقمند به دیدن بهتر «برجستگی» تأخیر فاز (که از رسم دستی نمودار انتظارش را دارید) هستید، جمله $(2s + 1)$ در مخرج را به $(s + 1)$ تغییر دهید.

۸-۳ تحلیل پایداری

با استفاده از تحلیل پاسخ فرکانسی، قادر خواهیم بود که معیاری عمومی برای پایداری نسبی ارائه دهیم. نتایج حاصله برای سیستم‌های همراه با تأخیر زمانی هم قابل استفاده خواهد بود. در تحلیل سیستم‌های حلقه بسته فقط از تابع تبدیل حلقه باز در محاسبات استفاده خواهد شد.

۸-۳-۱: معیار پایداری نایکوئیست

معادله مشخصه یک سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$1 + G_m G_c G_a G_p = 0 \quad (2-7)$$



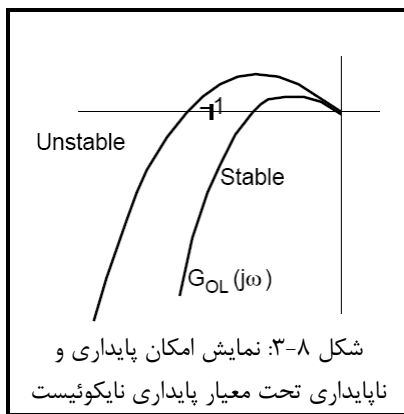
که در آن می‌توان تابع تبدیل حلقه باز را بصورت $G_{OL} = G_m G_c G_a G_p$ نوشت. جهت «کاوش» خواص روی محور موهومی (وجود قطب حلقه بسته روی محور موهومی)، می‌توان با جایگذاری $s = j\omega$ معادله مشخصه را بصورت زیر نوشت:

$$G_m(j\omega)G_c(j\omega)G_a(j\omega)G_p(j\omega) = -1 \equiv G_{OL}(j\omega) = -1 \quad (الف ۲-۷)$$

البته این معادله دارای اطلاعاتی در مورد پایداری است و همانطور که از نحوه نوشتن آن برمی‌آید، می‌توان خواص نیم‌صفحه سمت چپ محور موهومی را با نقطه $(-1, 0)$ مرتبط دانست. فرم $(۲-۷)$ الف) بر این مطلب دلالت دارد که برای تحلیل خواص پایداری حلقه بسته، در روند محاسبات (یا برنامه نویسی کامپیوتر) فقط به تابع تبدیل حلقه باز نیاز است. برای مسائل پیچیده، این اصل باعث حذف محاسبات ناخواسته می‌گردد. در اینجا فقط به بیان معیار پایداری نایکوئیست بسنده می‌کنیم.

معیار پایداری نایکوئیست: برای معادله مشخصه حلقه بسته $1 + G_{OL}(s) = 0$ ، اگر $G_{OL}(s)$ دارای P قطب حلقه باز ناپایدار باشد و $G_{OL}(j\omega)$ وقتی که ω از $-\infty$ تا ∞ تغییر کند (نگاشت محور موهومی تحت تابع $G_{OL}(s)$)، نقطه $(-1, 0)$ در صفحه مختلط را N بار در جهت عقربه‌های ساعت دور بزند، تعداد قطب‌های ناپایدار حلقه بسته (ریشه‌های معادله مشخصه در سمت راست محور موهومی) برابر است با $Z = N + P$.

همانطور که خواهیم دید این توصیف کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا داشتن فقط یک قطب ناپایدار کننده حلقه بسته باعث ناپایداری سیستم می‌شود. لذا استفاده از معیار پایداری نایکوئیست خیلی ساده‌تر از تئوری آن است.



شکل ۳-۸: نمایش امکان پایداری و ناپایداری تحت معیار پایداری نایکوئیست

بیان ساده معیار پایداری نایکوئیست (شکل ۳-۸): برای یک سیستم حلقه باز پایدار، اگر نمودار قطبی $G_{OL}(j\omega)$ نقطه $(-1, 0)$ در صفحه G_{OL} را دور نزند، سیستم حلقه بسته پایدار است.

در این بیان، بجای کلمات دهان پر کن از «نمودار قطبی G_{OL} » استفاده شده است. از عبارت «صفحه G_{OL} » استفاده کردیم تا بر این نکته تأکید کنیم که تحلیل بر مبنای معادله $(۲-۷)$ الف) انجام شده است. سوال اصلی اینست که برای یک سیستم، حاشیه ایمنی چقدر باید باشد. این سوال منجر به تعریف حاشیه فاز و حاشیه بهره می‌شود، که مبنای معیارهای پایداری نسبی عمومی برای سیستم‌های حلقه بسته است.

هنگام رسم نمودار نایکوئیست، اغلب نگاشت قسمت مثبت محور موهومی (وقتی $\omega = 0$)

تا بی‌نهایت تغییر می‌کند) رسم می‌گردد. این فقط نصف کل محور موهومی است که از منهای بی‌نهایت شروع می‌شود. اگر سیستمی ناپایدار باشد، نمودار بدست آمده نقطه $(-1, 0)$ را فقط به اندازه π رادیان به جای 2π رادیان (آنچه معنی واقعی دور زدن است)، دور می‌زند. نگاشت قسمت مثبت محور موهومی برای مشاهده دور زدن نقطه $(-1, 0)$ توسط نمودار کافی بنظر می‌رسد.

۳-۲-۸: حاشیه‌های بهره و فاز^{۱۸}

حال که مبنای معیار پایداری نایکوئیست بیان شد، استفاده از آن آسان است. فرض کنید که معادله مشخصه حلقه بسته سیستم بصورت $1 + G_c G_p = 0$ نوشته شود. با داشتن نقطه $(-1, 0)$ بعنوان مرجع و منحنی $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$ در نمودار نایکوئیست، می‌توان به معیاری برای اندازه گیری میزان ایمنی دست یافت - اینکه چقدر از نقطه $(-1, 0)$ فاصله داریم. دو امکان وجود دارد که در شکل ۴-۸ نشان داده شده است و تفسیر آنها در نمودار Bode به نمایش در آمده است.

(۱) روی محور حقیقی منفی (-18°) ، «فاصله» مقدار $|G_c G_p|$ از نقطه $(-1, 0)$ بدست آید. عکس این فاصله حاشیه بهره، GM است. فرمول آن بصورت زیر است:

$$GM = \frac{1}{|G_c(j\omega_{cg})G_p(j\omega_{cg})|} \quad (۲۱-۸)$$



که در آن $G_c(j\omega)G_p(j\omega)$ در فرکانسی که ϕ آن -180° است محاسبه می‌گردد. فرکانس مربوطه در این نقطه فرکانس گذر بهره^۱، $\omega = \omega_{cg}$ ، نامیده می‌شود. هر چه مقدار $|G_c G_p|$ در این نقطه کوچکتر باشد، حاشیه بهره بیشتر بوده و «سیستم کنترل طراحی شده ایمن تر خواهد بود».

(۲) فرکانسی را که در آن اندازه $|G_c G_p|$ برابر ۱ است را بدست آورید. فرکانس مربوطه فرکانس گذر فاز^۲، $\omega = \omega_{cp}$ ، نامیده می‌شود. مقدار زاویه بین $G_c G_p$ و -180° ، حاشیه فاز، PM ، است. فرمول حاشیه فاز بصورت زیر است:

$$PM = \phi - (-180^\circ) = \phi + 180^\circ \quad (22-8)$$

که در آن ϕ (مقداری منفی) در نقطه‌ای محاسبه می‌گردد که $|G_c G_p|$ برابر یک است. هر چه این زاویه بزرگتر باشد، حاشیه فاز

بزرگتر بوده و «سیستم کنترل طراحی شده ایمن تر خواهد بود».

برای اغلب سیستم‌های کنترل، برای مشخصات طراحی، معمولاً حاشیه بهره بین ۱٫۷ تا ۲ و حاشیه فاز بین 30° تا 45° انتخاب می‌شود.

معیار پایداری نایکوئیست می‌تواند در نمودارهای Bode هم اعمال گردد. در حقیقت، محاسبات با نمودار Bode بمراتب ساده‌تر و قابل درک‌تر است. برای بدست آوردن حاشیه بهره، مقدار $|G_c G_p|$ را که متناظر با $\phi = -180^\circ$ است را پیدا کنید. برای بدست آوردن حاشیه بهره، ϕ متناظر با $|G_c G_p| = 1$ را بیابید.

یک بار دیگر، به خاطر داشته باشید که سیستم‌های مرتبه اول و دومی که صفر سمت راست محور موهومی ندارند، همواره پایدار بوده و برای آنها حاشیه فاز و بهره بی‌معنی است. مقدار فرکانس گذر بهره همانست که در فصل ۶ فرکانس نهایی نامیده شده بود وقتی که $s = j\omega$ را در معادله مشخصه حلقه بسته جایگزین کرده بودیم و یا موقعی که از روش تناوب نهایی زیگلر-نیکولز استفاده کردیم ($\omega_{cg} = \omega_u$).

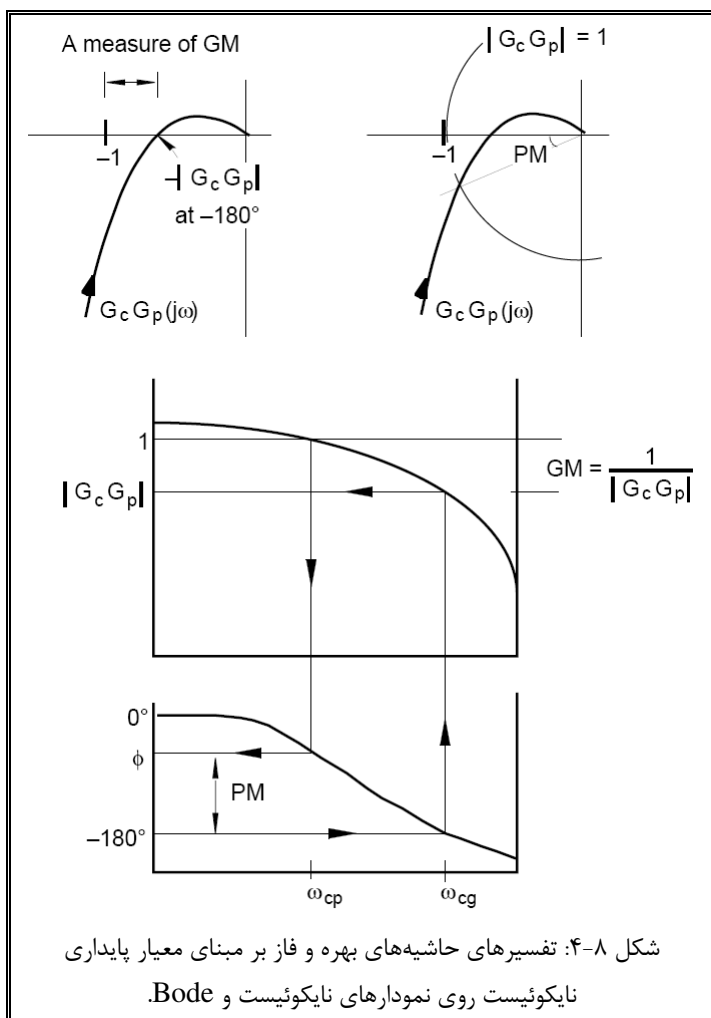
حاشیه فاز و بهره در مبحث بعد برای طراحی کنترل کننده استفاده خواهد شد. قبل از آن، نمودارهای تابع تبدیل چند کنترل کننده را رسم می‌کنیم و خواص آنها را

بررسی خواهیم کرد. بطور کلی، هر تابع تبدیلی که $\angle G(j\omega)$ یا $|G(j\omega)|$ بیشتری به سیستم بدهد، باعث ناپایداری سیستم خواهد شد که این به فرکانس بستگی دارد.

از کنترل کننده تناسبی صرف نظر می‌کنیم چرا که $G_c = K_c$. شما می‌توانید با مقادیر مختلف پارامترها، مثال‌های زیر را در Matlab اجرا کنید.

مثال ۸-۱۰: اندازه و زاویه فاز را برای تابع تبدیل یک کنترل کننده PI بدست آورید.

با جایگذاری $s = j\omega$ در $G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$ می‌توان مقادیر خواسته شده را بدست آورد. اما، با استفاده از اطلاعات گفته شده قبلی فوراً می‌توان نتیجه گرفت که این تابع تبدیل حاصلضرب یک انتگرال‌گیر و یک پیش‌فاز است:



شکل ۸-۴: تفسیرهای حاشیه‌های بهره و فاز بر مبنای معیار پایداری نایکوئیست روی نمودارهای نایکوئیست و Bode.



$$G_c(s) = K_c \frac{1}{\tau_I s} (\tau_I s + 1)$$

بنابر این

$$|G_c(j\omega)| = K_c \frac{1}{\tau_I \omega} \sqrt{1 + \tau_I^2 \omega^2}, \quad \angle G_c(j\omega) = -90^\circ + \tan^{-1}(\tau_I \omega)$$

برای نمایش نمودار، فرمان‌های زیر را در Matlab اجرا کنید:

```
kc=1; % Just some arbitrary numbers
taui=2;
G=tf(kc*[taui 1],[taui 0]);
figure(1), bode(G);
figure(2), nyquist(G);
```

در نمودار $|G_c(j\omega)|$ ، مجانب فرکانس پایین خطی است با شیب -1 ، اما مجانب فرکانس بالا خطی افقی با اندازه K_c است. $\angle G_c(j\omega)$ آن از -90° در فرکانس‌های شروع شده و به صفر درجه در فرکانس‌های بالا میل می‌کند. در نمودار قطبی، $G_c(j\omega)$ در فرکانس صفر از مکانی در بی‌نهایت روی خطی عمودی شروع شده و به K_c روی محور حقیقی ختم می‌گردد. کنترل انتگرالی در فرکانس‌های پایین‌تر از فرکانس گوشه، $1/\tau_I$ ، به اندازه -90° به ϕ اضافه می‌کند. مقادیر بزرگ‌تر ثابت زمانی انتگرال، محدوده‌ای که باعث می‌شود تا کنترل کننده به سیستم تأخیر بدهد را محدود می‌کند. این همان دلیلی است که چرا انتخاب یک τ_I بزرگ‌تر نسبت به τ_I کوچک‌تر به پایداری بیشتر سیستم می‌انجامد.

مثال ۸-۱۱: $|G_c(j\omega)|$ و $\angle G_c(j\omega)$ تابع تبدیل یک کنترل کننده PD ایده‌آل را بدست آورید.

نتایج همانست که در مثال ۸-۴ برای یک پیش‌فاز مرتبه اول بیان گردید. از تابع تبدیل $G_c(s) = K_c(1 + \tau_D s)$ ، با جایگذاری $s = j\omega$ داریم:

$$G_c(j\omega) = K_c(1 + j\tau_D \omega)$$

و بنابر این:

$$|G_c(j\omega)| = K_c \sqrt{1 + \tau_D^2 \omega^2}, \quad \angle G_c(j\omega) = \tan^{-1}(\tau_D \omega)$$

در نمودار $|G_c(j\omega)|$ ، مجانب فرکانس پایین خطی افقی برابر K_c و مجانب فرکانس بالا شیب $+1$ دارد. $\angle G_c(j\omega)$ از صفر درجه وقتی که فرکانس صفر است شروع شده و در فرکانس‌های بالا به $+90^\circ$ می‌رسد. در نمودار قطبی، $G_c(j\omega)$ از مقدار K_c روی محور حقیقی شروع شده و بصورت خطی عمودی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بر اساس نمودار $\angle G_c(j\omega)$ ، کنترل کننده PD بدلیل افزایش دادن فاز سیستم (پیش‌فاز کردن)، به ثبات و پایداری بیشتر سیستم کمک می‌کند. هم‌زمان، $|G_c(j\omega)|$ در فرکانس‌های بالا باعث تقویت نویز می‌گردد. این همان دلیل عملی است که باعث می‌شود که سرعت پاسخ کنترل کننده PD در عمل محدود گردد.

فرمان‌های Matlab در این مورد همانند فرمان‌هایی است که برای یک پیش‌فاز مرتبه اول قبلاً استفاده کردیم:

```
kc=1; % Just some numbers we pick arbitrarily
taud=2;
G=tf(kc*[taud 1],1);
figure(1), bode(G);
figure(2), nyquist(G);
```

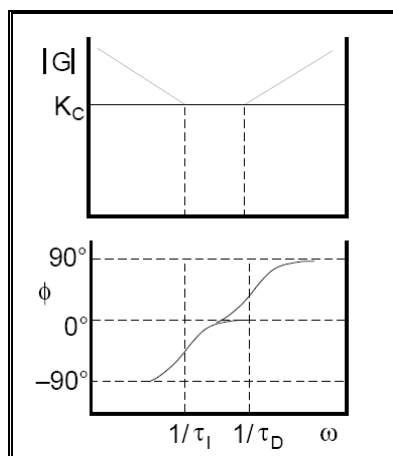
مثال ۸-۱۲: $|G_c(j\omega)|$ و $\angle G_c(j\omega)$ کنترل کننده

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{1 + \tau_I s}{\tau_I s} \right) (1 + \tau_D s)$$

که یک کنترل کننده PID بوده که دارای عملگر مشتقی ایده‌آل است و فرم تداخلی نامیده می‌شود. بدلیل آنکه این کنترل کننده حاصلضرب یک انتگرال‌گیر و دو پیش‌فاز مرتبه اول است، همچنین قابلیت شناسایی مجانب فرکانس بالا و پایین در آن وجود دارد، در



اینجا بطور مفصل بررسی می‌شود. این تابع تبدیل همانند یک PID ایده‌آل (عیر تداخلی) نیست اما نتایج عددی آنها بسیار به هم شبیه است.



ابتدا باید نمودار آن را رسم کنیم. فرمان‌های زیر در Matlab شکل روبرو را خواهند داد که می‌تواند سهم بسزایی در درک ما از نمودار Bode داشته باشد.

```
kc=1;
tau_i=4;
tau_D=1;
Gi=tf(kc*[tau_i 1],[tau_i 0]);
Gd=tf([tau_D 1],1);
G=Gi*Gd;
bode(G);
```

با انتخاب $\tau_D < \tau_i$ (که برای فرکانس‌های گوشه، $1/\tau_D > 1/\tau_i$)، نمودار $|G_c(j\omega)|$ دارای شکلی ناودانی خواهد بود. اندازه عرض این ناودانی به مقادیر نسبی فرکانس‌های گوشه بستگی دارد. مجانب فرکانس پایین در محدوده کمتر از

$1/\tau_i$ دارای شیب -۱ است. مجانب فرکانس بالا در محدوده بالاتر از $1/\tau_D$ دارای شیب +۱ است. نمودار $\angle G_c(j\omega)$ از -90° به مقدار صفر درجه بعد از فرکانس $1/\tau_i$ رسیده و نهایتاً با افزایش فرکانس به سمت $+90^\circ$ میل می‌کند.

بطور نسبی، یک کنترل کننده PID در فرکانس‌های پایین همانند یک کنترل کننده PI و در فرکانس‌های بالا همانند یک کنترل کننده PD عمل می‌کند. مطلوبترین محدوده کنترل کننده میانی فرکانس است که خصوصیت‌های هر دو کنترل کننده PI و PD وجود دارند. همچنین در محدوده کف ناودانی، تابع تبدیل کنترل کننده دارای حداقل اندازه بوده که اجازه داشتن حاشیه بهره بزرگتر را به سیستم خواهد داد.

مثال ۸-۱۳: اندازه و زاویه فاز را برای توابع تبدیل جبران کننده پیش‌فاز^{۲۱} و پس‌فاز^{۲۲} بدست آورید. در بسیاری از سیستم‌های کنترلی الکترومکانیکی، کنترل کننده G_c توسط مدارهای بسیار ساده RC ساخته می‌شود که بفرم عناصر پیش‌فاز/پس‌فاز هستند:

$$G_c(s) = K \frac{(s + z_o)}{(s + p_o)}$$

در اینجا، z_o و p_o دو عدد مثبت هستند. دو حالت آشکارا برای این تابع تبدیل متصور است: حالت (الف) $z_o > p_o$ و حالت (ب) $z_o < p_o$. نمودارهای اندازه و فاز G_c را برای هر دو حالت رسم کنید.

مشخص کنید که کدامیک جبران کننده پیش‌فاز و کدامیک پس‌فاز است. جبران کننده‌های پیش‌فاز و پس‌فاز به کدام کنترل کننده‌ها شباهت دارند؟

در پیکره بندی ثابت زمانی می‌توان این تابع تبدیل را بصورت زیر نوشت:

$$G_c(s) = \left(K \frac{z_o}{p_o} \right) \frac{(s/z_o + 1)}{(s/p_o + 1)}$$

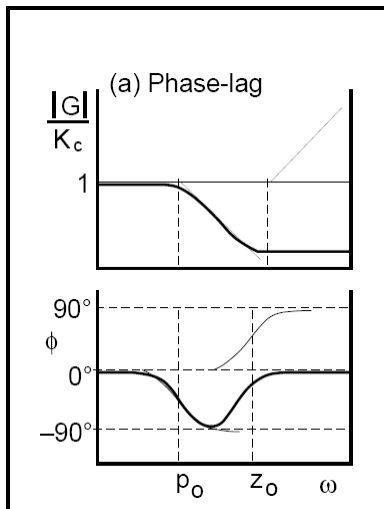
علاوه بر این می‌توان نوشت: $K_c = K z_o/p_o$ ، اما ما ترجیحاً از پیکره بندی صفر-قطب استفاده می‌کنیم. در هر دو صورت، فرکانس‌های گوشه برابر خواهد بود با z_o و p_o . برای رسم نمودار Bode، باید از جایگذاری $s = j\omega$ استفاده گردد، اما با تشخیص این که تابع تبدیل داده شده حاصلضرب یک پیش‌فاز مرتبه اول در یک تأخیر مرتبه اول است، بسادگی می‌توان $|G_c(j\omega)|$ و $\angle G_c(j\omega)$ را نوشت. بنابر این، با استفاده از مثال‌های ۸-۲ و ۸-۴ داریم:

$$|G(j\omega)| = K \sqrt{\omega^2 + z_o^2} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p_o^2}}$$

۹

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega/z_o) + \tan^{-1}(-\omega/p_o)$$

نمودار ترسیم دستی مجانب‌های فرکانس بالا و پایین به ما در جهت فهم بهتر آنچه با Matlab بدست خواهیم آورد، کمک شایانی خواهد کرد.

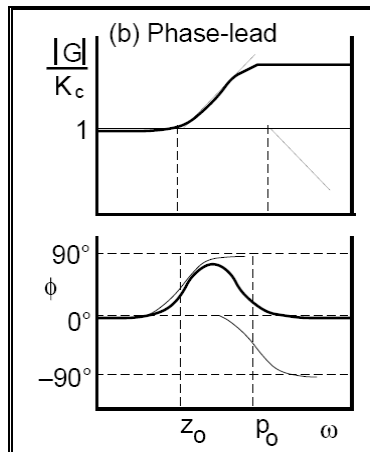


(الف) با $z_o > p_o$ ، زاویه فاز همواره منفی بوده که به آن جبران کننده پس فاز گفته می‌شود. فرمان‌های زیر را در Matlab اجرا کنید تا شکل آن را ببینید:

```
k=1;
zo=4; % Try repeat with various choices of zo and po
po=1;
G=zpk(-zo,-po,k);
bode(G);
```

شکل نمودار $|G_c(j\omega)|$ همانند شکل یک کنترل کننده PI است، با این تفاوت که حد بالایی روی مجانب فرکانس پایین دارد. می‌توان استنباط کرد که یک جبران کننده پس فاز با سیستم‌های خیلی کند پایدارتر از یک کنترل کننده PI است. نمودار ناودانی شکل $\angle G_c(j\omega)$ یک جبران کننده پس فاز کاملاً با کنترل کننده PI متفاوت است. $\angle G_c(j\omega)$ جبران کننده بجای -90° (که برای کنترل کننده PI است) با صفر شروع

می‌شود. از نقطه نظر پایداری، یک جبران کننده پس فاز بر یک کنترل کننده PI ترجیح داده می‌شود. از طرف دیگر، بدون تابع انتگرال‌گیر، جبران کننده پیش‌فاز قادر نیست افت کنترل را حذف کند.



(ب) در حالت $z_o < p_o$ ، زاویه فاز مثبت بوده و بنابر این جبران کننده پیش‌فاز است. ابتدا، نیاز داریم که نمودار آن را رسم کنیم. برای این منظور از فرمان‌های زیر استفاده می‌کنیم:

```
zo=1;
po=4;
G=zpk(-zo,-po,1);
bode(G);
```

خصوصیت جالب یک جبران کننده پیش‌فاز در مقایسه با یک کنترل کننده PD آن است که جبران کننده در فرکانس‌های بالا دارای مقدار محدودی برای اندازه است، در حالیکه یک کنترل کننده PD ایده‌آل هیچ محدودیتی برای کران بالا ندارد و به همین دلیل نویزهای ورودی را تقویت می‌کند.

مثال ۸-۱۴: طراحی جبران کننده‌های پیش‌فاز و پس‌فاز. یک حلقهٔ پسخور واحد ساده با معادلهٔ مشخصه $1 + G_c G_p = 0$ با

تابع تبدیل فرایند مرتبهٔ اول $G_p = \frac{K_p}{(\tau_p s + 1)}$ را در نظر بگیرید. ملاحظات طراحی برای استفاده از یک جبران کننده پیش‌فاز و یا

پس‌فاز را بنویسید. از نمودارهای Bode و مکان هندسی ریشه‌ها استفاده کنید.

با تعریف $K_c = K z_o / p_o$ ، تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{K_c K_p (s/z_o + 1)}{(s/p_o + 1)(\tau_p s + 1) + K_c K_p (s/z_o + 1)}$$

که با یک مرحلهٔ دیگر محاسبات، مقدار بهرهٔ حالت یکنواخت برابر است با $K_c K_p / (1 + K_c K_p)$ بدین معنی که هنگام استفاده از یک جبران کننده پیش‌فاز و یا پس‌فاز افت کنترل خواهیم داشت.

از روی چند جمله‌ای مشخصه، براحتی می‌توان حدس زد که احتمال دارد پاسخ سیستم کم میرا و یا پرمیرا (بسته به نوع طراحی کنترل کننده) باشد. اما بروش جبری بدست آوردن شرایط لازم ساده نیست. در اینجا مکان هندسی ریشه‌ها کمک شایانی می‌کند. از روی نمودار مکان فوراً می‌توان فرض کرد که مقادیر p_o و z_o (مستقل از مقادیر نسبی آنها) از مقدار $1/\tau_p$ بیشتر باشند. این یکی از روش‌هایی است که قطب‌های حلقه بسته را می‌توان از محور موهومی دور نگه داشت. (با داشتن نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، می‌توان پی برد که این سیستم همواره پایدار است.)

(الف) ابتدا یک جبران کننده پیش‌فاز را در نظر بگیرید، $z_o < p_o$. با استفاده از فرمان‌های زیر در Matlab ابتدا مکان هندسی ریشه‌ها و نمودار Bode را برای سیستمی شامل فرایند مرتبهٔ اول و جبران کننده رسم می‌کنیم:

```
Kp=1; %Arbitrary numbers for the process function
taup=1;
```



```
Gp=tf(Kp,[taup 1]);
zo=2; %Phase-lead, zo < po
po=4;
Gc=zpk(-zo,-po,1)
figure(1), bode(Gc*Gp)
figure(2), rlocus(Gc*Gp)
```

مکان هندسی ریشه‌ها شبیه یک کنترل کننده PD واقعی است. سیستم بدون قطب‌های مختلط حلقه بسته پرمیرا خواهد بود. یک شاخه مکان از «قطب PD واقعی» p_0 شروع و به سمت منفی بی‌نهایت روی محور حقیقی خواهد رفت. شاخه دیگر بین $-1/\tau_p$ و $-z_0$ واقع خواهد شد که سرعت پاسخ را کنترل خواهد کرد. انتخاب بزرگی z_0 و به تبع آن K_c ، به فرایند و سخت افزار فیزیکی موجود بستگی دارد.

در نمودار Bode، فرکانس‌های گوشه بترتیب صعودی عبارتند از: $1/\tau_p$ ، z_0 و p_0 . مجانب‌های فرکانسی برای تأخیرهای مرتبه اول در $\omega = 1/\tau_p$ و $\omega = p_0$ و برای پیش‌فاز مرتبه اول در $\omega = z_0$ همدیگر را قطع خواهند کرد. مقدار تأخیر فاز در فرکانس‌های بالا برابر 90° است. سیستم همواره پایدار است همانطور که با استفاده از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها هم توضیح دادیم.

(ب) برای یک جبران کننده پس‌فاز، $z_0 > p_0$ ، فرمان‌های زیر را برای رسم نمودارها استفاده کنید:

```
%Gp remains the same as in part (a)
zo=4;
po=2;
Gc=zpk(-zo,-po,1)
figure(1), bode(Gc*Gp)
figure(2), rlocus(Gc*Gp)
```

شکل مکان هندسی ریشه‌ها همانند یک کنترل کننده PI است با این تفاوت که قطب حلقه باز در مبدأ وجود ندارد. شاخه‌های مکان پس از رسیدن به هم، از هم جدا شده و تشکیل یک دایره می‌دهند که در سمت چپ صفر حلقه باز $-z_0$ به هم می‌رسند. یک شاخه به بی‌نهایت روی محور حقیقی و دیگری به سمت $-z_0$ خواهد رفت. می‌توان کنترل کننده را مشابه آنچه در مثال ۷-۷ گفته شد طراحی نمود.

در نمودار Bode، فرکانس‌های گوشه بترتیب صعودی عبارتند از: $1/\tau_p$ ، p_0 و z_0 . مجانب‌های فرکانسی برای تأخیرهای مرتبه اول در $\omega = 1/\tau_p$ و $\omega = p_0$ و برای پیش‌فاز مرتبه اول در $\omega = z_0$ همدیگر را قطع خواهند کرد. بیشترین تأخیر فاز سیستم از 90° (درست بعد از $\omega = p_0$) بیشتر است اما همچنان از 180° کمتر است. این سیستم هم همواره پایدار است.

۴-۸ طراحی کنترل کننده

مفهوم حاشیه فاز و بهره که از معیار نایکوئیست بدست می‌آید، یک معیار عمومی پایداری نسبی به ما خواهد داد. همه ابزارهای گرافیکی نظیر نمودارهای Bode، نایکوئیست و نیکولز می‌توانند بمنظور اطمینان از پایداری سیستم مورد استفاده قرار گیرند. بمانند مکان هندسی ریشه‌ها، در اینجا هم فقط یک پارامتر در آن واحد می‌تواند تغییر کند که برای این منظور از بهره تناسبی استفاده می‌گردد.

۴-۸-۱: چگونه بدون حدس و خطا بهره تناسبی را محاسبه کنیم؟

در هنگام استفاده از نمودار Bode و یا نایکوئیست، این یک سوال اساسی است. فرض کنید یک سیستم حلقه بسته داریم که «تمام» اطلاعات آن بجز بهره تناسبی مشخص است (شکل ۸-۵) و معادله مشخصه حلقه بسته بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$1 + G_{OL} = 1 + K_c G^* = 0$$

که در آن $G_{OL} = G_c G_a G_p G_m$ که بصورت $K_c G^*$ هم نمایش داده شده است تا نشان دهد که هدف بدست آوردن K_c است. G^* همانطور که در مبحث مکان هندسی ریشه‌ها هم گفته شد، چیزی فراتر از حاصلضرب ساده $G_a G_p G_m$ است؛ علاوه بر توابع تبدیل



مذکور، G^* شامل تمامی جملات دیگر کنترل کننده بجز بهره تناسبی (مثلا در کنترل کننده PID شامل جملات انتگرالی و مشتقی) هم می‌باشد. براحتی می‌توان دید که G^* همان G_{OL} است وقتی $K_c = 1$ در نظر گرفته شود. با تعاریف و توضیحات صریح در کتاب‌های مرجع، تئوری‌های حاشیه فاز و حاشیه بهره سیستم حلقه بسته، فقط به نمودارهای اندازه و زاویه فاز «کل تابع تبدیل حلقه باز»، $|G_{OL}|$ و $\angle G_{OL}$ ، قابل اعمال است. این بدان معنی است که دانستن بهره تناسبی، K_c ، الزامی است. البته این مقدار هنگام طراحی مشخص نیست و بنظر می‌رسد که برای طراحی به عملیات حدس و خطا نیاز باشد. سوال مهم آن است که آیا امکان محاسبه K_c بدون حدس و خطا وجود دارد. پاسخ آن مثبت است. سوال بعدی آنست که آیا مقدار K_c را می‌توان از نمودارهای $|G^*|$ و $\angle G^*$ هم بدست آورد. پاسخ این سوال هم مثبت است. روند زیر جزئیات را توضیح می‌دهد. از تعریف حاشیه بهره داریم:

$$GM = \frac{1}{|G_{OL}(j\omega_{cg})|} \rightarrow GM = \frac{1}{K_c |G^*(j\omega_{cg})|} \quad (23-8)$$

که مقادیر اندازه در فرکانس گذر بهره ω_{cg} جایی که $\angle G^*(j\omega_{cg}) = -180^\circ$ است، بدست می‌آیند. مقدار $|G^*(j\omega_{cg})|$ بسادگی با استفاده از نمودار Bode تابع G^* بدست می‌آید. نکته کلیدی آن است که چون زاویه فاز K_c صفر است، $\angle G^*$ دقیقا برابر $\angle G_{OL}$ بوده و لذا هر دو نمودار $|G_{OL}|$ و $|G^*|$ دارای ω_{cg} برابری هستند. با استفاده از تعریف حاشیه بهره، در مرز ناپایداری $GM = 1$ است. بنابر این، با $GM = 1$ در معادله (23-8)، مقدار $K_{c,u} = \sqrt{|G^*(j\omega_{cg})|}$ محاسبه خواهد شد. سپس، معادله (23-8) بفرم زیر نوشته می‌شود:

$$GM = \frac{K_{c,u}}{K_c} \rightarrow K_c = \frac{K_{c,u}}{GM} \quad (24-8)$$

بمحض دانستن $K_{c,u}$ ، با داشتن GM در مسئله، می‌توان بسادگی K_c را محاسبه نمود. معمولا، مقدار GM برای محاسبه بهره تناسبی ۱٫۷ در نظر گرفته می‌شود.

همچنین برای محاسبات حاشیه فاز می‌توان از نمودار Bode تابع G^* استفاده نمود. بر مبنای تعاریف در کتب مرجع، فرض بر این است که زاویه فاز $\angle G_{OL} = \phi$ را باید در جایی که $|G_{OL}| = 1$ است، بدست آورد. اگر حاشیه فاز 45° مد نظر باشد، ϕ باید -135° باشد. به نظر می‌رسد که برای محاسبه $|G_{OL}|$ باید مقدار K_c معلوم باشد، اما در عمل این طور نیست.

از آنجا که $\angle G^*$ با $\angle G_{OL}$ برابر است، مقدار ω_{cp} برای هر دو نمودار یکی بوده و لذا می‌توان بصورت معکوس عمل کرد. در نمودار Bode تابع G^* ، مقدار $|G^*(j\omega_{cp})|$ را که متناظر زاویه فاز -135° است را بیابید. با داشتن $|G_{OL}| = K_c |G^*|$ و این موضوع که باید در حاشیه فاز $|G_{OL}| = 1$ باشد، مقدار بهره تناسبی برای حاشیه فاز 45° ، بدون حدس و خطا، برابر خواهد بود با $K_c = \sqrt{|G^*(j\omega_{cp})|}$.

چگونه می‌توان جواب را امتحان کرد؟ کافیت که K_c بدست آمده در G_{OL} قرار داده شود و نمودار Bode تابع G_{OL} بدست آید که با Matlab این کار به آسانی مقدور است. اکنون، آماده هستیم تا چند مثال را حل کنیم. حتما آنها را در محیط Matlab امتحان کنید تا صحت جواب‌ها را درک کنید.

مثال ۲-۷ ج: مثال ۲-۷ را با معادله مشخصه حلقه بسته

$$1 + K_c \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

در نظر بگیرید. اگر هدف طراحی یک کنترل کننده PI باشد، چگونه می‌توان از روش‌های پاسخ فرکانسی استفاده کرد؟ فرض کنید که واحد ثابت زمانی‌ها دقیقه است.

اولین قدم پیدا کردن بهره نهایی است. با تابع تبدیل مرتبه سوم داده شده، فرمان‌های زیر در Matlab استفاده خواهند شد:

```
p=poly([-1 -2 -3]);
```



```
G=tf(1,p);
margin(G);
```

جواب Matlab برای $K_{c,u}$ بصورت 35.6 dB (در $\omega_{cg} = 3.3 \text{ rad/min}$) خواهد بود که برابر است با 60 ($10^{35.6/20}$).

توجه داشته باشید که مجانب فرکانس پایین نمودار اندازه ۱ نیست. چرا؟ بدلیل آنکه تابع تبدیل در پیکره بندی ثابت زمانی نیست. اگر فاکتور گیری‌های لازم انجام گیرد، مجانب فرکانس پایین برابر $1/6$ (-15.6 dB) خواهد بود.

اگر مقدار حاشیه بهره مورد نظر 17 باشد، بهره کنترل کننده با استفاده از معادله $(24-8)$ برابر خواهد بود با $K_c = 60/17 = 3.53$. این در حالتی است که کنترل کننده مورد استفاده همانند مثال ۶-۲ تناسبی باشد. با استفاده از مقدار بهره تناسبی کنترل کننده $K_c = 3.53$ نمودار Bode را مجدداً ترسیم می‌نماییم:

```
G=tf(35.3,p);
margin(G);
```

با این داده‌ها مقدار حاشیه بهره دقیقاً برابر 17 ($20 \log 17 = 4.6 \text{ dB}$) است. حاشیه فاز برابر 18.8° خواهد بود که بر اساس قواعد سر انگشتی داده شده کمی پایین است.

برای کنترل کننده PI راه‌های مختلفی برای یافتن ثابت زمانی انتگرال مناسب وجود دارد. با استفاده از پاسخ فرکانسی، ابزار لازم برای استفاده از روش بهره نهایی زیگلر-نیکولز در دسترس است. با مقادیر $K_{c,u} = 60$ و $\omega_{cg} = 3.3 \text{ rad/min}$ و استفاده از روابط تنظیم در فصل ۶، چنانچه کنترل کننده تناسبی باشد، $K_c = 30$ و برای تناسبی-انتگرالی، $K_c = 27.3$ و $\tau_I = 1.58 \text{ min}$ بدست خواهد آمد.

با تنظیم پارامترهای کنترل کننده بروش زیگلر-نیکولز، نمودار Bode را مجدداً برای کنترل کننده تناسبی رسم می‌کنیم:

```
G=tf(30,p);
margin(G);
```

مقدار حاشیه بهره دقیقاً برابر 2 (6 dB) و حاشیه فاز برابر 25.4° خواهد بود که کمی محافظه کارانه‌تر از نتایج حاصل برای حاشیه بهره 17 است. برای کنترل کننده PI:

```
kc=27.3; tau=1.58;
Gc=tf(kc*[tau 1],[tau 0]);
G=tf(1,p); %p was defined at the beginning of this example
margin(Gc*G);
```

حاشیه بهره حاصل برابر 17.47 (3.34 dB) و حاشیه فاز 12.3° است. هر دو حاشیه کوچک هستند. با استفاده از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها و $\text{rlocfind}()$ در Matlab، قطب‌های حلقه بسته را خیلی نزدیک محور موهومی خواهیم دید.

از اینجا به بعد چه باید کرد؟ این طراحی را قبول کنیم و بگذریم و یا حاشیه‌ها را افزایش دهیم. از Matlab برای شبیه سازی پاسخ حوزه زمان حلقه بسته استفاده می‌کنیم و نمودار منحنی پاسخ کم میرای سیستم را رسم کرده و اثرات روی نسبت فروکش موثر و دیگر مقادیر نظیر درصد فرارفت را بصورت عددی تخمین می‌زنیم. اگر پاسخ حوزه زمان خصوصیات لازم مورد نظر ما را نداشت، مجبوریم که مقادیر K_c و τ_I را مجدداً تنظیم کنیم.

اگر هدف افزایش حاشیه باشد، ممکن است با کاهش K_c و یا افزایش τ_I این امر محقق گردد. یک امکان، قرار دادن $\tau_I = 1.58 \text{ min}$ و تکرار محاسبات نمودار Bode برای یافتن K_c جدیدی است که حاشیه بهره لازم، مثلاً 2 (6 dB)، را فراهم کند همانطور که کنترل کننده تناسبی این کار را انجام داد. برای انجام آن ابتدا باید بهره نهایی جدید با استفاده از کنترل کننده PI بدست آید:

```
kc=1; tau=1.58;
Gc=tf(kc*[tau 1],[tau 0]);
margin(Gc*G); %G remains as above
```

Matlab باید مقدار $K_{c,u} = 40.2$ (32.1 dB) را برگرداند. بنابر این با جایگذاری در معادله $(24-8)$ مقدار $K_c = 40.2/2 = 20.1$ برای حاشیه بهره 2 بدست خواهد آمد. با چک مجدد این مقادیر در Matlab ($\tau_I = 1.58$)، مقدار حاشیه فاز برابر 23° خواهد بود - کمی پایین اما قابل قبول. پس از این مرحله با بدست آوردن پاسخ حوزه زمان محاسبات ادامه می‌یابد.

این روش برای کنترل کننده PID هم قابل اعمال است. طراحی کنترل کننده عملیاتی کاملاً مرحله به مرحله است. کامپیوتر فقط یک ابزار است، آنچه باید انجام شود را ما باید بدانیم.



مثال ۷-۲: در مثال قبل با یک کنترل کننده تناسبی، طراحی با حاشیه بهره ۱٫۷ سیستمی با حاشیه فاز کوچک را بوجود آورد. بهره تناسبی چقدر باشد تا حاشیه فاز حداقل 45° باشد؟

با توضیحاتی که بعد از معادله (۲۴-۸) داده شد، باید $\angle G(j\omega) = \angle [(j\omega+3)(j\omega+2)(j\omega+1)]^{-1}$ را بدست آورد. البته با استفاده از `bode()` در Matlab داریم:

```
p=poly([-1 -2 -3]);
G=tf(1,p);
[mag,phase,w]=bode(G);
mag=mag(1,:); % MATLAB v5 returns a 3-D array 1
phase=phase(1,:);
tmp=[w';mag;phase]' % Be careful with the primes here
```

با نگاهی به ماتریس tmp (سطر اول: فرکانس، سطر دوم: اندازه و سطر سوم: زاویه فاز) در می‌یابیم که در $\omega = 1.74 \text{ rad/min}$ ، $|G| = 0.054$ و $\angle G = -131.4^\circ$ که حاشیه فاز 48.6° را بوجود می‌آورد. همچنین در $\omega = 2.21 \text{ rad/min}$ ، $|G| = 0.037$ و $\angle G = -15^\circ$ که حاشیه فاز را 3° می‌دهد. (برای بدست آوردن حاشیه فاز دقیقاً برابر 45° باید میان یابی شود).

برای داشتن حاشیه فاز 48.6° ، باید از بهره تناسبی $K_c = 1/0.054 = 18.5$ استفاده شود. با این مقدار بهره تناسبی نمودار Bode را در Matlab رسم می‌کنیم:

```
G=tf(18.5,p);
margin(G);
```

نتایج بدست آمده حاشیه فاز 48.6° را تأیید می‌کند در حالی که حاشیه بهره برابر 3.2 (10.2 dB) است که از حاشیه بهره 1.7 کمی محافظه کارانه‌تر است. با انتخاب $K_c = 1/0.037 = 26.96$ ، محاسبات، حاشیه فاز 3° را تأیید کرده اما حاشیه بهره 2.2 خواهد بود.

مثال ۷-۴ الف: در اینجا مثال ۷-۴، که یک سیستمی با تأخیر زمانی است، را مرور می‌کنیم. هدف طراحی یک کنترل کننده PI است. معادله مشخصه حلقه بسته با یک کنترل کننده تناسبی بصورت زیر است (مجدداً فرض می‌شود که واحد زمان دقیقه است):

$$1 + K_c \frac{0.18e^{-2s}}{5s+1}$$

قدم اول محاسبه بهره نهایی است. در اطلاعات بدست آمده از مثال ۸-۶ کافی است که تأخیر فاز اضافه شده توسط تابع تأخیر زمانی اعمال گردد:

```
G=tf(0.8,[5 1]);
tdead=2;
[Mag,Phase,freq]=bode(G);
Mag=Mag(1,:);
Phase=Phase(1,:) - ((180/pi)*tdead*freq);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(Mag,Phase,freq)
```

در $\omega_{cg} = 0.893 \text{ rad/min}$ ، مقدار $K_{c,u} = 5.72$ بدست خواهد آمد که دقیقاً برابر مقداری است که در مثال ۷-۴ با محاسبات بیشتری بدست آمده بود. اگر حاشیه بهره 1.7 در نظر باشد، مقدار بهره تناسبی باید برابر $K_c = 5.72/1.7 = 3.36$ انتخاب گردد. فرمان زیر:

```
G=tf(3.36*0.8,[5 1]);
```

با تکرار محاسبات مقدار حاشیه فاز را 54.6° خواهد داد که خیلی زیاد است.

با استفاده از روابط تنظیم زیگلر-نیکولز با مقادیر $K_{c,u} = 5.72$ و $\omega_{cg} = 0.893 \text{ rad/min}$ داریم: کنترل کننده تناسبی باید با $K_c = 2.87$ استفاده شده و برای کنترل کننده PI مقادیر پارامترهای کنترل کننده برابر خواهند بود با: $K_c = 2.61$ و $\tau_I = 5.85 \text{ min}$. بدست آوردن حاشیه فاز و حاشیه بهره تنظیم‌های داده شده بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۷-۵: نهایتاً مسئله اختلاط رنگ را که در مثال ۷-۵ ج‌ها کردیم را جمع بندی می‌کنیم.

(الف) اگر آشکار ساز نوری به فاصله زیادی در پایین دست جریان نصب گردد سیستم کنترل را ناپایدار خواهد کرد. برای کاهش محاسبات، به مسئله بصورت ساده شده نگاهی می‌اندازیم و از کنترل کننده تناسبی استفاده می‌کنیم. از آنجا که شیر کنترل بسیار



سریعتر از فرایند اختلاط است، فقط یک تأخیر مرتبه اول اختلاط در بدست آوردن معادله مشخصه تقریبی حلقه بسته استفاده خواهد شد:

$$1 + \frac{K_c K_v K_p K_m e^{-t_d s}}{\tau_p s + 1} = 0$$

مجدداً برای اهداف بصری، فرض می‌کنیم که K_c طوری انتخاب گردیده است که $K_c K_v K_p K_m = 5$. ثابت زمانی فرایند اختلاط است. حد اکثر فاصله L آشکار ساز نوری از محل اختلاط را بدون استفاده از روش‌های حدس و خطا طوری بیابید که سیستم پایدار بماند. (دو راه برای پیدا کردن جواب وجود دارد: استفاده از فرمول‌های اندازه و زاویه فاز و یا استفاده از معیار نایکوئیست که روشی صریح‌تری بوده و اشتباهات محاسباتی کمتری هم دارد.)

(ب) برای داشتن یک حاشیه ایمنی، آشکارساز نوری در نصف فاصله‌ای که در قسمت (الف) محاسبه شد، نصب می‌گردد. با فرضیات قسمت (الف) و با همان کنترل کننده تناسبی، حاشیه بهره چقدر خواهد بود؟

(ج) حالا که برای آشکارساز نوری محل مناسبی پیدا شده است، دینامیک شیر کنترل را هم در تحلیل حلقه بسته وارد می‌کنیم. بهره تناسبی بحرانی وقتی که برای شیر کنترل یک تأخیر مرتبه اول در نظر گرفته شود، چقدر است؟ بهره تناسبی برای داشتن حاشیه بهره ۱٫۷ را بدست آورید.

(د) سرانجام به طراحی کنترل کننده می‌رسیم. می‌دانیم که مشتری‌ها در مورد رنگ لباس بسیار ایراد می‌گیرند. البته، می‌خواهیم از دور ریختن رنگ‌های غیر قابل استفاده هم اجتناب کنیم. علی‌رغم تمام این نگرانی‌ها، یک مهندس کهنه کار گفته است: از آنجا که تانک رنگ بسیار بزرگی در پایین دست جریان قرار دارد، فرارفت ۲۰ تا ۲۵ درصد برای سیستم کنترل طراحی شده قابل قبول خواهد بود بشرط آنکه زمان نشست «سریعی» داشته باشد. لذا نوع کنترل کننده، مشخصات عملکرد، و بهره‌های کنترل کننده را انتخاب کنید. طراحی نهایی خود را با شبیه‌سازی حوزه زمان و تحلیل پاسخ فرکانسی، بمنظور اطمینان از مناسب بودن کنترل کننده، مجدداً تست کنید.

(الف) اگر $G_{OL} = G_c G_v G_p G_m$ ، با استفاده از مثال ۵-۷:

$$|G_{OL}| = \left| \frac{5}{\tau_p s + 1} \right| e^{-t_d s} \quad , \quad \angle G_{OL} = \tan^{-1}(-\omega \tau_p) - t_d \omega$$

که مقدار $\tau_p = 4$ است. در فرکانس گذر بهره، ω_{cg} ، $\angle G_{OL} = -18^\circ$ و $GM = 1$ بدین معنی که $|G_{OL}| = 1$ (مقدار اندازه برای تابع تأخیر زمانی برابر یک است)، لذا:

$$1 = \frac{5}{\sqrt{1 + 4^2 \omega_{cg}^2}} \rightarrow \omega_{cg} = 1,12 \text{ s}^{-1}$$

با دانستن فرکانس گذر بهره و با استفاده از معادله زاویه فاز، مقدار تأخیر زمانی بحرانی بدست خواهد آمد:

$$-18^\circ = \tan^{-1}(-4 \times 1,12) - t_d (1,12) \left(\frac{180}{\pi} \right) \rightarrow t_d = 1,45 \text{ s}$$

به ضریب تبدیل واحد زاویه در معادله فاز دقت کنید. با مقدار انتخابی برای بهره تناسبی که $K_c K_v K_p K_m = 5$ ، مقدار تأخیر زمانی ۱٫۴۵ s منجر به $GM = 1$ خواهد شد.

(ب) به مثال ۵-۷ برمی‌گردیم. سرعت متوسط سیال 400 cm/s است، پس حداکثر فاصله آشکارساز نوری از فرایند اختلاط برابر است با $580 \text{ cm} = (400)(1,45)$. کاهش این طول به نصف به این معنی است که آشکارساز باید در فاصله $580/2 = 290 \text{ cm}$ نصب گردد که تأخیر انتقالی آن برابر $1,45/2 = 0,725 \text{ s}$ خواهد بود.

برای بدست آوردن حاشیه بهره جدید، به عملیات محاسباتی معکوس نیازمندیم. ابتدا با استفاده از معادله $\angle G_{OL}$ مقدار فرکانس گذر بهره ω_{cg} را بدست می‌آوریم. سپس با پیدا کردن مقدار جدید $|G_{OL}|$ ، مقدار حاشیه بهره جدید برابر با $|G_{OL}|$ خواهد بود. هر چند با داشتن مقادیر τ_p ، t_d و $K_c K_v K_p K_m$ ، می‌توان از Matlab هم بدین منظور بهره گرفت. فرمان‌های لازم بقرار زیر است:

```
k=5;
tdead=0.725;
taup=4; %The large time constant; dominant pole is at 1/4
G=tf(k, [taup 1]);
```



```
freq=logspace(-1,1)';
[Mag,Phase]=bode(G,freq);
Mag=Mag(1,:);
Phase=Phase(1,:) - ((180/pi)*tdead*freq');
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(Mag,Phase,freq)
```

مقدار حاشیه بهره جدید برابر ۱٫۸۶ خواهد بود.

(ج) با در نظر گرفتن دینامیک شیر کنترل و استفاده از کنترل کننده تناسبی، معادله مشخصه حلقه بسته را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$1 + K_c \left(\frac{0.8}{0.2s+1} \right) \left(\frac{0.6}{4s+1} \right) 2.6 e^{-0.725s} = 0$$

فرمان‌های Matlab بقرار زیر است:

```
k=0.8*0.6*2.6;
G=tf(k, conv([0.2 1],[4 1]));
[Mag,Phase]=bode(G,freq);
Mag=Mag(1,:);
Phase=Phase(1,:) - ((180/pi)*tdead*freq');
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(Mag,Phase,freq)
```

مقدار بهره نهایی برابر $K_{c,u} = 6.42$ در فرکانس گذر بهره $\omega_{cg} = 1.86 s^{-1}$ است. برای داشتن حاشیه بهره ۱٫۷ مقدار بهره تناسبی کنترل کننده باید برابر $K_c = 6.42/1.7 = 3.77$ انتخاب گردد.

(د) با $K_{c,u} = 6.42$ و $\omega_{cg} = 1.86 s^{-1}$ و با استفاده از روابط تنظیم بهره نهایی زیگلر-نیکولز، برای سناریوهای مختلف داریم (جدول روبرو):

τ_D	τ_I	K_c	
۰٫۴۲	۱٫۷	۳٫۸	نسبت فروکش یک‌چهارم
۱٫۱	۱٫۷	۲٫۱	فرارفت کم
۱٫۱	۱٫۷	۱٫۳	بدون فرارفت

با تکرار شبیه‌سازی همانند مثال ۵-۷ ج، در خواهیم یافت که این تنظیم‌ها منجر به ۵۱٪ فرارفت برای نسبت فروکش یک‌چهارم (حدود ۰٫۲۶ برای ضریب میرایی)، ۲۷٪ فرارفت برای سناریوی فرارفت کم، و ۸٪ فرارفت برای سناریویی که باید داری فرارفت نباشد، خواهد گردید.

سخن آخر اینکه روشی منحصر بفرد برای طراحی نهایی وجود ندارد. مسئله آزادی عمل زیادی به ما داده است. بخصوص وقتی که از زاویه شبیه‌سازی پاسخ به آن نگریسته شود، چرا که تنظیم‌های مختلفی از کنترل کننده می‌توانند منجر به نتایج تقریباً مشابهی برای پاسخ حوزه زمان گردند. در مهندسی فرایند، ما در بسیاری از موارد مجبور نیستیم که در مورد مشخصات دقیق پاسخ و به تبع آن تنظیم دقیق کنترل کننده باریک بین باشیم. بسیاری از سیستم‌ها در عمل، در محدوده مشخصات پاسخ، عملکرد قابل قبولی دارند. علاوه بر این به دلیل آنکه پس از تمامی مراحل تئوری، تنظیم کنترل کننده باید در محل هم انجام گیرد، همه مواردی که ممکن است طی عملیات طراحی از قلم افتاده باشد (از شناسایی غیر دقیق فرایند تا تغییر به شرایط غیر خطی)، به حساب آورده خواهند شد. برای مسئله حاضر، و بر مبنای اطلاعاتی که از روش‌های مختلف بدست آورده‌ایم، ممکن است برای ثوابت زمانی انتگرال و مشتق، مقادیر $\tau_D = 0.5 s$ و $\tau_I = 3 s$ انتخاب گردند. قدم بعدی تنظیم بهره تناسبی برای رسیدن به پاسخ مناسب است. اکنون معادله مشخصه سیستم با کنترل کننده PID بقرار زیر خواهد بود:

$$1 + K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \frac{1.248}{(0.2s+1)(4s+1)} e^{-0.725s} = 0$$

ابتدا لازم است که بهره نهایی بدست آید:

```
taui=3;
taud=0.5;
gc=tf([taui*taud (taui+taud) 1],[taui 0]); %ideal PID without the Kc
tdead=0.725;
k=0.8*0.6*2.6;
G=tf(k, conv([0.2 1],[4 1]));
[Mag,Phase]=bode(gc*G,freq);
Mag=Mag(1,:);
Phase=Phase(1,:) - ((180/pi)*tdead*freq');
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(Mag,Phase,freq)
```



مقدار بهره نهایی برابر $K_{c,u} = 5,87$ خواهد بود. برای داشتن حاشیه بهره $1,7$ ، بهره تناسبی کنترل کننده برابر $K_c = 5,87/1,7 = 3,45$ باید انتخاب گردد. شبیه‌سازی پاسخ زمانی نشان می‌دهد که با اعمال تغییری پله‌ای واحد در مقدار مقرر، مقدار فرارفت 23% خواهد بود. این تنظیم اندکی از تنظیمی که توسط روش ITAE با $\tau_I = 3\text{ s}$ و $\tau_D = 0,3\text{ s}$ ، کمتر نوسانی است (مثال ۷-۵ الف). در این حالت، $K_{c,u} = 6,79$ و $K_c = 4$ است که به تنظیم زیگلر-نیکولز بسیار نزدیکتر است. تأیید نتایج به خواننده واگذار می‌گردد.

۸-۴-۲ سخن آخر: آیا روش‌های پاسخ فرکانسی می‌توانند جایگزین مکان هندسی ریشه‌ها شوند؟

نه. این روش‌ها مکمل هم هستند. اغلب اوقات تصمیم طراحی نهایی بعد از تحلیل هر دو روش انجام می‌گیرد. مکان هندسی ریشه‌ها اشارات خوبی بر پاسخ گذرای یک سیستم دارد و اثر تغییر بهره تناسبی کنترل کننده را بررسی می‌کند. هر چند، برای تحلیل به مدلی نسبتاً دقیق نیاز است مضاف بر اینکه مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های دارای تأخیر زمانی قابل اعمال نیست.

روش‌های پاسخ فرکانسی پایداری نسبی (حاشیه‌های بهره و فاز) را مشخص می‌نمایند. بعلاوه اینکه نمودار Bode را می‌توان هم با ورودی سینوسی و هم با ورودی ضربه بوجود آورد؛ طراحی متعاقباً نیاز به مدل (تئوری) ندارد. اگر مدلی موجود باشد، داده‌ها می‌توانند برای ارزیابی مدل استفاده شوند. سیستم‌هایی که بیش از یک فرکانس گذر بهره در نمودار Bode دارند (اندازه و زاویه فاز بصورت اکیدا صعودی و یا اکیدا نزولی نیستند)، با استفاده از فقط نمودار Bode قابل تحلیل و ارزیابی نیستند.



-
- ¹ Frequency response
 - ² Mapping
 - ³ Magnitude
 - ⁴ Phase angle
 - ⁵ Argument
 - ⁶ Amplited ratio
 - ⁷ Magnitude ratio
 - ⁸ Polar plot
 - ⁹ Nyquist plot
 - ¹⁰ Nichols chart
 - ¹¹ asymptote
 - ¹² Corner frequency
 - ¹³ Band-width
 - ¹⁴ Low-pass filter
 - ¹⁵ Resonant frequency
 - ¹⁶ Non-minimum phase
 - ¹⁷ Minimum phase
 - ¹⁸ Gain and Phase Margins
 - ¹⁹ Gain cross-over frequency
 - ²⁰ Phase cross-over frequency
 - ²¹ Phase-Lead compensator
 - ²² Phase-Lag compensator