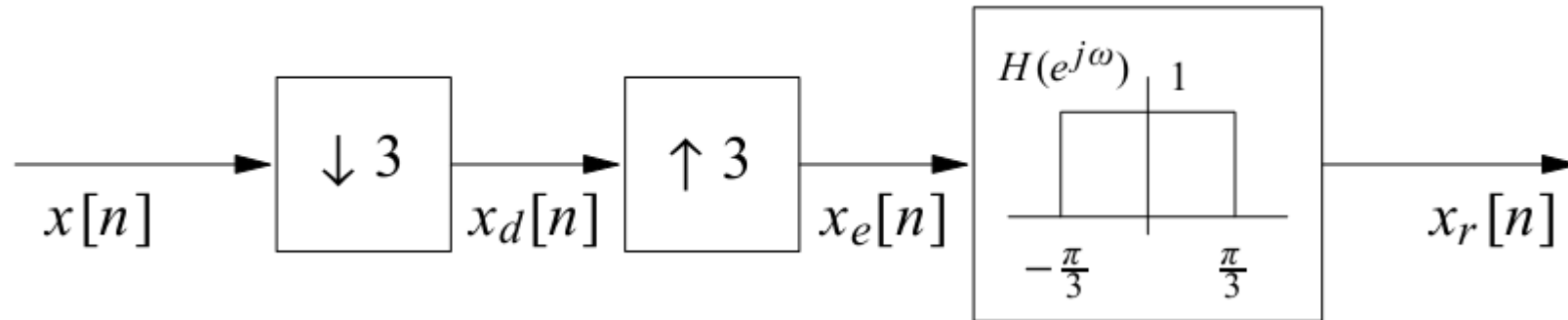


Signals & Systems

By: M. Shahraki



University of
Sistan and Baluchestan

University of Sistan & Baluchestan
Faculty of Electrical and Computer Engineering
Department of Electrical & Electronics Engineering

Z Transform

تبدیل Z

$$x[n] = z^n$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k}h[k] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k}h[k]$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].z^{-k}$$

$$y[n] = H(z)z^n$$

$H(z)$ مقدار ویژه تابع z^n است



Z Transform

تبدیل Z و ارتباط آن با تبدیل فوریه

$$x[n] = z^n$$

$$y[n] = H(z)z^n$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].z^{-k}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

$$z = e^{j\omega}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\omega n}$$

$$X(j\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$z = re^{j\omega}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n].r^{-n})e^{-j\omega n} = F(x[n]r^{-n})$$



Z Transform

تبدیل Z و ارتباط آن با تبدیل فوریه

$$F(x[n]r^{-n}) = Z(x[n]) \Big|_{|z|=r}$$

$$F(x[n]2^{-n}) = Z(x[n]) \Big|_{|z|=2}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z)$$

$$a^{-n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(Z) \Big|_{Z=ae^{j\omega}}$$



Z Transform

تبدیل Z و ارتباط آن با تبدیل فوریه

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad |a| < 1$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n .z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$z = re^{j\omega} \quad X(re^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n .(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n .e^{-j\omega n} \quad \begin{matrix} n > 0 \\ r > |a| \end{matrix} \quad \text{مطلقاً جمع پذیر}$$

شرط وجود تبدیل Z $r > |a| \quad |z| > |a|$



تبدیل Z معکوس

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} X(z) z^{n-1} dz$$

با شرط آنکه r در ناحیه همگرایی باشد.

برای تبدیل های گویا از قوانین تبدیل Z کمک می گیریم



تبدیل Z و ناحیه همگرایی

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \underbrace{|z| > |a|}$$

ناحیه همگرایی ROC

$z = e^{j\omega}$ تبدیل Z معادل تبدیل فوریه می شود.
اگر ROC شامل دایره به شعاع واحد شود تبدیل فوریه وجود دارد.

$|a| > 1$ تبدیل Z وجود دارد (در ROC)

اما تبدیل فوریه وجود ندارد



Z Transform

تبدیل Z و ارتباط آن با تبدیل فوریه

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n .z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -(az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} -(az^{-1})^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$z = re^{j\omega} \quad X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n .(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{a}{r}\right)^n .e^{-j\omega n} \quad \begin{array}{l} n < 0 \\ r < |a| \end{array} \quad \text{مطلقاً جمع پذیر}$$

شرط وجود تبدیل Z $r < |a|$ $|z| < |a|$



Z Transform

تبدیل Z و ناحیه همگرایی

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = -a^n u[-n - 1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

در تعیین تبدیل Z باید حتماً ROC مشخص شود.



Z Transform

تبدیل Z و ناحیه همگرایی

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

ناحیه همگرایی اشتراک ROC دو جمله است.

$$X(z) = \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$



Z Transform

تبدیل Z و ناحیه همگرایی

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}n} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}n} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} \right) \quad |z| > \frac{1}{3}$$



Z Transform

تبدیل Z و ناحیه همگرایی

$$x[n] = \delta[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n].z^{-n} = 1$$

ناحیه همگرایی تمام صفحه مختلط است



Z Transform

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$|z| > |a|$$

$$|z| < |a|$$

۱- ناحیه همگرایی در صفحه z از حلقه هایی به مرکز مبدا تشکیل شده است.

$$|a| < |z| < |b|$$

۲- ناحیه همگرایی تبدیل Z گویا هیچ قطبی را شامل نمی شود.

۳- اگر $x[n]$ عمر محدود داشته و مطلقاً جمع پذیر باشد، ناحیه همگرایی کل صفحه z است بجز احتمالاً $|z|=0$ و $|z| \rightarrow \infty$



Z Transform

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$x[n] = \delta[n] \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n].z^{-n} = 1$$

ناحیه همگرایی
تمام صفحه مختلط است
از جمله $z=0$ و $z=\infty$

$$x[n] = \delta[n - n_0] \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0].z^{-n} = z^{-n_0}$$

ناحیه همگرایی
تمام صفحه مختلط است
به جز $z=0$

$$x[n] = \delta[n + n_0] \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n + n_0].z^{-n} = z^{n_0}$$

ناحیه همگرایی
تمام صفحه مختلط است
به جز $z=\infty$

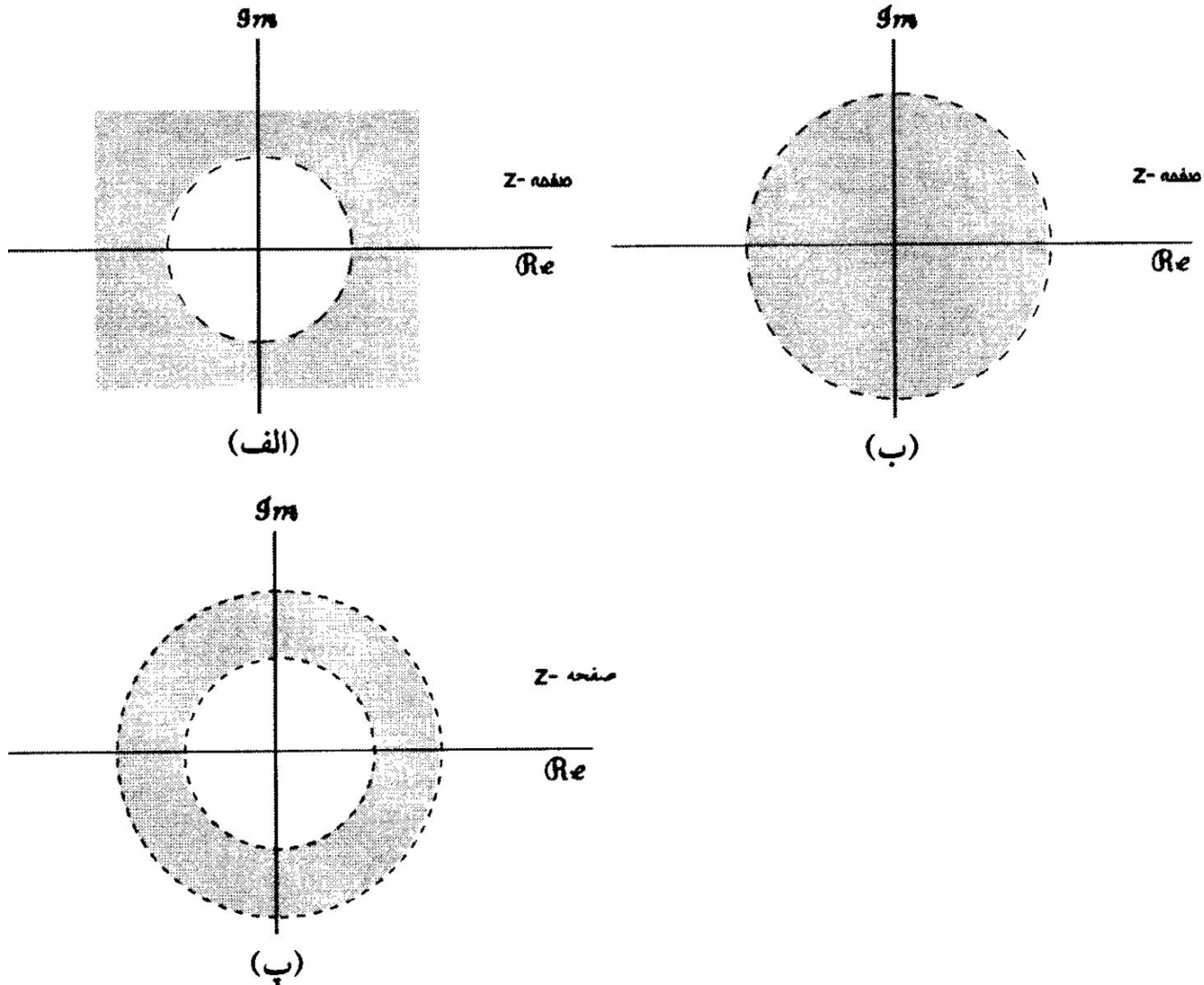


خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

- ۴- اگر $x[n]$ دست راستی باشد، ناحیه همگرایی خارج از یک دایره خواهد بود (بجز احتمالاً ∞).
 اگر خط $|z|=r_0$ در ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر z با $\infty > |z| > r_0$ در ROC هستند
- ۵- اگر $x[n]$ دست چپی باشد، ناحیه همگرایی درون یک دایره خواهد بود (بجز احتمالاً 0).
 اگر خط $|z|=r_0$ در ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر z با $0 < |z| < r_0$ در ROC هستند
- ۶- اگر $x[n]$ دوطرفه باشد، ناحیه همگرایی نیز دوطرفه است.
 اگر خط $|z|=r_0$ در ROC باشد، آنگاه ROC حلقه ای شامل r_0 است.



Z Transform



خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z



Z Transform

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \quad a > 0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n .z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (a.z^{-1})^n = \frac{1 - (a.z^{-1})^N}{1 - a.z^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a} \quad z=a \text{ قطب نیست!}$$

ناحیه همگرایی تمام صفحه مختلط است به جز $z=0$



خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

۷- اگر تبدیل Z تابع $x[n]$ گویا باشد، ROC آن یا به قطب محدود می شود، یا بینهایت هیچ یک از قطبهای $X(z)$ در ناحیه همگرایی نیستند.

۸- اگر تبدیل Z تابع $x[n]$ گویا باشد و $x[n]$ دست راستی باشد، ROC در ناحیه بیرونی خارجی ترین قطب است. $|Z| > a$

۹- اگر تبدیل Z تابع $x[n]$ گویا باشد و $x[n]$ دست چپی باشد، ROC در ناحیه درونی داخلی ترین قطب است. $|Z| < b$



Z Transform

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$x[n] = b^{|n|}$$

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1] = b^n u[n] + (b^{-1})^n u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$-(b^{-1})^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < b^{-1}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < b^{-1}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < b^{-1}$$

تبدیل Z فقط به ازای $b < 1$ وجود دارد. (بخش مشترک ROC)



Z Transform

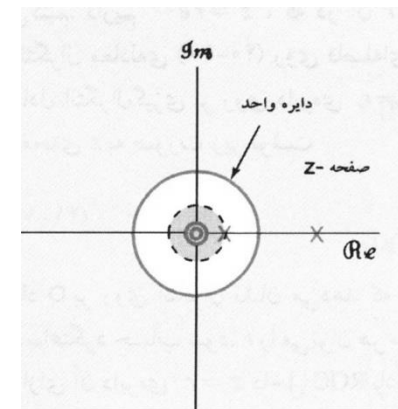
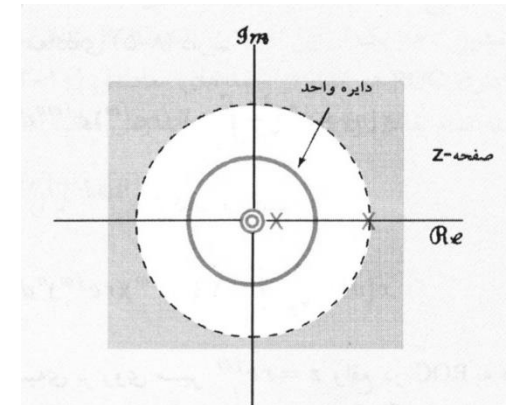
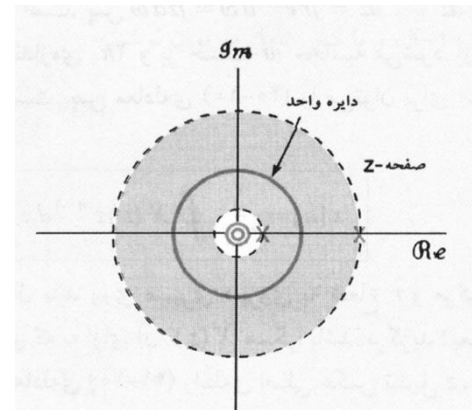
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{-\frac{1}{5}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{\frac{6}{5}}{(1 - 2z^{-1})}$$

$$x[n] = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{6}{5} (2)^n u[n]$$

$$x[n] = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{6}{5} (2)^n u[-n-1]$$

$$x[n] = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \frac{6}{5} (2)^n u[-n-1]$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z



Z Transform

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$X(z) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z



Z Transform

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$X(z) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

$$x[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



Z Transform

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} > |z|$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$X(z) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \quad \frac{1}{4} > |z|$$

$$x[n] = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$



Z Transform

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty$$

$$\delta[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0}$$

$$X(z) = 4\delta[n + 2] + 2\delta[n] + 3\delta[n - 1]$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z



Z Transform

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

$$\log(1 + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}, \quad |v| < 1$$

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}, \quad |z| > |a|$$

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n < 1 \end{cases}$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$



ارتباط بین تبدیل فوریه و تبدیل Z

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

با این شرط که ناحیه همگرایی تبدیل Z شامل دایره به شعاع یک باشد.



Z Transform

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

خواص تبدیل Z

۱- خاصیت خطی بودن

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad ROC: R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad ROC: R_2$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC: R_1 \cap R_2$$

ناحیه همگرایی حداقل اشتراک R_1 و R_2 خواهد بود



Z Transform

خواص تبدیل Z

۲- جابجایی زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC: R$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z) \quad ROC: R \quad \text{بجز احتمالا } |z|=0 \text{ و } |z| \rightarrow \infty$$



Z Transform

خواص تبدیل Z

۳- تغییر مقیاس در حوزه Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC: R$$

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad ROC: R_1 = |z_0| \cdot R$$



Z Transform

خواص تبدیل Z

۴- وارونگی زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC: R$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad ROC: \frac{1}{R}$$



Z Transform

خواص تبدیل Z

۵- انبساط زمانی

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC: R$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = lk \\ 0 & n \neq lk \end{cases} \xleftrightarrow{Z} X(z^k) \quad ROC: R_1 = R^{1/k}$$



Z Transform

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC: R$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \quad ROC: R$$

$x[n]$ حقیقی

$$x[n] = x^*[n]$$

$$X^*(z^*) = X(z)$$

خواص تبدیل Z

۶- مزدوج



Z Transform

Z خواص تبدیل

۷- کانولوشن

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad ROC: R_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad ROC: R_2$$

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \cdot X_2(z) \quad ROC: Include(R_1 \cap R_2)$$



Z Transform

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

خواص تبدیل Z

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$H(z) = 1 - z^{-1} \quad ROC : z \neq 0$$

۷- کانولوشن

$$Y(z) = (1 - z^{-1})X(z)$$

$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$



Z Transform

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = u[n] * x[n]$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{(1 - z^{-1})}$$

$$ROC : (|z| > 1) \cap R(x[n])$$

خواص تبدیل Z

۷- کانولوشن



خواص تبدیل Z

۸- مشتق گیری در حوزه Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC: R$$

$$-nx[n] \xleftrightarrow{Z} z \frac{d}{dz} X(z) \quad ROC: R$$



Z Transform

خواص تبدیل Z

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

۸- مشتق گیری در حوزه Z

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} X(z) \quad |z| > |a| \quad -z \frac{d}{dz} X(z) = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

$$(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 + az^{-1}} \quad a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1 + az^{-1}} \quad a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

$$nx[n] = a(-a)^{n-1} u[n-1]$$

$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$



Z Transform

خواص تبدیل Z

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

۸- مشتق گیری در حوزه Z

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-az^{-1}} \right), \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$



خواص تبدیل Z

۹- قضیه مقدار اولیه

چنانچه به ازای $n < 0$ داشته باشیم $x[n] = 0$ آنگاه داریم:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$



Z Transform

جدول های $1-10$ و $2-10$

خواص تبدیل Z و تبدیل Z توابع مقدماتی



Z Transform

توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



Z Transform

توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z سیستم علی

تابع تبدیل هر سیستم علی دارای ROC خارج یک دایره و شامل بینهات است.

یک سیستم LTI گسسته در زمان با تابع تبدیل $H(z)$ علی است، اگر و تنها اگر

(الف) ROC خارج دایره ای بیرون از بیرونی ترین قطب باشد.
(ب) اگر $H(z)$ به صورت نسبت دو چندجمله ای باشد، درجه صورت از مخرج بیشتر نباشد.

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

علی نیست



Z Transform

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad |z| > 2$$

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad |z| > 2$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[n]$$

توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z
سیستم علی

$$H(z) = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \quad |z| > 2 \quad \text{سیستم علی است}$$



توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z پایداری

سیستمی پایدار است که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیر باشد.
این گزاره معادل با همگرا بودن تبدیل فوریه است

سیستمی پایدار است که ناحیه همگرایی آن شامل دایره واحد باشد.



Z Transform

توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z پایداری

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad |z| > 2$$

سیستم علی
و ناپایدار است

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

سیستم پادعلی
و ناپایدار است

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2^n u[-n-1]$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

سیستم غیر علی
و پایدار است

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$$



Z Transform

توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z
پایداری

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

شرط پایداری $a < 1$



Z Transform

توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z پایداری

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$z_1 = re^{j\theta}, \quad z_2 = re^{-j\theta} \quad \text{قطبها}$$

با فرض اینکه سیستم علی باشد، شرط پایداری این است که $r < 1$



توصیف سیستم های LTI با تبدیل Z پایداری

- ۱- یک سیستم LTI زمانی پایدار است که ناحیه همگرایی آن شامل دایره واحد باشد.
- ۲- برای سیستمی با تابع تبدیل گویا، علی بودن سیستم منتج به قرار گرفتن ROC خارج از بیرونی ترین قطب شده و شامل بینهایت باید باشد.

نتیجه: یک سیستم علی با تابع تبدیل گویا تنها زمانی پایدار است که قطبهای تابع تبدیل همگی داخل دایره واحد قرار داشته باشند.



Z Transform

سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل خطی

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1] \quad Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + \frac{1}{3} z^{-1} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad \text{علی} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-(n-1)-1] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n] \quad \text{پادعلی} \quad |z| < \frac{1}{2}$$



Z Transform

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^n u[n] \quad y_1[n] = \left[a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

$$x_2[n] = (-1)^n \quad y_2[n] = \frac{7}{4} (-1)^n$$

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم
اطلاعات زیر در مورد سیستم وجود دارد
تابع تبدیل سیستم را تعیین نمایید.

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6}$$

$$Y_1(z) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{\left[(a+10) - \left(5 + \frac{a}{3}\right)z^{-1} \right] \left[1 - \frac{1}{6}z^{-1} \right]}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$x[n] = z^n$$

$$y[n] = z^n H(z)$$

$$x_2[n] = (-1)^n$$

$$y_2[n] = (-1)^n H(-1)$$



Z Transform

$$H(z) = \frac{\left[(a+10) - \left(5 + \frac{a}{3}\right)z^{-1} \right] \left[1 - \frac{1}{6}z^{-1} \right]}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$x_2[n] = (-1)^n \quad y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$$

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم
اطلاعات زیر در مورد سیستم وجود دارد
تابع تبدیل سیستم را تعیین نمایید.

$$x_2[n] = (-1)^n \quad y_2[n] = (-1)^n H(-1)$$

$$H(-1) = \frac{7}{4} = \frac{\left[(a+10) + \left(5 + \frac{a}{3}\right) \right] \left[1 + \frac{1}{6} \right]}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$a = -9$$

$$H(z) = \frac{\left[1 - 2z^{-1} \right] \left[1 - \frac{1}{6}z^{-1} \right]}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$



Z Transform

$$H(z) = \frac{\left[1 - 2z^{-1}\right] \left[1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right]}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$ROC: |Z| > \frac{1}{2} \quad R_{X_1}: |z| > \frac{1}{6}$$

$$ROC: include(R_{X_1} \cap R_H) \quad |Z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم
اطلاعات زیر در مورد سیستم وجود دارد
در مورد علی بودن و پایداری سیستم بحث کنید
معادله تفاضلی در حوزه زمان را بنویسید

این سیستم پایدار است
این سیستم علی نیز می باشد.



Z Transform

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم

یک سیستم پایدار و علی داریم که تبدیل Z آن دارای قطبی در $|z|=0.5$ و دارای صفری بر روی دایره واحد است. تعداد و محل بقیه صفر و قطبها نامشخص است. در مورد گزاره های زیر نظر دهید.

$$Z(x[n]) = F(x[n]r^{-n}) \quad Z(x[n])\Big|_{|z|=2} = F(x[n]2^{-n}) \quad \text{همگراست} \quad F\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n h[n]\right\} - 1$$

شرط همگرایی این است که در **ROC** تابع قرار داشته باشد. چون سیستم پایدار و علی است، تمام قطبها درون دایره واحد هستند و ناحیه همگرایی نیز خارج از بیرونی ترین قطب است. پس مطمئنا هر بخشی خارج از دایره واحد در **ROC** قرار دارد. این گزاره درست است.



Z Transform

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم

یک سیستم پایدار و علی داریم که تبدیل Z آن دارای قطبی در $|z|=0.5$ و دارای صفری بر روی دایره واحد است. تعداد و محل بقیه صفر و قطبها نامشخص است. در مورد گزاره های زیر نظر دهید.

$$۲- \text{ به ازای بعضی مقادیر از } \omega \text{ داریم: } H(e^{j\omega}) = 0$$

بر روی دایره واحد، تبدیل Z معادل تبدیل فوریه است. چون یک صفر بر روی دایره واحد وجود دارد، پس تبدیل فوریه به ازای مقادیر مشخصی از ω حتما صفر خواهد بود.



Z Transform

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم

یک سیستم پایدار و علی داریم که تبدیل Z آن دارای قطبی در $|z|=0.5$ و دارای صفری بر روی دایره واحد است. تعداد و محل بقیه صفر و قطبها نامشخص است. در مورد گزاره های زیر نظر دهید.

۳- $h[n]$ عمر محدود دارد

اگر $h[n]$ دارای عمر محدود باشد، باید ناحیه همگرایی شامل کل صفحه مختلط بجز احتمالا صفر و بینهایت باشد.
پس این گزاره نادرست است.



Z Transform

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم

یک سیستم پایدار و علی داریم که تبدیل Z آن دارای قطبی در $|z|=0.5$ و دارای صفری بر روی دایره واحد است. تعداد و محل بقیه صفر و قطبها نامشخص است. در مورد گزاره های زیر نظر دهید.

۳- $h[n]$ حقیقی است.

برای اینکه تابع حقیقی باشد باید داشته باشیم: $H(z) = H^*(z^*)$
یعنی اگر قطب یا صفری در $z=z_0$ وجود دارد، باید همین قطب در $z=z_0^*$ نیز وجود داشته باشد.
برای بررسی این گزاره اطلاعات کافی در دسترس نیست.



Z Transform

ارتباط رفتار سیستم و تابع سیستم

یک سیستم پایدار و علی داریم که تبدیل Z آن دارای قطبی در $|z|=0.5$ و دارای صفری بر روی دایره واحد است. تعداد و محل بقیه صفر و قطبها نامشخص است. در مورد گزاره های زیر نظر دهید.

۳- $g[n] = n(h[n] * h[n])$ پاسخ صربه یک سیستم پایدار است.

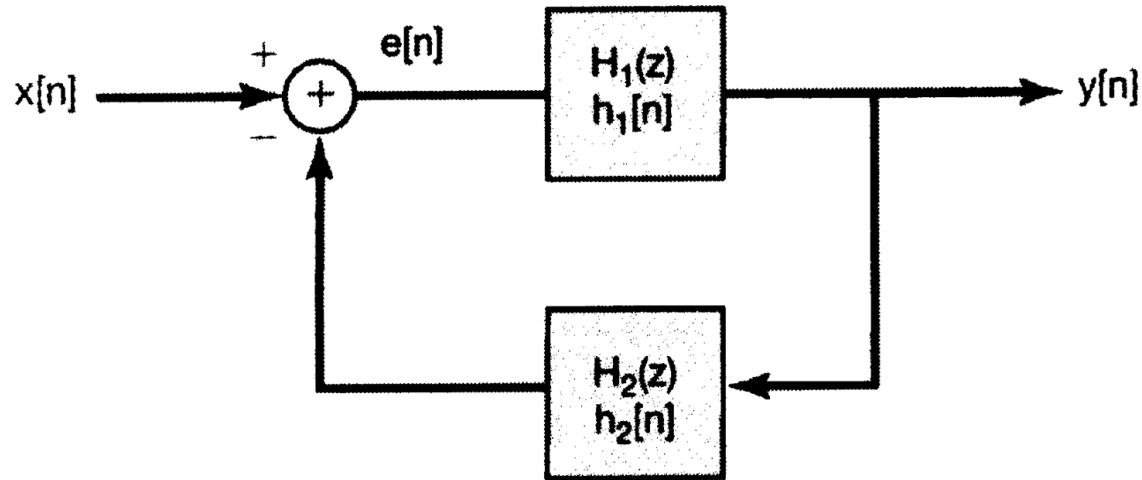
$$G(z) = -z \frac{d}{dz} H^2(z) = -2zH(z) \frac{d}{dz} H(z)$$

قطب های $G(z)$ در محل همان قطب های $H(z)$ قرار دارند.

چون محل قطب های $H(z)$ به نحوی است که سیستم پایدار است، پس $G(z)$ نیز پایدار است.



Z Transform



جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

$$Y(z) = H_1(z).E(z) \quad \text{اتصال فیدبک دار}$$

$$E(z) = X(z) - Z(z)$$

$$Z(z) = H_2(z)Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

$$Y(z) = H_1(z)[X(z) - H_2(z)Y(z)]$$



Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

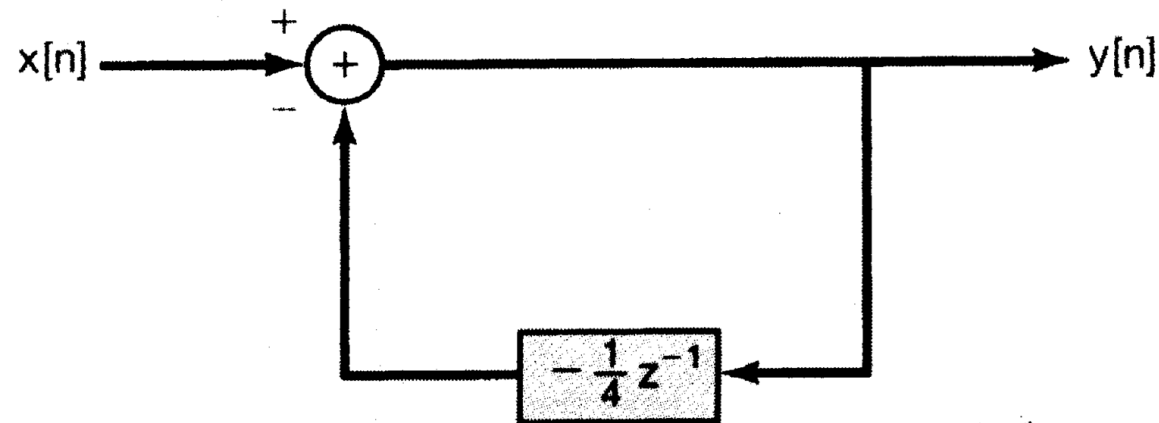
جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

$$Y(z) - \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z)$$

اتصال فیدبک دار

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$



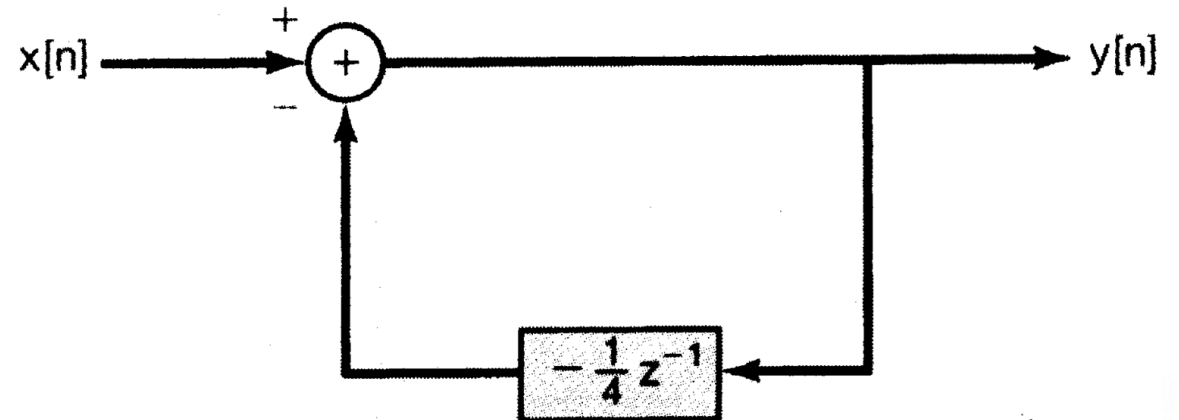
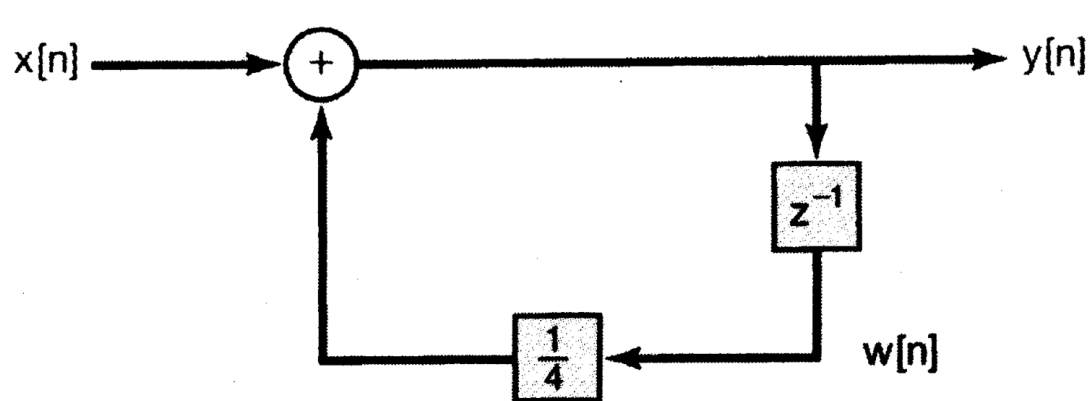
Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

$$H_1(z) = 1 \quad H_2(z) = -\frac{1}{4}z^{-1}$$

اتصال فیدبک دار



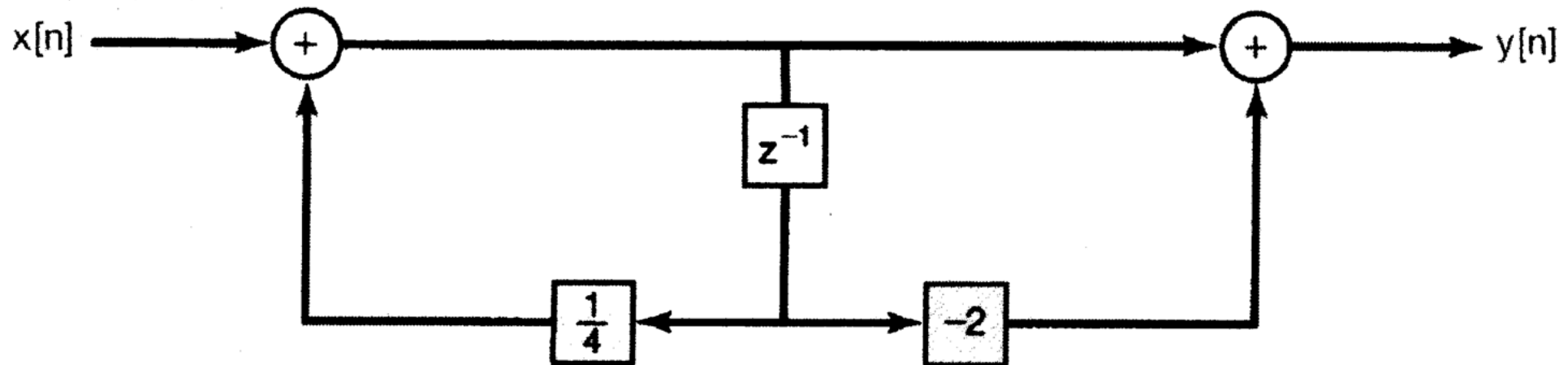
Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} (1 - 2z^{-1})$$

جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

اتصال فیدبک دار



Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

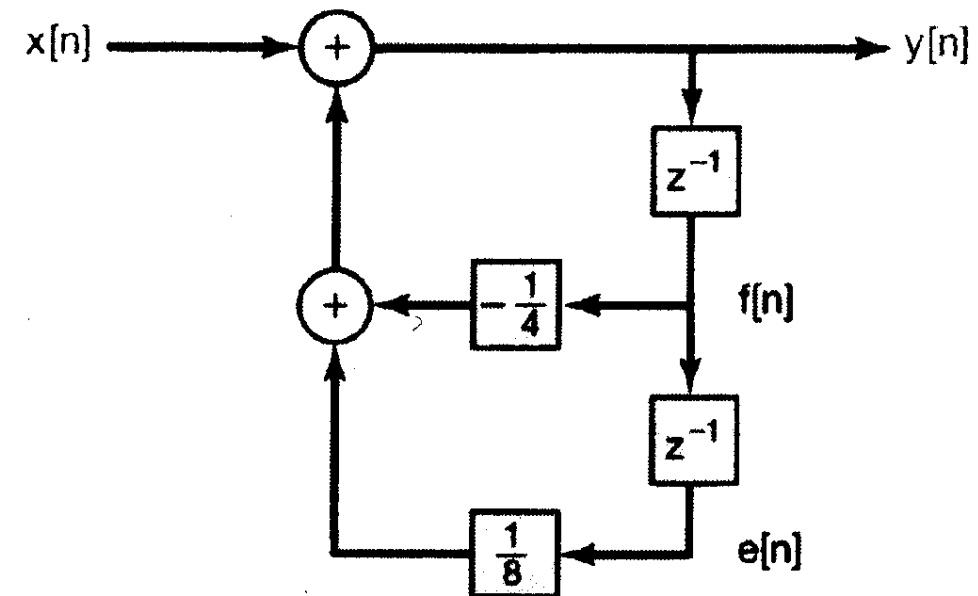
$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \quad y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

$$y[n-1] = f[n] \quad y[n-2] = f[n-1] = e[n]$$

$$y[n] = \frac{-1}{4}f[n] + \frac{1}{8}e[n] + x[n]$$

جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

اتصال فیدبک دار



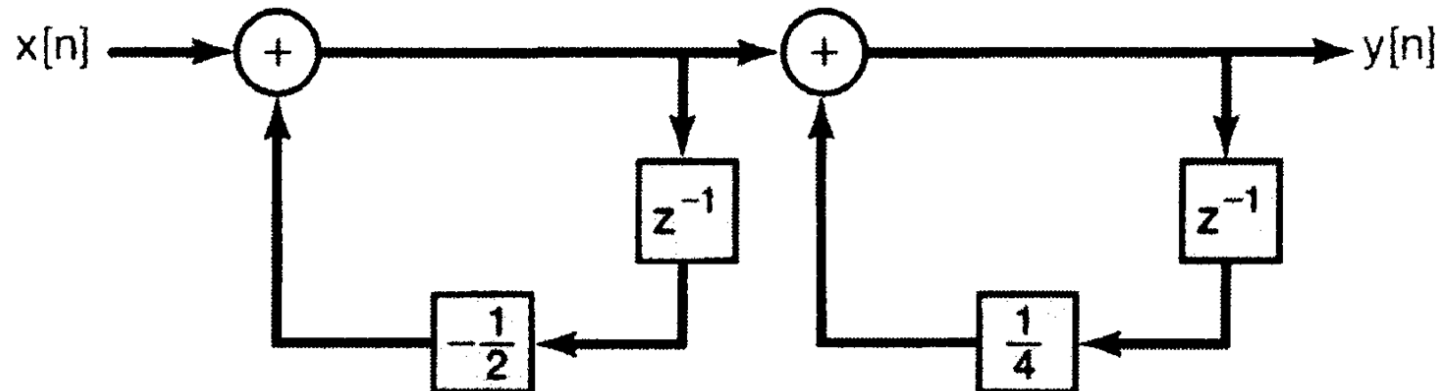
Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

اتصال فیدبک دار



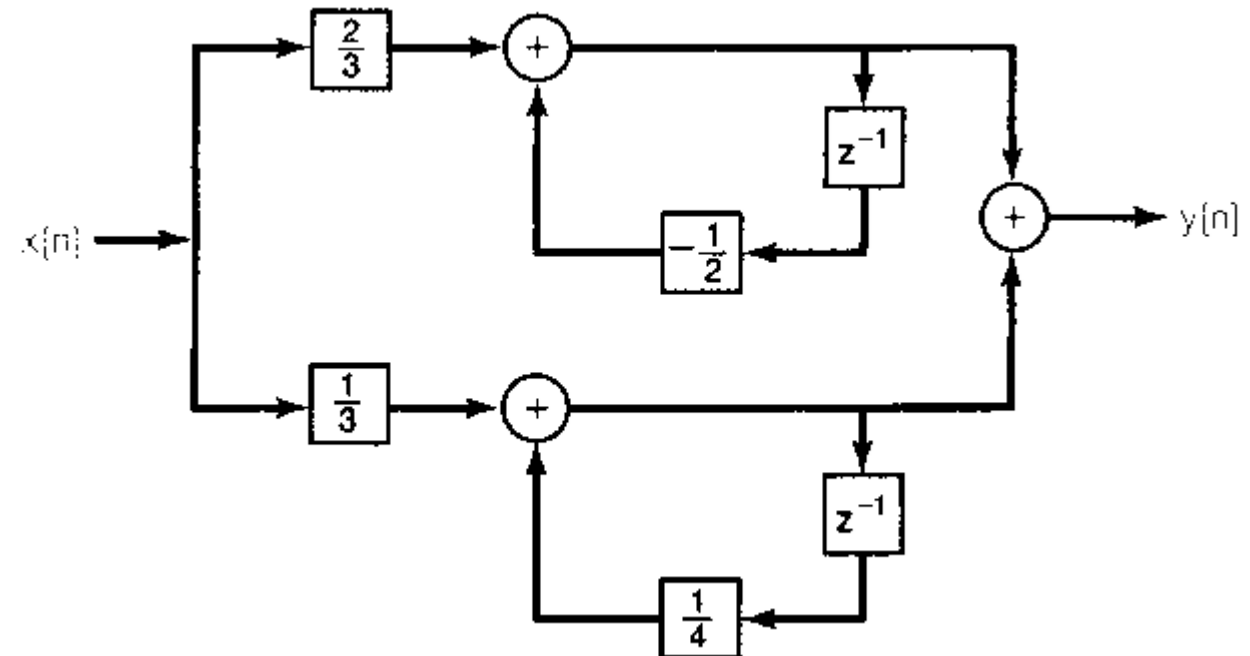
Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{2}{3}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

اتصال فیدبک دار

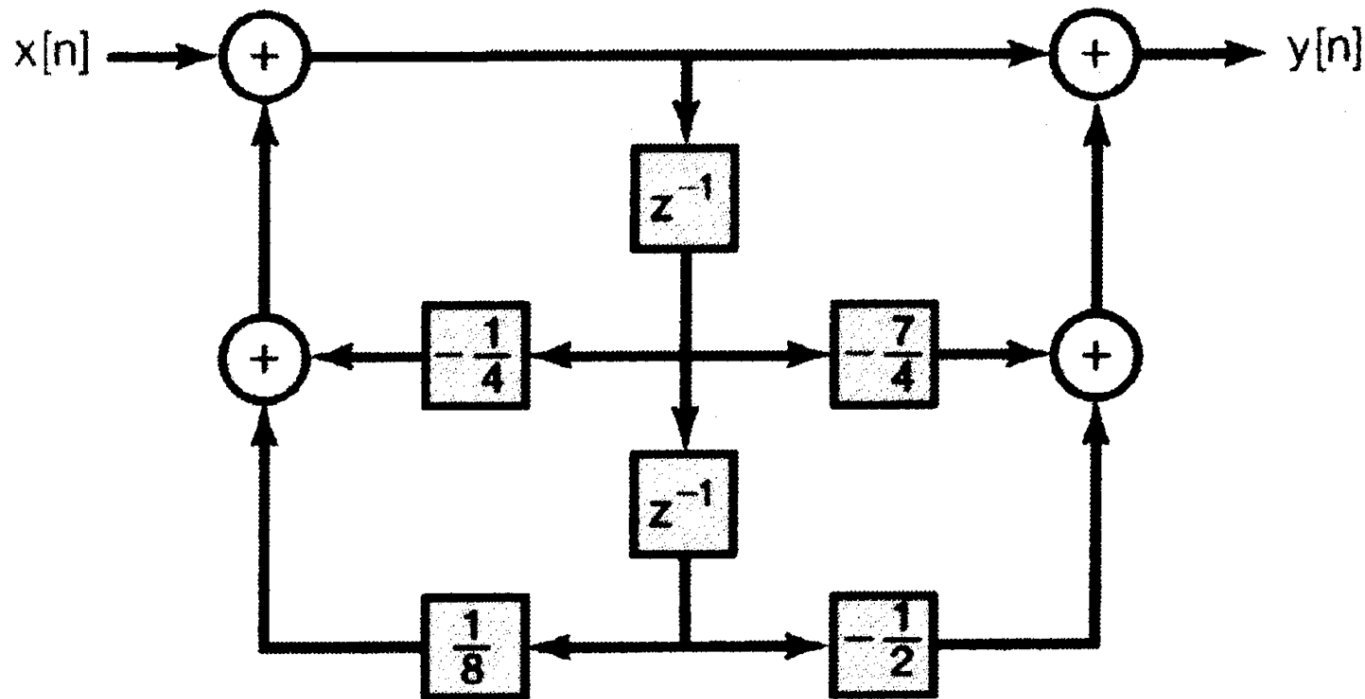


Z Transform

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

جبر تابع سیستم و نمایش جعبه ای
اتصال سیستم های LTI

اتصال فیدبک دار



Z Transform

تبدیل Z یک طرفه

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

تبدیل Z دو طرفه

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

تبدیل Z یک طرفه

$$x[n] \xleftrightarrow{uZ} \chi(z)$$

اگر به ازای $n < 0$ مقدار تابع صفر باشد، تبدیل Z دوطرفه و یکطرفه یکسان هستند.



Z Transform

تبدیل Z یک طرفه

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \chi(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$



Z Transform

تبدیل Z یک طرفه

$$x[n] = a^{n+1}u[n+1]$$

$$X(z) = \frac{z}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n} = a \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{a}{1-az^{-1}}$$

$$\chi(z) = \frac{a}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$



Z Transform

$$\mathcal{X}(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\mathcal{X}(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \text{برای } n \geq 0$$

تبدیل Z یک طرفه



Z Transform

خواص تبدیل Z یک طرفه

بسیاری از خواص تبدیل Z یکطرفه مشابه با تبدیل Z دوطرفه است.
جدول ۳-۹

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$x[n] \xleftrightarrow{uZ} \chi(Z)$$

تفاوت اصلی

$$x[n-1] \xleftrightarrow{z} z^{-1} X(z)$$

$$x[n-1] \xleftrightarrow{uZ} z^{-1} \chi(z) + x[-1]$$

$$x[n-2] \xleftrightarrow{z} z^{-2} X(z)$$

$$x[n-2] \xleftrightarrow{uZ} z^{-2} \chi(z) + z^{-1} x[-1] + x[-2]$$



خواص تبدیل Z یک طرفه

بسیاری از خواص تبدیل Z یکطرفه مشابه با تبدیل Z دوطرفه است.
جدول ۳-۹

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$x[n] \xleftrightarrow{uZ} \chi(Z)$$

تفاوت اصلی

$$x[n+1] \xleftrightarrow{z} zX(z)$$

$$x[n+1] \xleftrightarrow{uZ} z\chi(z) - zx[0]$$

$$x[n+2] \xleftrightarrow{z} z^2 X(z)$$

$$x[n+2] \xleftrightarrow{uZ} z^2 \chi(z) - z^2 x[0] - zx[1]$$



Z Transform

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل Z یک طرفه

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n]$$

$$y[-1] = 0$$

$$\wp(z) + 3z^{-1}\wp(z) = \chi(z)$$

$$H(z) = \frac{\wp(z)}{\chi(z)} = \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$x[n] = au[n]$$

$$\wp(z) = \chi(z)H(z) = \frac{a}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$\wp(z) = \chi(z)H(z) = \frac{\frac{3a}{4}}{(1+3z^{-1})} + \frac{\frac{a}{4}}{(1-z^{-1})}$$

$$y[n] = \frac{a}{4}(3(-3)^n + 1)u[n], \quad n \geq 0$$



Z Transform

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل Z یک طرفه

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n]$$

$$y[-1] = \beta$$

$$x[n] = au[n]$$

$$\wp(z) + 3z^{-1}\wp(z) + 3y[-1] = \chi(z)$$

$$\wp(z) = \underbrace{\frac{3\beta}{1+3z^{-1}}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\frac{a}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

$$a = 8, \beta = 1$$

$$\wp(z) = \frac{5}{1+3z^{-1}} + \frac{6}{(1-z^{-1})}$$

$$y[n] = [5(-3)^n + 4]u[n] \quad n \geq 0$$

